الجزء الثالث

الجبر

ALGEBRA

الدرس الخامس عشر :

الكسور الجبرية

Algebraic Fractions

[١٥ ـ ١] مقدمـــة :

لنعتـبر : $\frac{س}{٣}$ ، $\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{ع}{٧ س}$

ويطلق على مثل هذه المقادير أو الحدود بهذا الشكل ، بالكسور الجبرية ، ولا تتغير قيمة هذه الكسور عند ضرب كل من البسط والمقام فى نفس المقدار أو عند قسمتهم على نفس المقدار .

□ **مثال (١) :**

$$\frac{س}{٥} = \frac{س}{٥} \times \frac{٢}{٢} = \frac{٢ س}{١٠}$$

وذلك بالضرب فى ٢

□ **مثال (٢) :**

$$\frac{٧}{ص} = \frac{٧}{ص} \times \frac{ص}{ص} = \frac{٧ ص}{ص^{٢}}$$

وذلك بالضرب فى ص

□ **مثال (٣) :**

$$\frac{٣ ب}{٩} = \frac{٣ ب}{٩} \div \frac{٣}{٣} = \frac{ب}{٣}$$

وذلك بالقسمة على ٣

ويتم إجراء نفس العمليات الحسابية على الكسور الجبرية بنفس الطريقة التى تتم على الكسور الإعتيادية .

[١٥ ـ ٢] الجمع الطرح للكسور الجبرية :

عند جمع أو طرح مقدارين جبريين (أو أكثر) فإنه يتم إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات ، ثم يكتب كل كسر على حدة بدلالة المضاعف المشترك الأصغر ، ثم تجرى عملية إختصار للبسط والأمثلة التالية توضح ذلك :

□ **مثال (١) :**

$$\frac{\text{٢ ص}}{\text{٧}} + \frac{\text{٥ ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{٢ ص+٥ ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{٧ ص}}{\text{٧}} = \text{ص}$$

□ **مثال (٢) :**

$$\frac{\text{س}}{\text{٣}} + \frac{\text{ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢ س}}{\text{٦}} + \frac{\text{٣ ص}}{\text{٦}} = \frac{\text{٢ س + ٣ ص}}{\text{٦}}$$

ويلاحظ أن ٦ هى المضاعف المشترك الأصغر

□ **مثال (٣) :**

$$\frac{\text{٣}}{\text{س}} + \frac{\text{٤}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ + ٤}}{\text{س}} = \frac{\text{٧}}{\text{س}}$$

، س هى المضاعف المشترك الأصغر .

□ **مثال (٤) :**

$$\frac{\text{٣ س}}{\text{٥}} - \frac{\text{س}}{\text{٥}} = \frac{\text{٣س − س}}{\text{٥}} = \frac{\text{٢ س}}{\text{٥}}$$

، ٥ هى المضاعف المشترك الأصغر .

□ **مثال (٥) :**

$$\frac{\text{١}}{\text{ص}} - \frac{\text{١}}{\text{٤ ص}} = \frac{\text{٤}}{\text{٤ ص}} - \frac{\text{١}}{\text{٤ ص}} = \frac{\text{٤} - \text{١}}{\text{٤ ص}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤ ص}}$$

٤ ص هى المضاعف المشترك الأصغر .

□ **مثال (٦) :**

$$\frac{\text{٥}}{\text{٢ س}} - \frac{\text{٤}}{\text{٣ ص}} = \frac{\text{١٥ ص}}{\text{٦ س ص}} - \frac{\text{٨ س}}{\text{٦ س ص}} = \frac{\text{١٥ص} - \text{٨س}}{\text{٦س ص}}$$

، ٦ س ص هى المضاعف المشترك الأصغر .

□ **مثال (٧) :**

$$\frac{\text{ص} + \text{٣}}{\text{٧}} + \frac{\text{ص} - \text{٤}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢ (ص} + \text{٣)}}{\text{١٤}} + \frac{\text{٧ (ص} - \text{٤)}}{\text{١٤}}$$

$$= \frac{\text{٢ ص} + \text{٦} + \text{٧ ص} - \text{٢٨}}{\text{١٤}} = \frac{\text{٩ ص} - \text{٢٢}}{\text{١٤}}$$

، ١٤ هى المضاعف المشترك الأصغر .

□ **مثال (٨) :**

$$\frac{\text{٣ م} - \text{ن}}{\text{٤}} - \frac{\text{٢ م} - \text{ن}}{\text{٣}} = \frac{\text{٣ (٣م} - \text{ن)}}{\text{١٢}} - \frac{\text{٤ (٢م} - \text{ن)}}{\text{١٢}}$$

$$= \frac{\text{٩ م} - \text{٣ ن} - \text{٨ م} + \text{٤ ن}}{\text{١٢}} = \frac{\text{م} + \text{ن}}{\text{١٢}}$$

، ١٢ هى المضاعف المشترك الأصغر .

[١٥ ـ ٣] الضرب والقسمة للكسور الجبرية :

لإجراء عملية ضرب الكسور الجبرية ، يلزم أولاً تحليل البسط والمقام على قدر الإمكان ، ثم اختصار ما يمكن اختصاره وبعد ذلك يتم الضرب :

□ **مثال (١) :**

$$\frac{\text{٢ س}}{\text{٣ ص}} \times \frac{\text{٩ ص}^{٣}}{\text{٤ س}^{٢}} = \frac{\text{٣ ص}^{٢}}{\text{٢ س}}$$

□ **مثال (٢) :**

$$\frac{\text{٣ س + ٨ ص}}{\text{٤ جـ}} \times \frac{\text{١٦ جـ}^{٣}}{\text{٦ س + ١٦ ص}}$$

$$= \frac{\text{٣ س + ٨ ص}}{\text{٤ جـ}} \times \frac{\text{٤ جـ} \times \text{٤ جـ}^{٢}}{\text{٢ (٣ س + ٨ ص)}} = \frac{\text{٤ جـ}^{٢}}{\text{٢}} = \text{٢ جـ}^{٢}$$

ولإجراء عمليات قسمة الكسنور الجبرية فإنه يجب أولاً أن نقوم بعملية تحليل للبسط والمقام ما أمكن ذلك ، ثم نجرى عملية ضرب لمقلوب المقسوم عليه بدلاً من عملية القسمة .

والأمثلة التالية توضح ذلك :-

□ **مثال (١) :**

$$\frac{\text{٣ ص}}{\text{س}} \div \frac{\text{٦}}{\text{س}^{٢}} = \frac{\text{٣ ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{\text{٦}} = \frac{\text{ص س}}{\text{٢}}$$

□ **مثال (٢) :**

$$\frac{\text{٦ س + ٤ ص}}{\text{٣}} \div \frac{\text{٣ س + ٢ ص}}{\text{٩}}$$

$$\text{بالتحليل} = \frac{\text{٢ (٣ س + ٢ ص)}}{\text{٣}} \div \frac{\text{(٣ س + ٢ ص)}}{\text{٩}}$$

$$= \frac{\text{٢ (٣ س + ٢ ص)}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٩}}{\text{(٣ س + ٢ ص)}} = \text{٢} \times \text{٣} = \text{٦}$$

[١٥ ـ ٤] تدريبـــات :

أولاً : اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة ممكنة :

(١) $\frac{\text{٣ س}}{\text{٦}}$

(٢) $\frac{\text{٢٠ ص}}{\text{٢٤}}$

(٣) $\frac{\text{٤}}{\text{٦ ص}}$

(٤) $\frac{\text{٥ م}}{\text{٢٥ ن}}$

(٥) $\frac{\text{٦}}{\text{١٨}}$

(٦) $\frac{\text{٢١ س}}{\text{٤٩ ص}}$

(٧) $\frac{\text{١٥ م}}{\text{٨٥ ص}}$

(٨) $\frac{\text{١٣ ب}}{\text{٥٢ ا}}$

(٩) $\frac{\text{٣٠ س}}{\text{١٢}}$

(١٠) $\frac{\text{٢٧ م}}{\text{٨١ ن}}$

ثانياً : أكمل ما يأتي بوضع المقدار المناسب مكان علامة الإستفهام :

(١) $\frac{\text{٣ س}}{\text{٤}} = \frac{\text{؟}}{\text{١٦}}$

(٢) $\frac{\text{٩ س}}{\text{١٦}} = \frac{\text{؟}}{\text{٤}}$

(٣) $\frac{\text{س}}{\text{٧}} = \frac{\text{؟}}{\text{٢١}}$

(٤) $\frac{\text{١٢ س}}{\text{٩ س}} = \frac{\text{؟}}{\text{٣}}$

(٥) $\frac{\text{١٠}}{\text{٣٢ م}} = \frac{\text{٥}}{\text{؟}}$

(٦) $\frac{\text{ص}}{\text{٢ س}} = \frac{\text{؟}}{\text{٦ س}}$

(٧) $\frac{\text{٢ ت}}{\text{١٤ ت}} = \frac{\text{؟}}{\text{٧}}$

(٨) $\frac{\text{١٢ ن}}{\text{٢٨ ن}} = \frac{\text{٣}}{\text{؟}}$

(٩) $\frac{\text{١٨}}{\text{٦}} = \frac{\text{؟}}{\text{٣}}$

(١٠) $\frac{\text{٥}}{\text{س}} = \frac{\text{٤٠}}{\text{؟}}$

ثالثاً : اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة .

(١) $\frac{\text{٥ س}}{\text{٥ ص}}$

(٢) $\frac{\text{٧ ص}^{٢}\text{ م}}{\text{٢٨ ص م}^{٢}}$

(٣) $\frac{\text{٩ ص}^{٢}}{\text{٤٥ ص م}}$

(٤) $\frac{\text{٥ س}^{٢}}{\text{٧ س ص}}$

(٥) $\frac{\text{١٢ ص}^{٣}}{\text{٣٦ ص جـ}^{٢}}$

(٦) $\frac{\text{٢١ ص م}^{٢}}{\text{٤٩ ص}^{٢}\text{ م}^{٣}}$

(٧) $\frac{\text{٨ ن}^{٢}}{\text{٢١ ن}^{٢}\text{ م}}$

(٨) $\frac{\text{٣٠ ص}^{٢}\text{ هـ}^{٢}}{\text{٣٦ ص}^{٣}\text{ هـ}}$

(٩) $\frac{\text{٩ ص}^{٣}}{\text{٢٧ س}^{٢}\text{ ص}^{٢}}$

(١٠) $\frac{\text{١٥ س ص}}{\text{٤٥ س}^{٢}\text{ ص}^{٣}}$

رابعاً : أكمل الكسور التالية بالمقادير الصحيحة :

(١) $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٣ س}}{\text{؟}} = \frac{\text{٧ س}}{\text{؟}} = \frac{\text{٣ س}^{٢}}{\text{؟}} = \frac{\text{؟}}{\text{٥ ص}^{٢}\text{ س}}$

(٢) $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{؟}}{\text{٧ ب}} = \frac{\text{٢ ا}^{٣}\text{ ب}}{\text{؟}} = \frac{\text{٥ ا ب}^{٢}}{\text{؟}} = \frac{\text{؟}}{\text{٨ ب}^{٢}\text{ ا}^{٣}}$

(٣) $\frac{\text{٣ س}}{\text{٥ ص}} = \frac{\text{٩ س}^{٢}}{\text{؟}} = \frac{\text{؟}}{\text{٢٥ ص س}} = \frac{\text{١٢ س}^{٢}}{\text{؟}} = \frac{\text{٦ س ص}}{\text{؟}}$

(٤) $\frac{\text{م + ن}}{\text{٣ م}} = \frac{\text{٦م+٦ن}}{\text{؟}} = \frac{\text{م}^{٢}\text{−ن}^{٢}}{\text{؟}} = \frac{\text{٤م+٤ن}}{\text{؟}} = \frac{\text{؟}}{\text{٣م}^{٢}\text{+٣م ن}}$

(٥) $\frac{\text{٤}}{\text{٣ م}} = \frac{\text{؟}}{\text{٩ م}^{٢}} = \frac{\text{٢٠ م ن}}{\text{؟}} = \frac{\text{١٦}}{\text{؟}} = \frac{\text{٣٦ م}^{٢}}{\text{؟}}$

خامساً : اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة .

(١) $\frac{\text{س}}{\text{٣}} + \frac{\text{ص}}{\text{٣}}$

(٢) $\frac{\text{٧ س}^{٢}}{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\text{١٤ س}}$

(٣) $\frac{\text{٣ ص}}{\text{٢}} + \frac{\text{٤ س}}{\text{٣ ص}}$

(٤) $\frac{\text{٥ س}}{\text{١٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

(٥) $\frac{\text{س}}{\text{٣}} + \frac{\text{س}}{\text{٦}}$

(٦) $\frac{\text{س}}{\text{٢}} - \frac{\text{ص}}{\text{٢}}$

(٧) $\frac{\text{ص}}{\text{٨}} - \frac{\text{٣ ص}}{\text{٣٢}}$

(٨) $\frac{\text{س}}{\text{٣}} + \frac{\text{٣ س}}{\text{١٠}}$

(٩) $\frac{\text{س}}{\text{٣}} - \frac{\text{٢ ص}}{\text{٣}}$ (١٠) $\frac{\text{٤ م}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٥}}{\text{ن}}$

(١١) $\text{٧} \times \frac{\text{٢ م}}{\text{٣}}$ (١٢) $\frac{\text{ا ب}}{\text{جـ د}} \times \frac{\text{ا جـ}}{\text{ب د}}$

(١٣) $\frac{\text{٤ ن}}{\text{٣ م}} \times \frac{\text{٢ ن}}{\text{٥ ن}}$ (١٤) $\frac{\text{م}}{\text{س}} \div \frac{\text{٢ م}}{\text{س}}$

(١٥) $\frac{\text{م}^{٢}}{\text{٣ ن}^{٢}} \times \frac{\text{٨ م}}{\text{٣ م ن}}$ (١٦) $\frac{\text{٩ ا ب}}{\text{٥}} \div \frac{\text{١٢}}{\text{١٥ ب}^{٢}}$

سادساً : اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة (مع شيء من الحذر) :

(١) $\frac{\text{٣}}{\text{ب}} + \frac{\text{٤}}{\text{٣ ب}}$

(٢) $\frac{\text{٤ س} + \text{٣}}{\text{٦}} + \frac{\text{٣ س} - \text{٥}}{\text{٩}}$

(٣) $\frac{\text{١٥ س} + \text{١٠ ص}}{\text{٢٠ س}^{٣}} \div \frac{\text{٣ س} + \text{٢ ص}}{\text{٣٢ س}^{٢}}$

(٤) $\frac{\text{١٤} - \text{٨ ب}}{\text{٣٠ جـ}^{٢}} \times \frac{\text{٦ جـ}}{\text{١} - \text{٢ ب}}$

(٥) $\frac{\text{ا} + \text{٤}}{\text{٣}} + \frac{\text{٣ ا} - \text{١}}{\text{٤}}$

(٦) $\frac{\text{٢ ا} + \text{٥}}{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

(٧) $\frac{\text{٤ ا} - \text{١٠ ص}}{\text{٦}} - \frac{\text{ا} - \text{٢ ب}}{\text{٣}}$

(٨) $\frac{\text{٢ ا} + \text{١}}{\text{٤}} - \frac{\text{ا} - \text{٢}}{\text{٣}}$

(٩) $\frac{\text{٣ س} + \text{٤}}{\text{٦}} + \frac{\text{٢ ا} - \text{٤}}{\text{١٨}}$

(١٠) $\frac{\text{٢ س} - \text{٧}}{\text{١٥}} - \frac{\text{ا} + \text{٢}}{\text{٢٥}}$

[١٥ ـ ٥] حل بعض المعادلات الجبرية (الأكثر صعوبة) :

فى الجزئين الأول والثانى من هذه السلسلة ، كانت فكرة حل المعادلة تعتمد على جعل المجهول فى أحد طرفى المعادلة ، ووضع الأعداد فى الطرف الآخر ومن ثم إيجاد قيمة المجهول .

أما فى هذا الجزء فإن المعادلة ستحتوى على كسور جبريةوالأمثلة التالية تُوضح ذلك :

□ مثال (١) :

أوجد قيمة س فيما يلى :

$$\frac{٣\ س}{٨} = ٦$$

وبضرب طرفى المعادلة فى قيمة المقام (٨)

$$\therefore \frac{٣\ س}{٨} \times ٨ = ٦ \times ٨ = ٤٨ \quad \therefore ٣\ س = ٤٨$$

ومنها $\therefore$ س = ١٦

□ مثال (٢) :

أوجد قيمة س فيما يلى :

$$\frac{٢\ س}{٧} + ٤ = ٦$$

بطرح ٤ من كلا الطرفين

$$\therefore \frac{٢\ س}{٧} = ٢$$

وبضرب كلا الطرفين فى ٧

$$\therefore \frac{٢\text{ س}}{٧} \times ٧ = ٢ \times ٧ = ١٤ \quad \therefore ٢\text{ س} = ١٤$$

$$\therefore \text{س} = ٧$$

□ مثال (٣) :

حل المعادلة الآتية (أوجد قيمة المجهول) :

$$\frac{٧\text{ س} + ٢}{٣} - \frac{٩\text{ س} - ٢}{٥} = ٢$$

ومن الأسهل لحل هذه المعادلة ، توحيد المقامات لملاشاة المقامين ٣ ، ٥ .

$$\therefore \frac{(٧\text{ س} + ٢) \times ١٥}{٣} - \frac{(٩\text{ س} - ٢)}{٥} \times ١٥ = ٢ \times ١٥$$

$$\therefore ٥ \; (٧\text{ س} + ٢) - ٣ \; (٩\text{ س} - ٢) = ٣٠$$

$$\therefore ٣٥\text{ س} - ٢٧\text{ س} + ١٠ + ٦ = ٣٠$$

$$\therefore ٨\text{ س} + ١٦ = ٣٠$$

$$\therefore ٨\text{ س} = ٣٠ - ١٦ = ١٤$$

$$\therefore \text{س} = \frac{١٤}{٨} = ١\frac{٦}{٨} = ١\frac{٣}{٤}$$

□ ملاحظة :

يجب التأكد من صحة حل مسائل المعادلات بعمل تعويض ويؤكد صحة الإجابة حينئذ ، تساوى الطرفين .

[١٥ ـ ٦] تدريبات : على المعادلات الجبرية :

أولاً : أوجد قيمة س فيما يلي :

(١) $\frac{\text{س}}{٣} = -٥$

(٢) $\frac{٢\text{ س}}{٥} = ٤$

(٣) $\frac{٥\text{ س}}{٣} = ١٠$

(٤) $\frac{\text{س}}{٥} = ٣$

(٥) $\frac{٣\text{ س}}{٢} = ٦$

(٦) $\frac{\text{س}}{٢} + ٣ = ٧$

(٧) $\frac{٣\text{ س}}{٥} + ٤ = ١٠$

(٨) $\frac{\text{س}}{٣} - ٦ = ١$

(٩) $\frac{٥\text{ س}}{٣} - ٣ = ٤$

(١٠) $\frac{٢\text{ س}}{٧} + ٢ = ٦$

ثانياً : حل المعادلات التالية :

(١) $\frac{٢\text{ س}}{٣} + \frac{٣\text{ س}}{٤} = ٥$

(٢) $٥\text{ س} + \frac{\text{س} - ٣}{٤} = \frac{٢\text{ س} + ٥}{٣}$

(٣) $٢ + \frac{٣}{\text{س}} = \frac{\text{س} - ١٠}{٢\text{ س}}$

(٤) $\frac{٣\text{ س}}{٤} + \text{س} = \frac{٧\text{ س}}{٨} + \text{س} - ٥$

(٥) $\frac{\text{س} + ١}{٤} + \frac{\text{س} + ٣}{٥} = ١$

(٦) $\frac{٢\text{ س} + ٣}{٤} + \frac{\text{س} + ٢}{٣} = ٢$

(٧) $\frac{٣س - ٢}{٣} - \frac{٤س + ١}{٢} = ٣$

(٨) $\frac{س}{٤} = \frac{٤}{١٠} + \frac{٣س}{٦}$

(٩) $\frac{٤س}{٩} - \frac{٤}{٦} = \frac{س}{٢}$

(١٠) $\frac{٢ - ٥س}{٤} - \frac{٣ - ٤س}{٣} = ١$

(١١) $\frac{٥س - ٢}{٣} - \frac{٢س + ٣}{٢} = ٣س - ١١$

(١٢) $\frac{٣س - ٢}{٤} - \frac{س + ١}{٣} = ٥$

الدرس السادس عشر :

تطبيقات جبرية بسيطة

Simple algebraic activities

[١٦ ـ ١] تقديم :

فى المعادلات التى سبق لنا حلها ، كان المقصود بالحل ، هو فقط إيجاد قيمة الرمز أو المجهول عددياً ،

وفى الأمثلة التالية يتضح بعض التطبيقات البسيطة للمعادلات الجبرية ومن المعلومات المعطاة فى المسألة ، علينا أن نكون بأنفسنا المعادلة الجبرية وبعد ذلك نقوم بحل هذه المعادلة والتأكد من صحة الحل بالتعويض فى المعادلة الأصلية .

□ مثال (١) :

ما هو العدد الذى إذا ضربناه فى ٣ وجمعنا على الناتج ١٠ لكان الجواب ٣١ ، فما هو هذا العدد .

□ الحل :

لنفرض أن العدد هو س

∴ ثلاث أضعاف الرقم = ٣ س

ومن ثم ٣ س + ١٠ = ٣١

∴ ٣ س = ٢١

∴ س = ٧

وهو العدد المطلوب .

وللتأكد من صحة الحل :

٧ × ٣ + ١٠ = ٢١ + ١٠ = ٣١

□ مثال (٢) :

قطعة أرض مستطيلة طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٥٠ متراً فإذا كان طول محيط قطعة الأرض ٣٨٠ متراً فأوجد مساحة قطعة الأرض بالأمتار المربعة .

□ الحـــل :

∵ الطول يزيد عن العرض بمقدار ٥٠ متراً .

فإذا فرضنا أن العرض = س . متراً

لكان طول قطعة الأرض = س + ٥٠ متراً .

وحيث أن المحيط = ٢ (الطول + العرض) « الأرض مستطيلة »

∴ ٣٨٠ = ٢ [(س + ٥٠) + س]

٣٨٠ = ٢ [٢ س + ٥٠]

٣٨٠= ٤ س + ١٠٠

٢٨٠ = ٤ س

∴ س = ٧٠ متر وهو العرض

∴ الطول = ٧٠ + ٥٠ = ١٢٠ متراً .

∴ المساحة = ١٢٠ × ٧٠ = ٨٤٠٠ متر^{٢}

وللتأكد من صحة الإجابة :

المحيط = ٣٨٠ = ٢ × ١٢٠ + ٢ × ٧٠

= ٢٤٠ + ١٤٠

= ٣٨٠

□ مثال (٣) :

عدد ، إذا جمعنا عليه ١٥ وضربنا الناتج فى ٣ وقسمنا الناتج على ١١ ، لكان الجواب يقل عن العدد الأصلى بمقدار ١ فما مقدار العدد الأصلى .

□ الحـــل :

لنفرض أن العدد الأصلى هو س

ويجمع ١٥ عليه يصبح الناتج = س + ١٥

وبضرب الناتج فى ٣ يصبح الناتج الجديد = ٣ (س + ١٥)

وبقسمة الناتج الجديد على ١١ ، يكون الجواب = $\frac{\text{٣ (س + ١٥)}}{\text{١١}}$

والجواب يقل عن العدد الأصلى بمقدار ١

∴ الجواب = س − ١

∵ الجواب = $\frac{\text{٣ (س + ١٥)}}{\text{١١}}$

∴ = $\frac{\text{٣ (س + ١٥)}}{\text{١١}}$ = (س − ١)

وبضرب الطرفين والوسطين :

∴ ٣ س + ٤٥ = ١١ [س − ١] = ١١ س − ١١

∴ ٤٥ + ١١ = ١١ س − ٣ س = ٨ س

∴ ٨ س = ٥٦

∴ س = ٧

وللتأكد : (٧ + ١٥) = ٢٢ ؛ ٢٢ × ٣ = ٦٦

، $\frac{٦٦}{١١}$ = ٦ ، ٦ أقل من ٧ بمقدار ١

[١٦ ـ ٢] تدريبـــات :

(١) مع أحمد مبلغ س من الجنيهات ، ومع محمد ضعف ما مع أحمد فإذا كان عمر معه ثلاثة أضعاف ما مع أحمد ، وكان إجمالى ما معهم هو ١٨٠ جنيهاً ، فما مقدار ما مع كل منهم .

(٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ثلاثة أضعاف عرضها فإذا كان محيط قطعة الأرض هو ١٦٠ متراً ، فاحسب عرض قطعة الأرض ومساحتها .

(٣) يبلغ عمر محمد $\frac{١}{٣}$ عمر والده فإذا كان ضعف عمر محمد يقل عن عمر والده بمقدار ١٥ سنة ، فما مقدار عمر كل من محمد ووالده .

(٤) زوايا مثلث كالتالى : ٤٠° ، س° ، $\frac{٣}{٤}$ س°

فاكتب معادلة س ومن ثم أوجد قيمة س .

(٥) متوازى مستطيلات طول ضلع القاعدة ضعف عرضها ، وإرتفاعه $\frac{١}{٣}$ العرض فإذا كان حجمه ٤٨٦ سم^{٣} فأوجد أبعاده الثلاثة بالسم .

(٦) يبلغ وزن رجل ثلاثة أضعاف وزن ابنه فى حين يبلغ وزن الابن $\frac{١}{٢}$ وزن أمه ، فإذا كان مجموع أوزانهم هو ١٨٠ كجم فأوجد وزن كل منهم .

الدرس السابع عشر :

حـل المعـادلات الآنيـة

Solution of simultaneous equations

[١٧ ـ ١] تقديـم :

إذا اعتبرنا المعادلة س + ص = ١٥

فإن هنالك عدد كبير جداً من القيم لكل من س ، ص ، يُحقق هذه المعادلة فمثلاً س = ١ ، ص = ١٤ ، س = ١٢ ، ص = ٣

، س = ١٠,٩ ، ص = ٤,١ ، س = ١٦ ، ص = -١

.... وهكذا ....

غير أنه إذا كان لدينا معادلة ثانية فى كل من المجهولين س ، ص فإنه لا توجد لكل من س ، ص . غير قيمة واحدة لكل منهما بحيث تحقق كلاً من المعادلتين .

وتُسمى أزواج المعادلات التى تكون على هذا الشكل [كل منهما فى مجهولين من الدرجة الأولى] بالمعادلات الآنية .

وإذا فرضنا أنه فى كلا المعادلتين قيمة س (أو قيمة ص) متساوية فى كل منهما فإنه يمكن بسهولة حل هذه المعادلات بطريقة تُعرف بطريقة الحذف (الإختصار) ،

وعندما تكون إشارة نفس المجهول فى المعادلتين مختلفة فإن الحل يتم بجمع المعادلتين معاً وذلك لحذف س أ، ص .

وعندما تكون إشارة نفس المجهول في المعادلتين ، واحدة أى موجبة في المعادلتين أو سالبة في المعادلتين ، فإن الحل يتم بطرح إحدى المعادلتين من الأخرى وذلك لحذف س أ، ص .

وبهذه الطريقة فإنه سواء تم جمع المعادلتين أو طرحهما ، فإنه تنشأ لنا معادلة ثالثة في مجهول واحد س أ، ص ومن ثم نوجد قيمة هذا المجهول ثم نعوض بها في أى من المعادلتين الأساسيتين للحصول على المجهول الثاني .

والأمثلة التالية توضح ذلك :

□ مثال (١) :

أوجد قيمة س ، ص ، التي تحقق المعادلتين الآتيتين :

٢ س + ص = ٨ .... (١)

٢ س − ص = ١٢ .... (٢)

بجمع المعادلتين ١ ، ٢ لحذف ص

∴ ٤ س = ٢٠ .... (٣) من (٣) ∴ س = ٥

ثم نعوض بقيمة س = ٥ في أيٍ من المعادلتين (١) ، (٢) ، لإيجاد قيمة ص المناظرة.

∴ بالتعويض في (١) ∴ ٢ × ٥ + ص = ٨

∴ ص + ١٠ = ٨

∴ ص = −٢

وبذلك فإن قيم س ، ص التي تحقق المعادلتين هي :

س = ٥

، ص = −٢

ويلاحظ فى هذا المثال أن إشارات ص فى المعادلتين مختلفة وقد تم الحل وحذف ص بجمع المعادلتين .

إلا أنه فى ذات الوقت فإن إشارات س فى المعادلتين واحدة (موجبة) لذلك فإنه يمكن حل نفس المثال بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) .

∴ ٢ س + ص = ٨ .... (١)

، ٢ س − ص = ١٢ .... (٢)

بطرح (٢) من (١) أى [معادلة (١) ــ معادلة (٢)]

لحذف س

∴ + ٢ ص = − ٤

∴ ص = − ٢

وبالتعويض فى أيٍ من المعادلتين (١) أ، (٢)

∴ بالتعويض بقيمة ص = − ٢ فى المعادلة (١)

∴ ٢ س − ٢ = ٨

∴ ٢ س = ١٠

∴ س = ٥

وهى نفس الإجابة السابقة بالطبع .

وللتأكد من صحة الإجابة علينا بالتعويض بقيم س ، ص التى حصلنا عليها فى أيٍ من المعادلتين للتأكد من تساوى طرفى المعادلة .

وفى حالة ما إذا كانت الحدود المتشابهة فى المعادلتين غير متساوية .

فإنه يمكن علاج هذه الحالة ، وذلك بضرب جميع حدود أحد المعادلتين أو كلاهما حتى يُصبح لدينا حدان متشابهان ومتساويان وحينئذ يمكن الاختصار بالجمع أو بالطرح كما سبق .

□ مثـــال (٢) :

حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين :

س + ص = ٦ .... (١)

٢س − ٣ ص = ٢ ....(٢)

بضرب (١) فى ٣ وبقاء (٢) كما هى :

∴ ٣ س + ٣ ص = ١٨ .... (١)

، ٢ س − ٣ ص = ٢ .... (٢)

يلاحظ هنا أن الحديـــن المحتويين على ص متساويان مع إختلاف فى الإشارة ولذلك فإنه يتم جمع المعادلتين لحذف ص منهما .

∴ (١) + (٢) تعطى :

٥ س = ٢٠ .... س = ٤

وبوضع س = ٤ فى المعادلة (١) .

∴ ٤ + ص = ٦

ومنها ص = ٦ − ٤ = ٢

∴ الحل هو : س = ٤

، ص = ٢

□ مثال (٣) :

حل المعادلات الآتية :

٤ س + ٣ ص = ١٠ .... (١)

س + ٢ ص = ٥ .... (٢)

بضرب (٢) فى ٤ :

∴ ٤ س + ٣ ص = ١٠ .... (١)

، ٤ س + ٨ ص = ٢٠ .... (٢)

وبطرح (١) من (٢) :

∴ ٥ ص = ١٠

ومنها ص = ٢

وبالتعويض بقيمة ص = ٢ فى المعادلة (١)

∴ ٤ س + ٣ × ٢ = ١٠

∴ ٤ س = ١٠ – ٦ = ٤

∴ س = ١

∴ الإجابة هى س = ١ ، ص = ٢

ويمكن التأكد من صحة الإجابة بالتعويض بقيم س = ١ ، ص = ٢ فى أى من المعادلتين (١) ؛ (٢) .

□ مثال (٤) :

حل المعادلتين الآتيتين :

٣ س + ٢ ص = ١٤ .... (١)

١٣ س – ٥ ص = ٦ .... (٢)

ولمساواة معامل ص ،

نضرب (١) فى ٥ ، (٢) فى ٢

∴ ١٥ س + ١٠ ص = ٧٠ ..... (١)

، ٢٦ س – ١٠ ص = ١٢ ...... (٢)

وبجمع (١) ، (٢)

∴ ٤١ س = ٨٢

∴ س = ٢

وبالتعويض فى (١) بقيمة س = ٢

∴ ٣ × ٢ + ٢ ص = ١٤

∴ ٢ ص = ١٤ − ٦ = ٨

∴ ص = ٤

∴ الحل هو س = ٢ ، ص = ٤

□ مثال (٥) :

حل المعادلتين الآتيتين :

٤ س + ٣ ص = ٢٥ .... (١)

٣ س + ٥ ص = ٢٧ .... (٢)

ولمساواة معاملات ص فى المعادلتين ، نضرب (١) فى ٥ ، (٢) فى

∴ ٢٠ س + ١٥ ص = ١٢٥ .... (١)

، ٩ س + ١٥ ص = ٨١ .... (٢)

ولحذف ص نطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١)

∴ ١١ س = ٤٤

ومنها ∴ س = ٤

وبالتعويض بقيمة س فى المعادلة (١)

∴ ٤ × ٤ + ٣ ص = ٢٥

∴ ٣ ص = ٢٥ − ١٦ = ٩

∴ ص = ٣

∴ حل المعادلة هو س = ٤ ، ص = ٣

ويمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض بقيم س ، ص فى أي من المعادلتين (١) ، (٢) .

[١٧ ـ ٢] تدريبـــات :

أولاً : اختصر (إحذف) أياً من س أ، ص فى أزواج المعادلات التالية وذلك بالجمع أو بالطرح ، ثُم حل المعادلات :

(١) س + ص = ٧
٣ س − ص = ٩

(٢) س + ص = ٥
س − ص = ١

(٣) − س − ص = ٩
− ٢ س + ص = − ٢٧

(٤) ٤ س + ٣ ص = ٢٣
٣ س − ٣ ص = ١٢

(٥) ٨ س + ٦ ص = ٢
٢ س − ٦ ص = ٣

(٦) ٥ س + ص = ١٣
٢ س − ص = ١

(٧) ٢ س − ٣ ص = ٦
− ٢ س + ٥ ص = − ٢

(٨) ٤ س − ٣ ص = ١٢
− ٢ س + ٤ ص = − ٦

ثانياً : اختصر (إحذف) أى من س أ، ص فى أزواج المعادلات التالية بالطرح ، ثم حل المعادلات :

(١) ٢ س + ص = ١
٢ س + ٧ ص = ١٩

(٢) ٥ س + ٢ ص = ١
٣ س + ٢ ص = ٣

(٣) ٥ س + ص = ٨
٣ س + ص = ٦

(٤) س + ٣ ص = ١٠
س + ص = ٤

(٥) ٣ س + ص = ٩
− ٣ س + ص = − ٣

(٦) س + ٧ ص = ٣
س +٢ ص = − ٢

(٧) ٢ س − ٣ ص = ٩
٥ س − ٣ ص = ١٨

(٨) ٧ س + ٢ ص = ١٣
٩ س + ٢ ص = ١٥

ثالثاً : حل المعادلات الآتية بالطرح :

(١) س − ٥ ص = ٣
س − ٣ ص = ١

(٢) س − ٢ ص = − ١
س − ٥ ص = ٥

(٣) ٩ س − ٣ ص = ١٥
٥ س − ٣ ص = ٧

(٤) ٢ س − ٥ ص = ٨
س − ٥ ص = ٤

رابعاً : حاول قبل حل هذه المعادلات معرفة ما إذا كان الحل بالجمع أم بالطرح ، ثم حل المعادلات :

(١) ٣ س + ص = ٦
٥ س + ص = ١٠

(٢) ٥ س − ٤ ص = ٢٦
س − ٤ ص = ٦

(٣) ٢ س + ٥ ص = ٢٠
٢ س − ٣ ص = ٤

(٤) ٣ س + ١٠ ص = ٢
− ٣س+٧ص=−١٩

(٥) ٦ س − ٣ ص = ٢٤
٤ س + ٣ ص = ١٦

(٦) ٣ س + ١٥ ص = ٨١
٣ س + ٤ ص = ٢٦

خامساً : حل المعادلات التالية بضرب أي منهما فى رقم لحذف واختصار أحد المجهولين وذلك قبل عملية الجمع أو الطرح للمعادلات :

(١) ٣ س + ٢ ص = ٨
٢ س + ٤ ص = ١٠

(٢) ٢ س − ٥ ص = ٧
٣ س + ٣ ص = ٩

(٣) ٢ س − ص = ٨
٤ س + ٣ ص = ١٦

(٤) س + ٥ ص = ٢٧
٣ س + ٤ ص = ٢٦

(٥) ٣ س − ٨ ص = − ٩
٢ س + ٢ ص = ٢

(٦) س + ٣ ص = ٧
٣ س − ٥ ص = − ٧

(٧) ٨ س + ٣ ص = ٣٣
٢ س − ٥ ص = − ٩

(٨) ٢ س + ص = ٧
٣ س − ٢ ص = صفر

(٩) ٤ س − ٣ ص = ١١
٢ س + ص = ٣

(١٠) ٥ س − ٣ ص = ١
٤ س + ٦ ص = ٥

سادساً : حل المعادلات التالية ، بضرب كل منهما فى رقم ما ثم إجر عمليات الجمع أو الطرح :

(١) ٣ س − ٥ ص = ٥
٢ س − ٣ ص = ١٠

(٢) ٧ س + ٢ ص = ١٤
٥ س − ٣ ص = ١٠

(٣) ٢ س + ٢ ص = ٤
٣ س − ٣ ص = ٦

(٤) ٣ س − ٨ ص = ١
٥ س − ١٢ ص = ٣

(٥) ٥ س + ٣ ص = ١٥
٦ س − ٤ ص = ٨

(٦) ١١ س − ٤ ص = − ٣
٩ س − ٣ ص = − ٣

(٧) ٦ س + ٢ ص = ٢
٩ س − ٦ ص = − ٣٣

(٨) ٧ ص − ٢ س = − ٩
− ٢ ص + ٣ س = ٥

سابعاً : حل المعادلات التالية بعد إعادة ترتيبها :

(١) ٢ س = ٣ ص + ٨
٣ س − ٣ ص = ١٢

(٢) س = − ص
٢ س − ص = ٩

(٣) ٣ س+٢ص−٧=صفر
٢ س = ٢ص+١٣=صفر

(٤) س = ص + ١
٢ س = − ص − ١

(٥) ٤ س = ٤ + ٢ ص
س − ١٦ = − ٢ ص

(٦) ٢٠ س = ص + ١
س + ٣ ص = ١١

الدرس الثامن عشر :

المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية

Quadratic functions

[١٨ ـ ١] تحليل معادلات الدرجة الثانية إلى عناصرها الأولية :

تعرف معادلة الدرجة الثانية بأنها المعادلة التى تكون أكبر قوة (أس) للمجهول (س أ، ص أ، ....) هى ٢ « تربيع » .

مثل المعادلة س^{٢} − ٧ س + ١٢ = صفر ، لأن أكبر قوة للمجهول س هى ٢ أو تربيع .

وليس كل معادلات الدرجة الثانية تقبل التحليل ، ولكن تلك المعادلات التى يمكن التعبير عنها بحاصل ضرب قوسين .

ولتحليل المقدار س^{٢} − ٧ س + ١٢ أو الطرف الأيمن بمعادلة الدرجة الثانية السابق الإشارة إليها ، فإنه يتم كتابة المقدار كالتالى :

س^{٢} − ٧ س + ١٢ = (   ) (   )

أى فى صورة حاصل ضرب مقدارين كل منهم بقوس

وحيث أن الحد الأول هو س^{٢} ، فهذا لا ينشأ إلا بضرب س × س

وعلى ذلك نضع فى القوس الأول س وفى القوس الثانى س وهو بمثابة الحد الأول فى كل قوس

أى (س   ) (س   )

ولوضع الحد الثانى بكل قوس ، فإنه يجب النظر إلى الحد الخالى من س بالمقدار الأصلى وهو ١٢ ويجب أن يكون حاصل ضرب الحدين الأخيرين بالقوسين مساوياً + ١٢ وهنالك عدة إحتمالات لذلك .

حيث أن : + ١٢ = + ٤ × + ٣

= − ٤ × − ٣

= + ٦ × + ٢

= − ٦ × − ٢

= + ١٢ × + ١

= − ١٢ × − ١

وعليه فإن :

(س + ٤) (س + ٣) = س^{٢} + ٧ س + ١٢ .....(١)

(س − ٤) (س − ٣) = س^{٢} − ٧ س + ١٢ .....(٢)

(س + ٦) (س + ٢) = س^{٢} + ٨ س + ١٢ .....(٣)

(س − ٦) (س − ٢) = س^{٢} − ٨ س + ١٢ .....(٤)

(س + ١٢) (س + ١) = س^{٢} + ١٣ س + ١٢ .....(٥)

(س − ١٢) (س − ١) = س^{٢} − ١٣ س + ١٢ .....(٦)

ملحوظة : (انظر فك الأقواس فى الجزء الثانى [الكتاب الثانى])

ويلاحظ أن المعادلة رقم (٢) هى المعادلة المطلوبة .

ويلاحظ أن معامل س فى المعادلات من (١) إلى (٦) هو عبارة عن حاصل جمع الحدين الأخيرين بالأقواس فمثلاً بدءاً من المعادلة (١) :

+ ٧ = + ٤ + ٣

− ٧ = − ٤ − ٣

+ ٨ = + ٦ + ٢

- ٨ = - ٦ - ٢

+ ١٣ = + ١٢ + ١

- ١٣ = - ١٢ - ١

وعلى ذلك فإنه يتم إهمال كل التحاليل فى (١) ، (٣) ، (٤) ، (٥) ، (٦)
ويعتبر التحليل فى معادلة (٢) هو المطلوب .

∴ س^{٢} - ٧ س + ١٢ = (س - ٤) (س - ٣)

أ، = (س - ٣) (س - ٤)

ولا يهم ترتيب الأقواس ، والمهم هو الناتج .

□ **مثال (١) :**

حلل المقدار س^{٢} + ٧ س + ١٠

□ **الحـــل :**

عوامل المقدار ١٠ هى : (١٠ ، ١) ، (-١٠ ، -١) ، (٥ ، ٢) ،
(-٥ ، -٢)

ويلاحظ أن عوامل المقدار ١٠ (٥ ، ٢) مجموعهم يعطى معامل الحد الأوسط (٧) وبذلك فإن التحليل يكون كالتالى :

س^{٢} + ٧ س + ١٠ = (س + ٥) (س + ٢)

□ **مثال (٢) :**

حلل المقدار : س^{٢} - ٢ س - ٨

□ **الحـــل :**

عوامل المقدار - ٨ هى : - ٨ ، ١

، ٨ ، - ١

، - ٤ ، ٢

، + ٤ ، - ٢

ويلاحظ أن معامل الحد الأوسط (–٢) هو عبارة عن :

– ٤ + ٢ = – ٢

وبذلك فإن :

س^{٢} – ٢ س – ٨ = (س – ٤) (س + ٢)

◻ مثال (٣) :

حلل س^{٢} – ٢ س – ١٥

◻ الحـــل :

عوامل العدد – ١٥ هى: – ١٥ ، +١

، ١٥ ، – ١

، – ٥ ، + ٣

، + ٥ ، – ٣

وواضح أن – ٥ + ٣ = – ٢ هو معامل الحد الأوسط (– ٢ س)

∴ س^{٢} – ٢ س – ١٥ = (س – ٥) (س + ٣)

◻ مثال (٤) :

س^{٢} – ١١ س + ١٨

◻ الحـــل :

عوامل العدد + ١٨ هى :

+ ١٨ ، + ١

، – ١٨ ؛ – ١

، + ٩ ، + ٢

، – ٩ ، – ٢

، + ٦ ، + ٣

، − ٦ ، − ٣

وواضح أن معامل الحد الأوسط (−١١ س) هو عبارة عن
− ١١ = − ٩ − ٢

س^{٢} − ١١ س + ١٨ = (س − ٩) (س − ٢) .

ومن الآن فصاعداً يكفى أن نكتب العوامل التى تحقق صحة المقدار دون كتابة كل الإحتمالات الممكنة .

☐ **مثال (٥) :**

حلل المقدار : ٣ س^{٢} − ١١ س + ٦

☐ **الحل :**

يمكن تحليل ٣ س^{٢} إلى ٣ س ، س فقط

∴ ٣ س^{٢} − ١١ س + ٦ = (٣ س ؟) (س ؟)

والحد الأخير بالمقدار = ٦ وهو حاصل ضرب .

(٦ ، ١) ، (− ٦ ، − ١) ، (٣ ، ٢) ، (−٣ ، −٢)

وعلى ذلك فالعوامل المحتملة للمقدار عند تحليله هى :

(٣ س + ٦) (س + ١) ، (٣ س + ٣) (س + ٢)

(٣ س − ٦) (س − ١) ، (٣ س − ٣) (س − ٢)

(٣ س + ١) (س + ٦) ، (٣ س + ٢) (س + ٣)

(٣ س − ١) (س − ٦) ، (٣ س − ٢) (س − ٣)

وجميع العوامل السابقة تعطى ٣ س^{٢} كحد أول ، وتعطى + ٦ كحد أخير .

ولكن يوجد عامل واحد فقط يعطى ـ ١١ س كحد أوسط ألا وهو :

(٣ س – ٢) (س – ٣)

∴ ٣ س^{٢} – ١١ س + ٦ = (٣ س – ٢) (س – ٣)

ومرة ثانية نؤكد على عدم ضرورة كتابة كل إحتمالات الحل ويكفى الإحتمال الوحيد الصحيح ، وقد تعرضنا هنا لكل الإحتمالات لمجرد شرح المثال وبيان طريقة الحل .

□ مثال (٦) :

حلل المقدار ٤ س^{٢} + ٤ س – ١٥

□ الحــــل :

يلاحظ هنا زيادة التعقيد فى المسألة وذلك ينشأ عن أن الحد الأول وهو ٤ س^{٢} له احتمالان فى التحليل وهما (٤ س ، س) ، (٢ س ، ٢ س) وحينئذ يمكن التحليل بالصورة التالية :

(٤ س ؟) (س ؟)

أ، (٢ س ؟) (٢ س ؟)

مما يؤدى لمضاعفة احتمالات التحليل إلا أنه بشىء من الحذر وبالنظر إلى معامل الحد الأوسط وهو (+ ٤ س) فإننا نجد أن :

٤ س^{٢} + ٤ س – ١٥= (٢ س – ٣) (٢ س + ٥)

□ مثال (٧) :

حلل المقدار ٦ س^{٢} – ٣٣ س + ١٥

□ **الحـــل :**

يلاحظ هنا أنه يمكن أخذ ٣ كعامل مشترك لكل المقدار قبل إجراء أى تحليل مما يؤدى لتبسيط عملية الحل .

∴ ٣ (٢ س^{٢} − ١١ س + ٥) = ٣ (٢ س − ١) (س − ٥)

□ **مثال (٨) :**

حلل المقدار ٥ س^{٢} − ١٥ س

□ **الحـــل :**

مثل هذا النوع من المسائل فى غاية البساطة حيث أنه لا يلزم سوى أخذ عامل مشترك من الحدين الأول والثانى كالتالى ٥ س^{٢} − ١٥ س = ٥ س (س − ٣)

[١٨ ـ ٢] تدريبـــات :

أولاً : اكتب المقادير الجبرية التالية فى صورة حاصل ضرب قوسين معاً

(١) ٢ س^{٢} − س − ٣	(١١) ٥ س^{٢} − ٤ س − ١
(٢) س^{٢} − ٥ س + ٦	(١٢) ١٢ س^{٢} − ٢٤ س − ١٥
(٣) س^{٢} + ٥ س + ٦	(١٣) ٢ س^{٢} + ١٠ س − ٢٨
(٤) س^{٢} + ٦ س + ٥	(١٤) ١٠ س^{٢} + ٣٥ س − ٢٠
(٥) ٣ س^{٢} + ٢ س − ١	(١٥) س^{٢} − ١٣ س + ٣٠
(٦) ٤ س^{٢} − ٤	(١٦) س^{٢} − ٤ س − ١٢
(٧) ٢ س^{٢} + ٩ س + ٩	(١٧) س^{٢} + ٦ س − ٧
(٨) ٢ س^{٢} − ٣ س − ٣٥	(١٨) س^{٢} + ١١ س + ١٨
(٩) ٤ س^{٢} + ١٩ س − ٥	(١٩) س^{٢} + ٧ س − ٨
(١٠) ٢ س^{٢} − ٨	(٢٠) س^{٢} − ٦ س − ١٦

ثانياً : حلل المقادير التالية :

(١) ٢ س^{٢} − ٧ س + ٦
(٢) ٢ س^{٢} − ٦ س + ٤
(٣) ٢ س^{٢} − ٥ س + ٣
(٤) ٣ س^{٢} + ٧ س + ٢
(٥) ٦ س^{٢} + ٣٤ س + ٤٠
(٦) ٣ س^{٢} + ٨ س + ٤
(٧) ١٥ س^{٢} + ١٨ س + ٣
(٨) ٥ س^{٢} − ١٧ س + ٦
(٩) ١٠ س^{٢} − ٢٤ س + ٨
(١٠) ٦ س^{٢} + ٧ س − ١٠
(١١) ٦ س^{٢} + ٢٢ س − ٨
(١٢) ٦ س^{٢} + ٣ س − ٣
(١٣) ٨ س^{٢} + ٣٤ س + ٨
(١٤) ١٢ س^{٢} + ١٥ س − ١٨
(١٥) ٤ س^{٢} − ٤ س + ١
(١٦) ٤ س^{٢} − ١١ س − ١٥
(١٧) ٥ س^{٢} + ٧ س + ٢
(١٨) ٥ س^{٢} + ٨ س + ٣
(١٩) ٧ س^{٢} − ٤ س − ٣
(٢٠) ٥ س^{٢} − ٣ س − ٢

ثالثاً : حلل المقادير الآتية :

(١) س^{٢} − ٧ س
(٢) ٢ س^{٢} + ٦ س
(٣) ٣ س^{٢} − ٧ س
(٤) ٣ س^{٢} + ٩ س
(٥) ٢ س^{٢} + ١١ س
(٦) ٥ س^{٢} + ١٥ س
(٧) ١٧ س^{٢} − ٣٤ س
(٨) ٢١ س^{٢} + ٧ س
(٩) ٦ س^{٢} − ١٥ س
(١٠) ٤ س^{٢} − ٥ س

[١٨ ـ ٣] الفرق بين المربعين :

كما يتضح من العنوان نلاحظ فى هذه المقادير الجبرية أنها عبارة عن حدين فقط كل منهما مربع تام ولا يوجد بها حد أوسط .

□ مثال (١) :

حلل المقدار التالى س^{٢} − ٢١

(وهو يمثل الصورة العامة لفرق المربعين) .

□ **الحـــل :**

$س^{٢} - ا^{٢} = (س - ا)\ (س + ا)$

$س^{٢}$ هى المربع الأول ، $ا^{٢}$ هى المربع الثانى

□ **مثال (٢) :**

حلل المقدار $س^{٢} - ٣٦$

□ **الحـــل :**

يمكن كتابة فرق المربعين هذا فى الصورة $س^{٢} - ٦^{٢}$

وبذلك فإن $س^{٢} - ٢٥ = س^{٢} - ٥^{٢}$ ، $س^{٢} - ٤٩ = س^{٢} - ٧^{٢}$

وبمقارنة هذا بالمثال (١) :

$\therefore\ س^{٢} - ٣٦ = (س - ٦)\ (س + ٦)$

ويلاحظ أننا لو قمنا بفك الأقواس فإنه لا ينشأ لنا حد أوسط يحتوى على س .

□ **مثال (٣) :**

حلل المقدار $١٦\ س^{٢} - ٩\ ص^{٢}$

□ **الحـــل :**

$١٦\ س^{٢} - ٩\ ص^{٢} = (٤\ س - ٣\ ص)\ (٤\ س + ٣\ ص)$

والمثالين التاليين يوضحان فائدة معرفة قاعدة الفرق بين المربعين فى تبسيط بعض العمليات الحسابية الرقمية كالتالى :

□ **مثال (٤) :**

أوجد قيمة المقدار $١١٥^{٢} - ١٥^{٢}$

□ **الحـــل**

$$١١٥^{٢} - ١٥^{٢} = (١١٥ - ١٥)\ (١١٥ + ١٥)$$

$$= ١٠٠ \times ١٣٠ = ١٣٠٠٠$$

وتفيد هذه النظرية كثيراً عند إيجاد طول ضلع بنظرية فيثاغورث أو عند إيجاد مساحة حلقة دائرية .

والأمثلة التالية توضح ذلك .

□ **مثال (٥) :**

مثلث قائم الزاوية ، طول الوتر ١٣ سم وطول أحد ضلعى القائمة = ٥ فأوجد طول الضلع الثالث .

□ **الحـــل :**

$$\text{الضلع الثالث}^{٢} = ١٣^{٢} - ٥^{٢} = (١٣ - ٥)\ (١٣ + ٥)$$

$$= ٨ \times ١٨ = ١٤٤$$

∴ الضلع الثالث = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

□ **مثال (٦) :**

أوجد مساحة حلقة دائرية نصف قطرها الخارجى ٩ سم والداخلى ٤ سم .

□ **الحـــل :**

المساحة = ط (نق$_{١}^{٢}$ − نق$_{٢}^{٢}$)

= ط (٩^{٢} − ٤^{٢})

= ط (٩ − ٤) (٩ + ٤)

ط × ٥ × ١٣   ٦٥ ط سم^{٢}

ويمكن التعويض بقيمة ط $\frac{٢٢}{٧}$ أ، ٣,١٤٢ للحصول على الجواب النهائى .

[١٨ ـ ٤] تدريبـــات :

أولاً : فك الأقواس التالية ، ثم اختصر ناتج كل منها .

(١) (س + ٢) (س − ٢)
(٢) (س + ٤) (س − ٤)
(٣) (س + م) (س − م)
(٤) (م − ٢ ن) (م + ٢ ن)
(٥) (٢س+٣ص)(٢س−٣ص)
(٦) (ب − ١) (ب + ١)
(٧) (٩ س + ٧) (٩ س − ٧)
(٨) (٢ ن − ٧) (٢ ن + ٧)
(٩) (٣ م − ٨) (٣ م + ٨)
(١٠)(٥س−٣ص)(٥س+٣ص)

ثانياً : حلل المقادير التالية فى صورة حاصل ضرب قوسين :

(١) س^{٢} − ٢٨٩
(٢) ٢٥ س^{٢} − ٨١
(٣) ١٦ م^{٢} − ٤٩ ن^{٢}
(٤) ن^{٢} − ١٩٦
(٥) هـ^{٢} − ١٦٩
(٦) ٤٩ س^{٢} − ١٤٤
(٧) ٤ س^{٢} − ٢٥
(٨) ٩ س^{٢} − ١٠٠
(٩) س^{٢} − ١
(١٠) ٤ م^{٢} − ١
(١١) ١٦ س^{٢} − ٢٥
(١٢) ا^{٢} − ٤ ب^{٢}
(١٣) س^{٢} − ٤٩ م^{٢}
(١٤) ٩ س^{٢} − ٦٤ ص^{٢}

ثالثاً : أوجد قيمة المقادير التالية باستخدام فكرة الفرق بين المربعين

(١) ٩^{٢} − ١^{٢}
(٢) ٩٩^{٢} − ١^{٢}
(٣) ٩٩^{٢} − ٥١^{٢}
(٤) ٦٧^{٢} − ٣٣^{٢}
(٥) ١٠٧^{٢} − ٩٩^{٢}
(٦) ٧٦^{٢} − ٢٤^{٢}
(٧) ٨٧^{٢} − ١٣^{٢}
(٨) ٢٥^{٢} − ٥^{٢}
(٩) ١١١٢^{٢} − ١٢^{٢}
(١٠) ١٥٢^{٢} − ٤٨^{٢}

رابعاً : أوجد قيمة المقادير التالية باستخدام فكرة الفرق بين المربعين :

(١) $(٤,٦)^{٢} - (٠,٤)$

(٢) $(٢,٥)^{٢} - (٠,٥)^{٢}$

(٣) $(٩,٩)^{٢} - (٢,١)^{٢}$

(٤) $(٩٩,٣)^{٢} - (٠,٧)^{٢}$

(٥) $(٨,٦) - (١,٤)^{٢}$

(٦) $(١٠٠,٩)^{٢} - (٠,٩)^{٢}$

(٧) $(٥٢,٥٢)^{٢} - (٤٧,٤٨)^{٢}$

(٨) $(٧,١٣)^{٢} - (٢,٨٧)^{٢}$

(٩) $(٢٣,٢٥)^{٢} - (١,٧٥)^{٢}$

(١٠) $(٣,١٧)^{٢} - (١,٨٣)^{٢}$

[١٨ ـ ٥] حل معادلات الدرجة الثانية :

عند الرغبة فى حل معادلات الدرجة الثانية فإنه يجب أولاً وقبل كل شىء أن نضع المعادلة فى الصورة العامة لمعادلات الدرجة الثانية .

وهى :

ا س^{٢} + ب س + جـ = صفر

فمثلاً عند الرغبة فى حل المعادلة : س^{٢} + ٥ = ٣ س

فإنها ترتب هكذا :

س^{٢} − ٣ س + ٥ = صفر

وبعد ذلك نبدأ فى حل المعادلة .

وعموماً فإنه توجد ثلاث طرق لحل المعادلة من الدرجة الثانية :

□ الطريقة الأولى : بالتحليل :

تعلمنا كيفية تحليل مقدار أو معادلة من الدرجة الثانية والأمثلة التالية توضح طريقة حل المعادلة بالتحليل :

□ مثال (١) :

حل المعادلة :

س^{٢}+ ٤ س + ٣ = صفر

بالتحليل :

∴ (س + ٣) (س + ١) = صفر

وحيث أن حاصل ضرب القوسين = صفر ، لذلك فإما أياً من القوسين يساوى الصفر أو كلاهما يساوى الصفر .

∴ إما س + ٣ = صفر وإما س + ١ = صفر

فإذا كان س + ٣ = صفر

∴ س = − ٣

وإذا كان س + ١ = صفر

∴ س = − ١

∴ حل المعادلة هو س = − ٣ ؛ س = −١

وكل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول ما (س مثلاً) ، يكون هنالك جوابان لهذا المجهول .

□ مثال (٢) :

حل المعادلة :

٢ س^{٢} + ٩ س + ٩ = صفر

□ الحـــل :

٢ س^{٢} + ٩ س + ٩ = (٢ س + ٣) (س + ٣) = صفر

∴ إما (٢ س + ٣) = صفر   ومنها ٢ س = −٣

∴ س = − ١ $\frac{١}{٢}$

وإما (س + ٣) = صفر   ومنها س = − ٣

∴ س = − ٣

∴ حل هذه المعادلة هو : س = − ١ $\frac{١}{٢}$ ؛ س = − ٣

◻ مثال (٣) :

حل المعادلة : س^{٢} − ٣ س = صفر

◻ الحـــل :

س^{٢} − ٣ س = س (س − ٣) = صفر

∴ إما س = صفر وإما (س − ٣) = صفر ومنها س = ٣

∴ حل هذه المعادلة هو : س = صفر ، س = ٣

◻ مثال (٤) :

حل المعادلة : س^{٢} − ١٦ = صفر

◻ الحـــل :

بالتحليل :

∴ (س − ٤ (س + ٤) = صفر

∴ إما (س − ٤) = صفر   ومنها س = ٤

وإما (س + ٤) = صفر   ومنها س = − ٤

∴ حل هذه المعادلة هو : س = ٤ ، س = − ٤

□ الطريقة الثانية : بالقانون :

يحدث كثيراً أننا لا نستطيع حل المعادلة بطريقة التحليل إلى أقواس كما عرفنا فى الطريقة الأولى ، إلا أن هذا لا يعنى عدم إمكان حل هذه المعادلات ، فهنالك طريقة تعرف بالقانون لحل المعادلات من الدرجة الثانية ،

وحيث أن معادلات الدرجة الثانية يُمكن وضعها فى الصيغة العامة السابق الإشارة إليها ، ألا وهى :

$$ا\,س^{2} + ب\,س + جـ = صفر$$

فإنه يمكن إيجاد قيمة المجهول س أو حل المعادلة بالقانون التالى :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤\,ا\,جـ}}{٢\,ا}$$

وبالتعويض بقيم ا ، ب ، جـ من المعادلة فى هذا القانون نحصل على إجابتين لقيمة س [لاحظ إشارة ± بالقانون]

ويلاحظ أن المقدار تحت الجذر يجب أن يكون موجباً دائماً ويجب كذلك توخى الحرص فى التعويض بقيم ا ، ب ، جـ من حيث الإشارات .

□ مثال (١) :

حل المعادلة $س^{2} - ٣\,س + ١ = صفر$.

(مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام عشرية) .

□ الحـــل :

إذا حاولنا تحليل المقدار السابق ، نجد إستحالة إتمام تحليلة ، لذا فإننا نلجأ هنا للحل بطريقة القانون .

∴ ا $س^٢$ + ب س + جـ = صفر هى الصورة العامة لمعادلات الدرجة الثانية .

، $س^٢$ − ٣ س + ١ = صفر على نفس الصورة

∴ فبالمقارنة : ا = ١ ، ب = − ٣ ، جـ = ١

وبالتعويض فى القانون :

$$∴ س = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^٢ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤}}{٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢} = \frac{٣ \pm ٢,٢٣}{٢}$$

$$∴ \text{قيم س إما :} \quad \frac{٣ + ٢,٢٣}{٢} \quad \text{وإما} \quad \frac{٣ - ٢,٢٣}{٢}$$

∴ س = ٢,٦١٥ أ، ٠,٣٨٥

ويلاحظ إمكانية حل معادلات الدرجة الثانية التى تقبل التحليل عوضاً عن تلك التى لا تقبل التحليل بطريقة القانون كذلك والأمثلة التالية توضح ذلك :

□ **مثال (٢) :**

حل المعادلة : $س^٢$ + ٦ س + ٥ = صفر

□ **الحـــل :**

لاحظ أن هذه المعادلة يمكن بسهولة تحليلها إلى :

(س + ٥) (س + ١) = صفر

وبالتالى فإن س + ٥ = صفر ومنها س = − ٥

وإما س + ١ = صفر ومنها س = − ١

إلا أننا سنقوم بالحل بطريقة القانون كما يلى :

بمقارنة هذه المعادلة بالصورة العامة لمعادلات الدرجة الثانية :

∴ $ا = ١$ ، $ب = ٦$ ، $جـ = ٥$

∴ بالقانون :

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ \, ا \, جـ}}{٢ \, ا}$$

$$\therefore \; س = \frac{- ٦ \pm \sqrt{(٦)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{- ٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٢٠}}{٢} = \frac{- ٦ \pm \sqrt{١٦}}{٢} = \frac{- ٦ \pm ٤}{٢}$$

∴ إما $س = \frac{- ٦ + ٤}{٢} = \frac{- ٢}{٢} = - ١$

وإما $س = \frac{- ٦ - ٤}{٢} = \frac{- ١٠}{٢} = - ٥$

وهى نفس الإجابات السابقة .

□ ملحوظة :

يجب التدرب جيداً على استخدام القانون فى حل المعادلات مع الحذر والعناية عند التعويض منعاً للخطأ .

[١٨ ـ ٦] تدريبات على حل معادلات الدرجة الثانية بطريقتى التحليل والقانون

أولاً : حل المعادلات التالية كما بالمثال الموضح :

(س − ٢) (س + ٣) = صفر

∴ إما س − ٢= صفر ومنها س = ٢

وإما س + ٣ = صفر ومنها س = − ٣

(١) (٢ س − ٣) (س − ٢) = صفر

(٢) (٣ س + ٢) (س + ٢) = صفر

(٣) (س − ٥) (٢ س + ٧) = صفر

(٤) (٢ س − ١) (س + ٤) = صفر

(٥) (س − ٤) (س − ٧) = صفر

ثانياً : حل المعادلات التالية بطريقة الأقواس :

(١) س^{٢} + س − ٢٠ = صفر

(٢) س^{٢} − س − ٤٢ = صفر

(٣) س^{٢} − س − ٧٢ = صفر

(٤) س^{٢}+١١ س+٣٠=صفر

(٥) س^{٢}−١٢ س+٢٠=صفر

(٦) س^{٢} + ٤ س + ٤ = صفر

(٧) س^{٢} + ٤ س − ١٢ = صفر

(٨) س^{٢} + ٨ س + ١٥ = صفر

(٩) س^{٢} − ٢ س − ١٥ = صفر

(١٠) س^{٢} + ٥ س + ٦ = صفر

(١١) س^{٢}+١٠ س+ ٩=صفر

(١٢) س^{٢} − ١٠ س + ٩ = صفر

(١٣) س^{٢} + ٦ س − ٧ = صفر

(١٤) س^{٢} − ٨ س + ١٢ = صفر

(١٥) س^{٢} − ١١ س + ١٨ = صفر

(١٦) س^{٢} + ٧ س − ١٨ = صفر

(١٧) س^{٢} − ١٥ س + ١٤ = صفر

(١٨) س^{٢}−١٠ س+٢٥=صفر

(١٩) س^{٢} − ١٢ س + ٢٧ = صفر (٢٠) س^{٢} + ٦ س − ٢٧ = صفر

ثالثاً : استخدم طريقة الفرق بين المربعين فى حل المعادلات التالية :

(١) س^{٢} − $\frac{١}{٩}$ = صفر

(٢) س^{٢} − $\frac{١}{٢٥}$ = صفر

(٣) س^{٢} − ١٠٠ = صفر

(٤) س^{٢} − ١٢١ = صفر

(٥) س^{٢} − ٤٩ = صفر

(٦) ٤ س^{٢} − ١ = صفر

(٧) ٩ س^{٢} − ٤ = صفر

(٨) ١٦ س^{٢} − ٩ = صفر

(٩) ٢٥ س^{٢} − ٨١ = صفر

(١٠) ٤٩ س^{٢} − ٢٥ = صفر

رابعاً : ضع المعادلات التالية فى الصورة العامة لمعادلات الدرجة الثانية ومن ثم قم بحلها :

(١) س^{٢} − ٧ = ٦ س

(٢) س^{٢} − ٢٢ س = − ٢١

(٣) س (س−٥)=٨ (س−٣)+٢

(٤) س − ١٤ = − $\frac{٣٣}{س}$

(٥) س^{٢} − ٣ (٢ س + ٩) = صفر

(٦) س^{٢} − ٨ س = ١٢

(٧) س^{٢} = ٧ س − ١٢

(٨) س^{٢} − ٤ = − ٥ س

(٩) س^{٢} = ١٣ س − ٣٠

(١٠) ٧ س + س^{٢} = ٨

□ الطريقة الثالثة : لحل معادلات الدرجة الثانية بالحل البيانى :

أوضحنا فى الجزء الثانى (الكتاب الثانى) من هذه السلسلة ، طريقة رسم معادلات الدرجة الثانية .

وبهذه الطريقة يمكن إيجاد حل المعادلة غير أن دقة الإجابة تتوقف على دقة الرسم (وعلى مقياس الرسم) ، وهى تفيد فى إعطاء قيمة تقريبية لحل المعادلة .

□ مثال :

ارسم المنحنى ص = ٢ س^{٢} − ٣ س − ٧

ومن ثم استخدم هذا فى حل المعادلة :

٢ س^{٢} − ٣ س − ٧ = صفر

٤ ≥ س ≥ − ٢

□ الحـل :

نحتاج هنا إلى قيم س التى عندها ص = صفر أو بمعنى آخر قيم س عند نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات .

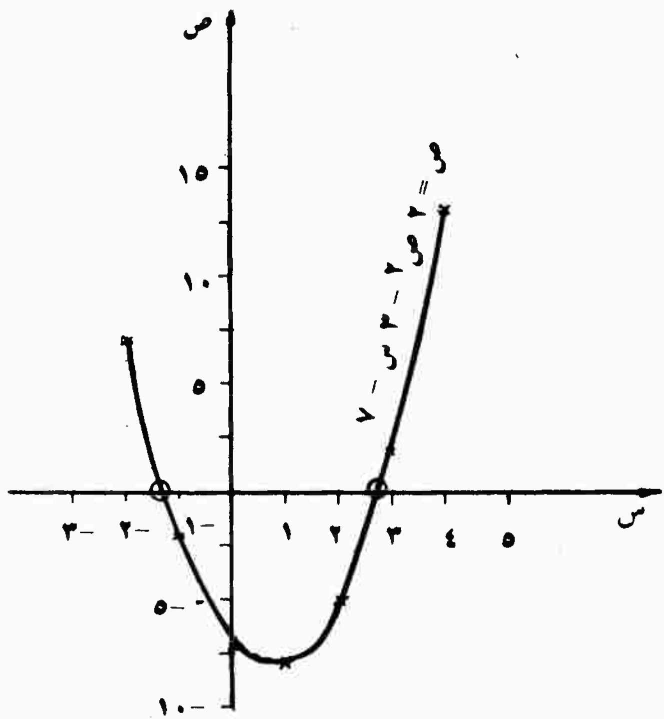
ونحتاج كذلك إلى جدول نسجل فيه قيم س ، ص كما هو موضح بجدول (١٨ ـ ١) .

ثم نرسم المنحنى على ورق رسم مع استخدام مقياس رسم مناسب .

س	− ٢	− ١	صفر	١	٢	٣	٤
٢ س^{٢}	٨	٢	صفر	٢	٨	١٨	٣٢
− ٣ س	٦	٣	صفر	− ٣	− ٦	− ٩	− ١٢
− ٧	− ٧	− ٧	− ٧	− ٧	− ٧	− ٧	− ٧
ص	٧	− ٢	− ٧	− ٨	− ٥	٢	١٣

جدول (١٨ ـ ١)

انظر الرسم شكل [١٨ ـ ١] .



شكل [١٨ ـ ١]

ومن الرسم يتضح أن الإحداثى السينى لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات « الموضح حولها بدائرة صغيرة » هى :

س = ٢,٧٥ ، س = − ١,٣

∴ حل هذه المعادلة « بيانياً » هو س = ٢,٧٥ ، س = − ١,٣

وإذا قمنا بحل هذه المعادلة بالطرق الجبرية ، قد نجد اختلافاً طفيفاً بسبب دقة الرسم والتى تتطلب مهارة عالية .

[١٨ ـ ٧] تدريبات : على حل معادلات الدرجة الثانية

بيانياً « الطريقة الثالثة »

(١) أكمل الجدول التالى جدول « ١٨ ـ ٢ » ثم ارسم المنحنى ص = ٢ س^{٢} + ٧ س − ٤ مستخدماً مقياس رسم مناسب

س	−٢	−١	صفر	١	٢
٢ س^{٢}					
+ ٧ س					
−٤					
ص					

جدول (١٨ ـ ٢)

ومن الرسم اكتب حل المعادلة :

٢ س^{٢} + ٧ س − ٤ = صفر

(٢) أكمل الجدول التالى جدول (١٨ ـ ٣) ، ثم ارسم منحنى الدالة :

ص = س^{٢} − ٣ س − ٤ ، مع استخدام مقياس رسم مناسب .

س	− ١	صفر	١	٢	٣	٤
س^{٢}						
− ٣ س						
− ٤						
ص						

جدول (١٨ ـ ٣)

ومن الرسم أوجد حل المعادلة :

س^{٢} − ٣ س − ٤ = صفر

(٣) ارسم المنحنى : ص = س^{٢} − ٤ س + ٣ فيما بين : ٤ ≤ س ≤ صفر مستخدماً مقياس رسم مناسب ، ومن الرسم أوجد حل المعادلة :

س^{٢} − ٤ س + ٣ = صفر

(٤) ارسم المنحنى : ص = س^{٢} − ٦ س + ٥ لقيم س ، ٦ ≤ س ≤ صفر مستخدماً مقياس رسم مناسب ومن الرسم أوجد حل المعادلة :

س^{٢} − ٦ س + ٥ = صفر

(٥) ارسم المنحنى ص = س^{٢} + س − ٤ لقيم س ٢ ≤ س ≤ − ٣ مستخدماً مقياس رسم مناسب ومن الرسم أوجد حل المعادلة :

س^{٢} + س − ٤ = صفر

[١٨ ـ ٨] أمثلة عملية على استخدام معادلات الدرجة الثانية :

□ مثال (١) :

قطعة أرض مستطيلة الشكل فإذا كان عرضها يقل عن طولها بمقدار ٢٠ متراً وكانت مساحة الأرض ٦٣٠٠ متر^{٢} ، فأوجد أبعاد قطعة الأرض .

□ الحل :

نفرض أن طول قطعة الأرض = س

∴ عرض قطعة الأرض = (س − ٢٠)

وحيث أن مساحة المستطيل = الطول × العرض

∴ ٦٣٠٠ = س × (س − ٢٠)

∴ ٦٣٠٠ = س^{٢} − ٢٠ س

∴ س^{٢} − ٢٠ س − ٦٣٠٠ = صفر

وبالتحليل :

∴ (س − ٩٠) (س + ٧٠) = صفر

وهذه تعطى : إما (س − ٩٠) = صفر ومنها س = ٩٠ م

، إما (س + ٧٠) = صفر ومنها س = − ٧٠

ويلاحظ أن الطول « س » لا يمكن أن يكون سالباً ولذا فهذا الجواب مرفوض .

وبذلك فإن س = ٩٠ هو الحل

∴ الطول = ٩٠ م ، العرض = ٩٠ − ٢٠ = ٧٠ م

وللتأكد المساحة = ٦٣٠٠ = ٩٠ × ٧٠ = ٦٣٠٠

[١٨ ـ ٩] تدريبات متنوعة على معادلات الدرجة الثانية :

أولاً : حل المعادلات التالية بطريقة التحليل :

(١) ٤ س^{٢} − ٢ س − ٦

(٢) ٥ س^{٢} + ٣ س − ٢

(٣) ٧ س^{٢} − ٢٠ س + ١٢

(٤) ٤ س^{٢} + ٧ س + ٣

(٥) ٦ س^{٢} + ٨ س + ٢

(٦) ١٠ س^{٢} + ١٣ س − ٣

(٧) ٨ س^{٢} − ٢ س − ٦

(٨) ٤ س^{٢} − ٤ س + ١

(٩) ٧ س^{٢} + ٢٦ س − ٨

(١٠) ٥ س^{٢} − ١٢ س + ٧

ثانياً : حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$$

، قرب إجابتك لأقرب رقمين عشريين ، إذا لزم الأمر .

(١) ٤ س^{٢} + ٢ س − ٥

(٢) ٢ س^{٢} + ١١ س + ٣

(٣) س^{٢} + ٧ س + ٢

(٤) س^{٢} + ٢ س − ٥

(٥) س^{٢} + ٩ س + ١٣

(٦) ٥ س^{٢} − ٩ س + ٣

(٧) س^{٢} + ٥ س − ٢١

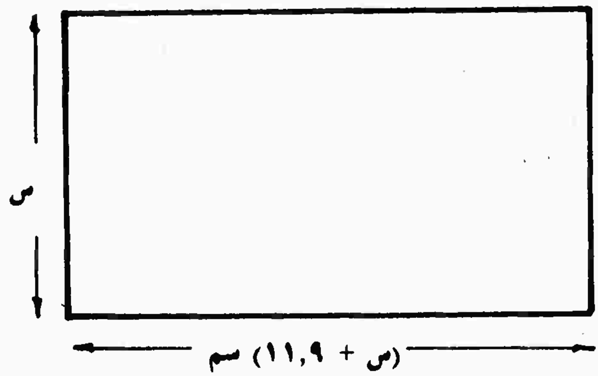
(٨) ٢ س^{٢} − ٣ س − ٤

(٩) ٣ س^{٢} + ٧ س − ٢

(١٠) س^{٢} − ٧ س + ١٠

ثالثاً : حل المسائل التالية باستخدام معادلات الدرجة الثانية :

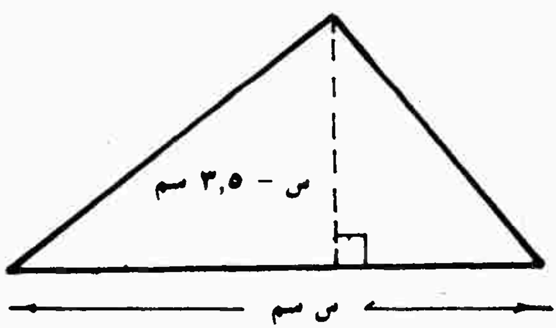
(١) مستطيل مساحة ٥٥٧,٥٢ سم^{٢} ، أبعاده مبينة بالشكل (١٨ ـ ٢) بدلالة س .



شكل [١٨ _ ٢]

فإذا كان طوله يزيد عن عرضه بمقدار ١١,٩ سم ، أوجد أبعاده بالسنتيمتر .

(٢) مثلث مساحته ٣٢,٥ سم^{٢} مبين بشكل (١٨ _ ٣) احسب أبعاده بالسنتيمتر .



شكل [١٨ _ ٣]

(٣) حلقة دائرية مساحتها = ٥١ ط سم^{٢} حيث ط = النسبة التقريبية وتساوى $\frac{٢٢}{٧}$ فإذا كان نصف القطر الداخلى للحلقة = ٧ سم

فأوجد نصف قطرها الخارجى ،

ملحوظة مهمة : [مساحة الحلقة الدائرية = ط (نق$_{١}^{٢}$ − نق$_{٢}^{٢}$) ، نق$_{١}$ > نق$_{٢}$

(٤) قطعة أرض مستطيلة طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٥ متر فإذا كانت مساحة قطعة الأرض ٧٥٠ متر مربع ، فأوجد عرض قطعة الأرض وطولها .

(٥) خزان مياه حجمة ١٨ م٣ ، فإذا كان طوله ٤ متر ، عرضه س متر وإرتفاعه (س − ١,٥ متر) ، فأوجد أبعاد الخزان .

(٦) حديقة مستطيلة الشكل أبعادها ٣٠ م × ٢٠ م محاطة بممر ذو عرض منتظم فإذا كانت مساحة الممر ٦٠٠ متر٢ فأوجد مقدار العرض المنتظم لهذا الممر .

الدرس التاسع عشر :

نقل الحدود الجبرية بين أطراف المعادلات

Algebraic manipulation

[١٩ ـ ١] عــام :

المقصود بنقل الحدود الجبرية هو إعادة ترتيبها بالمعادلة عندما تقتضى الضرورة ذلك ، وقد سبق وأن قمنا بهذا بالدروس السابقة ، وليس هنالك قاعدة ما محدودة يمكن الإحتذاء بها فلكل معادلة حالتها الخاصة .

وفى الأمثلة التالية سنقوم بنقل بعض الحدود وإعادة ترتيبها وذلك بغرض جعل س (المجهول فى المعادلة) بمفرده فى طرف وباقى الحدود تكون فى الطرف الآخر مما يسهل من عملية الحل للمعادلة .

□ **مثال (١) :**

٢ س + ب = جـ

∴ ٢ س = جـ − ب (بطرح ب من كلا الطرفين)

∴ س = $\frac{\text{جـ} - \text{ب}}{٢}$ بالقسمة على ٢)

□ **مثال (٢) :**

٥ س = ص

∴ س = $\frac{\text{ص}}{٥}$ (بقسمة الطرفين على ٥)

□ **مثال (٣) :**

$٥ - س = ص$

$\therefore\ ٥ - ص = س$

(وذلك بجمع س لكل من الطرفين ثم طرح ص من كل منهما)

□ **مثال (٤) :**

$\frac{٥}{س} = ص$

$\therefore\ \frac{٥}{ص} = س$

(بضرب كل من الطرفين فى س ثم قسمة كل منهما على ص)

□ **مثال (٥) :**

$ا\, س + ب\, س = ص$

$\therefore\ س\, (ا + ب) = ص$ (س مشترك)

$\therefore\ س = \frac{ص}{(ا + ب)}$ [وذلك بالقسمة على (ا + ب)]

□ **مثال (٦) :**

$ا\, (ب - س) = جـ\, س$

بفك الأقواس

$\therefore\ ا\, ب - ا\, س = جـ\, س$

وبجمع ا س لكل من الطرفين :

$\therefore\ ا\, ب = جـ\, س + ا\, س$

وبأخذ س مشترك :

$\therefore\ ا\, ب = س\, (جـ + ا)$

وبقسمة الطرفين على (جـ + ا) :

$$\therefore \frac{ا\ ب}{(جـ + ا)} = س$$

□ مثال (٧) :

$$ا = \frac{٥\ ب + ٤\ س}{٣\ ب - ٢\ س}$$

بضرب كلا الطرفين فى (٣ ب − ٢ س) :

$\therefore$ ا (٣ ب − ٢ س) = ٥ ب + ٤ س

وبفك الأقواس :

$\therefore$ ٣ ا ب − ٢ ا س = ٥ ب + ٤ س

وبوضع السينات فى الطرف الأيسر :

$\therefore$ ٣ ا ب − ٥ ب = ٢ ا س + ٤ س

وباستخدام الأقواس :

$\therefore$ ب (٣ ا − ٥) = ٢ س (ا + ٢)

$$\therefore س = \frac{ب\ (٣\ ا - ٥)}{٢\ (ا + ٢)}$$ بقسمة الطرفين على ٢ (ا + ٢)

□ مثال (٨) :

$$٢\ ا = \sqrt{ب^{٢} - س^{٢}}$$

بتربيع الطرفين

$\therefore$ $(٢\ ا)^{٢} = ب^{٢} - س^{٢}$

$\therefore$ $٤\ ا^{٢} = ب^{٢} - س^{٢}$

بإعادة الترتيب :

$$\therefore\ \text{س}^{2} = \text{ب}^{2} - \text{٤}\,\text{ا}^{2}\ .$$

وبأخذ الجذر التربيعى للطرفين :

$$\therefore\ \text{س} = \sqrt{\text{ب}^{2} - \text{٤}\,\text{ا}^{2}}$$

□ مثال (٩) :

$$\frac{\text{س}}{\text{س} + \text{ا}} - \frac{\text{ا}}{\text{س} + \text{ب}} = \text{١}$$

بضرب كلا من الطرفين فى (س + ا) (س + ب)

$$\therefore\ \text{س}\,(\text{س} + \text{ب}) - \text{ا}\,(\text{س} + \text{ا}) = (\text{س} + \text{ا})\,(\text{س} + \text{ب})$$

وبفك الأقواس :

$$\therefore\ \text{س}^{2} + \text{ب س} - \text{ا س} - \text{ا}^{2} = \text{س}^{2} + \text{ا س} + \text{ب س} + \text{ا ب}$$

وبإعادة الترتيب :

$$\therefore\ \text{س}^{2} - \text{س}^{2} + \text{ب س} - \text{ب س} = \text{ا س} + \text{ا س} + \text{ا}^{2} + \text{ا ب}$$

$$\therefore\ \text{٢ ا س} + \text{ا}^{2} + \text{ا ب} = \text{صفر}$$

$$\therefore\ \text{٢ ا س} = -\,\text{ا}^{2} - \text{ا ب}$$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{-\,(\text{ا}^{2} + \text{ا ب})}{\text{٢ ا}} = \frac{-\,\text{ا}\,(\text{ا} + \text{ب})}{\text{٢ ا}}$$

$$= \frac{-\,(\text{ا} + \text{ب})}{\text{٢}}$$

إلا أنه هنالك بعض الملاحظات العامة التى يجب الأخذ بها فى هذا الصدد :

أولاً : يجب التخلص من الأقواس والكسور والجذور ، ... ألخ .

ثانياً : يجب ترتيب حدود المعادلة بحيث تكون الحدود المحتوية على س فى طرف المعادلة والباقى فى الطرف الآخر .

ثالثاً : تؤخذ س كمشترك عند وجود أكثر من حد يحتوى على س .

رابعا : نقسم طرفى المعادلة على القوس لفصل س بمفردها ثم نختصر ما أمكن ذلك .

[١٩ ـ ٢] أمثلة وتطبيقات أخرى :

إذا كان لدينا على سبيل المثال ، معادلة خط مستقيم والإحداثى السينى فإنه يمكن إيجاد الإحداثى الصادى وبالعكس إذا كانت لدينا المعادلة والإحداثى الصادى فإنه يمكننا إعادة ترتيب المعادلة . ونعوض بقيمة ص فنحصل على قيمة س .

□ مثال :

باستخدام المعادلة : ص = ٣ س + ١

أوجد الإحداثى المجهول للنقط التالية :

(أ) (٣ ، ص)

(ب)(س ، ٤)

□ الحـــل :

(أ) بالتعويض بقيمة س = ٣ فى المعادلة ص = ٣ س + ١

∴ ص = ٣ × ٣ + ١ = ١٠

∴ إحداثيات النقطة ا (٣ ، ١٠)

(ب) بالتعويض بقيمة ص = ٤ فى نفس المعادلة

∴ ٤ = ٣ س + ١

∴ ٤ − ١ = ٣ س

∴ س = ١ ∴ إحداثيات النقطة ب هى (١ ، ٤)

[١٩ ـ ٣] تدريبـــات :

أولاً : أوجد قيمة س فيما يلى :

(١) $\text{٢ ا س} + \text{ب س} = \text{٣}$

(٢) $\text{٥ س} + \text{ب} = \text{٣ س} + \text{ا}$

(٣) $\dfrac{\text{س}}{\text{ا}} + \dfrac{\text{٢ س}}{\text{ب}} = \text{١}$

(٤) $\dfrac{\text{٢ س}}{\text{ا}} - \dfrac{\text{س}}{\text{ب}} = \text{١}$

(٥) $\dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٩}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٢٥}}$

(٦) $\dfrac{\text{س} + \text{٢}}{\text{٢ س} + \text{ب}} = \text{٣}$

(٧) $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤ ا}^{\text{٢}}\,\text{جـ}^{\text{٢}}} = \text{ب}^{\text{٢}}$

(٨) $\text{٣}\sqrt{\text{س} + \text{ا}^{\text{٢}}} = \text{٢ س}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$

(٩) $\dfrac{\text{س}}{\text{٢ س} + \text{٤}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{ا}}$

(١٠) $\dfrac{\text{٥ س} + \text{٢}}{\text{٢ س} + \text{٣}} = \dfrac{\text{٧}}{\text{٤}}$

ثانياً : فيما يلى معادلة المستقيمات ، بعض النقط الواقعة على كل مستقيم منها مجهول أحد إحداثياتها ، المطلوب إيجاد الإحداثى المجهول .

(١) المستقيم ص = ٢ س − ٣

والنقط : (أ) (٣ ، ص)

(ب) (١,٥ ، ص)

(جـ) (س ، − ٢)

(د) (س ، ٥)

(٢) المستقيم ٢ ص = ٣ − س

والنقط : (أ) (٢ ، ص)

(ب) (− ١ ، ص)

(جـ) (س ، ٣)

(د) (س ، − ٢)

(٣) المستقيم : ص = ٥ + ٣ س

والنقط : (أ) (− ٢ ، ص)

(ب) (٣ ، ص)

(جـ) (س ، − ٤)

(د) (س ، ٢)

(٤) المستقيم : $= \frac{ص}{٢} = \frac{س}{٣} - ٢$

والنقط : (أ) (١ ، ص)

(ب) (− ٣ ، ص)

(جـ) (س ، ٤)

(د) (س ، − ٢)

ثالثاً : أوجد قيم س فى المعادلات التالية :

(١) ٢ ا س + ٥ ب س = ١٠

(٢) $\frac{٥ م س}{٦} - \frac{٢ م س}{٣} = ١$

(٣) $\frac{٣}{\text{س}} + \frac{٢}{٣\,\text{س}} = \text{ص}$

(٤) $\frac{\text{س}}{٤} - ٢\,\text{س} = \text{ا}\,\text{ب}$

(٥) $\frac{٢\,\text{س} - ٣}{\text{ا}} - \frac{\text{س} - ٢}{\text{ا}} = ١$

(٦) $\text{س}\,(٢\,\text{س} - ٧) = \text{س}\,(\text{ا} - \text{س})$

(٧) $\frac{٢٥\,\text{ا}\,\text{س}}{\text{ب}} = \frac{٥\,\text{س}^{٢}}{\text{ا}\,\text{ب}}$

(٨) $\frac{\text{س} - ٣}{\text{ا}} + \frac{\text{س} + ٤}{\text{ب}} = ١$

الدرس العشرون :

المتباينـــات

Inequalities

[٢٠ ـ ١] حل المتباينات :

إن الطرق المستعملة فى حل المتباينات .

هى نفس الطرق المستعملة فى حل المعادلات الخطية فعملية جمع أو طرح رقم من طرفي المتباينة ، لاتُغير من إشارة التباين .

كما وأن عملية جمع أو قسمة طرفى المتباينة برقم (موجب) لا تُغير من إشارة المتباينة .

□ مثال (١) :

حل المتباينة : ا + ٢ > ٦

بطرح ٢ من كلا الطرفين :

∴ ا + ٢ − ٢ > ٦ − ٢

∴ ا > ٤

وهو حل المتباينة

□ مثال (٢) :

حل المتباينة ا − ٤ < − ١

بجمع ٤ لكل من الطرفين :

∵ ا − ٤ + ٤ < − ١ + ٤ ∴ ا < ٣

□ **مثال (٣) :**

٢ س ≤ ٨

بقسمة كل من الطرفين على ٢ :

∴ س ≤ ٤

□ **مثال (٤) :**

حل المتباينة : س/٦ ≥ ٣

بضرب كل من الطرفين فى ٦ :

∴ س ≥ ١٨

□ **مثال (٥) :**

حل المتباينة : ٣ س/٤ ≥ ٩

بضرب كل من الطرفين فى ٤ :

∴ ٣ س ≥ ٣٦

وبقسمة كل من الطرفين على ٣ :

∴ س ≥ ١٢

□ **مثال (٦) :**

حل المتباينة : (س + ٥)/٣ < ٤

بضرب كل من الطرفين فى ٣

∴ س + ٥ < ١٢

وبطرح ٥ من الطرفين : ∴ س < ٧

□ مثال (٧) :

حل المتباينة : ٤ (س − ٥) ≥ ٣ (س + ٢)

بفك الأقواس :

∴ ٤ س − ٥ ≥ ٣ س + ٢

وبطرح ٣ س وإضافة ٥ لكل من الطرفين :

∴ س ≥ ٧

□ مثال (٨) :

حل المتباينة : ٧ − ٣ س ≥ ١٣

بطرح ٧ من كل من الطرفين

∴ − ٣ س ≥ ٦

وبقسمة الطرفين على ٣ :

∴ − س ≥ ٢

وبقسمة الطرفين على − ١

∴ س ≤ ٢

□ ملحوظة :

لاحظ عكس علامة المتباينة عند القسمة على عدد سالب .

□ مثال (٩) :

حل المُتباينة : ٥ − س/٢ ≤ − ٣

بطرح ٥ من كل من الطرفين :

∴ − س/٢ ≥ − ٨

بالضرب فى ٢

∴ − س ≥ − ١٦

بالضرب فى − ١

∴ س ≤ ١٦

□ **ملحوظة :**

لاحظ عكس علامة المتباينة عند الضرب فى عدد سالب .

[٢٠ ـ ٢] تدريبـــات :

أولاً : أوجد قيمة س من المتباينات التالية :

(١) ٣ س < ٦	(٦) ٣ س < − ١٨
(٢) ٧ س ≥ ٢٨	(٧) ٤ س + ٣ < ١١
(٣) ٢ س > ١٦	(٨) ٣ س − ٥ > ١٠
(٤) ٥ س ≤ ٣٠	(٩) ٧ س − ٨ ≤ ٢٧
(٥) ٤ س ≤ − ١٦	(١٠) ٢ س + ١ ≥ س − ٥

ثانياً : اختصر المتباينات التالية :

(١) ٢ س + ٥ ≤ ٩	(٦) ٨ س − ١ > ٤ س + ٣
(٢) ٣ س + ٤ ≤ ٧	(٧) ٥ س + ٣ < ٢ س + ٢
(٣) ٢ س − ٤ < ٤	(٨) ٣ (س−١) > ٤ (س−٣)
(٤) ٦ س+٣ < ٣ س + ٣	(٩) (س + ١)/٢ < ٣ س+٣

(٥) ٣ (س – ٤) > ١٦

(١٠) س + ٧ > ٢ س – ١٥

ثالثاً : أوجد قيمة س من المتباينات التالية :

(١) ٥ – ٢ س > ٧

(٢) – ٣ س + ٥ > ٩

(٣) ٢ – س < – ٢

(٤) – ٤ س +١> – ٢

(٥) ٤ – س < ٧

(٦) ٦ – ٢ س ≤ ٢٤

(٧) ٦ – ٣ س > ٢ س + ١

(٨) ٤ – ٣ س < – ١٤

(٩) ٧ + س > – ٥ – ٣ س

(١٠) ١٠ – ٥ س ≤ ٢

الدرس الحادى والعشرون :

المصفوفات الجبرية

Matrix Algebra

[٢١ ـ ١] مقدمـــة :

تستخدم المصفوفات فى التعبير عن البيانات بطريقة منظمة لسهولة التعرف على العلاقة بين هذه البيانات وتساعد فى سرعة إجراء العمليات الحسابية الخاصة بهذه البيانات .

وهى بصورة عامة تنظيم للمعلومات على شكل مستطيل يحتوى على عدد من الأرقام منظمة فى عدد من الصفوف وعدد آخر من الأعمدة ويتم وضع هذه الأعداد أو الأرقام بين قوسين كما يتضح فيما يلى :

	العمود الأول	العمود الثانى	العمود الثالث
الصف الأول	١	٢	٣
الصف الثانى	٦	٥	٤

والمصفوفة الموضحة تتكون من صفان ومن ثلاثة أعمدة . ولذلك تُسمى مثل هذه المصفوفة بمصفوفة على النظم ٢ × ٣ أو من الدرجة ٢ × ٣ أو مصفوفة ٢ × ٣ ويلاحظ أنه يذكر أولاً عدد الصفوف ثم عدد الأعمدة .
ثم عدد الأعمدة .

ويجب أن نتذكر هنا أنه لا يتم جمع أو طرح المصفوفات إلا التى تحمل نفس الدرجة أو التى من نفس النظم

[٢١ ـ ٢] جمع المصفوفات :

عند عملية جمع المصفوفات ، فإنه يتم جمع كل عنصرين متناظرين سوياً حيث تنشأ لنا مصفوفة أخرى ولكن من نفس الدرجة .

وبصفة عامة ، إذا كان لدينا المصفوفة م من الدرجة ٢ × ٢ والمصفوفة ن من نفس الدرجة ويراد جمعهم فإن :

م + ن = ل ، حيث

$$\begin{bmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ف} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + \text{س} & \text{ب} + \text{ص} \\ \text{جـ} + \text{ع} & \text{د} + \text{ف} \end{bmatrix}$$

$$\text{م} \quad + \quad \text{ن} \quad = \quad \text{ل}$$

وفيما يلي بعض الأمثلة التي توضح ذلك :

☐ مثال (١) :

اجمع : $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

☐ الحـــل :

$$= \begin{bmatrix} ٤ + ١ & ٣ + \text{صفر} \\ ٣ + ٢ & ٥ + ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٥ & ٩ \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أنها مصفوفة ٢ × ٢ من نفس درجة المصفوفات المراد جمعها .

☐ مثـــال (٢) :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & -٢ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٤ \\ -٢ & \text{صفر} & ٢ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ + ١ & ١ - ٣ & -٣+٤ \\ ٤ - ٢ & -٢+\text{صفر} & -١+٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أنها مصفوفة ٢ × ٣ من نفس درجة المصفوفات برأس المسألة .

□ مثال (٣) :

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣-٢ \\ -٢+٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ \\ +٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

ملحوظة تسمى المصفوفة ذات العمود الواحد (أياً كان عدد صفوفها) بمصفوفة العمود مثل المصفوفات بهذا المثال .

□ مثال (٤) :

$$\begin{bmatrix} \text{-ب} & \text{٥ا} \\ \text{٩ب} & \text{ا} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-٣ب} & \text{٢ا} \\ \text{+١٢ب} & \text{-٤ا} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{٢ب} & \text{٣ا} \\ \text{-٣ب} & \text{٥ا} \end{bmatrix}$$

□ مثال (٥) :

$$= \begin{bmatrix} +\frac{٥}{٤} & -\frac{٣}{٢} \\ -\frac{٩}{٥} & +\frac{٩}{٤} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{٣}{٤} & \frac{٥}{٢} \\ \frac{٧}{٥} & -\frac{٧}{٤} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١ \\ -٠,٤ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٤} & \frac{٢}{٢} \\ -\frac{٢}{٥} & \frac{٢}{٤} \end{bmatrix} =$$

□ مثال (٦) :

إذا كانت : ا = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

، جـ = $\begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{٢-} \\ \text{٢-} & \text{٣-} \end{bmatrix}$

فأوجد :

(١) ا + ب + جـ

(٢) ا + ب

(٣) ب + ا

□ الحــل :

(١) ا + ب + جـ = $\begin{bmatrix} \text{٢-٣+صفر} & \text{٢-١+٥} \\ \text{٢-٢+٣} & \text{٣-٤+١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١-} & \text{٤} \\ \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$

(٢) ا + ب = $\begin{bmatrix} \text{٣ - ٢} & \text{١ + ٥} \\ \text{٢ + ٣} & \text{٤ + ١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١-} & \text{٦} \\ \text{٥} & \text{٥} \end{bmatrix}$

(٣) ب + ا = $\begin{bmatrix} \text{٢ + ٣ -} & \text{٥ + ١} \\ \text{٣ + ٢} & \text{١ + ٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١-} & \text{٦} \\ \text{٥} & \text{٥} \end{bmatrix}$

يلاحظ من (٢) ، (٣) أن ا + ب = ب + ا

وهذا يعنى أن عملية جمع المصفوفات عملية تبادلية تماماً مثل جمع الأعداد الحقيقية ، فمثلاً ٥ + ٦ = ٦ + ٥ = ١١

□ مثال (٧) :

اجمع $\begin{bmatrix} \text{٣} & \text{٥} & \text{٧} \\ \text{٤} & \text{١} & \text{٢} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{٦} & \text{٢-} \\ \text{٤} & \text{٣} \\ \text{٣} & \text{٥} \end{bmatrix}$

[٢١ ـ ٣] تدريبات على جمع المصفوفات :

اولاً : حدد درجة المصفوفات الآتية :

لاحظ أن المصفوفة الأولى من الدرجة ٢ × ٣ بينما المصفوفة الثانية فهى من الدرجة ٣ × ٢ ، وعلى ذلك وحيث أنهما من درجات مختلفة لذلك فإنه لا يمكن جمعهما « استحالة ذلك » .

[١]
$$\begin{bmatrix} \text{١} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{١−} & \text{٥} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

[٢]
$$\begin{bmatrix} \text{٣} & \text{٢} \\ \text{٣} & \text{٢} \\ \text{١−} & \text{٢} \end{bmatrix}$$

[٣]
$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{١} & \text{صفر} \\ \text{١−} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٤} & \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$$

[٢]
$$\begin{bmatrix} \text{٣+} & \text{٢−} & \text{١−} \\ \text{١٣} & \text{٥} & \text{٢} \\ \text{٦} & \text{١−} & \text{٤} \end{bmatrix}$$

[٥]
$$\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$$

[٦]
$$\begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{٢} \\ \text{−} \end{bmatrix}$$

[٧]
$$\begin{bmatrix} \text{١} & \text{٣} \\ \text{١−} & \text{٤} \end{bmatrix}$$

[٨]
$$\begin{bmatrix} \text{٢−} & \text{٤} & \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$$

[٩]
$$\begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{٢} \\ \text{٣} \\ \text{١−} \end{bmatrix}$$

[١٠]
$$\begin{bmatrix} \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$$

ثانياً : أوجد مجموع المصفوفات التالية :

[١] $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ \\ -١ \\ -٤ \end{bmatrix}$ ،

[٢] $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{صفر} \\ -٢ \end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ،

[٤] $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & \text{صفر} \end{bmatrix}$

[٥] $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ب} \\ \text{صفر} \end{bmatrix}$

[٦] $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢\,\text{س} \\ -٣\,\text{ص} \end{bmatrix}$

[٧] $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ،

[٨] $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

[٩] $\begin{bmatrix} ١ & \text{ب} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٣ & -٢\,\text{ب} \end{bmatrix}$

[١٠] $\begin{bmatrix} \text{جـ} \\ \text{د} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{د} \\ \text{ب} \end{bmatrix}$

[١١] $\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{٣س} \\ \text{٢س} & \text{ص} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\text{٢ص} & \text{س} \\ +\text{٢س} & +\text{س} \end{bmatrix}$

[١٢] $\begin{bmatrix} \text{٤ص} & \text{٣س} \\ \text{٢ص} & -\text{س} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\text{٢ص} & -\text{س} \\ -\text{ص} & \text{٣س} \end{bmatrix}$

ثالثاً : إذا كانت :

$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{٢} & \text{٤} \\ -\text{١} & \text{٣} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{٣} & -\text{٧} \\ \text{٢} & \text{٥} \end{bmatrix}$

، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{٣} \\ \text{٤} & -\text{١} \end{bmatrix}$

فأوجد المصفوفات التالية :

[١] أ + ب ، [٢] جـ + ب ، [٣] ب + أ
، [٤] أ + ب + جـ

رابعاً : إذا كانت :

$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & -\text{١} \\ \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -\text{١} & -\text{٢} \\ \text{صفر} & -\text{٤} \end{bmatrix}$

، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{٣} \\ \text{٥} & -\text{٢} \end{bmatrix}$ ، فأوجد المصفوفات التالية :

[١] أ + ب ، [٢] ب + جـ ، [٣] أ + جـ ،

[٤] (أ + ب) + جـ ، [٥] أ + [ب + جـ]

□ **ملحوظة :**

ستلاحظ بعد حلك [٤] ، [٥] ، خاصية الدمج بالنسبة للجمع أى أن :

[٤] = [٥]

[٢١ ـ ٤] طرح المصفوفات :

إذا كانت م = $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، ن = $\begin{bmatrix} \text{هـ} & \text{ز} \\ \text{و} & \text{ح} \end{bmatrix}$

فإن : م − ن = $\begin{bmatrix} \text{أ} - \text{هـ} & \text{ب} - \text{ز} \\ \text{جـ} - \text{و} & \text{د} - \text{ح} \end{bmatrix}$

ويجب عند إجراء عمليات الطرح مراعاة إشارة كل عنصر على حدة .

□ **مثال (١) :**

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٣ - ٢ & ٤ - ٣ \\ ٥ - ٤ & ٦ - ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

□ **مثال (٢) :**

$$\begin{bmatrix} -٧ & ٤ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٧-٤ & ٤-(-٥) \\ ٢-٤ & -٣-(-٣) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١١ & ٩ \\ -٢ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

وللتأكد :

$$-٧-٤ = -١١$$

$$\text{،}\ ٢-٤ = -٢$$

$$\text{،}\ ٤-(-٥) = ٤+٥ = ٩$$

$$\text{،}\ -٣-(-٣) = -٣+٣ = \text{صفر}$$

□ **مثال (٣) :**

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٢ \\ -٧ & ٨ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٥ & ٣ & -٤ \\ ٤ & -٣ & \text{صفر} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ٣-(-٥) & ٤-٣ & -٢-(-٤) \\ -٧-٤ & ٨-(-٣) & ٥-\text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٢ \\ -١١ & ١١ & ٥ \end{bmatrix}$$

□ **مثال (٤) :**

$$\begin{bmatrix} -٣ \\ ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣-٤ \\ ٢-١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ ١ \end{bmatrix}$$

□ **مثال (٥) :**

$$\begin{bmatrix} \text{٢ا} & \text{٣ب} \\ -\text{جـ} & \text{٣د} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{٣أ} & \text{٥ب} \\ -\text{٣جـ} & -\text{٤د} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -١ & -٢\text{ب} \\ ٢\text{جـ} & ٧\text{د} \end{bmatrix}$$

☐ **مثال (٦) :** إذا كانت

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} ،\ \text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$،\ \text{ج} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$$ ، فأوجد :

[١] أ − ب [٢] ب − ج [٣] أ − ج

الحـــل :

$$[١]\ \text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣-٥ & ٢-(-٣) \\ ١-(-١) & ٤-٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٢ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$[٢]\ \text{ب} - \text{ج} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥-(-٢) & -٣-٣ \\ -١-(-٤) & ٤-٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & -٦ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

$$[٣]\ \text{أ} - \text{ج} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{matrix} ٣-(-٢) & ٢-٣ \\ ١-(-٤) & ٤-٥ \end{matrix}\Bigg] = \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$$

ملاحظة : لو أجرينا العملية ب ـ ا فإننا سوف نرى أن ا − ب = −(ب − ا)

□ مثال (٧) :

اطرح $\begin{bmatrix} ٣ \\ -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -١ \end{bmatrix}$

□ الحــل :

ليس من الممكن حل هذه المسألة لاختلاف نظم أو درجة كل منهما فالأولى ٢ × ١ والثانية ١ × ٢

□ مثال (٨) :

إذا كانت : أ + $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة أ :

□ الحــل :

$= \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٥ - ٢ & ٦ - (-٣) \\ -٢ - ٤ & ٣ - ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$

[٢١ ـ ٥] تدريبـــات :

أولاً : اختصر الآتى :

[١] $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$

[٢] $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ \\ ٧ \end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix} -١ \\ -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$

[٤] $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$

ثانياً : اختصر المصفوفات التالية ذات الدرجة ٢ × ٢

[١] $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ \text{صفر} & ٣ \end{bmatrix}$

[٢] $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ -٥ & -٤ \end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٤ & \text{صفر} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ -٤ & -٥ \end{bmatrix}$

[٤] $\begin{bmatrix} ٢ & \text{صفر} \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ -٢ & \text{صفر} \end{bmatrix}$

[٥] $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix}$

[٦] $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ \text{صفر} & -٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & \text{صفر} \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$

ثالثاً : إذا كانت :

أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٣ & \text{صفر} \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}$

فأوجد المصفوفات الآتية :

[١] أ + ب　　[٢] أ − ب　　[٣] أ + جـ

[٤] جـ − ب　　[٥] (أ + ب) − (أ + جـ)

رابعاً : حل المعادلات التالية للمصفوفات ذات الدرجة ٢ × ٢ :

[١] $$س - \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & -١ \end{bmatrix}$$

[٢] $$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} - س = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

[٣] $$س + \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$$

[٤] $$س - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٥ \\ -٧ & ٦ \end{bmatrix}$$

[٢١ ـ ٦] ضرب المصفوفة فى رقم :

عند ضرب مصفوفة ما فى رقم محدد ، فإن كل عنصر من عناصر المصفوفة يتم ضربه ، بدوره فى هذا الرقم .

وبصفة عامة فإن :

$$س \begin{bmatrix} ا & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س\ ا & س\ ب \\ س\ جـ & س\ د \end{bmatrix}$$

□ **مثال (١) :**

$$٢ \begin{bmatrix} ٣ & \text{صفر} \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \times ٣ & ٢ \times \text{صفر} \\ ٢ \times ٢ & ٢ \times -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & \text{صفر} \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

□ مثال (٢) :

$$٣ \begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ -٤ & ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٣ \\ -١٢ & ٣ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

□ مثال (٣) :

$$-٥ \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٣ & \text{صفر} \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & ١٠ \\ ١٥ & \text{صفر} \\ -٢٠ & ١٥ \end{bmatrix}$$

□ مثال (٤) :

$$-\frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & -٣ \\ \frac{٢}{٢} & +٣ \end{bmatrix}$$

□ مثال (٥) :

حل المعادلة : $٥ \text{ هـ} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣٥ & ١٥ \\ ٢٥ & -٣٠ & ١٧ \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{ هـ} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٥} & -\frac{٣٥}{٥} & \frac{١٥}{٥} \\ \frac{٢٥}{٥} & -\frac{٣٠}{٥} & \frac{١٧}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٧ & ٣ \\ ٥ & -٦ & ٣,٤ \end{bmatrix}$$

□ مثال (٦) :

حل المعادلة : $٢ \text{ س} - \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

$$\therefore\ ٢\,س = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ س = \begin{bmatrix} \frac{٨}{٢} & \frac{١١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} & \frac{٢}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥{,}٥ \\ ١{,}٥ & ١ \end{bmatrix}$$

[٢١ ـ ٧] تدريبـــات :

أولاً : أوجد ناتج ما يلى :

[١] $٣ \begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$ [٢] $٤ \begin{bmatrix} ٣ \\ -٢ \end{bmatrix}$

[٣] $-٢ \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ [٤] $\frac{٣}{٤} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

[٥] $\frac{٥}{٦} \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٢ & -٤ \\ ١ & ١٢ \end{bmatrix}$ [٦] $-\frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ٣ & \text{صفر} \\ ٩ & -٦ \end{bmatrix}$

ثانياً : إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفات التالية :

[١] $٢\,س$ [٢] $\frac{-٣\,س}{٢}$

[٣] $\frac{٥}{٣}$ س   [٤] $\frac{س}{٤}$

ثالثاً : إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفات التالية

(من الدرجة ٢ × ٢) :

[١] ٢ ص + ٣ ص   [٢] ٣ ص − ٤ ص   [٣] ٥ ص − ٣ ص

[٤] حل من [١] إلى [٣] متبعاً قواعد الجبر المعتادة فى الطرح والجمع .

رابعاً : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} صفر & ٥ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

فأوجد ما يلى :

[١] ٣ س

[٢] ٣ ص

[٣] ٢ س

[٤] س + ص

[٥] ٣ (س + ص)

[٦] ٣ س + ٣ ص

[٧] س − ص

[٨] ٢ (س − ص)

[٩] ٢ س − ٢ ص

[١٠] ٣ س − (٢ س + ٣ ص)

[١١] سجل ملاحظاتك بالنسبة للمطاليب [٤] ، [٥] ، [٦] ، وكذلك بالنسبة [٧] ، [٨] ، [٩] .

خامساً : أوجد قيمة س من كل من المعادلات التالية :

[١] ٣ س = $\begin{bmatrix} ٩ \\ ١٢ \\ -٦ \end{bmatrix}$ ، [٢] $٢\,\text{س} + \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$

[٣] $٣\,\text{س} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٨ \\ -٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$ ،

[٤] $٤\,\text{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & -١٠ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$

[٥] $٢\,\text{س} - \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

[٢١ ـ ٨] ضرب مصفوفتين فى بعضهما :

إذا كانت أ مصفوفة من الدرجة م × ن أى تحتوى على م صف ، ن عمود ، وكانت ب مصفوفة من الدرجة س × ص أى تحتوى على س صف ، ص عمود .

فإن حاصل ضربهما مصفوفة جـ = أ × ب

ولا يتم هذا الضرب إلا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى أ مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية ب

أى إذا كان ن = س

وتكون المصفوفة الجديدة جـ من الدرجة م × ص

أى عدد صفوفها مساوياً لصفوف المصفوفة الأولى بينما عدد أعمدتها مساوياً لعدد أعمدة المصفوفة الثانية .

□ مثـــال :

إذا ضربنا المصفوفة ذات الدرجة (٣× ٢) فى المصفوفة ذات الدرجة (٢ × ٤) فإن ناتج الضرب عبارة عن مصفوفة من الدرجة (٣ × ٤)

وسوف يكون تركيزنا على ضرب المصفوفات التالية فى بعضها :

(١) مصفوفة من الدرجة (١ × ٢) مضروبة فى مصفوفة من الدرجة (٢ × ١)

(٢) مصفوفة من الدرجة (٢ × ٢) مضروبة فى مصفوفة من الدرجة (٢ × ١)

(٣) مصفوفة من الدرجة (٢ × ٢) مضروبة فى مصفوفة من الدرجة (٢ × ٢)

□ الحالة الأولى :

(١ × ٢) × (٢ × ١)

وبصفة عامة فإن :

$$\begin{bmatrix} \text{ا} & \text{ب} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{جـ} \\ \text{د} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ ب + جـ د} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{عنصر واحد فقط} \end{bmatrix}$$

وحاصل الضرب هذا مصفوفة عدد صفوفهـا ١ وعدد أعمدتها ١ أى من الدرجة ١ × ١ أى أنها من عنصر واحد فقط .

□ كيفية إجراء عملية الضرب :

العنصر الأول فى المصفوفة الأولى يُضرب فى العنصر الأول من المصفوفة الثانية ويجمع عليهم العنصر الثانى فى المصفوفة الأولى مضروباً فى العنصر الثانى فى المصفوفة الثانية .

□ مثال (١) :

اضرب $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (٣ \times -٢) + (٢ \times ٤) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ + ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \end{bmatrix}$$

□ الحالة الثانية :

(٢ × ٢) × (٢ × ١)

تنتج مصفوفة (٢ × ١)

وبصفة عامة فإن :

$$\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} هـ \\ و \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أهـ + ب و \\ جـ هـ + د و \end{bmatrix}$$

□ كيفية إجراء عملية الضرب :

العنصر الأول فى المصفوفة الأولى × العنصر الأول فى المصفوفة الثانية ويجمع عليهم العنصر الثانى فى المصفوفة الأولى × العنصر الثانى فى المصفوفة الثانية وناتج هذا كله يعطى العنصر الأول فى المصفوفة الناتجة .

ثم ، العنصر الثالث فى المصفوفة الأولى × العنصر الأول فى المصفوفة الثانية ويجمع عليهم العنصر الرابع فى المصفوفة الأولى × العنصر الثانى فى المصفوفة الثانية .

وناتج هذا يعطى العنصر الثانى (السفلى) فى المصفوفة الناتجة .

□ مثال (٢) :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ \\ ٦ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢\times -٣ + ٣\times ٦ \\ -١\times -٣ + ٤\times ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ + ١٨ \\ +٣ + ٢٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٢٧ \end{bmatrix} =$$

ويلاحظ أن الناتج مصفوفة من صفين ومن عمود واحد أى (٢ × ١)

□ الحالة الثالثة :

مصفوفة (٢ × ٢) × مصفوفة (٢ × ٢)

ينتج مصفوفة (٢ × ٢) كذلك .

وبصفة عامة فإن :

$$\begin{bmatrix} \text{عنصر١} & \text{عنصر٢} \\ \text{ا} & \text{ب} \\ \text{عنصر٣} & \text{عنصر٤} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{عنصر١} & \text{عنصر٢} \\ \text{هـ} & \text{و} \\ \text{عنصر٣} & \text{عنصر٤} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أ هـ + ب ز} & \text{أ و + ب ح} \\ \text{جـ هـ + د ز} & \text{جـ و + د ح} \end{bmatrix}$$

□ كيفية إجراء عملية الضرب :

كما هو موضح فى الحالتين الأولى والثانية فإن الفكرة هنا تنبنى على أساس ضرب عناصر صفوف المصفوفة الأولى فى عناصر أعمدة المصفوفة الثانية وعلى ذلك فإن عملية الضرب تتم كالتالى :

(أ) العنصر الأول فى المصفوفة الأولى (أ) × العنصر الأول فى المصفوفة الثانية (هـ) ويجمع عليهم العنصر الثانى فى المصفوفة الأولى (ب) × العنصر الثالث فى المصفوفة الثانية (ز) ، ومجموع ما سبق كله يعطى العنصر الأول فى المصفوفة الناتجة .

(ب) العنصر الأول فى المصفوفة الأولى (أ) × العنصر الثانى فى المصفوفة الثانية (و) ويجمع عليهم العنصر الثانى فى المصفوفة (ب) × العنصر الرابع فى المصفوفة الثانية (ح) ، ومجموع ما سبق كله يعطى العنصر الثانى فى المصفوفة الناتجة .

(جـ) العنصر الثالث فى المصفوفة الأولى (جـ) × العنصر الأول فى المصفوفة الثانية (هـ) ويجمع عليهم العنصر الرابع فى المصفوفة الأولى (د) × العنصر الثالث فى المصفوفة الثانية (ز) ، ومجموع ما سبق كله يعطى العنصر الثالث فى المصفوفة الناتجة .

(د) العنصر الثالث فى المصفوفة الأولى (جـ) × العنصر الثانى فى المصفوفة الثانية (و) ويجمع عليهم العنصر الرابع فى المصفوفة الأولى (د) × العنصر الرابع فى المصفوفة الثانية (ح) ، ومجموع ما سبق كله يعطى العنصر الرابع فى المصنوفة الناتجة .

□ **مثال (٣) :**

$$= \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢٦ & ٨ \\ ٤٦ & ١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٦\times٣)+(٤\times٢) & (٢\times٣)+(١\times٢) \\ (٦\times٥)+(٤\times٤) & (٢\times٥)+(١\times٤) \end{bmatrix}$$

□ **مثال (٤) :**

$$= \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٤- \\ ٧- & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢-\times٢-١\times٣ & ٢\times٢-\text{صفر}\times٣ \\ ٢-\times٤+١\times١ & ٢\times٤+\text{صفر}\times١ \end{bmatrix} =$$

□ مثال (٥) :

إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١- & \text{صفر} \end{bmatrix} = \text{ص} \text{ ، } \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \text{س}$$

فأوجد :

[١] س × ص　　　　[٢] ص × س

الحـــل

$$\begin{bmatrix} ١-\times١-٢\times٣ & \text{صفر}\times١-٤\times٣ \\ ١-\times١+٢\times٢ & \text{صفر}\times١+٤\times٢ \end{bmatrix} = \text{ص} \times \text{س} \quad [\,١\,]$$

$$\begin{bmatrix} ٧ & ١٢ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ١\times٢+١-\times٤ & ٢\times٢+٣\times٤ \\ ١\times١-١-\times\text{صفر} & ٢\times١-٣\times\text{صفر} \end{bmatrix} = \text{س} \times \text{ص} \quad [\,٢\,]$$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ١٦ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} =$$

□ ملحوظة مهمة :

من المثال السابق نستنتج إنه إذا كانت س ، ص مصفوفتين قابلتين للضرب على أى صورة فإنه ليس من الضرورى أن يكون س × ص = ص × س

مما يعنى أن عملية ضرب المصفوفات ، ليست عملية إبدالية أى أن :

س ص ≠ ص س

وفى حالة ضرب ثلاثة مصفوفات أو أكثر فى بعضها فإنه من المهم جداً مراعاة ترتيب المصفوفات حال ضربهما .

ففى حالة ضرب ثلاث مصفوفات : س × ص × ع

فإنه يمكن الحل بطريقتين تؤديان لنفس النتيجة الصحيحة .

فإما أن نضرب (س × ص) × ع ، أى نضرب الأولى والثانية فى بعضهم ثم نصرب الناتج فى الثالثة .

وإما أن نضرب س × (ص × ع) ، أى نضرب الثانية والثالثة فى بعضها والناتج يكون مضروباً في الأولى [الأولى أولاً ثم الناتج] .

[٢١ ـ ٩] تدريبـــات :

أولاً : أوجد ناتج ضرب ما يلى :

[١] $\begin{bmatrix}٤\\٣\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١ & ٣\end{bmatrix}$ [٦] $\begin{bmatrix}٣\\ \text{صفر}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١ & ٣\\ ٥ & -٢\end{bmatrix}$

[٢] $\begin{bmatrix}٣\\١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٤ & ٢\end{bmatrix}$ [٧] $\begin{bmatrix}-٥\\٤\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-١ & -١\\ ٣ & -٢\end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ [٨] $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

[٤] $\begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ [٩] $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

[٥] $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ [١٠] $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

ثانياً : أوجد ناتج ضرب ما يلى :

[١] $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ [٦] $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

[٢] $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ [٧] $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ [٨] $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

[٤] $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ [٩] $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

[٥] $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ [١٠] $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

ثالثاً : إذا كان :

س = $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

فأوجد :

[١] س ص　　　　[٢] ص س

رابعاً : إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} -٢ & \text{صفر} \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

، جـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فأوجد :

[١] أ ب　　　　[٢] ب أ

[٣] أ جـ　　　　[٤] ب جـ

[٥] أ ب + أ جـ　　　　[٦] أ (ب + جـ)

[٧] أ (جـ + ب)　　　　[٨] ب + أ جـ

خامساً : أوجد :

[١] $\begin{bmatrix} ٣ & \text{صفر} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$

[٢] $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

[٢١ ـ ١٠] مصفوفة الوحدة *The identity matrix* :

إذا ضربنا أى مصفوفة من الدرجة ٢ × ٢ فى المصفوفة

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

وبصفة عامة فإن : $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$ تعطى ← $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$

ومن هذه الخاصية فإن مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز (I) . هى العنصر الضربى المحايد لجميع المصفوفات المربعة (عدد صفوفها = عدد أعمدتها) المتحدة معها فى الدرجة ويكون :

أ I = I أ = أ

ويلاحظ كذلك أنه إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن :

أ ÷ أ = I وبحيث I بنفس درجة أ لأن I أ = أ

وكذلك فإن : ٢ أ ÷ أ = ٢ I ، ٥ أ ÷ أ = ٥ I وهكذا ..

لنعتبر الآن المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ١١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ والمصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥- & ١ \\ ١١ & ٢- \end{bmatrix}$

حاصل ضرب أ ب =

$$\begin{bmatrix} ١١ \times ٥ + ٥- \times ١١ & ٢- \times ٥ + ١ \times ١١ \\ ١١ \times ١ + ٥- \times ٢ & ٢- \times ١ + ١ \times ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

∴ فى هذه الحالة يكون :

$$\text{أ} \times \text{ب} = I$$

ومن هذه النتيجة فإننا نقول أن المصفوفة ب هى معكوس المصفوفة أ وتُكتب (أ^{-1})، أى أن ب = أ^{-1}

وبصورة عامة فإنه إذا ضربت مصفوفة فى معكوسها فإنها تعطى مصفوفة الوحدة I وبذلك :

$$\text{أ} \times \text{أ}^{-1} = I$$

فإذا قمنا بعكس المصفوفتين أ ، ب أى ضربنا ب × أ بدلاً من أ × ب فإن الناتج يبقى كما هو مصفوفة الوحدة ويعنى هذا كذلك أن أ هى معكوس ب

أى أ = ب^{-1}

وبذلك يكون $\text{أ}^{-1} \times \text{أ} = I$

[٢١ ـ ١١] تدريبـــات :

أولاً : أوجد :

[١] $\begin{bmatrix}1&\text{صفر}\\\text{صفر}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&5\end{bmatrix}$ [٢] $\begin{bmatrix}1&\text{صفر}\\\text{صفر}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3\\3&-2\end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix}-2&5\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\text{صفر}\\\text{صفر}&1\end{bmatrix}$ [٤] $\begin{bmatrix}2&\text{س}\\\text{س}&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\text{صفر}\\\text{صفر}&1\end{bmatrix}$

ثانياً : أكمل العناصر الناقصة فى المصفوفات التالية :

[١] $\begin{bmatrix}?&4\\&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\text{صفر}\\\text{صفر}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&?\\?&?\end{bmatrix}$

[٢] $\begin{bmatrix}1&\text{صفر}\\\text{صفر}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&5\\?&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?\\2&?\end{bmatrix}$

ثالثاً : أوجد :

[١] $\begin{bmatrix}3&-1\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\text{صفر}\\5&3\end{bmatrix}$ [٥] $\begin{bmatrix}3&2\\7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2\\-7&3\end{bmatrix}$

[٢] $\begin{bmatrix}2&1\\\text{صفر}&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\4&-1\end{bmatrix}$ [٦] $\begin{bmatrix}-1&2\\-3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2\\3&-1\end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix}-1&-4\\-2&\text{صفر}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3\\2&-7\end{bmatrix}$ [٧] $\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$

[٤] $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$ [٨] $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

رابعاً : ادرس الأسئلة الفرعية فى **ثالثاً** [٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨] ، جيداً ومنها حاول كتابة المصفوفة التى تجعل إجابتك (حاصل الضرب) هى مصفوفة الوحدة .

[١] $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ؟ & ؟ \\ ؟ & ؟ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$

[٢] $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ؟ & ؟ \\ ؟ & ؟ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ؟ & ؟ \\ ؟ & ؟ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$

[٢١ ـ ١٢] عكس المصفوفة :

ليست كل المصفوفات لها معكوس ولذلك فنحن بحاجة إلى معرفة طريقة لتحديد ما إذا كان هنالك معكوس أم لا للمصفوفة .

ويتم هذا بإيجاد محدد المصفوفة بالطريقة التالية :

محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$ = أ د − ب جـ

فإذا كان هذا المحدد = صفر فإن المصفوفة ليس لها معكوس بينما إذا كانت قيمة هذا المحدد ≠ صفر (سواء كانت القيمة موجبة أو سالبة) فإن المصفوفة يكون لها معكوس .

□ مثال (١) :

حدد ما إذا كان هنالك معكوس للمصفوفات التالية أم لا :

[١] $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ ، [٢] $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ ، [٣] $\begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ ٤ & ٥- \end{bmatrix}$

□ الحـــل :

[١] محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$

= (٢ × ٦) − (٤ × ٣) = ١٢−١٢ = صفر

∴ فالمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ ليس لها مصفوفة عكسية

ثم نضربها فى مقلوب محدذ المصفوفة ، أى فى $\frac{1}{\text{المحدد}}$

بمعنى : أن نبدل عناصر القطر الرئيسى ونعكس إشارات العناصر الباقية للقطر الآخر ثم نضرب الناتج فى

$$\frac{1}{\text{المحدد}}$$

□ مثال (٢) :

أوجد معكوس المصفوفة أ « أ$^{-1}$ »

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

□ الحـــل :

محدد المصفوفة = ٣ × ٢ − ٤ × ١ = ٢

∴ أ$^{-1}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢}$

= $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

وبالطبع فإنه يمكن التأكد من صحة الإجابة ، حيث أن أ × أ$^{-1}$ = I

فإننا نحسب

[٢] محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$

= (٣ × ٥) − (٤ × −٢) = ٢٣

∴ فالمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ لها مصفوفة عكسية

[٣] محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ ٤ & ٥- \end{bmatrix}$

= (−٢ × ٤) − (−٣ × −٥) = −٨ − ١٥ = − ٢٣

∴ فالمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ ٤ & ٥- \end{bmatrix}$ لها مصفوفة عكسية

والآن وبعد أن علمنا كيفية إثبات ما إذا كان هنالك مصفوفة عكسية أم لا لأى مصفوفة (مربعة)

علينا الآن معرفة إيجاد المصفوفة العكسية لمصفوفة ما :

نبدأ بإعادة ترتيب المصفوفة :

$\begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$ ذات القطر الرئيسى أ د وبحيث تصبح والقطر غير ب جـ

$\begin{bmatrix} ب - & د \\ أ & جـ - \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢}- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{٣}{٢}\times ٤ + ٢ - \times ٣ & \frac{١}{٢} - \times ٤ + ١ \times ٣ \\ \frac{٣}{٢}\times ٢ + ٢ - \times ١ & \frac{١}{٢} - \times ٢ + ١ \times ١ \end{bmatrix} =$$

$$I = \begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٦ + ٦- & ٢ - ٣ \\ ٣ + ٣٢ - & ١ - ١ \end{bmatrix} =$$

مما يؤكد صحة الإجابة .

وعلى هذا فإن $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢}- \end{bmatrix}$ هى معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

□ **مثال (٣) :**

أوجد معكوس المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

□ **الحـــل :**

محدد المصفوفة س = (٢ × ٥) ـــ (−١ × ٣) = ١٣

∴ هذه المصفوفة لها معكوس .

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{١٣} & \frac{٥}{١٣} \\ \frac{٢}{١٣} & \frac{٣}{١٣}- \end{bmatrix} = \frac{١}{١٣} \times \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = ^{١-}\text{س} \quad ∴$$

وللتأكد نضرب س × س$^{-١}$ ويجب أن يكون الجواب مصفوفة الوحدة .

$$\therefore \text{س} \times \text{س}^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{٥}{١٣} & \frac{١}{١٣} \\ -\frac{٣}{١٣} & \frac{٢}{١٣} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ \times \frac{٥}{١٣} - ١ \times -\frac{٣}{١٣} & ٢ \times \frac{١}{١٣} - ١ \times \frac{٢}{١٣} \\ ٣ \times \frac{٥}{١٣} - ٥ \times \frac{٣}{١٣} & ٣ \times \frac{١}{١٣} + ٥ \times \frac{٢}{١٣} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١٠}{١٣} + \frac{٣}{١٣} & \frac{١}{١٣} - \frac{٢}{١٣} \\ \frac{١٥}{١٣} - \frac{١٥}{١٣} & \frac{٣}{١٣} + \frac{١٠}{١٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١٣}{١٣} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \frac{١٣}{١٣} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} =$$

مما يؤكد صحة الإجابة .

[٢١ ـ ١٣] تدريبـــات :

أولاً : احسب محدد المصفوفات التالية .

[١] $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ [٢] $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ [٣] $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

[٤] $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ [٥] $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ [٦] $\begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ ٥ & \text{صفر} \end{bmatrix}$

ثانياً : من إجابتك للسؤال السابق أوجد معكوس المصفوفات إن وُجد .

ثالثاً : اثبت أن المصفوفات الآتية هى نفسها معكوس المصفوفة :

[١] $\begin{bmatrix} -١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & -١ \end{bmatrix}$ [٢] $\begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ -١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$ [٣] $\begin{bmatrix} \text{صفر} & -١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$

رابعاً : إذا كانت :

س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ فأوجد :

[١] س ص [٤] $\text{ص}^{-١}$

[٢] ص س [٥] $(\text{س ص})^{-١}$

[٣] $\text{س}^{-١}$ [٦] $\text{س}^{-١}\ \text{ص}^{-١}$

خامساً : إذا كانت :

س = $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٢ & \text{صفر} \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ فأوجد

[١] س ص　　　　[٤] ص$^{-١}$

[٢] ص س　　　　[٥] (س ص)$^{-١}$

[٣] س$^{-١}$　　　　[٦] س$^{-١}$ ص$^{-١}$

سادساً : علل عدم وجود معكوس للمصفوفات الآتية :

[١] $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ١٠ & ١٢ \end{bmatrix}$　　　　[٢] $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

[٣] $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$　　　　[٤] $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

سابعاً : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$ فأوجد :

[١] س^{٢}　　　　[٢] ٢ س^{٣}

[لاحظ أن س^{٢} هى س × س]

[٣] أوجد معكوس س^{٢}　　　　[٤] أوجد معكوس ٢ س^{٣}

[٢١ ـ ١٤] حل المعادلات باستخدام المصفوفات :

يمكننا استخدام المصفوفات فى حل المعادلات الآتية بالطريقة الآتية :

□ مثال (١) :

حل المعادلتين :

٢ س + ص = ١

٥ س + ٣ ص = −١

□ الحـل :

نكتب المعادلتين فى صورة المصفوفات كالتالى :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ثم نوجد عكس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ فيصبح } \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ثم نضرب طرفى كل من المعادلتين بالمصفوفة العكسية فيكون :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 3\times2-1\times5 & 3\times1-1\times3 \\ -5\times2+2\times5 & -5\times1+2\times3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1\times-1 \\ -5\times1+2\times-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ -٧ \end{bmatrix}$$ ومنها : $$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ -٧ \end{bmatrix}$$

∴ س = ٤ ، ص = − ٧

□ مثال (٢) :

حل المعادلتين :

س + ٣ ص = ١

٤ س − ص = − ٢

□ الحل :

نضع المعادلات فى صورة مصفوفات .

$$\therefore \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

ثم نوجد عكس المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ بأن نوجد أولاً قيمةالمحدد.

فنجدها = (١ × −١) − (٣ × ٤) = − ١ − ١٢ = − ١٣

$$\therefore \text{عكس المصفوفة} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} = -\frac{١}{١٣} \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{٣}{١٣} & \frac{١}{١٣} \\ -\frac{١}{١٣} & \frac{٤}{١٣} \end{bmatrix}$$

ثم نضرب كلا من الطرفين ، بالضرب المسبق بالمصفوفة العكسية .

$$\begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{٣}{١٣} & \frac{١}{١٣} \\ -\frac{١}{١٣} & \frac{٤}{١٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{٣}{١٣} & \frac{١}{١٣} \\ -\frac{١}{١٣} & \frac{٤}{١٣} \end{bmatrix} \therefore$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{٥}{١٣} \\ \frac{٦}{١٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} \therefore$$

ومنها . $\text{س} = -\frac{٥}{١٣}$ ، $\text{ص} = \frac{٦}{١٣}$

□ ملحوظة هامة :

تعتبر هذه الطريقة مفيدة جداً فى حل أزواج المعادلات الآتية ، ولكن لا يمكن استخدام هذه الطريقة إذا لم يكن هنالك مصفوفة عكسية للمصفوفة الرئيسية كما سبق .

والمثال التالى يوضح ذلك .

□ مثـــال :

حل المعادلتين :

٧ س + ١٤ ص = ٥

س + ٢ ص = ١

وحيث أن المصفوفة الرئيسية $\begin{bmatrix} ٧ & ١٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ليس لها مصفوفة

عكسية حيث أن محددها = ٧ × ٢ − ١٤ × ١ = صفر

ولذلك فإنه لا يمكننا حل هاتين المعادلتين بهذه الطريقة .

[٢١ ـ ١٥] تدريبــــات :

أولاً : اكتب المعادلتين الآتيتين اللتين يمكن التعبير عنهما بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٨ \end{bmatrix}$$

وبضرب كل من الطرفين ضرباً مسبقاً فى المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ،

أوجد قيمة كل من س ، ص

ثانياً : عبر عن المعادلتين الآتيتين فى صورة مصفوفات :

٣ س + ص = ٥

٢ ص + ٢ ص = ٤

ثم بالضرب المسبق فى المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ لكلا من طرفى المعادلة

أوجد قيمة س ، ص .

ثالثاً : استخدم طريقة المصفوفة فى حل أزواج المعادلات الآتية :

[١] ٥ س + ٣ ص = ٩
٢ س − ٢ ص = ٥

[٢] ٢ س + ص = ١
٥ س + ٣ ص = ٣

[٣] ٣ س + ٢ ص = ٩
س + ص = ٤

[٤] ٧ س + ٣ ص = − ٣
٢ س + ص = ٢

رابعاً : استخدم طريقة المصفوفات فى حل أزواج المعادلات الآتية :

(كن حذراً فى إيجاد عكس المصفوفة) .

[١] س − ٣ ص = − ١
س + ٢ ص = ٣

[٢] ٢ س + ص = ١١
س + ٤ ص = ٢٣

[٣] ٢ س + ص = ١
س + ٤ ص = ٤

[٤] ٢ س − ص = ١
٣ س − ٢ ص = ٢

خامساً : أعد ترتيب المعادلات التالية ثم حلها بطريقة المعادلات :

[١] ٣ س = ٥ ص + ٩
٩ ص − ٣ س − ٧ = صفر

[٢] ٣ ص − ٢ س + ٢ = صفر
٣ س + ٢ ص − ٥ = صفر