الجزء الرابع

الهندسة " المثلثات "

GEOMETRY / TRIGONOMETRY

الدرس الثانى والعشرون :

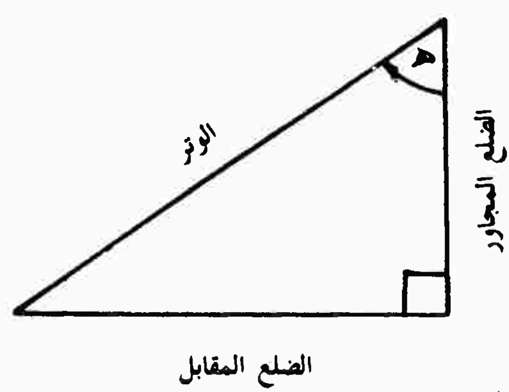
النسـب المثلثيـة

Trigonometric ratios

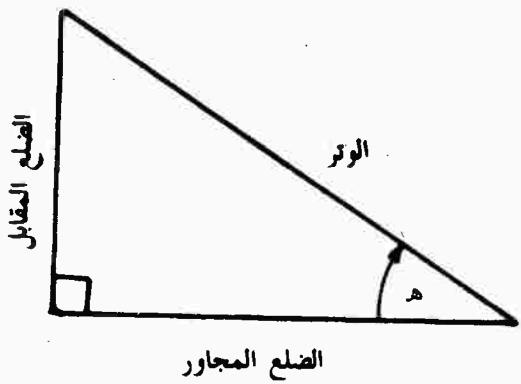
[٢٢ ـ ١] مقدمة :

علمنا مما سبق بالجزء الثانى « الكتاب الثانى » أن هنالك علاقة تربط بين الأطوال الثلاثة للمثلث القائم الزاوية وتعرف هذه العلاقة بقاعدة أو نظرية فيثاغورث والتى تنص على أن المربع المنشأ على الوتر يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين .

وسوف نوجد علاقات أخرى بين أطوال الأضلاع والزوايا فى المثلث القائم الزاوية فقط ، انظر الرسم شكل (٢٢ ـ ١) .



(أ)



(ب)

شكل [٢٢ ـ ١] أ ، ب

[١] الوتر : ***hypotenuse***

هو أطول ضلع بالمثلث ودائماً يكون فى مقابل الزاوية القائمة .

[٢] المجـاور : ***the adjacent side***

هو الضلع الذى يبدأ قياس الزاوية منه .

[٣] المقابل : ***the opposite side***

هو الضلع المقابل للزاوية .

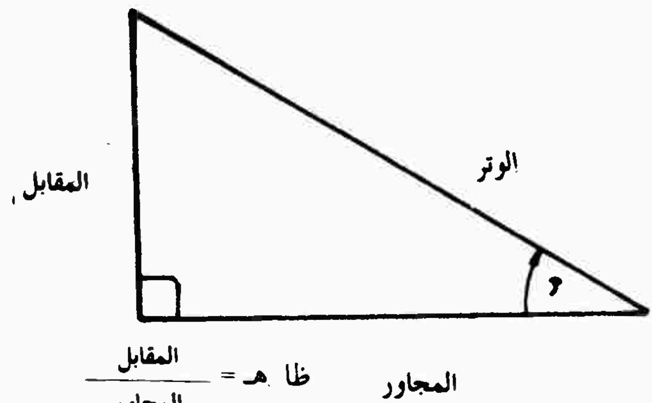
وسوف نعرف أن هنالك ثلاث علاقات عامة تربط بين الأضلاع والزوايا فى المثلث القائم الزاوية وتعرف بالنسب المثلثية .

[٢٢ ـ ٢] ظل الزاوية « ظا هـ » :

the tangent of an angle "tan θ"

تُعرف النسبة فيما بين الضلع المقابل للزاوية والضلع المجاور لها بظل الزاوية ، انظر شكل (٢٢ – ٢) .

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$



$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

شكل [٢٢ ـ ٢]

ويمكننا باستخدام الآلة الحاسبة إيجاد ظل الزاوية كما فى المثالين التاليين :

□ **مثال (١) :**

أوجد ظل الزاوية ٣٧° مقرباً إجابتك لثلاث أرقام عشرية .

□ **الحـــل :**

نسجل رقم ٣٧° ثم نضغط على مفتاح tan فتظهر لنا القراءة .

$$\tan 37° = 0.75355405$$

ثم نقربها فتكون الإجابة :

ظا ٣٧° = ٠,٧٥٤

□ **مثال (٢) :**

أوجد ظل الزاوية ٧٥,٧° مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث أرقام عشرية .

□ **الحـــل :**

نسجل رقم ٧٥,٧° ثم نضغط على مفتاح tan

فنحصل على :

$$\tan 75.7° = 3.923156294$$

ثم نقربها فتكون الإجابة :

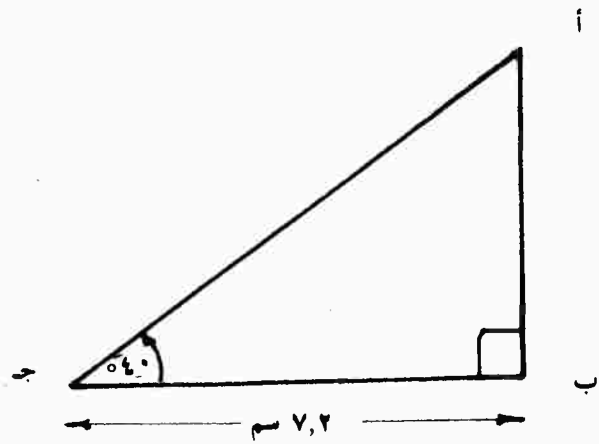
ظا ٧٥,٧° = ٣,٩٢٣

[٢٢ ـ ٣] تطبيقات على استخدام ظل الزاوية فى حسابات المثلث :

يمكننا الآن حساب طول الضلع المقابل للزاوية ، إذا علمنا الزاوية وطول الضلع المجاور لها .

□ **مثال :**

فى شكل (٢٢ ــ ٣) أوجد طول الضلع أ ب .



شكل [٢٢ ـ ٣]

□ **الحـــل :**

ا ب هو الضلع المقابل للزاوية جـ

، ب ج هو الضلع المجاور للزاوية جـ

وحيث أن ظا ج = $\frac{\text{المقابل لزاوية جـ}}{\text{المجاور لزاوية جـ}}$

∴ ظا ٤٠° = $\frac{\text{ا ب}}{٧,٢}$

∴ ا ب = ٧,٢ × ظا ٤٠°

وباستخدام الآلة الحاسبة :

نسجل رقم ٤٠ ثم نضغط على مفتاح tan ثم نضرب الناتج فى ٧,٢

∴ ا ب = ٦,٠٤٢ سم لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

□ ملاحظة :

يمكن حل المسألة باعتبار أن زاوية ا = ٥٠° [٩٠ – ٤٠°] وبذلك يكوب الضلع ا ب هو المجاور للزاوية ٥٠° (المقابل للزاوية ٤٠°) ويكون الضلع ب جـ = ٧,٢ هو المقابل للزاوية ٥٠° (المجاور للزاوية ٤٠°)

∴ ظا ٥٠° = $\frac{٧,٢}{\text{ا ب}}$

∴ ا ب = $\frac{٧,٢}{\text{ظا ٥٠°}}$ = ٦,٠٤٢ سم

□ مثال :

أوجد لأقرب جزء من العشرة من الدرجة ، الزاوية هـ التى ظلها = ٠,٧٥

□ الحــل :

عندما يراد التعبير رياضياً عن الزاوية التى ظلها كذا نقول هـ = ظا$^{-1}$ ٠,٧٥ وتُقرأ ظا ناقص واحد ٠,٧٥ أو هـ هى الزاوية التى ظلها ٠,٧٥ ،

$\theta = \tan^{-1} 0.75$

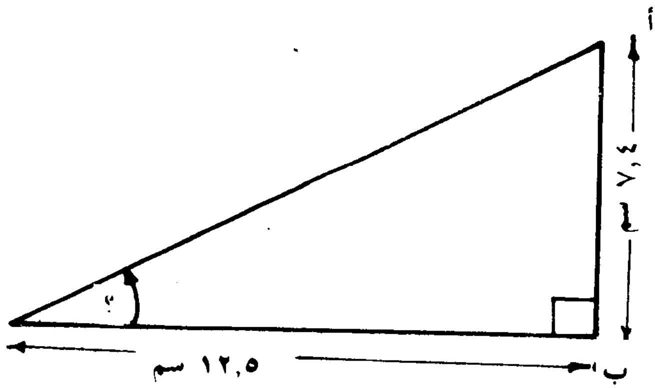
وبالحاسبة ، فإننا نُسجل ٠,٧٥ بالآلة ثم نضغط على مفتاح $\tan^{-1}$ فيعطى القراءة ٣٦,٨٦٩° بالدرجات وهى مقدار الزاوية هـ المطلوبة وبالتقريب

∴ زاوية هـ = ٣٦,٩°

وعلى هذا فإنه بمعلومية ضعلين من المثلث القائم (المقابل والمجاور للزاوية) فإنه يمكن إيجاد ظل الزاوية ، وقيمة الزاوية بالدرجات .

□ **مثـــال :**

أوجد قيمة الزاوية جـ فى المثلث ا ب جـ بالشكل (٢٢ ـ ٤) .



شكل [٢٢ ـ ٤]

□ **الحـــل :**

ا ب هو الضلع المقابل ويساوى ٧,٤ سم

ب جـ هو الضلع المجاور ويساوى ١٢,٥ سم

∴ ظا جـ = $\frac{٧,٤}{١٢,٥}$ = ٠,٥٩٢

∴ جـ هى الزاوية التى ظلها = ٠,٥٩٢ = ظا$^{-1}$ ٠,٥٩٢

جـ = $\tan^{-1}$

نُدخل ٠,٥٩٢ بالآلة الحاسبة ثم نضغط على مفتاح inv ثم مفتاح $\tan^{-1}$

∴ جـ = ٣٠,٦٢٥٥° = ٣٠,٦° (بالتقريب)

[٢٢ ـ ٤] تدريبـــات :

أولاً : أوجد ظل الزاوية الآتية مُقرباً إجابتك لأقرب ثلاث علامات عشرية .

(١) ٣٥° (٢) ١٥° (٣) ٣٠° (٤) ٥٥° (٥) ٦٠°

(٦) ٧٢,٧ (٧) ١٨,٣° (٨) ٧٠,٢° (٩) ٨٨,٣ (١٠) ٨٩,٢°

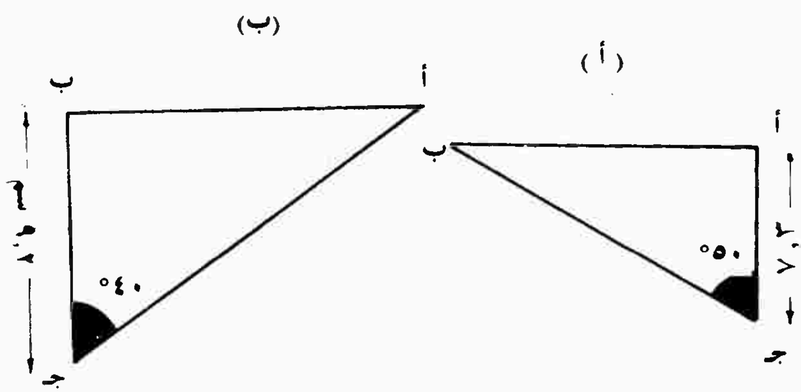
ثانياً : أوجد قيمة الزوايا « لأقرب عُشر درجة » والتى ظلها كما يلى :

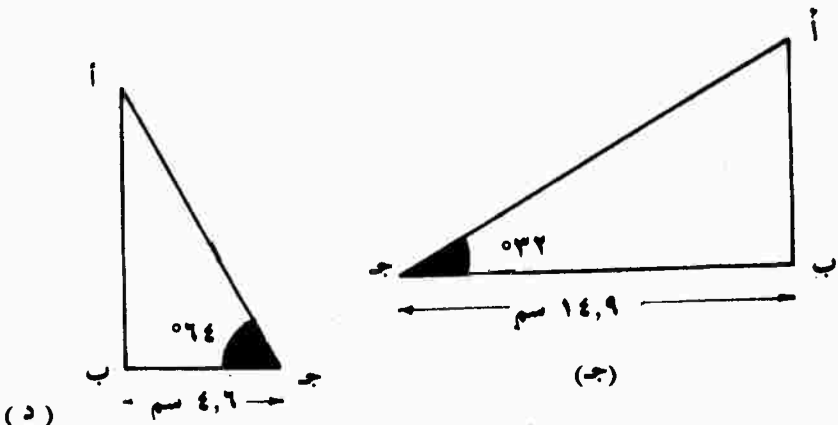
[١] ظا$^{-1}$ ٠,٣٥ [٢] ظا$^{-1}$ ٢,١٥٨

[٣] ظا$^{-1}$ ١,٥٤٦ [٤] ظا$^{-1}$ ٠,٤٧

[٥] ظا$^{-1}$ ٧,٤٣٦ [٦] ظا$^{-1}$ ٠,٤٢٥

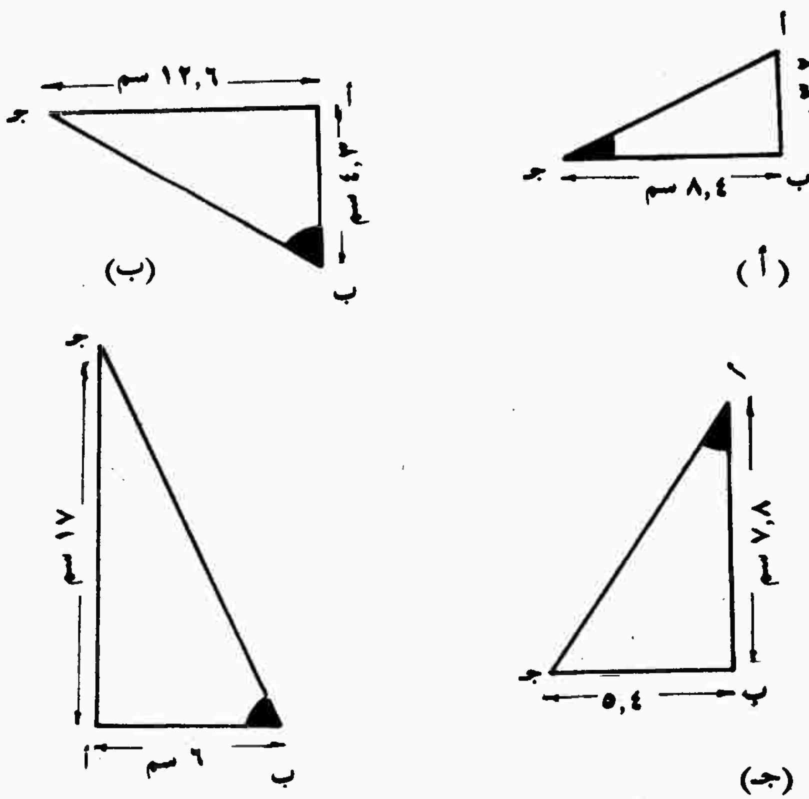
ثالثاً : أوجد طول الضلع ا ب فى المثلثات التالية بشكل (٢٢ ـ ٥)





شكل [٢٢ـ ٥] (أ ، بـ ، جـ ، د)

رابعاً : أوجد الزاوية ا فى المثلثات التالية بشكل (٢٢ ـ ٦)



(د) شكل [٢٢ـ ٦] (أ ، بـ ، جـ ، د)

خامساً : احسب المطلوب فى المثلثات الآتية :

[١] فى Δ ا ب جـ ، $\hat{ب}$ = ٩٠° ، ا ب = ١٥ ، ب جـ = ١٣,٤ ، أوجد $\hat{ا}$.

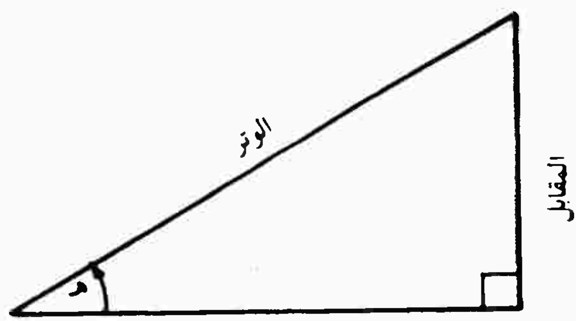
[٢] فى Δ س ص ع ، $\hat{ع}$ = ٩٠° ، س ع = ٣,٥ ، ع ص = ٨,٤ سم ، أوجد $\hat{ش}$

[٣] فى Δ ل م ن ، $\hat{ل}$ = ٩٠° ، زاوية ن = ٢٥,٣° ، ل م = ١٠ سم أوجد م ، ل ن .

[٢٢ ـ ٥] جيب الزاوية ، « جا هـ »

The sin of an angle Sin θ.

تُعرف النسبة فيما بين الضلع المقابل للزاوية وطول الوتر بجيب الزاوية ، انظر شكل (٢٢ ـ ٧) .



شكل [٢٢ ـ ٧]

ويمكن باستخدام الآلة الحاسبة مثلما سبق فى ظل الزاوية فإنه يمكننا إيجاد جيب الزاوية وإيجاد الزاوية المعلوم جيبها .

□ **مثال (١) :**

أوجد جيب الزاوية ٤٣,٢° مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث علامات عشرية .

□ **الحـل :**

بالآلة الحاسبة : جا ٤٣,٢° = ٠,٦٨٤٥٤٧١٠٦

وبالتقريب = ٠,٦٨٥

□ **مثال (٢) :**

أوجد لأقرب عُشر درجة قيمة الزاوية التى جيبها

= ٠,٧٣٢٧

∴ حا هـ = ٠,٧٣٢٧

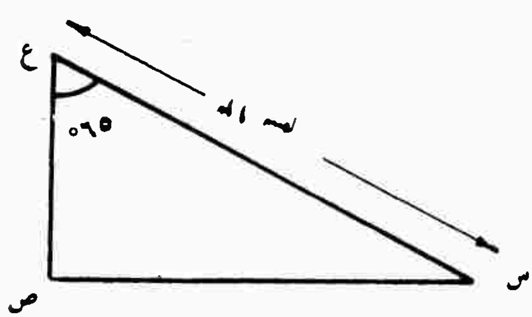
∴ هـ = حا$^{-1}$ ٠,٧٣٢٧

= ٤٧,١°

[٢٢ ـ ٦] تطبيقات على استخدام جيب الزاوية فى حساب المثلث :

□ **مثال (١) :**

من شكل (٢٢ ـ ٨) ، أوجد طول الضلع س ص مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث أرقام عشرية ،



شكل [٢٢ ـ ٨]

س ع هو وتر المثلث س ص ع

، س ص هو المقابل للزاوية ع

∴ حا ع = حا ٦٥ = $\frac{\text{س ص}}{\text{س ع}} = \frac{\text{س ص}}{\text{١٣}}$

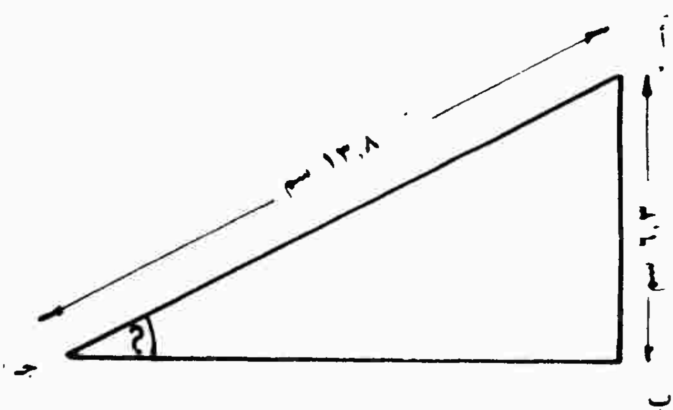
∴ س ص = ١٣ × جا ٦٥

= ١٣ × ٠,٩٠٦٣٠ = ١١,٧٨ سم

□ **مثال (٢) :**

فى شكل (٢٢ ـ ٩) ، المثلث ا ب جـ فيه ا ب = ٦,٣ سم ، ا جـ = ١٣,٨ سم .

المطلوب إيجاد زاوية جـ مقربة لأقرب رقم عشرى واحد .



شكل [٢٢ ـ ٩]

حا جـ = $\frac{\text{٦,٣}}{\text{١٣,٨}}$ = ٠,٤٥٦٥٢١٧

∴ جـ = جا$^{-1}$ ٠,٤٥٦٥٢١٧٣٩ = ٢٧,٢°

[٢٢ ـ ٧] تدريبـــات :

أولاً : أوجد جيوب الزوايا التالية مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

[١] ١٣°　　[٢] ٢٤,٧°　　[٣] ٣٥°　　[٤] ٦٥°

[٥] ٤٢°　　[٦] ٥٨°　　[٧] ٢٧,٧°　　[٨] ٨٨,١°

[٩] ٤٦,٣°　　[١٠] ٢٢,٨°　　[١١] ٧٧,٧°　　[١٢] ٢,٣°

ثانياً : أوجد الزوايا التالية لأقرب عُشر درجة ، المعلوم جيب كل منها :

[١] جا$^{-1}$ ٠,٩٤٦٢　　[٢] جا$^{-1}$ ٠,٣٥٨٣

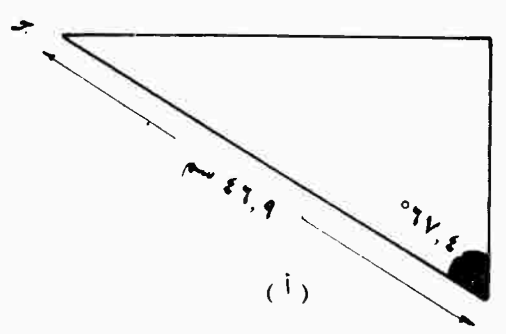
[٣] جا$^{-1}$ ٠,٦٧٨٢　　[٤] جا$^{-1}$ ٠,٥٠٥٥

[٥] جا$^{-1}$ ٠,٧٧٢٨　　[٦] جا$^{-1}$ ٠,٤١٢

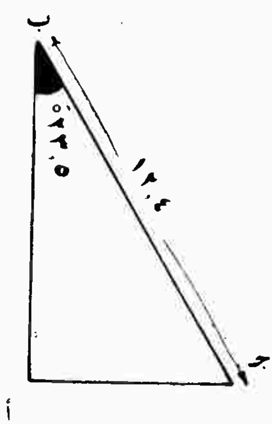
[٧] جا$^{-1}$ ٠,٨٢٥٨　　[٨] جا$^{-1}$ ٠,٦١٨٤

[٩] جا$^{-1}$ ٠,٢٣٢٥

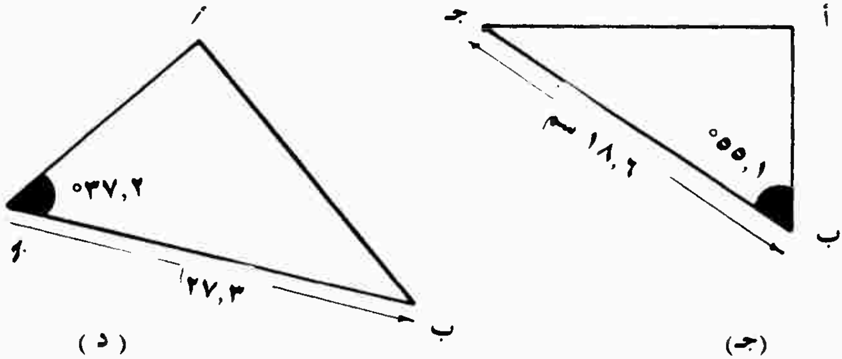
ثالثاً : أوجد طول الضلع ا ب فى المثلثات التالية بشكل (٢٢ ـ ١٠) مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث أرقام عشرية .



(أ)

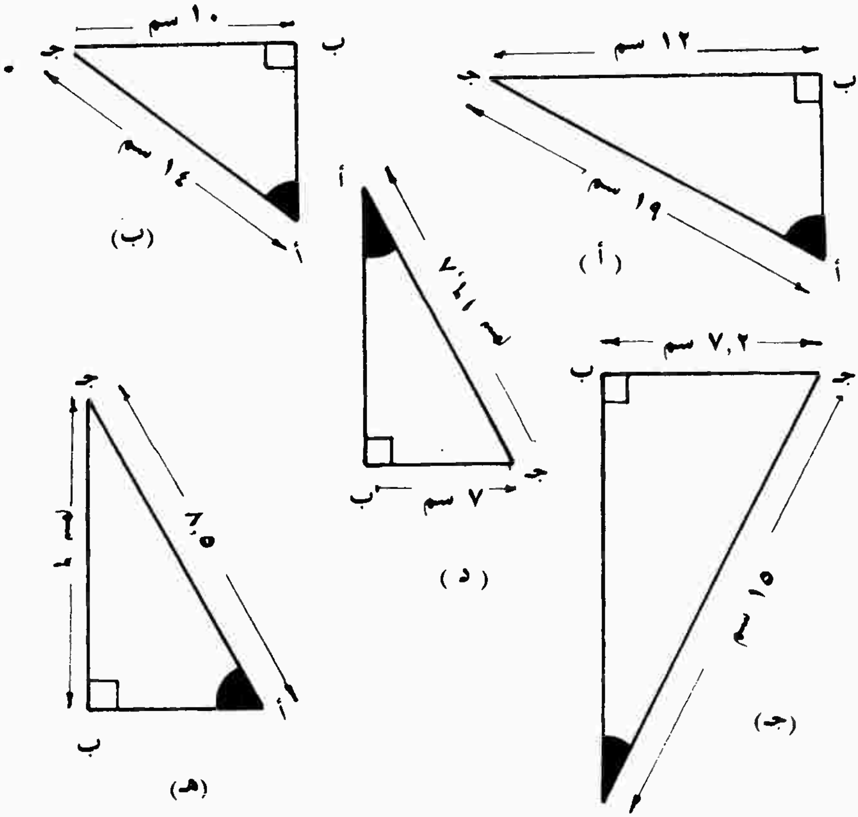


(ب)



شكل [٢٢ ـ ١٠] (أ ، بـ ، جـ ، د)

رابعاً : أوجد الزاوية ا فى المثلثات التالية بشكل (٢٢ ــ ١١) .



شكل [٢٢ ـ ١١] (، بـ ، جـ ، د ، هـ)

خامساً : احسب المطلوب فى المثلثات التالية :

[١] فى المثلث ا ب جـ زاوية ب = ٩٠°، زاوية جـ = ٣٥°، ا جـ = ١٣,٨ سم فأوجد طول ا ب .

[٢] فى المثلث س ص ع زاوية ع = ٩٠°، زاوية س = ٢٨,٣°، س ع = ٨,٧ سم فأوجد طول س ص .

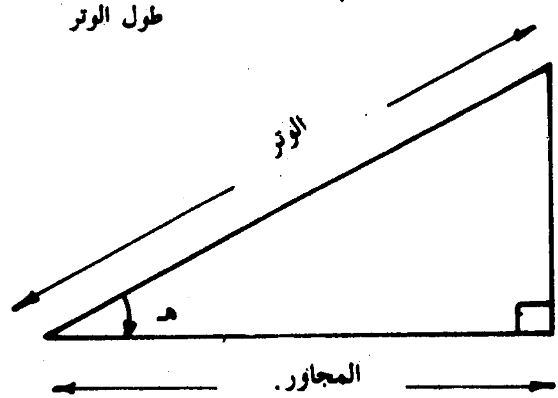
[٣] فى المثلث ل م ن زاوية ل = ٩٠°، ل ن = ١٢ سم ، ن م = ١٧ سم فأوجد زاوية ن .

[٢٢ ـ ٨] جيب تمام الزاوية ، « جتا هـ » .

The casine of an angle "Cos θ"

تُعرف النسبة فيما بين الضلع المجاور للزاوية ، وطول الوتر ، بجيب تمام الزاوية ، انظر شكل (٢٢ ــ ١٢) .

جتا هـ = $\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$



شكل [٢٢ ـ ١٢]

وبنفس الطريقة كما سبق فى حساب ظل الزاوية وجيب الزاوية ، فإنه باستعمال الآلة الحاسبة يُمكن إيجاد جيب تمام الزاوية وجتا$^{-1}$

[٢٢ ـ ٩] تطبيقات على استخدام جيب تمام الزاوية فى حساب المثلث :

□ **مثال :**

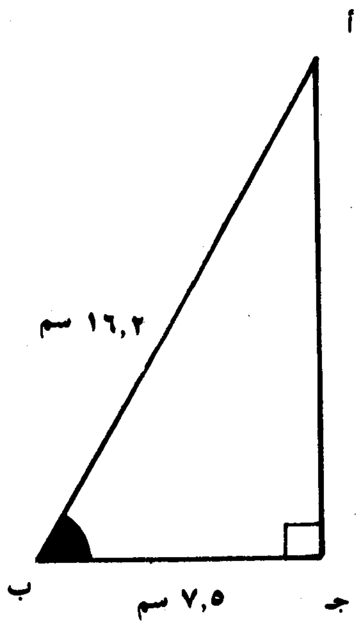
فى المثلث ا ب جـ ، زاوية جـ = ٩٠°

، جـ ب = ٧,٥ سم ، ا ب = ١٦,٢ سم

فأوجد زاوية ب .

□ **الحــل :**

نرسم المثلث ا ب جـ طبقاً للمعلومات الواردة برأس المسألة .



شـكل [٢٢ ـ ١٣]

، حـ ب = ٧,٥ سم هو الضلع المجاور للزاوية ب

، ا ب = ١٦,٢ سم هو الوتر .

$$\therefore \text{جتا ب} = \frac{\text{حـ ب}}{\text{ا ب}} = \frac{٧,٥}{١٦,٢} = ٠,٤٦٢٩٦٢٩٦٢$$

∴ ب = جتا⁻¹ ٠,٤٦٢٩٦٢٩٦٢ = ٦٢,٤٢١٥٣٢٠٢°

∴ ب = ٦٢,٤° لأقرب عشر درجة .

[٢٢ ـ ١٠] تدريبـــات :

أولاً : أوجد جيب تمام الزوايا التالية مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام عشرية ،

[١] ٢٣° [٢] ٥٨° [٣] ٨٢° [٤] ٧°

[٥] ١٦,٨° [٦] ٣٧,٢° [٧] ٤٥,٣° [٨] ٦٦,٥°

ثانياً : أوجد قيمة الزوايا التالية لأقرب عُشر درجة ، المعلوم جيب تمام كل منها :

[١] جتا⁻¹ ٠,٩٥٣٤ [٢] جتا⁻¹ ٠,٧٥٧٥

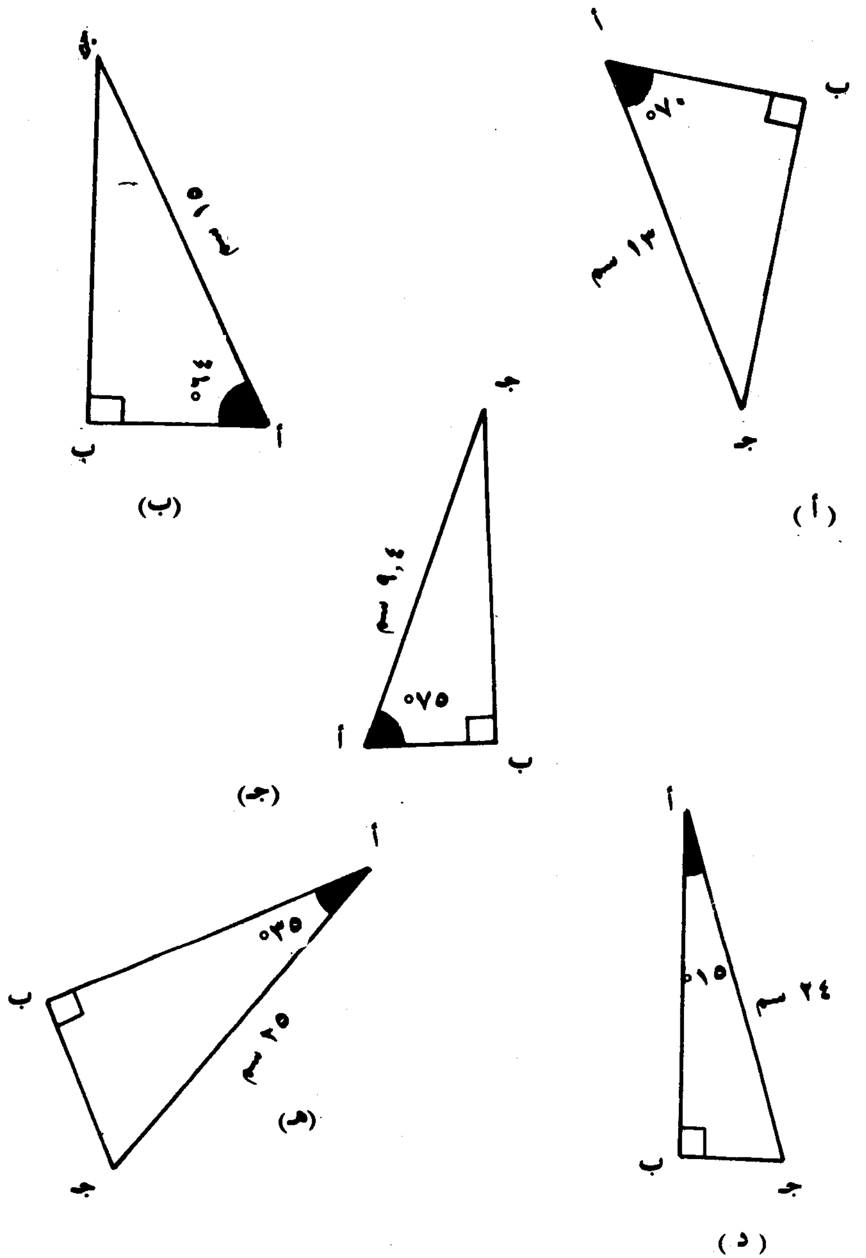
[٣] جتا⁻¹ ٠,١٤١٢ [٤] جتا⁻¹ ٠,٣٨٧٤

[٥] جتا⁻¹ ٠,٨٨٨٩ [٦] جتا⁻¹ ٠,٦٤١٣

[٧] جتا⁻¹ ٠,٢٦٥٣ [٨] جتا⁻¹ ٠,٣٠٩٠

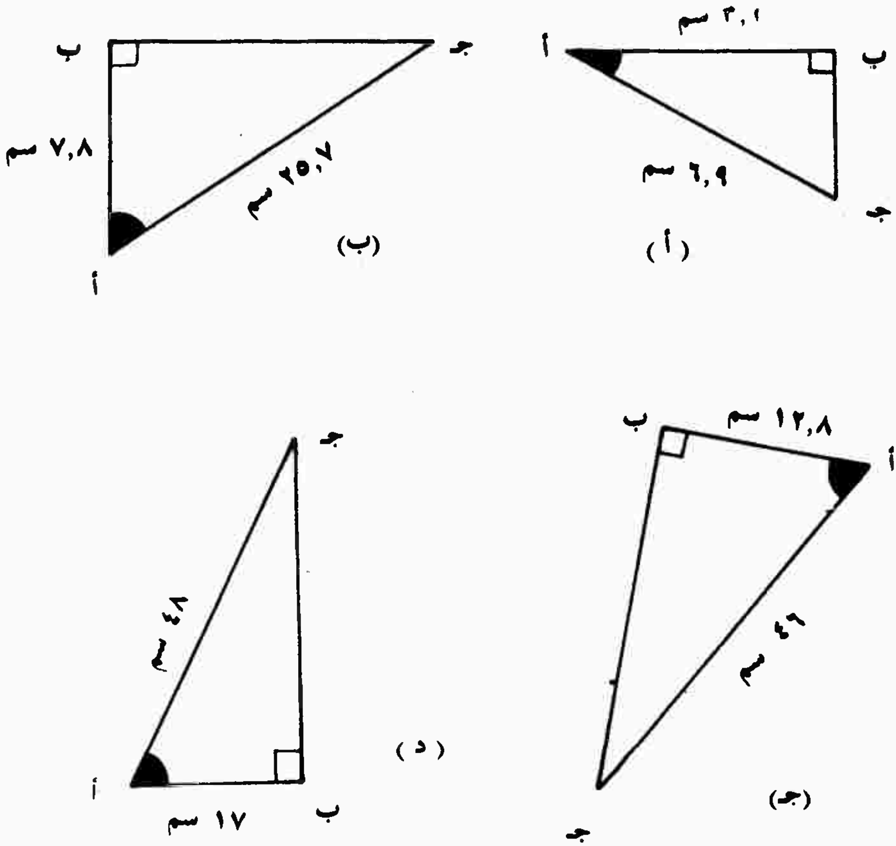
[٩] جتا⁻¹ ٠,٤٥٢٠

ثالثاً : أوجد طول الضلع ا ب فى المثلثات التالية بشكل (٢٢ ـ ١٤) مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث أرقام عشرية .



شكل [٢٢ـ ١٤] (ا ، بـ ، جـ ، د ، هـ)

رابعاً : أوجد الزاوية ا فى المثلثات التالية بشكل (٢٢ ــ ١٥) .



شكل [٢٢ ـ ١٨] (أ ، ب ، جـ ، د)

خامساً : احسب المطلوب فى المثلثات التالية :

[١] Δ ا ب جـ فيه زاوية ب = ٩٠° ، أ̂ = ٥٥° ، الوتر = ١٥ سم أوجد طول ا ب .

[٢] Δ س ص ع فيه زاوية ش = ٩٠° ، ص̂ = ٢٣,٧° ، ع ص = ١١,٣ سم فأوجد س ص .

[٣] Δ ل م ن فيه زاوية ن = ٩٠° ، ل م = ٦,٤ سم ، ل ن = ١٤ سم فأوجد ل̂ .

الدرس الثالث والعشرون :

تطبيقات على النسب المثلثية

Applications

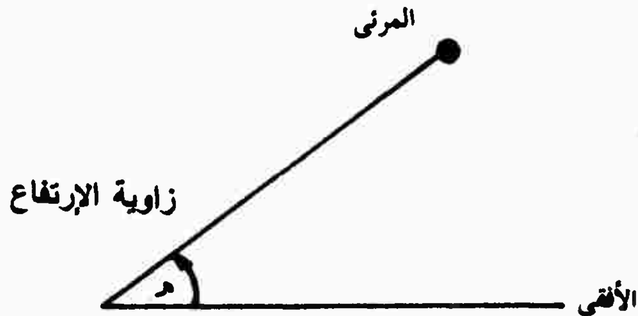
[٢٣ ـ ١] مقدمــة :

يمكن استخدام المعلومات التى درسناها فى الدرس السابق فى بعض التطبيقات العملية المفيدة مثل إيجاد الزاوية التى يصنعها سلم مستند على حائط رأسى وفى زوايا الارتفاع والإنخفاض والاتجاهات الأصلية وبعد سفينة عن أخرى وعن الشاطىء ؛.

[٢٣ ـ ٢] زوايا الارتفاع والانخفاض :

[١] زاوية الإرتفاع Angle of elevation :

أنظر شكل (٢٣ ـ ١) ؛ وهو يوضح زاوية الإرتفاع .

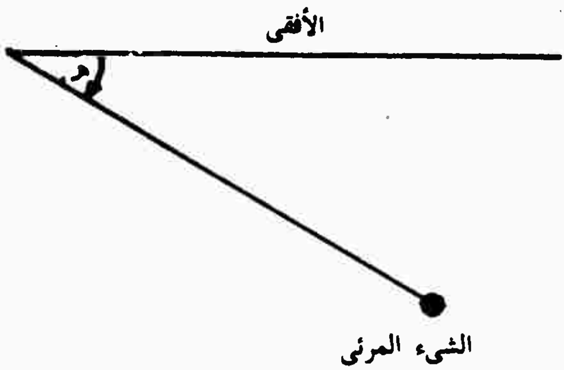


شكل [٢٣ ـ ١]

وهى الزاوية بين الأفقى وأى جسم عندما يكون الجسم فى مستوى أعلى من مستوى المشاهد .

[٢] زاوية الانخفاض Angle of depression :

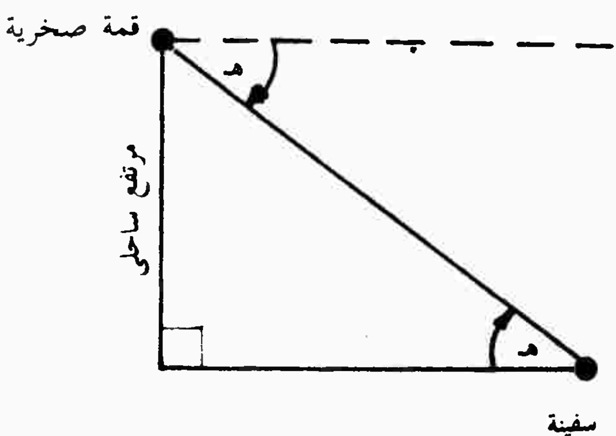
انظر شكل (٢٣ ـ ٢) ، وهو يوضح زاوية الإنخفاض .



شكل [٢٣ ـ ٢] زاوية الانخفاض

وهى الزاوية بين الأفقى وأى جسم عندما يكون الجسم فى مستوى أسفل من مستوى المشاهد .

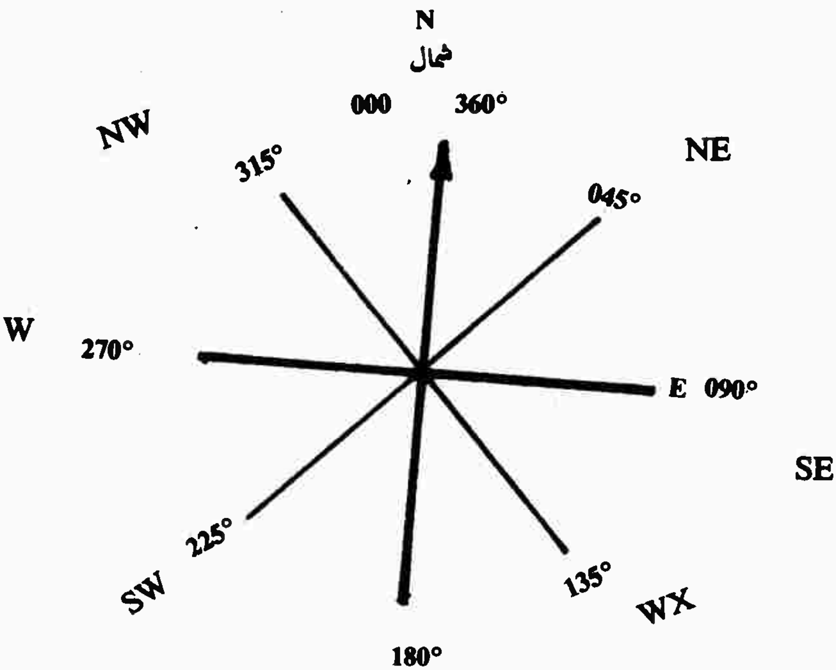
ويلاحظ من شكل (٢٣ ـ ٣) أن زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع .



شكل [٢٣ ـ ٣]

وهو يوضح أن زاوية ارتفاع قمة صخرية على أحد الشواطىء من سفينة بالبحر فى مقابلها (< هـ°) ، هى نفسها زاوية إنخفاض السفينة عند مشاهدتها من القمة الصخرية على الشاطىء (< هـ°) .

[٢٣ ـ ٣] الاتجاهات : *Bearings* :



شكل [٢٣ـ ٤]

كما يتضح من شكل (٢٣ ــ ٤) فإن الاتجاهات الأُصلية كما تحددها البوصلة هى الشمال N . وشمال الشرق NE والشرق E وجنوب الشرق SE والجنوب S ، وجنوب الغرب SW والغرب W وشمال الغرب NW ويفصل بين كل واحد منها والآخر ٤٥° .

وتقاس الاتجاهات بالدرجات وتتراوح بين صفر ، ٣٦٠° .

وعلى هذا النظام فإن الاتجاه ٧° يُكتب 007° بينما الاتجاه ٧٧° فيكتب 077° والاتجاه ١٧٧° فيكتب 177° وهكذا

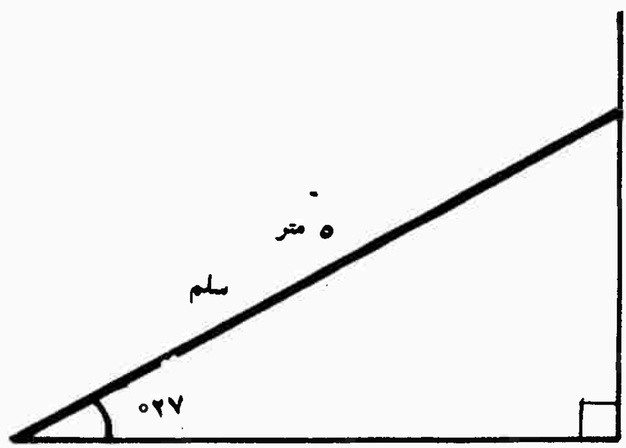
[٢٣ ـ ٤] مسائل تطبيقية على النسبة المثلثية :

□ مثال (١) :

سلم طوله ٥ متر يستند من إحدى جهتيه على الأرض ومن الجهة الأخرى على حائط رأسي ، فإذا كان السلم يصنع زاوية ٢٧° مع الأرض فأوجد إرتفاع النهاية الأخرى للسلم مع الحائط .

□ الحــل :

انظر ، شكل (٢٣ ـ ٥) ، ولنفرض أن الإرتفاع هو ع متر .



$$\because \text{جا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad ،$$

$$\therefore \text{جا } ٢٧° = \frac{\text{ع}}{٥} \quad \therefore \text{ع} = ٥ \times \text{جا } ٢٧°$$

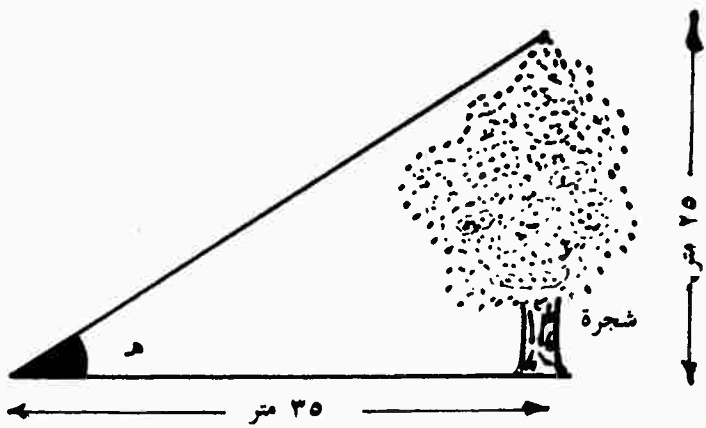
$$\therefore \text{ع} = ٢,٢٧ \text{ متر}$$

□ مثال (٢) :

أوجد زاوية إرتفاع قمة شجرة ، إرتفاعها ٢٥ متراً من نقطة على الأرض تبعد عنها ٣٥ متراً .

□ الحل :

انظر شكل (٢٣ ــ ٦) ، ونفرض أن زاوية الإرتفاع هى هـ°



شكل [٢٣ ـ ٦]

وحيث أن ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ∴ ظا هـ = $\frac{٢٥}{٣٥}$ = ٠,٧١٤٢٨

∴ هـ = ظا$^{-١}$ ٠,٧١٤٢٨

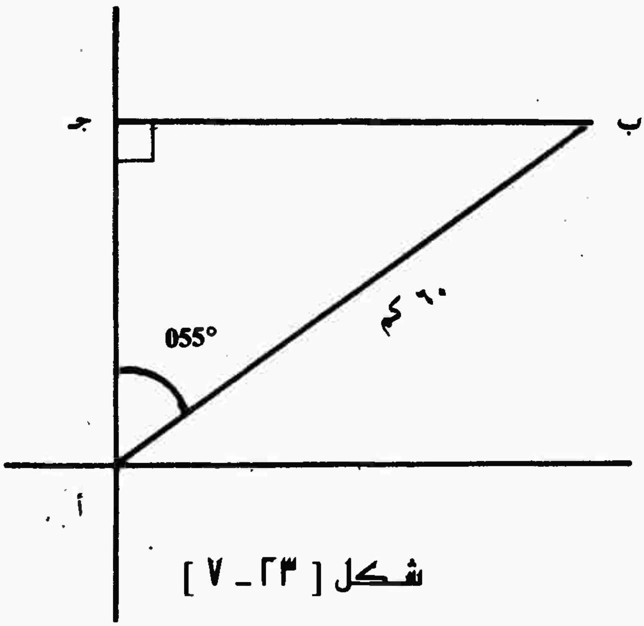
∴ هـ = ٣٥,٥°

□ مثال (٣) :

تبحر سفينة من نقطة ا إلى نقطة ب في الإتجاه 055° ، لمسافة مقدارها ٦٠ كيلومتر فإذا كانت نقطة جـ تقع تماماً غرب نقطة ب وشمالاً من نقطة ا فأوجد مقدار المسافة ا جـ .

□ **الحــل :**

أُنظر شكل (٢٣ ـ ٧) ، ولنفرض أن المسافة أ جـ = س كيلومتر ،



شـكل [٢٣ ـ ٧]

وحــيث أن جتـــا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

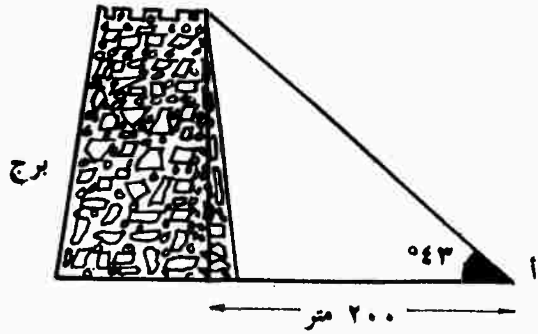
٥٥° = = $\frac{\text{س}}{٦٠}$

∴ س = ٦٠ جتا ٥٥ = ٣٤,٤١٤ كيلومتراً

∴ فنقطة جـ تبعد عن أ بمقدار ٣٤,٤١٤ كم وفى إتجاه الشمال منها .

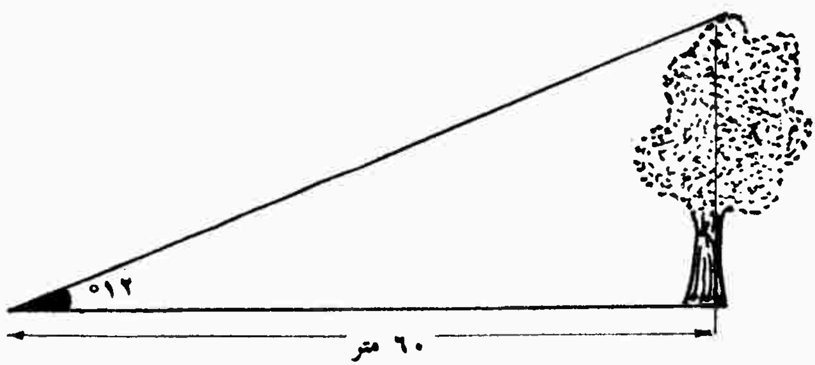
[٢٣ ـ ٥] تدريبات : (أ) على زوايا الإرتفاع والإنخفاض :

(١) قيست زاوية إرتفاع قمة برج من نقطة ا على الأرض تبعد عن قاعدة البرج ٢٠٠ متر ، فكانت ٤٣° ، فأوجد ارتفاع البُرج .



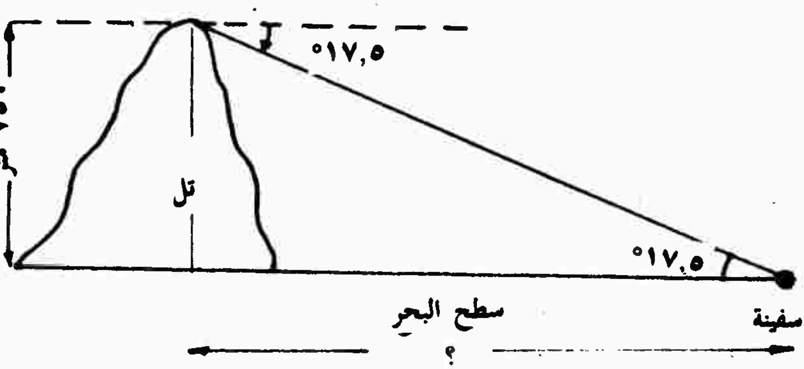
شكل [٢٣ ـ ٨]

(٢) من نقطة تبعد ٦٠ متراً عن قاعدة شجرة ، قيست زاوية ارتفاع قمة الشجرة ، فوجدت °١٢ ، فأوجد ارتفاع قمة الشجرة .



شكل [٢٣ ـ ٩]

(٣) رُصدت سفينة من قمة تل على الشاطىء يرتفع عن سطح البحر بمقدار ٧٥٠ متراً فكانت زاوية انخفاض السفينة هى °١٧,٥ فكم يبلغ بعد السفينة عن الشاطىء وعن قمة التل .



شكل [٢٣ ـ ١٠]

(٤) من نقطة بأعلى صخرة على الشاطىء ترتفع بمقدار ٣٥٠ متراً رصدت سفينة بالبحر فإذا كانت السفينة تبعد عن قمة الصخرة بمقدار ١٢٠٠ متراً فما مقدار زاوية الانخفاض .

(٥) طائرة تقلع على ارتفاع ٣٥٠٠ متراً رصدت موقعاً على الأرض فسجلت زاوية انخفاض مقدارها ١٣,٥° فما مقدار المسافة التى تطيرها الطائرة حتى تصبح فوق الموقع مباشرة .

(٦) رصدت نقطة فى أعلى بناية من نقطة على الأرض فى مستوى قاعدة البناية فكانت زاوية ارتفاعها ٤٢° فإذا كانت نقطة الرصد تبعد عن قاعدة البناية بمقدار ٣٠ متر ، فأوجد ارتفاع البناية .

(٧) ترتفع مدخنة مصنع بمقدار ٧٠ متراً ، احسب زاوية ارتفاع المدخنة إذا رصدت من نقطة تبعد ٢٠٠ متراً عن قاعدة المدخنة .

(ب) تدريبات على الاتجاهات :

(١) تُبحر سفينة من أحد الموانىء فى إتجاه °033 لمسافة ١٧ كيلومتر ثم توقفت ، فاحسب .

(أ) كم تبعد السفينة شرق الميناء .

(ب) كم تبعد السفينة شمال الميناء .

(٢) أقلعت طائرة من مطار القاهرة فى اتجاه °280 لمسافة ٩٠ كيلو متر فاحسب عند هذه اللحظة :

(أ) كم تبعد فى اتجاه الشمال عن المطار .

(ب) كم تبعد فى اتجاه الغرب عن المطار .

(٣) تحركت سيارة لمسافة ٣٠ كيلومتر فى اتجاه الشمال ، ثم تحركت لمسافة ١٥ كيلومتر فى اتجاه الشرق ، فكم تبعد السيارة عن نقطة تحركها .

(٤) أبحرت سفينة من أحد الموانى إلى الجنوب لمسافة ١٥ كيلومتراً ثم تحركت غرباً لمسافة ٤٥ كيلومتر أخرى ، فكم تبعد السفينة عن الميناء .

(٥) أبحرت سفينتان فى وقت واحد من أجد الموانىء فتحركت الأولى و اتجاه الشمال لمسافة ٣٠ كيلومتر بينما تحركت الثانية . فى اتجاه °038 لمسافة ١٣ كيلومتر ، فأوجد البعد بين السفينتين .

(٦) أبحرت سفينتان فى الساعة التاسعة صباحاً من أحد الموانىء الأولى فى اتجاه °056 وبسرعة ٣٠ كم/ساعة والثانية فى اتجاه °090 بسرعة ٢٢ كم/ساعة ، المطلوب حساب الآتى عند الساعة الثانية عشر تماماً :

(أ) كم تبعد السفينة الأولى شمال السفينة الثانية .

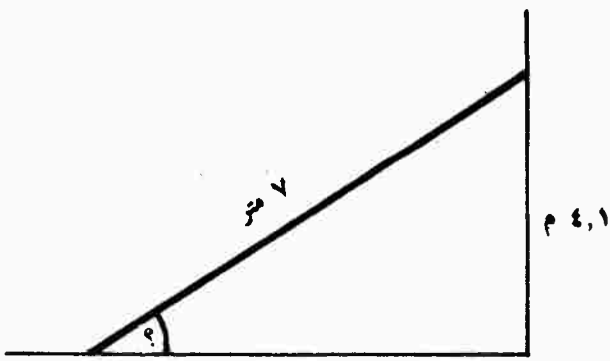
(ب) كم تبعد السفينة الثانية شرق السفينة الأولى .

(جـ) تدريبات مختلفة :

(١) مستطيل ا ب جـ د فيه ا ب = ١٢ سم ، ب جـ = ٧ سم ، أوجد مقدار زاوية ا ب د .

(٢) مستطيل س ص ع ل فيه س ع = ١٨,٣ سم ، س ل = ٧,٥ سم فأوجد زاوية ص س ع والزاوية الحادة بين القطرين .

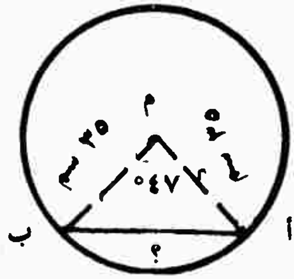
(٣) فى شكل (٢٣ ـ ١١) ، سلم يرتكز على حائط رأسى ، ترتفع قمة السلم بمقدار ٤,١ متراً على الحائط ، فإذا كان السلم طوله ٧ أمتار ، فأوجد الزاوية التى يضعها السلم مع الأرض ومع الحائط .



شكل [٢٣ ـ ١١]

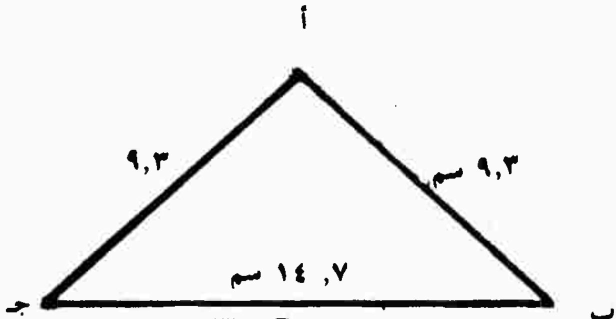
(٤) أوجد ارتفاع المثلث ا ب جـ الذى فيه ا ب = ا جـ = ١٢ سم ، زاوية ا جـ ب = ٥٥,٣°

(٥) فى شكل (٢٣ ــ ١٢) ، م دائرة نصف قطرها ٣٥ سم وزاوية الرأس م = ٤٧° ، أوجد طول الوتر ا ب .



شكل [٢٣ ـ ١٢]

(٦) أوجد زوايا المثلث المتساوى الساقين ا ب جـ والذى فيه ا ب = ا جـ = ٩,٣ سم ، ب جـ = ١٤,٧ سم .



شكل [٢٣ ـ ١٣]

(٧) تقع مدينة ا فى إتجاه 049° من مدينة ب وتبعد عنها فى اتجاه الجنوب منها بمقدار ٣٠ كيلومتر ، فكم تبعد ا عن بَ فى اتجاه الشرق .

(٨) معين طول قطريه ٣٠ ، ٤٠ سم ، أوجد زوايا المعين .

(٩) يقف رجل أعلى قمة تل على الشاطىء ويرصد فى نفس الوقت سفينتان ا ، ب تقعان على امتداد نظره وعلى خط مستقيم واحد معه .

فإذا كانت زوايا انخفاض السفينتان ١٣° ، ٣٠° . فما مقدار المسافة بين السفينتين .

(١٠) من نقطة على الأرض رصدت نقطتان على خط مستقيم رأسى واحد فى أحد البنايات العالية فإذا كانت نقطة الرصد تبعد ١٠٠ م عن قاعدة البناية وكانت زوايا ارتفاع النقطتان المرصودتان هى ٣٠° ، ٤٠° فأوجد المسافة الرأسية بين نقطتى الرصد .

الدرس الرابع والعشرون :

الهندســة الفراغيــة

المكعبات ومتوازيات المستطيلات والهرم والمخروط

Three-dimensional trigonometry (3 – D. trig.) cubes, cuboids, pyramids and cones

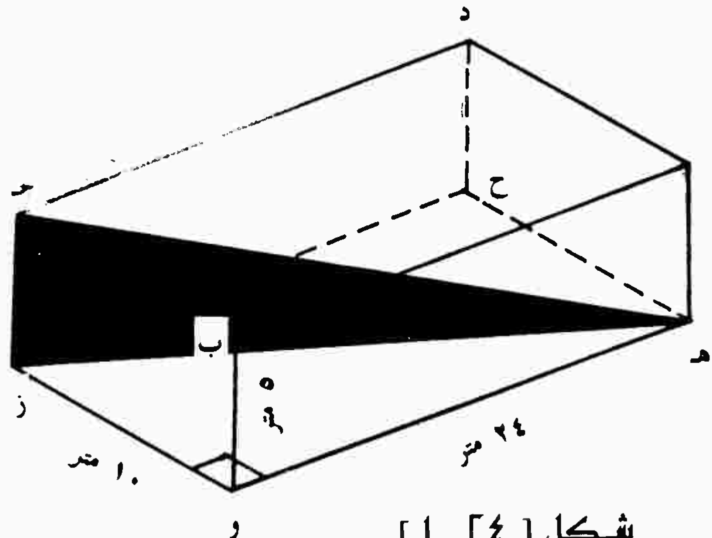
[٢٤ ـ ١] مسائل على المكعبات ومتوازيات المستطيلات :

إن ما سبق دراسته عن النسب المثلثية كان فى مجال المستوى الواحد فقط أى مستوى الورقة . أو المجال ذو البعدين .

إلا أنه من الممكن تطبيق نفس قواعد النسب المثلثية فى مسائل الهندسة الفراغية ذات الثلاثة أبعاد .

□ **مثــال :**

مخزن على شكل متوازى مستطيلات ، أبعاده ٢٤ متر × ١٠ متر × ٥ متر ، انظر شكل (٢٤ ـ ١) ،



شكل [٢٤ ـ ١]

أوجد ما يلى :

(أ) طول قطره الواصل من أحد أركان السقف إلى أحد أركان الأرض .

(ب) الزاوية التى يصنعها هذا القطر مع الأرض .

□ الحـل :

(أ) المطلوب هو إيجاد طول القطر جـ هـ .

ولذلك ، فعلينا باعتبار المثلث جـ زَ هـ القائم الزاوية فى ز .

والذي لا نعلم منه سوى الارتفاع جـ ز = ٥ أمتار .

، لذلك يجب أن نوجد أولاً طول القطر ز هـ فى مستوى أرضية المخزن هـ و ز ح وذلك بتطبيق قاعدة فيثاغورث على المثلث القائم الزاوية هـ و ز ، انظر شكل (٢٤ ـ ٢) .

شكل [٢٤ ـ ٢]

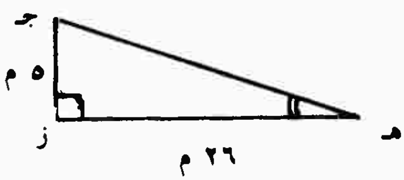
وباستخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول هـ ز .

∴ $\overline{\text{هـ ز}}^{٢} = \overline{\text{هـ و}}^{٢} + \overline{\text{و ز}}^{٢}$

∴ $= ٢٤^{٢} + ١٠^{٢} = ٥٧٦ + ١٠٠ = ٦٧٦$

∴ هـ ز = ٢٦ متر .

وبالعودة إلى المثلث الأصلى جـ ز هـ ، انظر شكل (٢٤ ـ ٣) .



شكل [٢٤ ـ ٣]

وبتطبيق نظرية فيثاغورث لإيجاد طول جـ هـ .

∴ $\overline{\text{جـ هـ}}^{٢} = \overline{\text{هـ ز}}^{٢} + \overline{\text{ز جـ}}^{٢}$

$= ٦٧٦ + ٢٥ = ٧٠١$

∴ جـ هـ = ٢٦,٤٨ متر وهو طول القطر المطلوب .

(ب) لإيجاد الزاوية التى يصنعها هذا القطر مع الأرض ، نلاحظ من شكل (٢٤ ـ ٣) أنها عبارة عن الزاوية جـ هـ ز

وباستخدام النسبة المثلثية المناسبة يمكن إيجاد هذه الزاوية .

، ∵ جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ∴ جتا هـ = $\frac{٢٦}{٢٦,٤٧٦} = ٠,٩٨٢$

∴ هـ = جتا$^{-١}$ ٠,٩٨٢ = $١٠,٩^{\circ}$ (لأقرب عُشر درجة)

وهى الزاوية التى يصنعها القطر مع الأرضية .

[٢٤ ـ ٢] تدريبـــات :

(١) فى متوازى السطوح المبين فى شكل (٢٤ ــ ٤) ، ا ب جـ د هـ و ز ح أطواله ١٢ سم ، ٩ سم ، ٥ سم ، أوجد ما يلى :

(أ) طول ح ا

(ب) طول ح و

(جـ) طول ا و

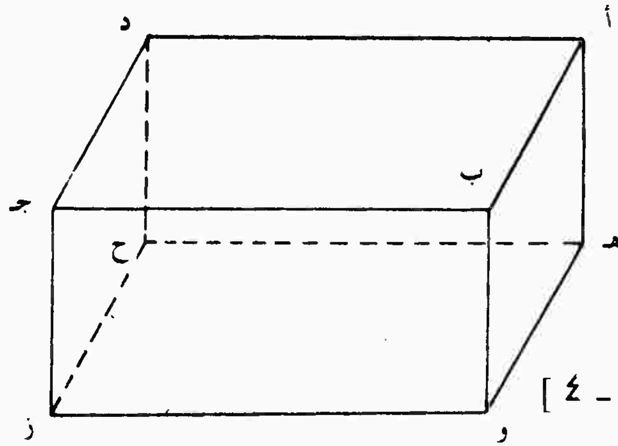
(د) طول ا ز

(هـ) زاوية هـ و ا

(و) زاوية هـ د ح

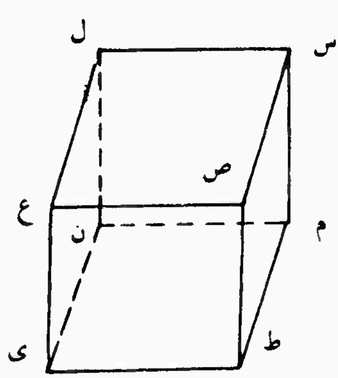
(ز) زاوية ا ز ح .

(ح) ب $\hat{ح}$ و



شكل [٢٤ ـ ٤]

(٢) فى المكعب المبين فى شكل (٢٤ ــ ٥) ، س ص ع ل م ط ى ن ، والذى طول ضلعه ١٥ سم احسب ما يلى :



شكل [٢٤ ـ ٥]

[أ] طول ط ن　　　　[د] زاوية س ط م

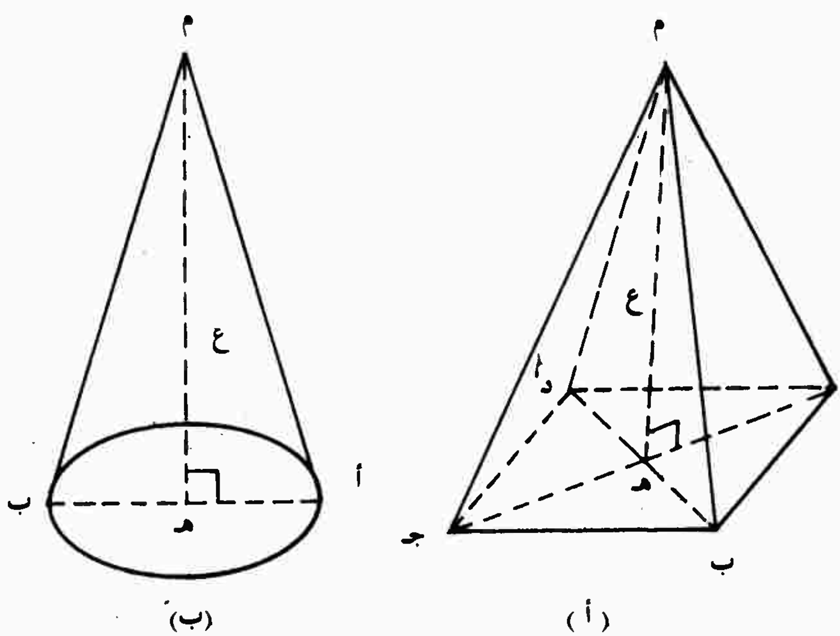
[ب] طول ل ط　　　　[هـ] زاوية ع م ى

[جـ] زاوية س ى م　　　　[و] زاوية م ع س

[٢٤ ـ ٣] مسائل على الهرم والمخروط :

سوف نتعرض هنا للهرم الرباعى سواء كانت قاعدته مُربعة أو مستطيلة وكذلك للمخروط الدائرى القائم ، وسوف نحتاج لبعض القواعد السابق دراستها مثل نظرية فيثاغورث كما سبق فى البندين ٢٤ ـ ١ ، ٢٤ ـ ٢ وفى الدرس الثالث والعشرون .

انظر شكل [٢٤ ـ ٦] ، وهو يوضح كيفية حساب بعض الأبعاد الرئيسية مثل طول حرف الهرم أو طول رأس المخروط وارتفاع كل منهما .



شكل [٢٤ ـ ٦] أ ، ب

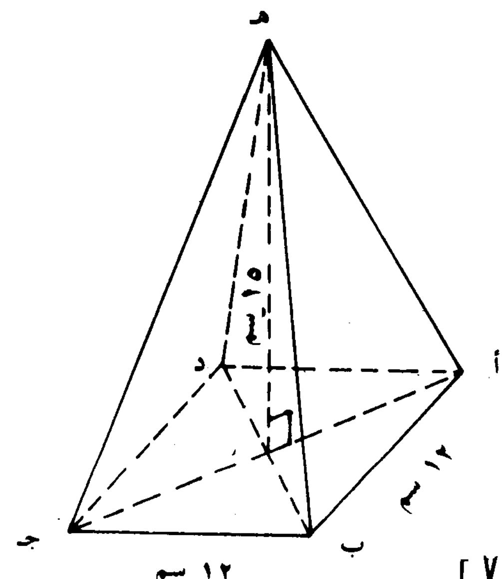
[٢٤ ـ ٤] تدريبــات :

[١] ا ب جـ د هـ ، هرم رباعى قائم قاعدته على شكل مربع ، طول ضلعه ١٢ سم وإرتفاعه ١٥ سم انظر شكل (٢٤ ـ ٧) .

فأوجد :

(أ) طول قطر القاعدة ا جـ　　　(جـ) زاوية هـ ا جـ .

(ب) طول حرف الهرم ا هـ　　　(د) زاوية ا هـ جـ



شكل [٢٤ ـ ٧]

(٢) س ص ع ل م هرم رباعى قائم قاعدته على شكل مستطيل بعداه ٢٠ سم ، ١٤ سم وارتفاعه م ن = ١٨ سم .

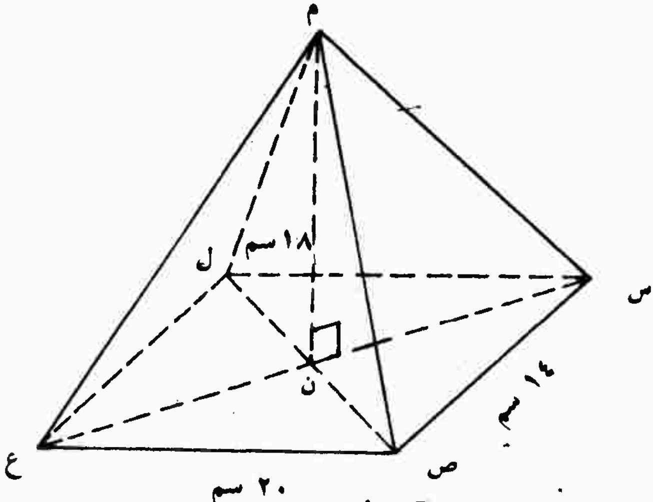
، انظر شكل (٢٤ ــ ٨) ، أوجد :

(أ) طول س ع　　　(هـ) زاوية ص م س

(ب) طول م س　　　(و) زاوية س م ل

(جـ) زاوية م ص ع　　　(ز) زاوية س م ع

(د) زاوية م س ن



شكل [٢٤ ـ ٨]

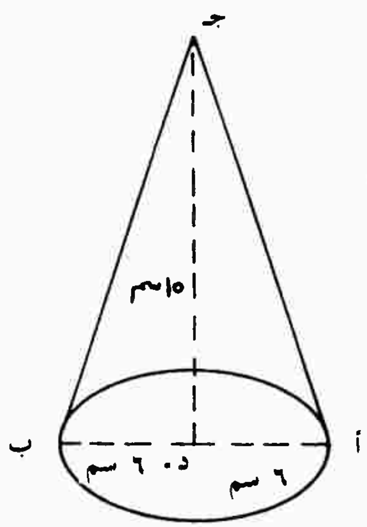
(٣ ـ) فى المخروط الموضح فى شكل (٢٤ ـ ٩) ، أوجد :

(أ) طول الراسم « الحرف » جـ ا .

(ب) زاوية ب ا جـ .

(جـ) زاوية ا جـ ب .

(د) زاوية ا جـ د .



شكل [٢٤ ـ ٩]

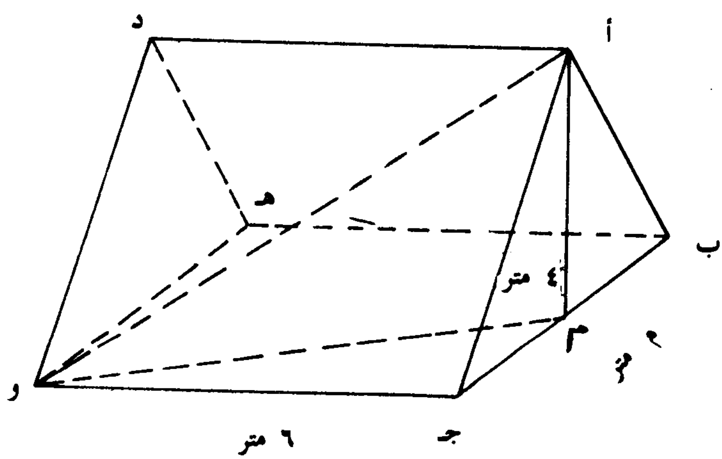
(٤) خيمة نهاياتها ا ب جـ ، د هـ و على شكل مثلثات حادة الزوايا ، انظر شكل (٢٤ ـ ١٠) ، فإذا كان ارتفاع الخيمة ا م .

= ٢ متر ، عرضها ب جـ = ٣ م ، طولها جـ و = ٦ م

(أ) طول ا جـ (د) زاوية ا و م

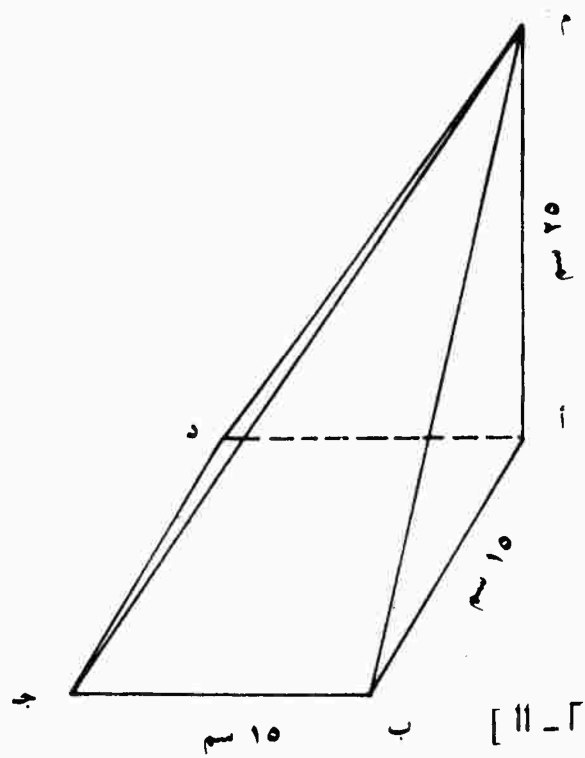
(ب) طول م و (هـ) زاوية ا ود

(جـ) طول ا و (و) زاوية ا ب جـ



شكل [٢٤ ـ ١٠]

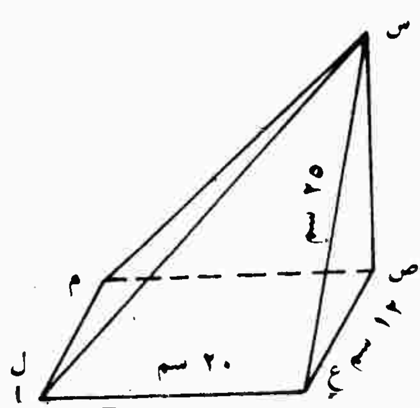
(٥) هرم رباعى ، م ا ب جـ د ، قاعدته ا ب جـ د مربعة الشكل وتقع رأسه م فوق نقطة ا وعلى خط رأسى واحد فإذا كان طول ضلع القاعدة = ١٥ سم وإرتفاعه م ا = ٢٥ سم فأوجد طول كل حرف من أحرفه الجانبية والزاوية التى يصنعها كل حرف مع القاعدة ا ب جـ د ، انظر شكل (٢٤ ـ ١١) .



شكل [٤٢ ـ ١١]

(٦) هرم رباعى س ص ع ل م قاعدته ص ع ل م على شكل مستطيل بعداه ١٢ سم ، ٢٠ سم فإذا كانت س تقع أعلى نقطة ص تماماً وعلى خط رأسى واحد معها .

فإذا كان س ع = ٢٥ سم ، احسب طول الأحرف الجانبية س ص ، س ل ، س م والزوايا التى يصنعها كل منها مع القاعدة .



شكل [٤٢ ـ ١٢]

(٧) رصدت قمة برج ارتفاعه ٥٠ متراً من نقطتين ا ، ب تقع ا شرق البرج بينما تقع ب جنوب البرج . فإذا كانت زاوية إرتفاعه من نقطة ا = ٢٧° بينما زاوية ارتفاعه من نقطة ب = ٣٩° ، فأوجد البعد بين النقطتين ا ، ب .

الدرس الخامس والعشرون :

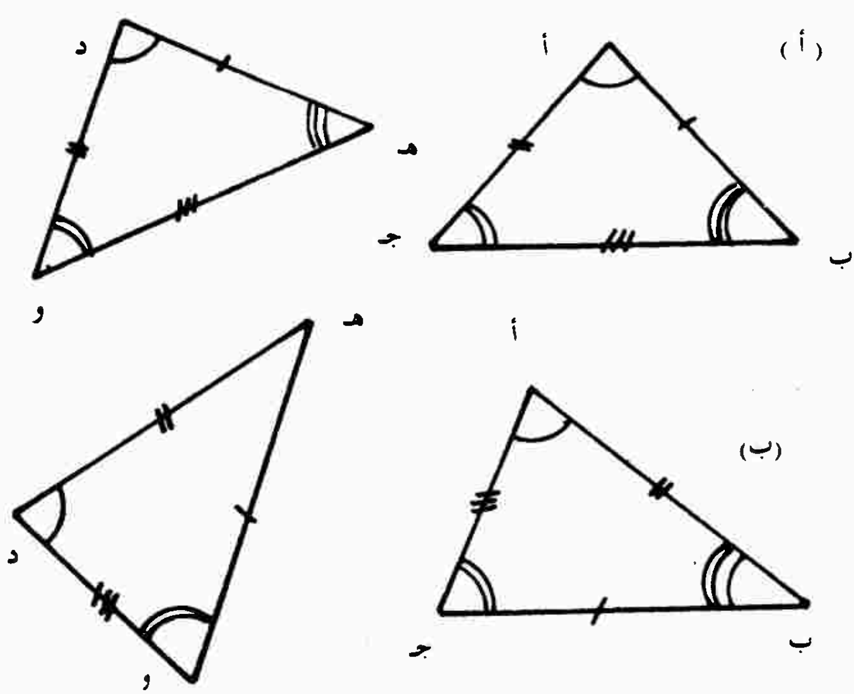
تطابق المثلثات

Congruent triangles

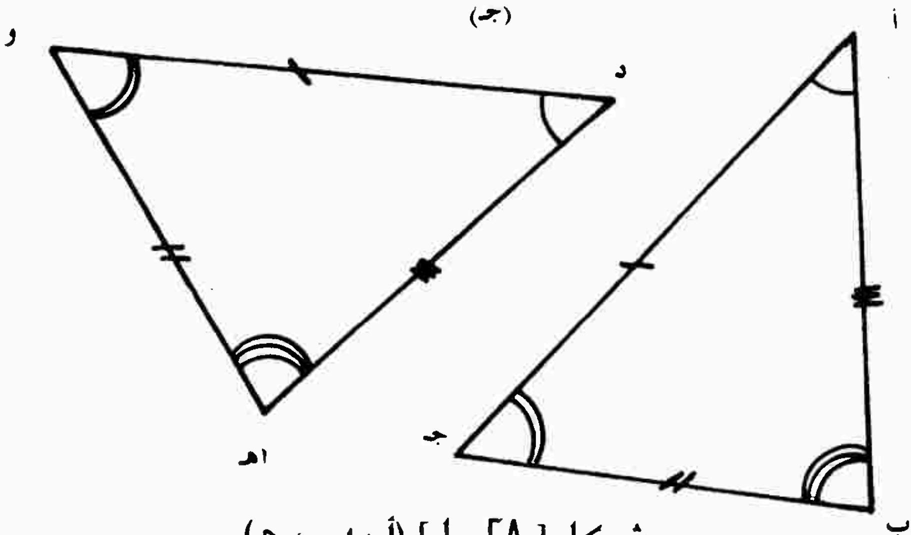
[٢٥ ـ ١] مقدمة :

من المعلوم أن المثلث هو مضلع له ثلاثة أضلاع وثلاثة زوايا أى ستة عناصر .

فإذا تطابق المثلثان ا ب جـ ، د هـ و مثلاً ، انظر الشكل (٢٥ ـ ١) .



شكل [٢٥ ـ ١]



شكل [٢٨ ـ ١] (أ ، بـ ، جـ)

فإنه يمكننا أن نستنتج أن :

أولاً : $\hat{ا} = \hat{د}$ ، $\hat{ب} = \hat{هـ}$ ، $\hat{جـ} = \hat{و}$

ثانياً : ا ب = د هـ ، ب جـ = هـ و ، جـ ا = و د

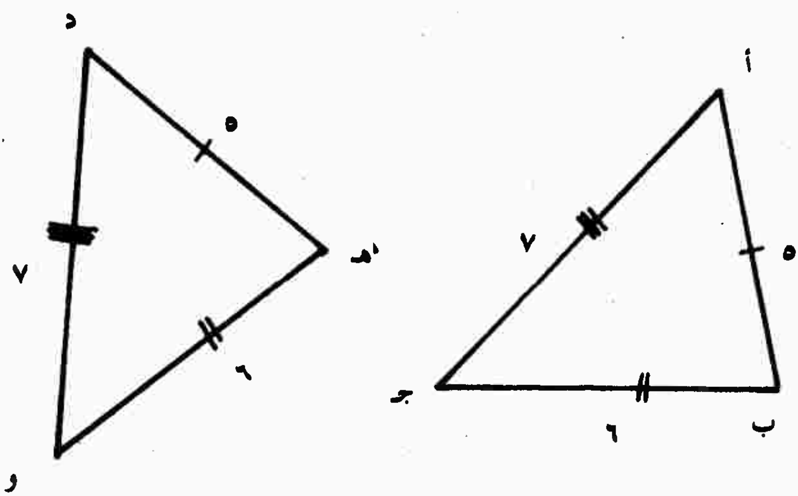
ولكن إذا أردنا إثبات أن المثلثين ا ب جـ ، د هـ و متطابقان فهل من الضرورى إثبات صحة المتساويات الست المذكورة فى أولاً ، ثانياً (تساوى الست عناصر) ،

وللإجابة على هذا السؤال ، نرى أن هذا ضرورى بالنسبة للمضلعات التى لها أكثر من ثلاثة أضلاع أما بالنسبة للمثلثات فإن الأمر يختلف حيث أنه يلاحظ أن تحقيق بعض المتساويات وليس كلها يؤدى بالضرورة . إلى تحقق صحة بقية المتساويات الست ،

□ الحالة الأولى لتطابق المثلثات :

إذا قمنا برسم مثلثين ا ب جـ ، د هـ و فيهما :

ا ب = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم ، جـ ا = ٧ سم ، د هـ = ٥ سم ، هـ و = ٦ سم ، و د = ٧ سم .



شكل [٢٨ - ٢]

فإنه يمكننا وبسهولة التأكد من أنهما متطابقان إذا رسمنا أحدهما على ورق شفاف ووضعناه فوق الآخر .

ومن هنا نلاحظ أنه يكفى لتطابق مثلثان أن تتساوى أطوال الأضلاع المتناظرة فى المثلثين ونتيجة لهذا التطابق فإن الزوايا المتناظرة فى المثلثين تتساوى بالتبعية .

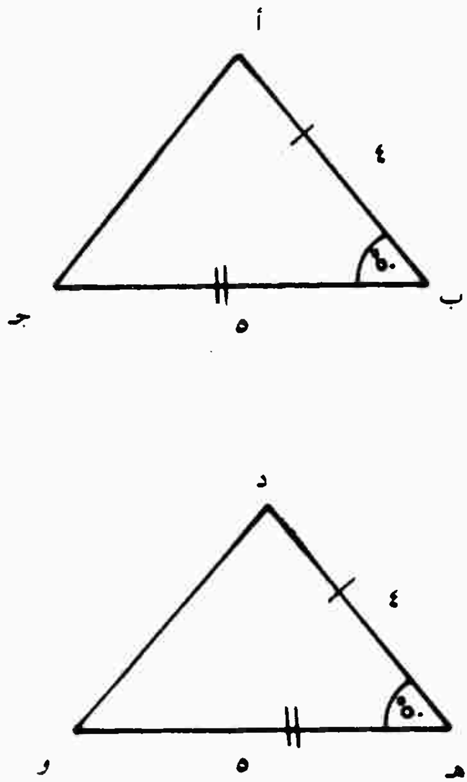
ونخلص من هذا بالنظرية الأولى لتطابق المثلثات :

[يتطابق المثلثان كل على الآخر ، إذا ساوى طول كل ضلع من أحدهما نظيره فى المثلث الآخر] .

□ الحالة الثانية لتطابق المثلثات :

إذا قمنا برسم مثلثين ا ب جـ ، د هـ و فيهما :

ا ب = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم ، زاوية ا ب جـ = ٥٠° ، د هـ = ٤ سم ، هـ و = ٥ سم ، زاوية د هـ و = ٥٠°



شكل [٢٨ - ٣]

فإنه يمكننا وبسهولة التأكد من أنهما متطابقان ، إذا رسمنا أحدهما على ورق شفاف ووضعناه فوق الآخر .

ومن هنا نلاحظ أنه يكفى لتطابق مثلثين أن يتساوى فى أحد المثلثين طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما بنظائرها فى المثلث الآخر .

وينشأ عن هذا التطابق أن يتساوى طول الضلعين المتبقيين ، كما يتساوى قياس كل من الزاويتين الآخرتين مع نظائرهما فى المثلث الآخر .

ونخلص من هذا بالنظرية الثانية لتطابق المثلثات :

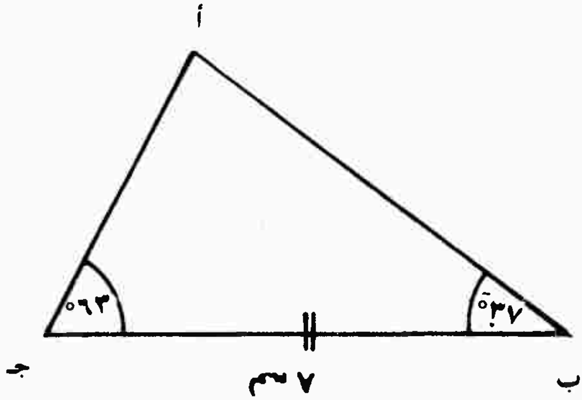
[يتطابق المثلثان كل على الآخر ، إذا ساوى فى أحدهما طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما] .

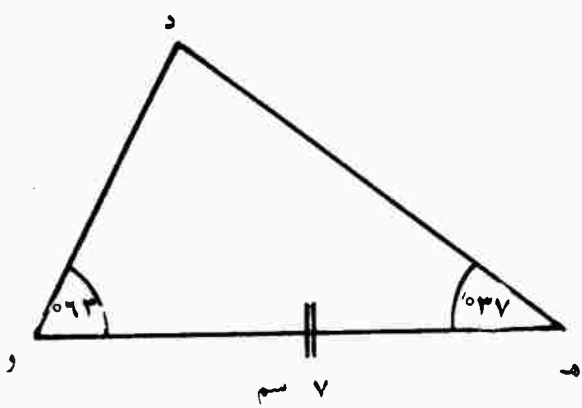
□ الحالة الثالثة لتطابق المثلثات :

إذا قمنا برسم مثلثين ا ب جـ ، د هـ و فيهما :

ب جـ = ٧ سم ، بْ = ٣٧° ، جْـ = ٦٣°

، هـ و = ٧ سم ، هْـ = ٣٧° ، وْ = ٦٣°





شكل [٢٥ ـ ٤]

فإنه يمكن وبسهولة التأكد من أنهما متطابقان ، إذا رسمنا أحدهما على ورق شفاف ووضعناه فوق الآخر .

ومن هنا نلاحظ أنه يكفى لتطابق مثلثين أن يتساوى فى أحدهما طول ضلع ، وقياس زاويتين من زواياه مع نظائرهما فى المثلث الآخر .

وينشأ عن هذا التطابق أن يتساوى طولا الضلعين الآخرين وقياس الزاوية الثالثة فى أحدهما مع نظائرهما فى المثلث الآخر .

ونخلص من هذا بالنظرية الثالثة لتطابق المثلثات :

[يتطابق المثلثان كل على الآخر ، إذا ساوى فى أحدهما قياس زاويتين والضلع المحصور بينهما بنظائرهما فى الآخر] .

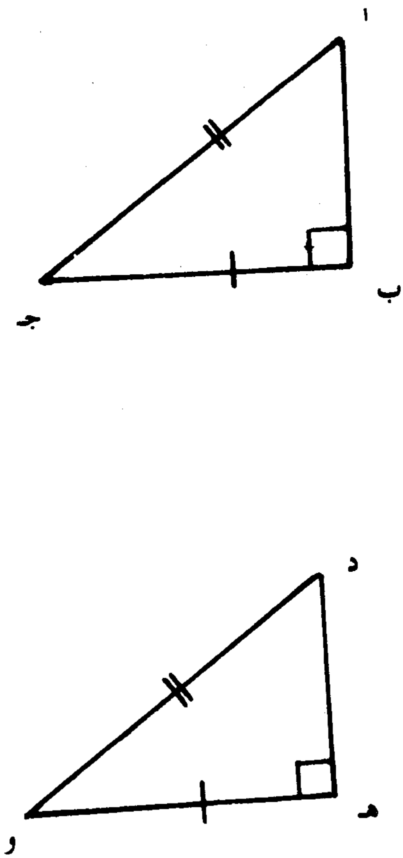
الحالة الرابعة لتطابق المثلثات :

إذا قمنا برسم مثلثين قائمين ا ب جـ ، قائم الزاوية فى ب وفيه ا جـ = ٥ سم ، ب جـ = ٤ سم

، د هـ و قائم الزاوية فى هـ وفيه د و = ٥ سم ، هـ و = ٤ سم

فإنه يمكن بسهولة التأكد من أنهما متطابقان ، إذا رسمنا أحدهما على ورق شفاف ووضعناه فوق الآخر .

ومن هنا نلاحظ أن يكفى لتطابق مثلثين قائمين الزاوية ، أن يتساوى فى أحدهما طولا ضلع ووتر نظيرهما فى الآخر .



شكل [٢٥ ـ ٥]

ونخلص من هذا بالنظرية الرابعة لتطابق المثلثات :

[يتطابق المثلثان القائما الزاوية تمام الإنطباق إذا ساوى فى أحدهما ضلع ووتر نظيرهما فى المثلث الآخر] .

[٢٥ ـ ٢] ملخص لحالات تطابق المثلثات :

يتطابق المثلثان إذا توفرت فيهما أياً من هذه الحالات الأربعة الآتية :

□ الحالة الأولى : (بثلاثة أضلاع) :

يتطابق المثلثان تمام الانطباق إذا ساوى طول كل ضلع من أحدهما طول نظيره فى المثلث الآخر .

□ الحالة الثانية (بضلعين والزاوية المحصورة بينهما) :

يتطابق المثلثان تمام الانطباق إذا تساوى طولا ضعلين وقياس الزاوية المحصورة بينهما مع نظائرهما بالمثلث الآخر .

□ الحالة الثالثة (بزاويتين وضلع) :

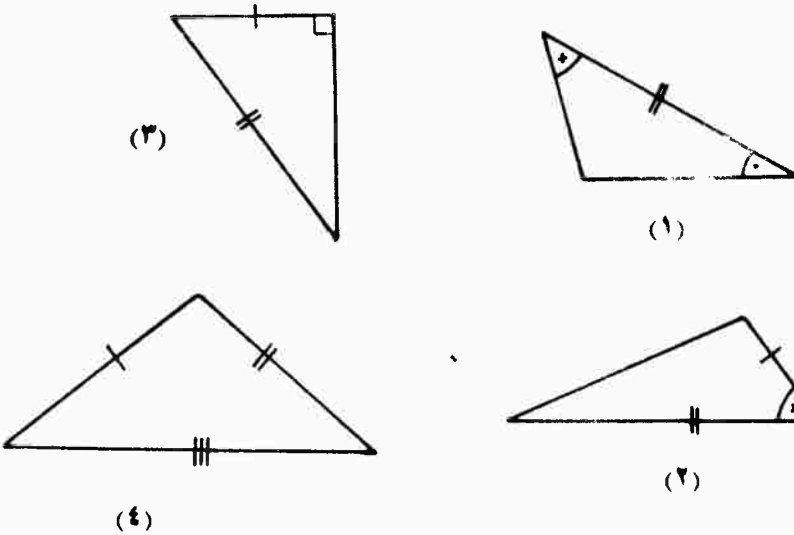
يتابق المثلثان تمام الانطباق إذا تساوت فى أحدهما زاويتان والضلع المحصور بينهما مع نظائرهما فى المثلث الآخر .

□ الحالة الرابعة (بوتر وضلع للمثلث القائم) :

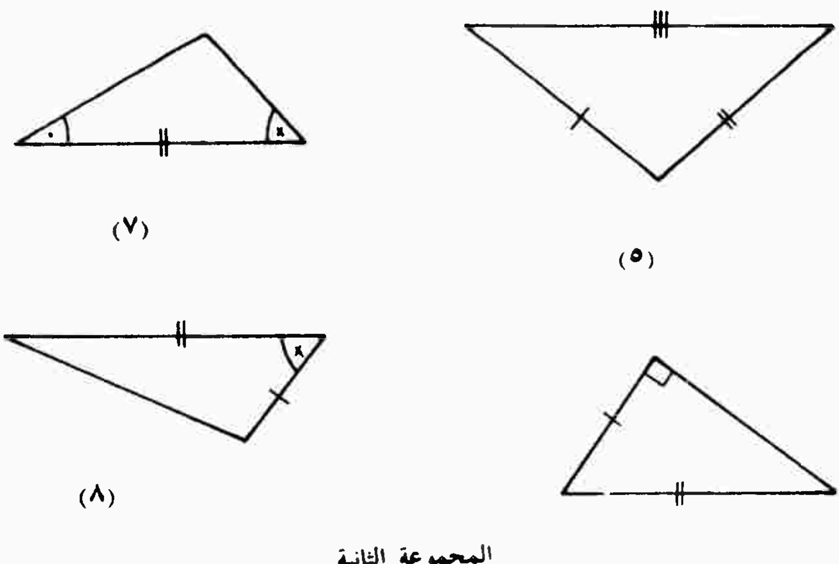
يتطابق المثلثان القائما الزاوية تمام الانطباق إذا ساوى فى أحدهما وتر وطول ضلع ، نظيريهما فى المثلث الآخر .

[٢٥ ـ ٣] تدريبات : على تطابق المثلثات :

(١) فى الشكل الموضح مجموعتان ، كل منها تحتوى على أربعة مثلثات وكل مثلث من المجموعة الأولى يتطابق مع نظير له فى المجموعة الثانية والمطلوب هو تحديد أزواج المثلثات المتطابقة فى المجموعتين واذكر سبب التطابق .



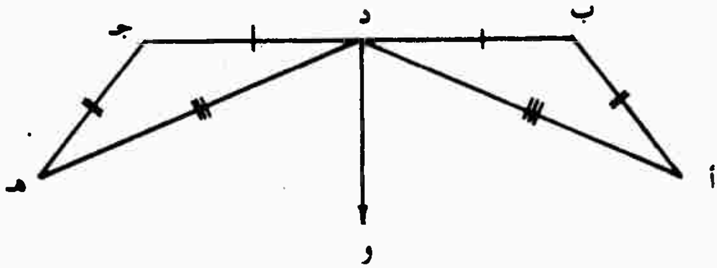
المجموعة الأولى



المجموعة الثانية

شكل [٢٨ ـ ٦] (المجموعتان الأولى والثانية)

(٢) فى شكل (٢٥ ـ ٧) ، المثلثان ، ا ب د.، هـ جـ د فيهما أ ب = هـ جـ ، ب د = جـ د ، أ د = هـ د المطلوب إثبات أن زاوية أ د و = زاوية هـ د و .

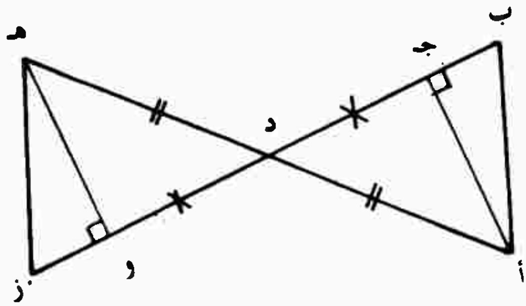


شكل [٢٥ ـ ٧]

(٣) فى شكل (٢٥ ـ ٨) ، أ د = د هـ ، ب د = ز د والمطلوب إثبات أن :

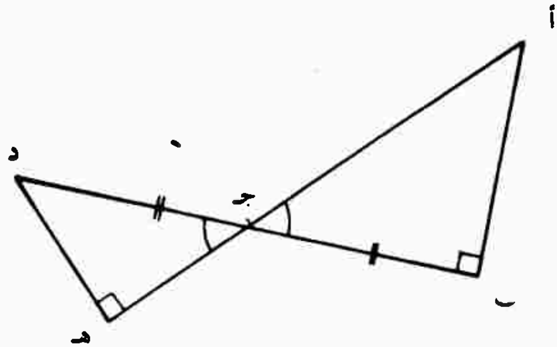
(أولاً) : المثلثين أ د ب ، هـ د ز متطابقان .

(ثانياً) : أ جـ = هـ و



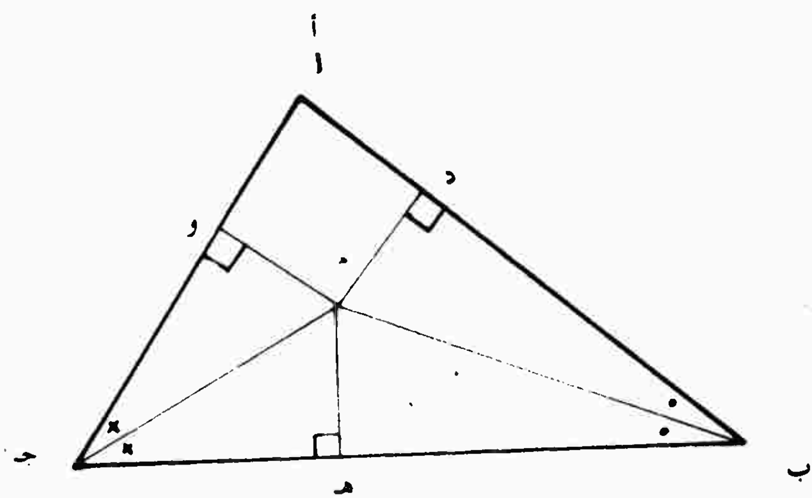
شكل [٢٥ ـ ٨]

(٤) فى شكل (٢٥ — ٩) [illegible] ، ب = هـ = ٩٠
والمطلوب إثبات أن المثلثين غير متطابقين ، مع ذكر السبب .



شكل [٢٥ ـ ٩]

(٥) فى شكل (٢٥ — ١٠) ، م ب ينصف زاوية ب ، م جـ ينصف زاوية جـ ، م د عمودى على ا ب ، م هـ عمودى على ب جـ ، م و عمودى على جـ ا والمطلوب إثبات أن : م د = م و

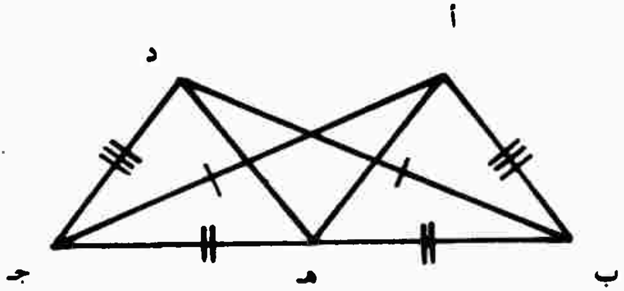


شكل [٢٥ ـ ١٠]

(٦) فى شكل (٢٥ – ١١) ، ا ب = د جـ ، هـ تنصف ب جـ والمطلوب إثبات أن :

(أ) ا بٖ جـ = د جٖـ ب

(ب) ا هـ = د هـ .

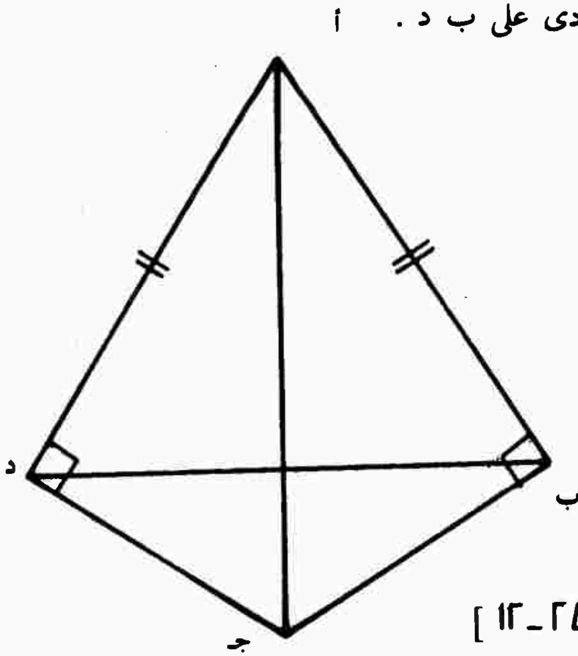


شكل [٢٥ ـ ١١]

(٧) فى شكل (٢٥ ــ ١٢) ، اثبت الآتى :

(أ) ∆ ا ب جـ يكافىء ∆ ا د جـ

(ب) ا جـ عمودى على ب د .



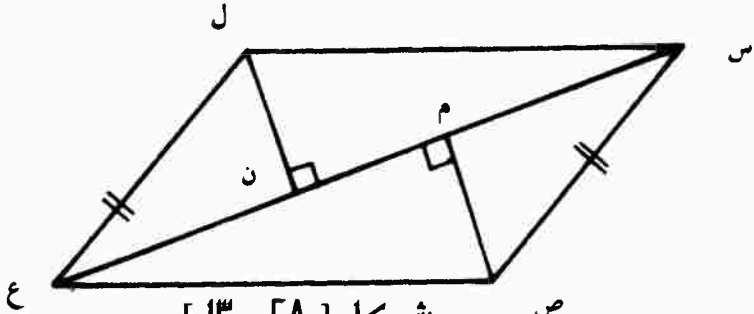
شكل [٢٥ ـ ١٢]

(٨) فى شكل (٢٥ ـ ١٣) ، س ص يوازى ل ع و يساويه ، ص م عمودى على س ع ، ل ن عمودى على س ع والمطلوب إثبات أن :

ص م = ل ن

س ل = ص ع

س ل يوازى ص ع

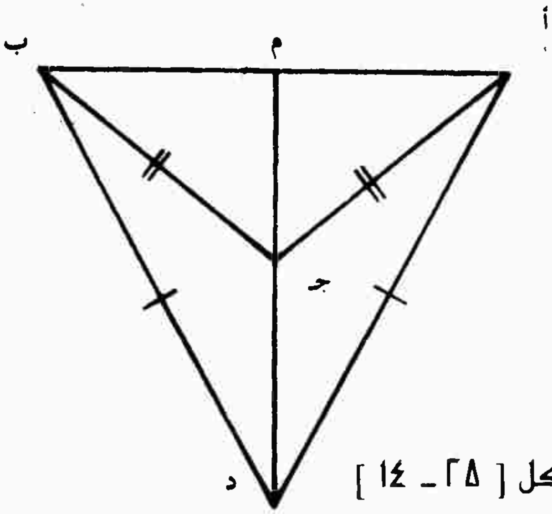


شكل [٢٥ ـ ١٣]

(٩) فى شكل (٢٥ ـ ١٤) ، أ جـ = ب جـ وكذلك د أ = د ب فاثبت

(أ) زاوية أ د جـ = زاوية ب د جـ

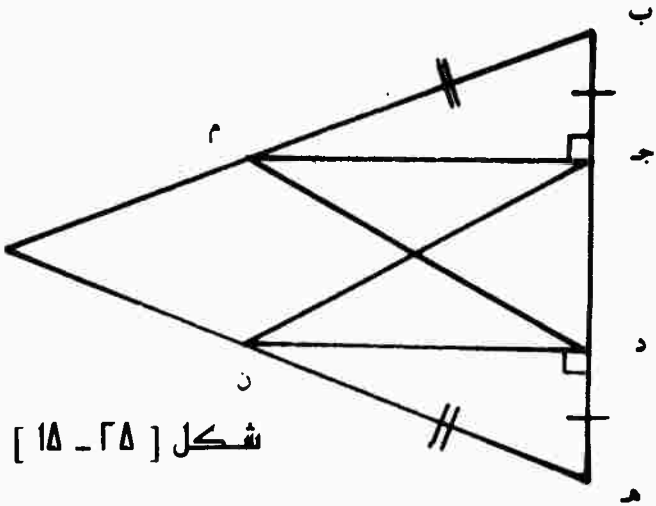
(ب) دم عمودى على أ ب .



شكل [٢٥ ـ ١٤]

(١٠) فى شكل (٢٥ ـ ١٥) ، م ب = ن هـ ، جـ ب = د هـ ، م جـ ⊥ ب هـ ، ن د ⊥ ب هـ

والمطلوب إثبات أن جـ ن = م د



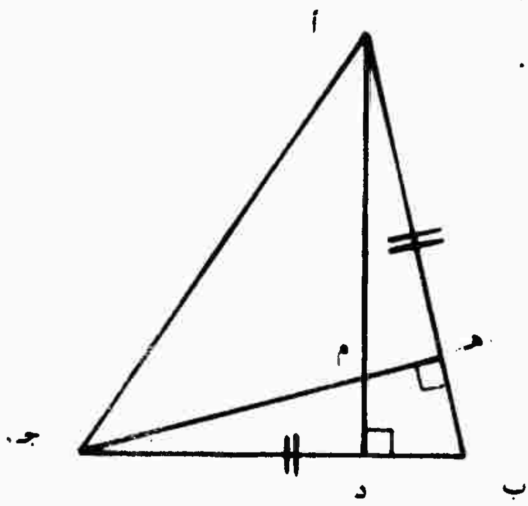
شكل [٢٥ ـ ١٥]

(١١) فى شكل (٢٥ ـ ١٦) ، أ ب = جـ ب ، أ د ⊥ ب جـ ، جـ هـ ⊥ أ ب فاثبت أن :

(أ) أ د = جـ هـ .

(ب) م د = م هـ .

(جـ) أ م = جـ م .



شكل [٢٥ ـ ١٦]

الدرس السادس والعشرون :

تشــابه المثلثــات

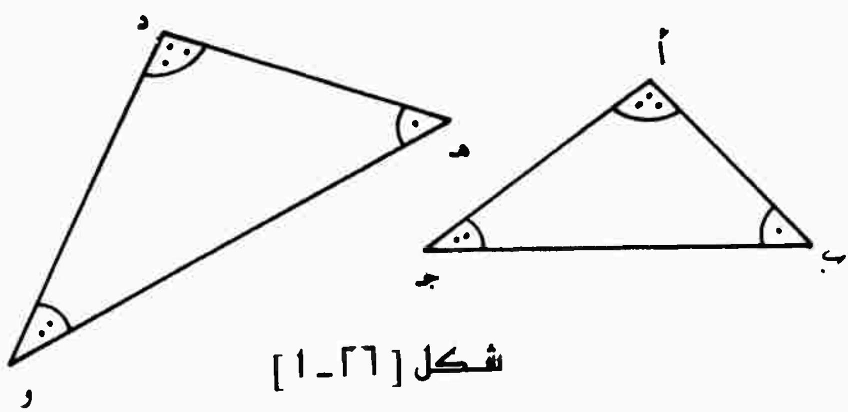
Similar triangles

لكى يتشابه مثلثان فإنه يجب أن يتوفر الآتى :

(١) أن تتساوى الزوايا المتناظرة فيهما .

(٢) أن تتساوى النسبة فى الطول بين كل ضلعين متناظرين .

ففى المثلثين أ ب جـ ، د هـ و شكل (٢٦ ـ ١) نجد أن :



شكل [٢٦ ـ ١]

$\hat{أ} = \hat{د}$ ، $\hat{ب} = \hat{هـ}$ ومن ثم فإن $\hat{جـ} = \hat{و}$.

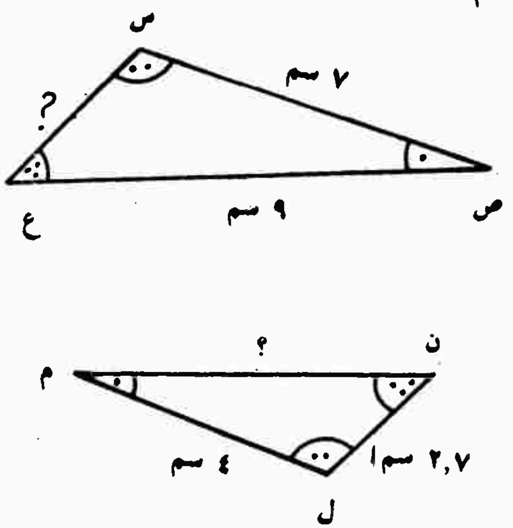
وكـذلك نجـد أن :

$$\frac{أ\ ب}{د\ هـ} = \frac{ب\ جـ}{هـ\ و} = \frac{جـ\ أ}{و\ د} = \text{مقدار ثابت}$$

□ مثال (١) :

في شكل (٢٦ ــ ٢) ، المثلثان س ص ع ، ل م ن متشابهان أوجد طول الأضلاع المؤشر أمامها بعلامة استفهام ؟

وهي الضلعان س ع ، م ن .



□ الحــل :

شكل [٢٦ ـ ٢]

حيث أن زاوية س = زاوية ل

، زاوية ص = زاوية م

ومن ثم زاوية ع = زاوية ن

$$\therefore \frac{\text{س ص}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ع س}}{\text{ن ل}}$$

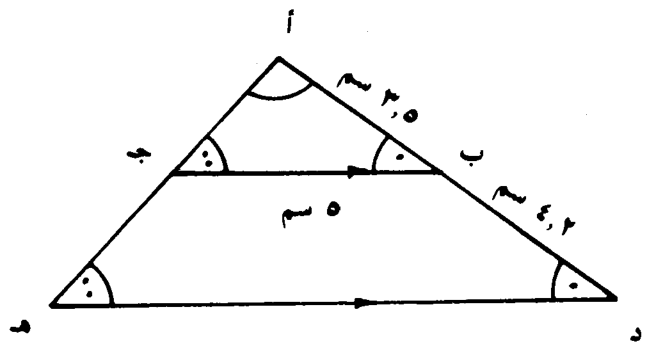
$$\therefore \frac{٧}{٤} = \frac{٩}{\text{م ن}} = \frac{\text{ع س}}{٢,٧}$$

$$\therefore \text{م ن} = \frac{٤ \times ٩}{٧} = \frac{٣٦}{٧} = ٥,١ \text{ سم تقريباً .}$$

$$\text{، ع س} = \frac{٧ \times ٢,٧}{٤} = \frac{١٨,٩}{٤} = ٤,٧ \text{ سم تقريباً .}$$

□ مثال (٢) :

فى شكل (٢٦ ـ ٣) ، أوجد طول الضلع د هـ .



شكل [٢٦ ـ ٣]

□ الحـل :

ΔΔ أ ب جـ ، أ د هـ متشابهان [وزاوية الرأس أ مشتركة فى كل منهما ، وزاوية أ ب جـ تناظر زاوية أ د هـ وتساويها كما وأن زاوية أ جـ ب = زاوية أ هـ د وتناظرها] .

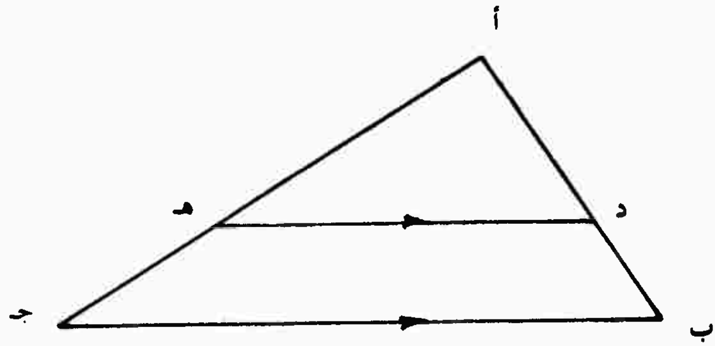
∴ تتناسب أطوال أضلاع المثلثين ومن ثم :

$$= \frac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$$

$$\therefore = \frac{٣,٥}{(٤,٢+٣,٥)} = \frac{٥}{\text{د هـ}} \qquad \therefore \text{د هـ} = \frac{٧,٧ \times ٥}{٣,٥} = ١١ \text{ سم}$$

[٢٦ ـ ١] تدريبـــات :

أولاً : فى شكل (٢٦ ـ ٤) :



شكل [٢٦ ـ ٤]

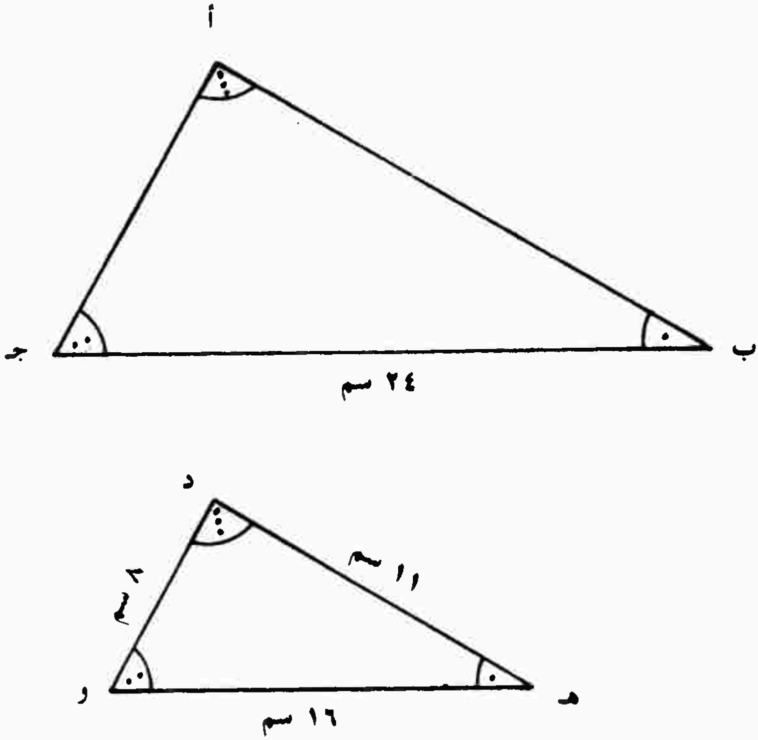
١ ـ ا ب = ٩ سم ، ا د = ٦ سم ، ا جـ = ١٢ سم
فاوجد طول أ هـ .

٢ ـ ا ب = ٨ سم ، ا د = ٦ سم ، ا هـ = ٧ سم
فاوجد طول أ جـ .

٣ ـ أ د = ٧ سم ، د ب = ٣ سم ، هـ جـ = ٥ سم
فاوجد طول أ هـ

ثانياً : فى شكل (٢٦ ـ ٥) ، المثلثان ا ب جـ ، د هـ و متشابهان ، احسب :

١ ـ طول كل من أ ب ، أ جـ .
٢ ـ نسبة المساحة فيما بين المثلثين ا ب جـ ، د هـ و

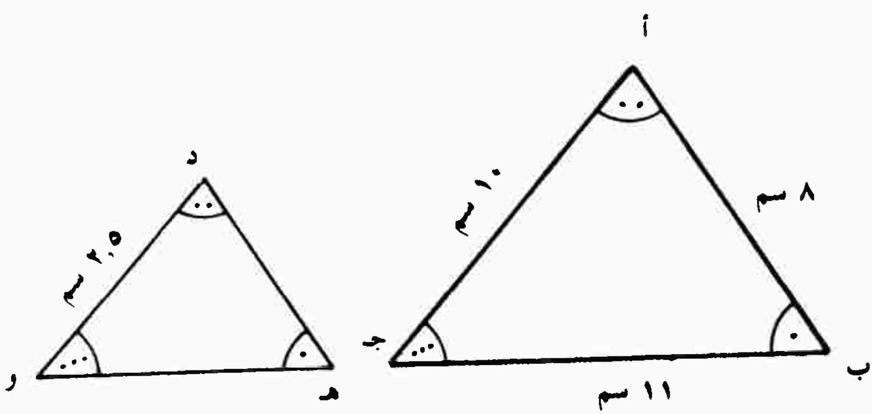


شكل [٢٦ ـ ٥]

ثالثاً : فى شكل (٢٦ ـ ٦) ، المثلثان ا ب جـ ، د هـ و متشابهان احسب :

١ ـ طول كل من د هـ ، هـ و

٢ ـ النسبة بين مساحة المثلثين ا ب جـ ، د هـ و



شكل [٢٦ ـ ٦]

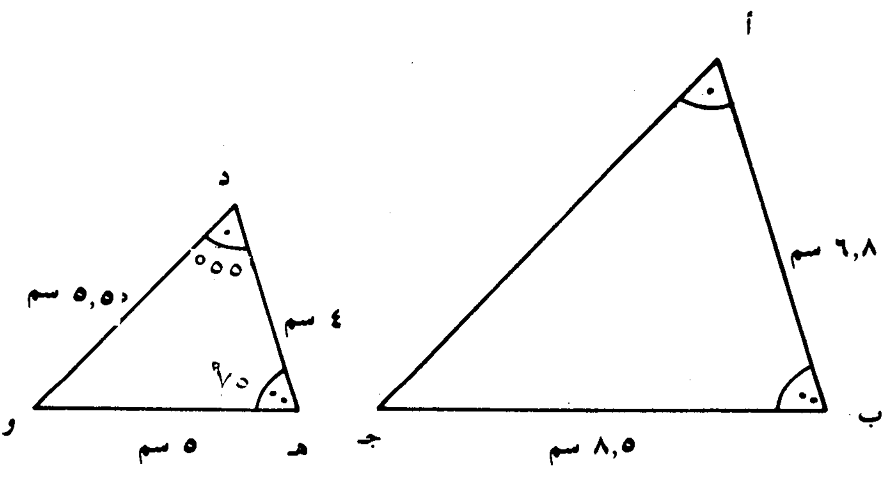
رابعاً : فى شكل (٢٦ ـــ ٧) ، المثلثان ا ب جـ ، د هـ و متشابهان فاحسب :

١ ـــ زاوية أ

٢ ـــ زاوية ب

٣ ـــ زاوية جـ

٤ ـــ النسبة بين مساحة المثلثين ا ب جـ ، د هـ و



شكل [٢٦ ـ ٧]

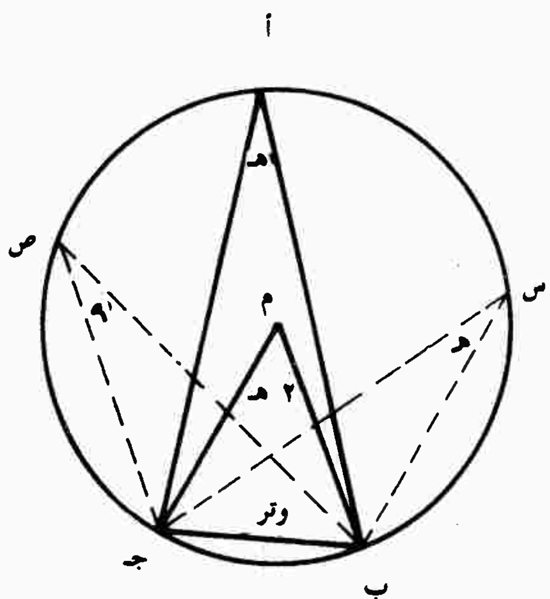
الدرس السابع والعشرون :

خواص الزوايا المرسومة بدائرة

Angle properties of a circle

توجد مجموعة من الخواص للزوايا المرسومة داخل دائرة وهى كما يلى :

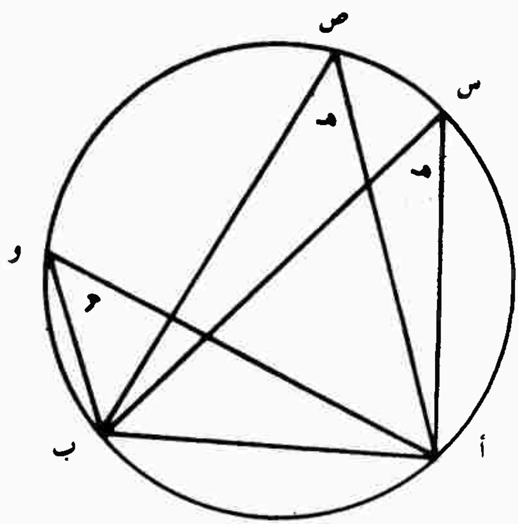
(١) الزاوية المركزية (رأسها هو مركز الدائرة) تعادل ضعف الزاوية المحيطية (رأسها يقع على محيط الدائرة) ، التى تشترك معها فى نفس القوس (أو الوتر) ، انظر شكل (٢٧ ـ ١) .



زاوية ب م جـ = ٢ زاوية ب أ جـ

شكل [٢٧ ـ ١]

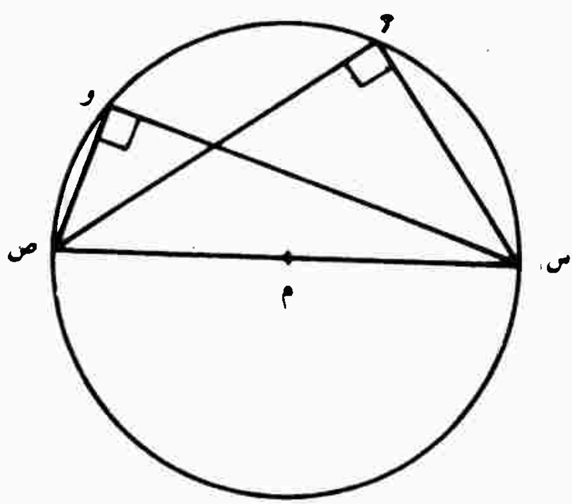
(٢) تتساوى الزاويا المحيطية المنشأة على نفس القوس (أو الوتر) ، انظر شكل (٢٧ — ٢) .



زاوية أ س ب = زاوية أ ص ب = زاوية أ و ب = هـ

شكل [٢٧ ـ ٢]

(٣) الزوايا المحيطية المرسومة على قطر الدائرة تكون قائمة أو الزوايا المرسومة فى نصف دائرة تكون قائمة ، انظر شكل (٢٧ — ٣) .

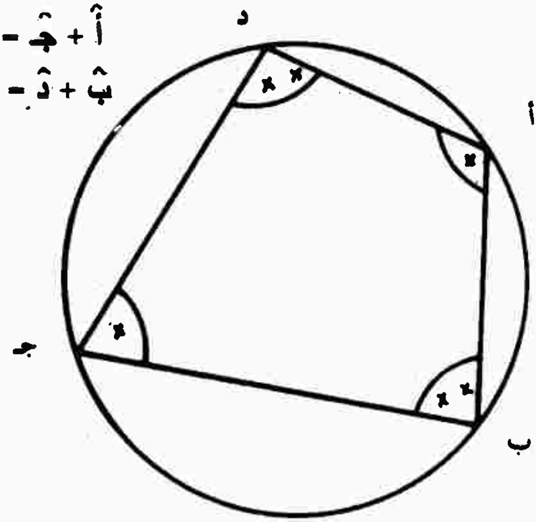


شكل [٢٧ ـ ٣]

(٤) فى الشكل الرباعى الدائرى (الذى تقع رؤوسه الأربعة على محيط الدائرة) ، كل زاويتان متقابلتان متكاملتان ، انظر شكل (٢٧ ـــ ٤) .

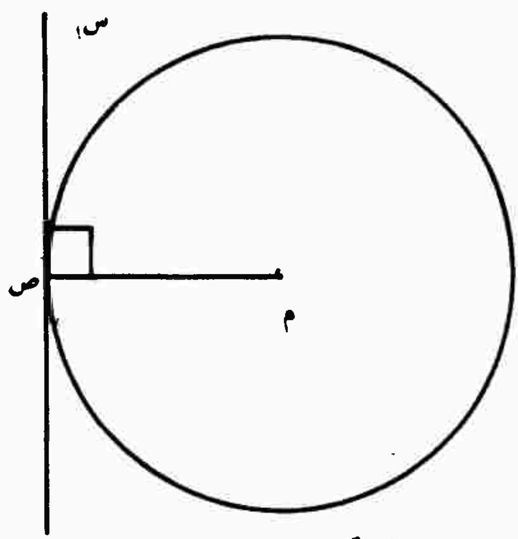
أ̂ + جـ̂ = ١٨٠°

ب̂ + د̂ = ١٨٠°



شكل [٢٧ ـ ٤]

(٥) يتعامد المماس للدائرة عند نقطة ما ، مع نصف القطر الواصل لهذه النقطة ، انظر شكل (٢٧ ـــ ٥) .



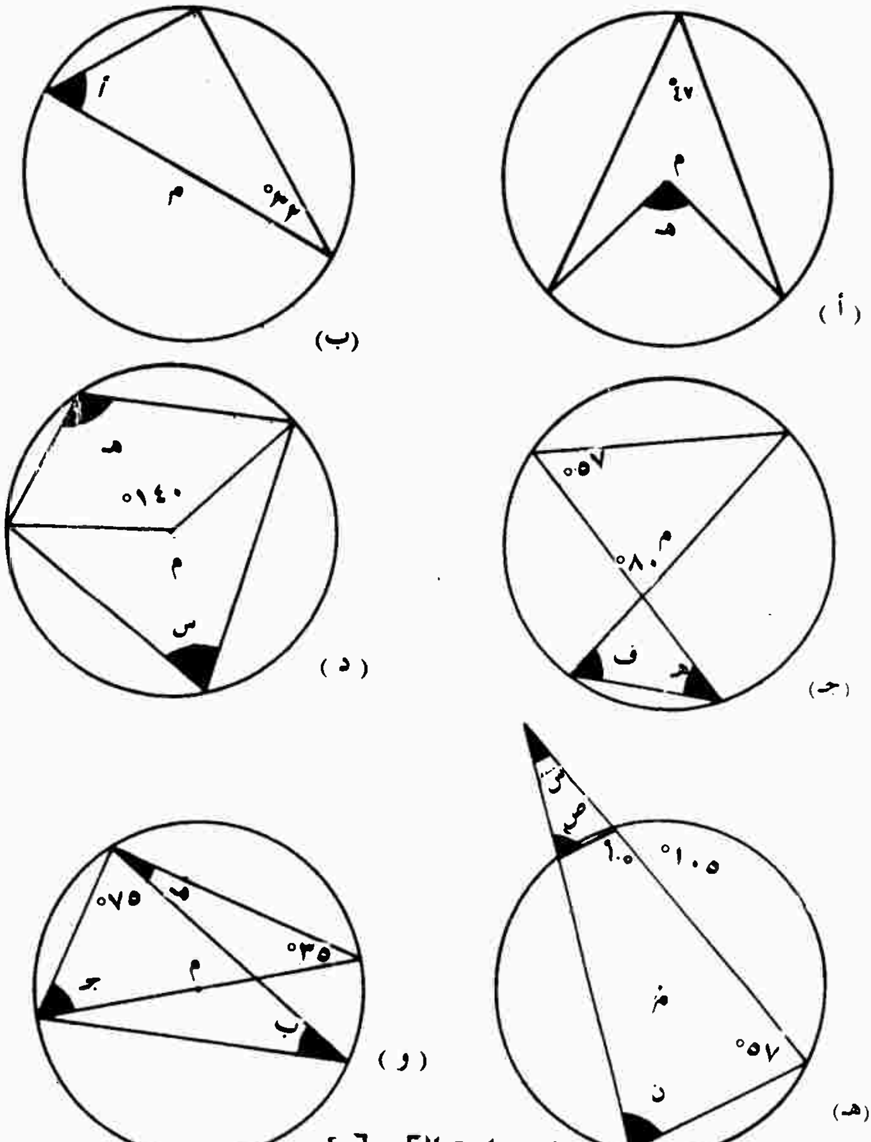
زاوية م ص س = ٩٠°

شكل [٢٧ ـ ٥]

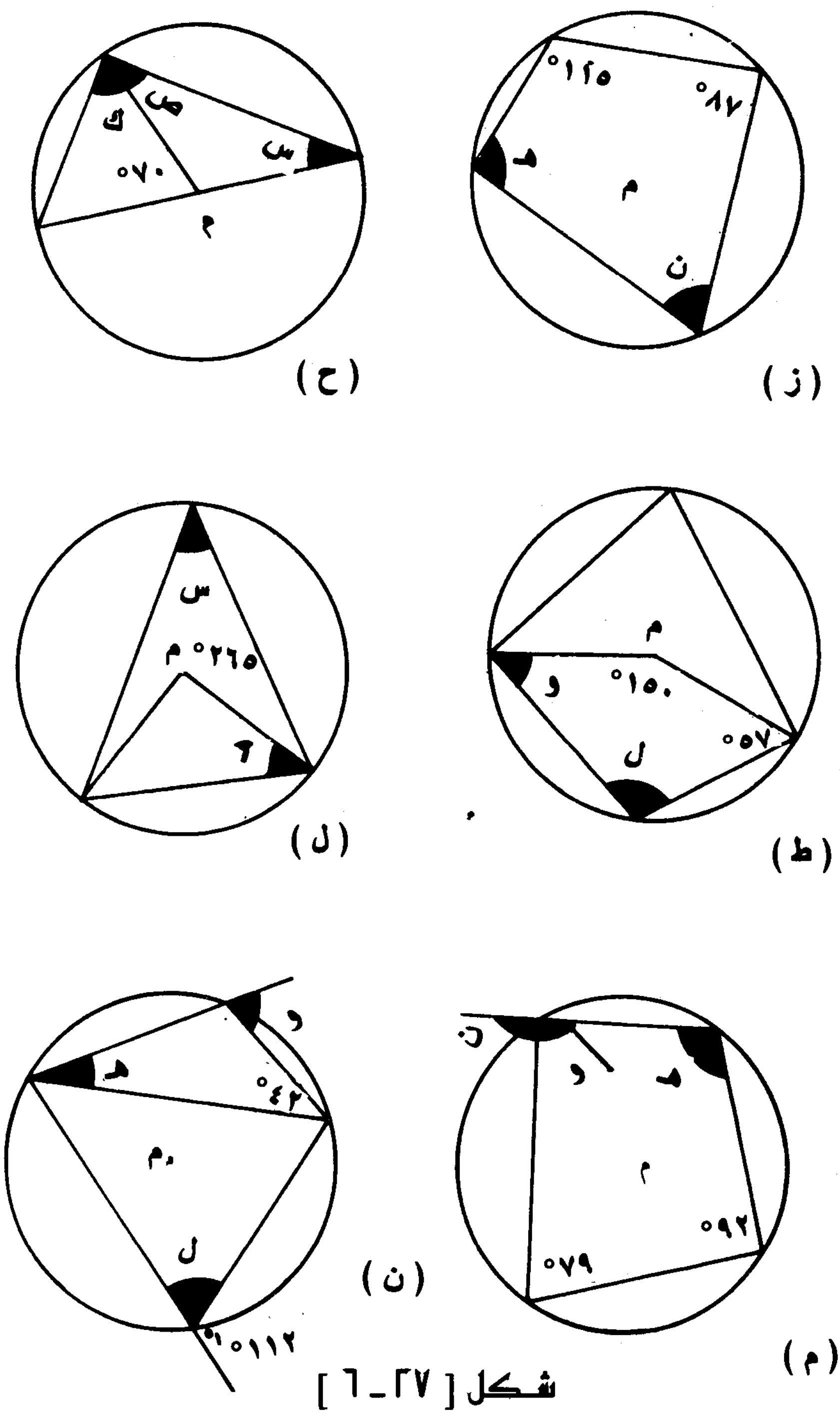
[٢٧ ـ ١] تدريبـــات :

(١) أوجد قيم الزوايا المرموز لها بالحروف الأبجدية فى شكل (٢٧ — ٦) .

[م تعنى مركز الدائرة — الرسم ليس بمقياس] .



شكل [٢٧ ـ ٦]



شكل [٣٧ _ ٦]

(٢) دائرة بها الوتر ا ب يوازى قطرها جـ د ، فإذا كانت زاوية .
جـ أ ب = ١٠٥° فأوجد :

(أ) زاوية جـ د ب

(ب) زاوية د جـ ب

(جـ) زاوية جـ ب أ

(٣) أ ، ب ، جـ ، د أربع نقط تقع على محيط دائرة واحدة فإذا كانت زاوية أ ب د = ٤٨° وكان أ ب يوازى د جـ فأوجد :

(أ) زاوية أ جـ د .

(ب) زاوية ب د جـ .

(جـ) زاوية ب أ جـ .

الدرس الثامن والعشرون :

ميل المستقيم والمنحنى

Gradients of lines and curves

[٢٨ ـ ١] ميل المستقيم :

علمنا فيما سبق [الكتاب الثانى أو الجزء الثانى] ، إن ميل المستقيم يمكن إيجاده ، بعمل زاوية قائمة يكون الخط المستقيم (المطلوب حساب ميله) أو جزء منه بمثابة وتر وتكون قيمة الميل عبارة عن ناتج قسمة الارتفاع الرأسى على الأفقى وهو عبارة عن المماس للزاوية هـ التى يصنعها الخط المستقيم مع الأفقى . أى وباختصار :

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{الطول المقابل}}{\text{الطول المجاور}} = \text{ظا هـ}\ .$$

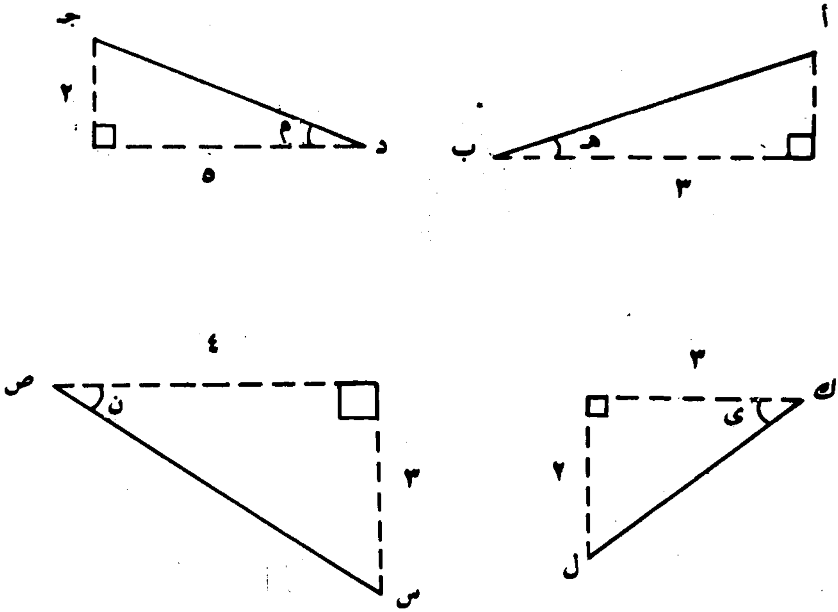
□ **مثال (١) :** فى الشكل (٢٨ ـ ١)

ميل المستقيم أ ب = ظا هـ = $\frac{١}{٣}$

، ميل المستقيم جـ د = ظا م = $\frac{٢}{-٥} = -\frac{٢}{٥}$

، ميل المستقيم س ص = ظا ن = $\frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$

، ميل المستقيم ك ل = ظا ى = $\frac{-٢}{٣} = -\frac{٢}{٣}$



شكل [٢٨ ـ ١]

□ **مثال (٢) :**

ارسم المستقيم الواصل بين النقطتين (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٤) ومن ثم أو‍‍ـ
ميل هذا المستقيم .

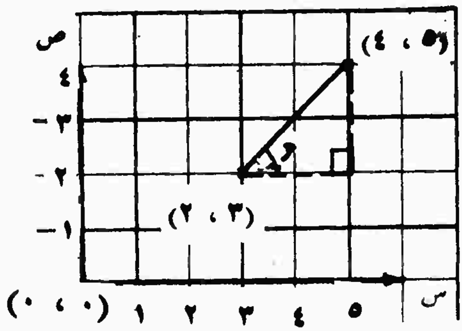
□ **الحـــل :**

انظر شكل (٢٨ ــ ٢) :

وميل هذا الخط = ظا هـ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

∴ الميل = ١

، $\hat{هـ}$ = ظا$^{-١}$ ١ = ٤٥°



شكل [٢٨ ـ ٢]

□ **مثال (٣) :**

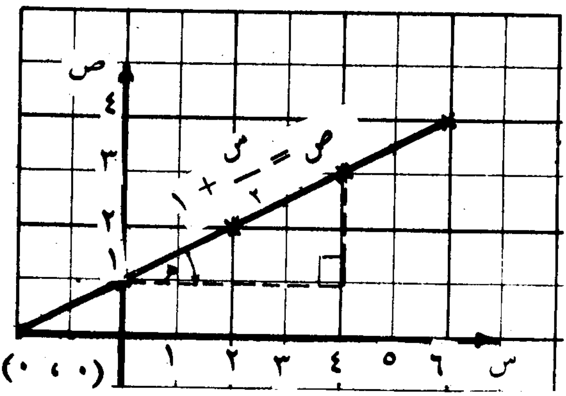
ارسم المستقيم الذى معادلته :

ص = $\frac{س}{٢}$ + ١ لقيم س : ٦ > س > صفر

انظر جدول (٢٨ ــ ١) وشكل (٢٨ ــ ٣) .

س	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
$\frac{س}{٢}$	صفر	$\frac{١}{٢}$	١	$\frac{٣}{٢}$	٢	$\frac{٥}{٢}$	٣
+ ١	١	١	١	١	١	١	١
ص	١	١ $\frac{١}{٢}$	٢	٢ $\frac{١}{٢}$	٣	٣ $\frac{١}{٢}$	٤

جدول (٢٨ ـ ١)



شكل [٢٨ـ٣]

ومن الشكل : ظا هـ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

وحيث أن المعادلة العامة للمستقيم هى ص = م س + جـ

حيث م = الميل ، جـ طول الجزء المقطوع من محور الصادات

، ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س +١

نجد أن الميل = $\frac{١}{٢}$ ، جـ = ١ (من الرسم) .

ويمكننا بسهولة إيجاد ميل خط مستقيم يصل فيما بين نقطتين وذلك بدون الرسم وذلك من العلاقة .

الميل = $\frac{\text{الفرق بين الإحداثى الصادى (لأى نقطتين على الخط المستقيم)}}{\text{الفرق بين الإحداثى السينى لنفس النقطتين}}$

□ مثال (٤) :

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل فيما بين النقطتين :

ا (٤ ، ٣) ، ب (–٢ ، ٤)

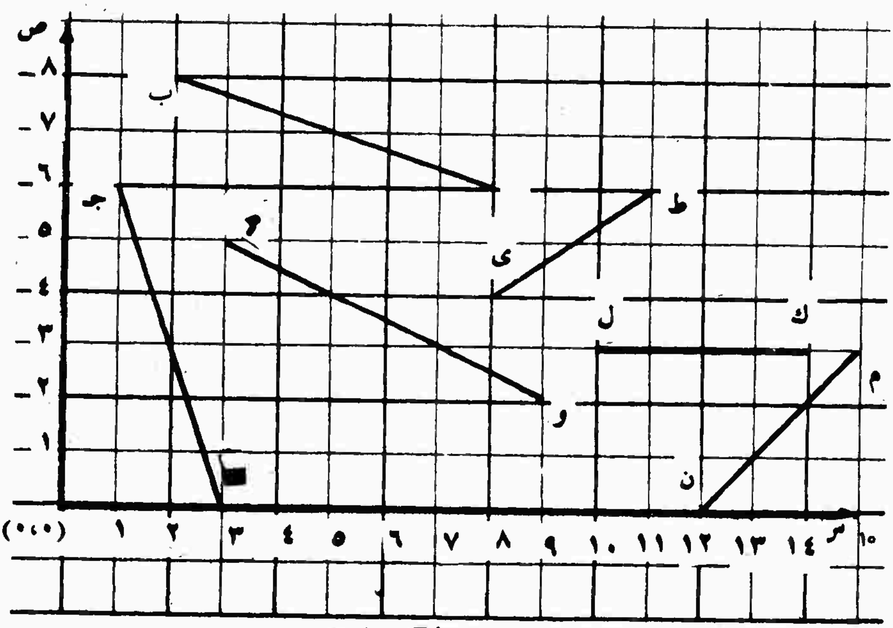
□ **الحـــل :**

$$\text{الميل} = \frac{٣ - ٤}{٤ - (-٢)} = \frac{-١}{٦}$$

∴ الميل = $-\frac{١}{٦}$ (بدون رسم) .

[٢٨ ـ ٢] تدريبـــات :

أولاً : احسب ميل مجموعة المستقيمات ، المبينة فى شكل (٢٨ ــ ٤) .



شكل [٢٨ ـ ٤]

ثانياً : مثل النقط التالية بيانياً ثم أوجد ميل الخط الواصل بين كل اثنين منها :

(١) (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٧)
(٢) (٣ ، ١) ، (٧ ، ٤)
(٣) (٦ ، − ٢) ، (٧ ، ٨)
(٤) (٤ ، ٤) ، (٦ ، صفر)
(٥) (٦ ، ١) ، (٦ ، − ٢)
(٦) (−٢ ، ٥) (−٤ ، صفر)

ثالثاً : ارسم المستقيمات التالية لقيم س : ٤ ≤ س ≤ صفر وفى كل حالة أوجد ظا هـ بإقامة مثلث قائم الزاوية .

(١) ص = ٣ س + ١

(٢) ص = ٣ س – ٣

(٣) ٢ ص = ٣ س + ٧

(٤) ٢ ص = س + ٤

رابعاً : احسب ميل المستقيم الواصل بين كل نقطتين فيما يلى بدون تمثيل النقط ، [حسابياً وليس بيانياً] .

(١) (٤ ، – ١) ، (– ٢ ، ٣)

(٢) (٠ ، ٣) ، (– ٤ ، ٠)

(٣) (٠ ، ٠) ، (– ٣ ، ٧)

(٤) (– ١ ، – ٥) ، (٠ ، –٢)

(٥) (١ ، ٤) ، (٣ ، ٣)

(٦) (٠ ، ٣) ، (٥ ، ٢)

(٧) (– ٢ ، ٥) ، (١ ، ٤)

(٨) (٤ ، – ٤) ، (٠ ، ٣)

[٢٨ ـ ٣] ميل منحنى عند نقطة ما :

حيث أن ميل المنحنى يتغير من نقطة إلى أخرى فإنه يلزم لتحديد ميل المنحنى أن نذكر عند أى نقطة عل المنحنى يراد إيجاد الميل ويتم هذا بعمل مماس للمنحنى عند النقطة المذكورة ، ومن ثم نوجد ميل هذا المماس (خط مستقيم) .

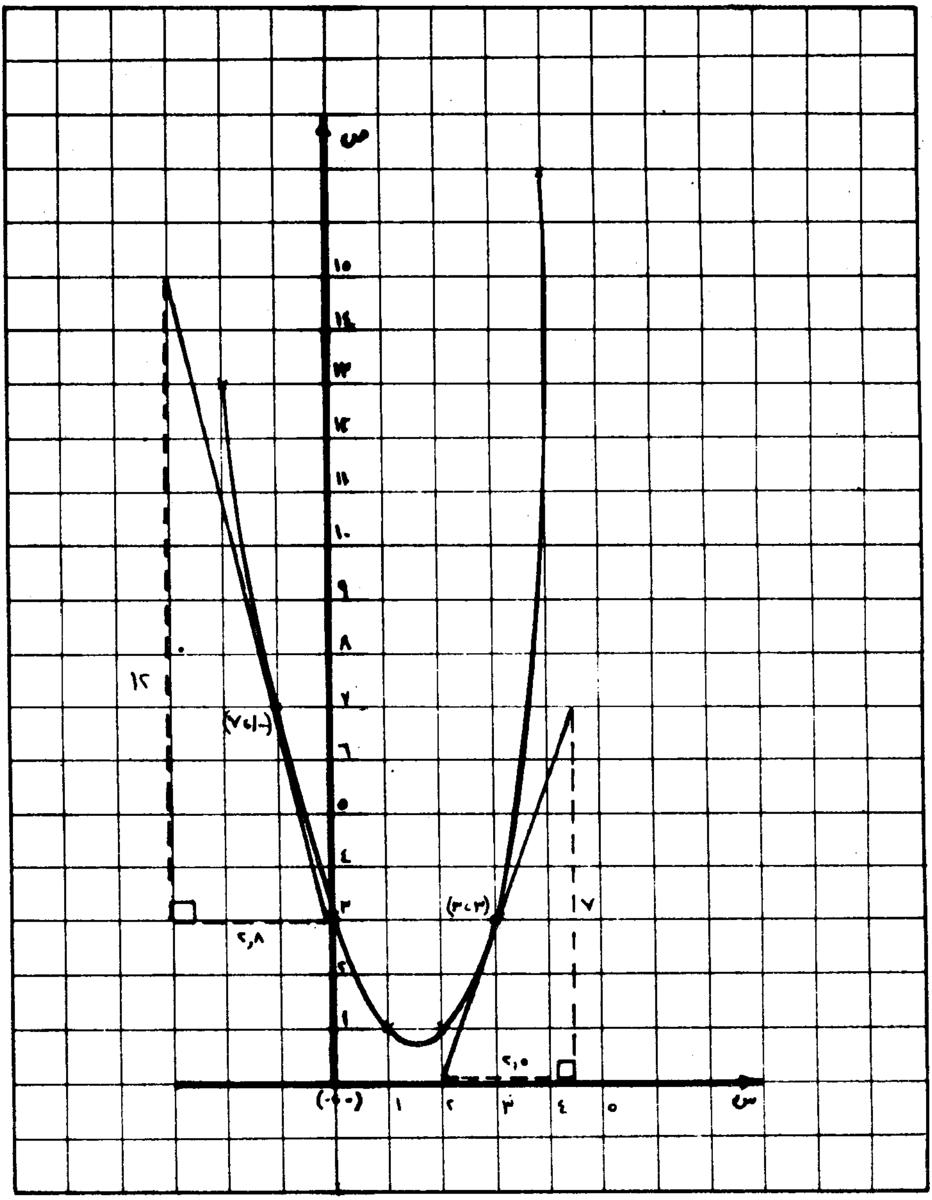
□ مثال :

أوجد ميل المماس للمنحنى (ميل المنحنى باختصار) :

ص = س^{٢} – ٣ س + ٣ لقيم س : ٤ ≤ س ≤ – ٢

وذلك عند النقطة أ (٣ ، ٣) ، ب (– ١ ، ٧)

، انظر شكل (٢٨ — ٥) ،



شكل [٢٨ ـ ٥]

ومن الرسم نجد أن ميل المماس عند النقطة أ (٣ ، ٣) :

$$= \frac{٧}{٢,٥} = ٢,٨$$

وميل المماس عند النقطة ب (− ١ ، ٧) :

$$= \frac{١٢}{٢,٨} = ٤,٣ \text{ تقريباً}$$

☐ ملاحظة :

يلاحظ أن هذه القيم تقريبية وتتوقف دقة الجواب على الدقة فى رسم المنحنى وفى رسم المماس .

ومن المعلوم مسبقاً أنه مهما بلغت درجة الدقة فى الرسم فإنه يبقى مقدار من الخطأ يقل بزيادة دقة الرسم .

[٢٨ ـ ٤] تدريبات :

(١) ارسم بمقياس رسم مناسب النقط الموضحة فى جدل (٢٨ ـ ٢) وصل فيما بينهما بمنحنى .

س	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٠	٠,٢٥	١	٢,٢٥	٤	٦,٢٥	٩

جدول (٢٨ ـ ٢)

ومن ثم :

(أ) ارسم المماسات للمنحنى فى النقط التى إحداثيها السينى س = ٢ ، = ٤

(ب) أوجد ميل المماس بالتقريب عند كل من هذه النقط .

(٢) ارسم منحنى الدالة : ص = $\frac{٢٠}{س}$ لقيم س : ١٠ ≤ س ≤ صفر
ثم أوجد ميل المماس بالتقريب عند النقط التى إحداثيها السينى س = ٢ ، س = ٤