الجزء الأول

الأعــــــداد

Number

الدرس الأول

النسبة والتناسب وتطبيقاتها

Ratio , Proportion,

[١ ـ ١] النســبة : *Ratio*

◻ تمهيـد :

إذا كان طول أحد الشوارع هو ٨ كيلومتر ، بينما طول الشارع الآخر ، هو ٢ كيلومتر ، فإذا أردنا أن نقارن بينهما من ناحية الطول ، فإن المقارنة يمكن أن تكون على عدة طرق كالتالى :

١ ـ فى صورة أطول من أو أقصر من ، كأن نقول الشارع الأول أطول من الشارع الثانى ، أو الشارع الثانى أقصر من الشارع الأول .

٢ ـ فى صورة ، الفرق بينهما من ناحية الطول بالكيلومترات كأن نقول الشارع الأول أطول من الشارع الثانى بمقدار : ستة كيلومترات ٦ كم حيث ٦ = ٨ ـ ٢ .

أو الشارع الثانى أقصر من الشارع الأول بمقدار ٦ كم كذلك .

٣ ـ فى صورة ، كم مرة (من الطول) يبلغ الشارع الأول قدر الشارع الثانى أو كم مرة (من القصر) يبلغ الشارع الثانى مقارنة بالأول .

ففى الحالة الأولى نقول : $\frac{\text{طول الشارع الأول}}{\text{طول الشارع الثانى}} = \frac{٨}{٢} = \frac{٤}{١}$

أى أن طول الشارع الأول أربعة أضعاف طول الشارع الثانى .

وفى الحالة الثانية نقول : $\frac{\text{طول الشارع الثانى}}{\text{طول الشارع الأول}} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

أى أن طول الشارع الثانى ربع الشارع الأول فى الطول .

ويُسمى الكسر : $\frac{\text{طول الشارع الأول}}{\text{طول الشارع الثانى}}$ بالنسبة بين طول الأول للثانى

فى حين يُسمى الكسر : $\frac{\text{طول الشارع الثانى}}{\text{طول الشارع الأول}}$
الثانى،

بالنسبة بين طول الثانى للأول

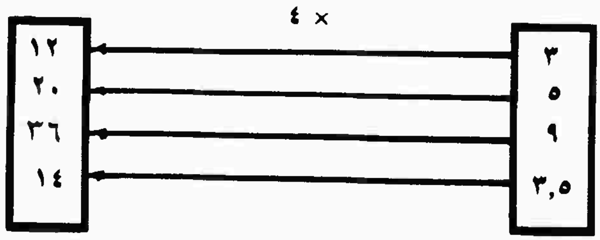
وعموماً : فإن النسبة بين مقدارين أو كميتين (وزن ـ حجم ـ طول ـ مساحة ـ محيط ـ عدد ،...) ،

هى عبارة عن قسمة : المقدار (العدد) الأول على المقدار (العدد) الثانى [أو العكس : قسمة العدد الثانى على العدد الأول] .

● مثـــال (١) :

إذا قمنا بمقارنة مجموعتى الأعداد أو الأرقام فى الشكل [١ ــ ١] ، سنجد أن كل رقم فى المجموعة « ب » يعادل أربعة أضعاف الرقم المناظر أو المقابل فى المجموعة « أ » .

وبذلك يمكننا أن نقول أن نسبة الأرقام هى ١ إلى ٤ .



أ ب

شكل [١ ـ ١]

[١ ـ ٢] التعبير عن النسبة (طرق كتابتها) :

إذا فرضنا أن العددين المراد إيجاد النسبة بينهما هما ٢ ، ٨ فإنه يمكن التعبير عن النسبة بينهما فى صورتين كالتالى :

(ا) النسبة بين ٢ ، ٨ = $\frac{٢}{٨}$ (كسر إعتيادى) .

(ب) النسبة بين ٢ ، ٨ = ٢ : ٨ (٢ إلى ٨) .

ومنها : ∴ $\frac{٢}{٨}$ = ٢ : ٨

ويلاحظ أن ٢ : ٨ هى نفسها ١ : ٤ وهى نفسها ٣ : ١٢ .

أ، ٢,٥ : ١٠

أ، ٤,٥ : ١٨

أ، $\frac{١١}{٢}$: ٢٢

وكل منها تعنى نفس النسبة وهى ١ : ٤ ومما سبق يمكننا ملاحظة أن النسبة يمكن كتابتها فى صورة كسرية كالتالى :

$\frac{١}{٤}$ أ، $\frac{٢}{٨}$ أ، = $\frac{٢\frac{١}{٢}}{١٠}$

أ، = $\frac{٤\frac{١}{٢}}{١٨}$ أ، = $\frac{٥\frac{١}{٢}}{٢٢}$ أ، ......ألخ

وعندما نكتب النسبة بين رقمين وليكن ٧ : ١٢ = $\frac{٧}{١٢}$

فإنه يطلق على العددين ٧ ، ١٢ بحدى النسبة .

حيث ٧ هى الحد الأول للنسبة ، ١٢ هى الحد الثانى لها .

● مثـــال (٢) :

ضع النسب الآتية فى أبسط صورة لها :

(ا) ٨ : ١٠ (ب) $١\frac{١}{٢}$: $٢\frac{١}{٥}$ (جـ) ٦ : ٢١

● الحـــل :

(ا) $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$ [وذلك بقسمة حدى النسبة على ٢] .

(ب) $١\frac{١}{٢}$: $٢\frac{١}{٥}$ = $\frac{٣}{٢}$: $\frac{١١}{٥}$ [وذلك بكتابة كل من حدى النسبة فى صورة كسر] .

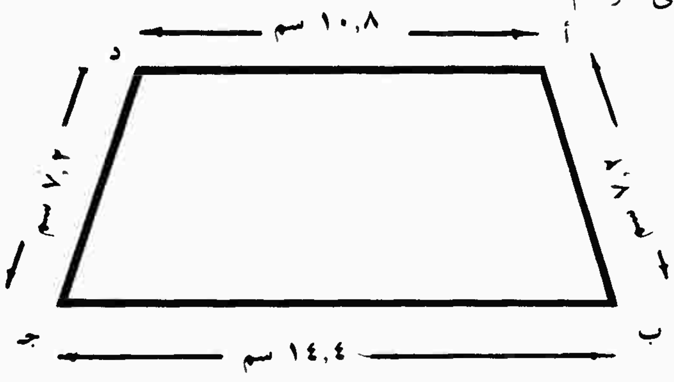
، $\frac{٣}{٢}$: $\frac{١١}{٥}$ = $\frac{٣}{٢}$ × ١٠ : $\frac{١١}{٥}$ × ١٠ = ١٥ : ٢٢

وذلك بضرب كل من حدى النسبة فى المضاعف المشترك الأدنى وهو ١٠ .

[جـ] ٦ : ٢١ = ٢ : ٧ [وذلك بقسمة حدى النسبة على ٣]

● مثـــال (٣) :

فى الشكل الموضح : شكل [١ ـ ٢] ، شبه منحرف أطوال أضلاعه موضحة على الرسم .



شكل [١ ـ ٢]

فأوجد :

[أ] نسبة طول ا ب : ب جـ فى أبسط صورة .

[ب] ا ب : ب جـ : ا د .

[جـ] أكمل النسب التالية :

ا ب = $\frac{\cdots}{\cdots}$ ب جـ ،

ا د = $\frac{\cdots}{\cdots}$ ب جـ ،

ا ب = $\frac{\cdots}{\cdots}$ ا د

● الحــــل :

[أ] ا ب : ب جـ = ٧,٢ : ١٤,٤

= ٧٢ : ١٤٤ [بالضرب فى ١٠]

= ٦ : ١٢ [بالقسمة على ١٢]

= ١ : ٢ [بالقسمة على ٦]

[ب] ا ب : ب جـ : ا د = ٧,٢ : ١٤,٤ : ١٠,٨

= ٧٢ : ١٤٤ : ١٠٨

[بالضرب فى ١٠]

= ٦ : ١٢ : ٩

[بالقسمة على ١٢]

= ٢ : ٤ : ٣

[بالقسمة على ٣]

[جـ] ا ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

، ا د = $\frac{٣}{٤}$ ب جـ

، ا ب = $\frac{٢}{٣}$ ب جـ

ويمكن إيجاد النسب السابقة من حل [ب] .

● مثـــال (٤) :

حصل محمد فى **امتحان** الرياضيات على ٣ : ٢٠ من إجمالى عدد الدرجات الكلى لجميع المواد فإذا كانت النهاية العظمى لجميع الدرجات هى ٣٠٠ درجة فأوجد :

[١] عدد الدرجات التى حصل عليها فى مادة الرياضيات .

[٢] إذا كانت النهاية العظمى لمادة الرياضيات هى ٦٠ درجة فكم كانت نسبة نجاح محمد فى الرياضيات .

● الحـــل :

[١] $\dfrac{\text{درجة محمد فى الرياضيات}}{\text{المجموع الكلى لدرجات المواد}} = \dfrac{٣}{٢٠}$

∴ درجة محمد فى الرياضيات = $\dfrac{٣}{٢٠}$ من الدرجة الكلية للمواد .

∴ درجة محمد فى الرياضيات = $\dfrac{٣}{٢٠} \times ٣٠٠ = ٤٥$ درجة .

[٢] ∵ النهاية العظمى لمادة الرياضيات هى ٦٠ درجة .

∴ نسبة محمد فى إمتحان الرياضيات = $\dfrac{٤٥}{٦٠} = \dfrac{٣}{٤} = \dfrac{٧٥}{١٠٠}$

● مثـــال (٥) :

صندوق به عدد من الكرات البيضاء والكرات الحمراء فإذا كانت نسبة عدد الكرات البيضاء إلى الكرات الحمراء هى ٧ : ٣ فإذا كان عدد الكرات الحمراء هو ٤٢ كرة فما عدد الكرات البيضاء .

● الحـــل :

∵ $\dfrac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات الحمراء}} = \dfrac{٧}{٣}$

∴ عدد الكرات البيضاء = $\frac{٧}{٣}$ من عدد الكرات الحمراء .

= $\frac{٧}{٣}$ × ٤٢ = ٧ × ١٤ = ٩٨ كرة

☐ **ملاحظة هامة** : عند إيجاد النسبة بين كميتين أو مقدارين فإنه يجب أن يكون حدا النسبة من نفس نوع الوحدات .

● **مثـــال (٦) :**

[أ] ما هى النسبة بين طولى مستقيمين أحدهما طوله ١,٥ متراً والثانى طوله ٣٠ سم .

[ب] ما هى النسبة بين مساحتين إحداهما ٦٠٠ سم^٢ والثانية ٠,٠٧٥ م^٢ .

● **الحـــل :**

[أ] للمقارنة بين طولى المستقيمين فإنه يجب أن تكون الأطوال من نفس نوع الوحدات .

فالطول الأول = ١,٥ م والثانى = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ = ٠,٣ م

∴ النسبة = $\frac{١,٥}{٠,٣}$ = $\frac{١٥}{٣}$ [**بضرب حدى النسبة فى ١٠**]

= $\frac{٥}{١}$ [بقسمة حدى النسبة على ٣] .

أو الطول الأول = ١,٥ × ١٠٠ = ١٥٠ سم .

والطول الثانى = ٣٠ سم .

[ب] للمقارنة بين المساحتين فإنه يجب أن تكون المساحات من نفس نوع الوحدات .

فالمساحة الأولى = ٦٠٠ سم^٢ = $\frac{٦٠٠}{١٠٠ \times ١٠٠}$ = $\frac{٦}{١٠٠}$ = ٠,٠٦ م^٢

والمساحة الثانية = ٠,٠٧٥ م^٢ .

∴ النسبة بين المساحتين = $\frac{٠,٠٦}{٠,٠٧٥} = \frac{٦٠}{٧٥}$

[بضرب حدى النسبة × ١٠٠٠]

$= \frac{٤}{٥}$ [بقسمة حدى النسبة على ١٥]

أو نقول : المساحة الأولى = ٦٠٠ سم^٢ .

والمساحة الثانية = ٠,٠٧٥ م^٢ × ١٠٠ × ١٠٠

= ٧٥٠ سم^٢ .

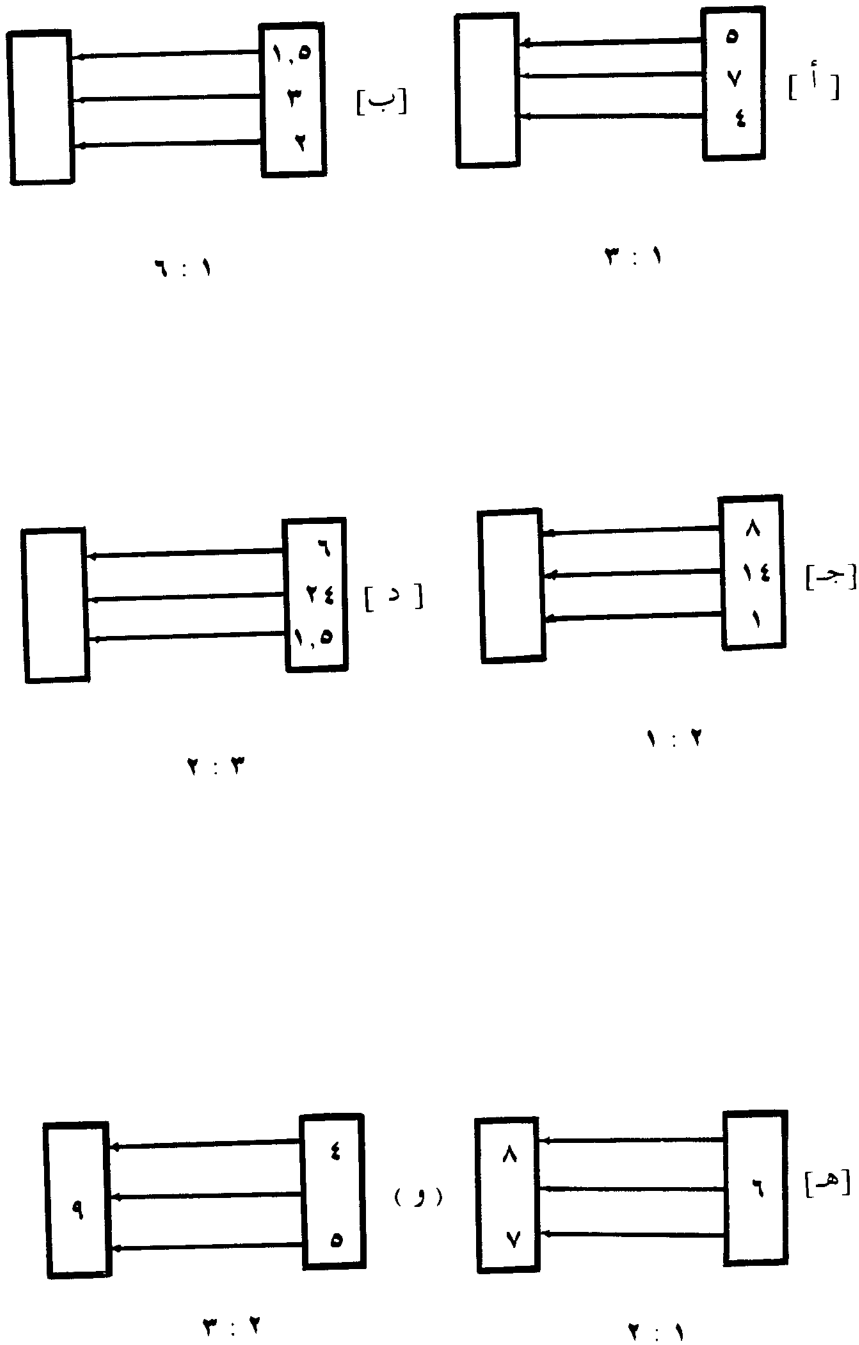
∴ النسبة بين المساحتين = $\frac{٦٠٠}{٧٥٠} = \frac{٦٠}{٧٥}$

[بقسمة حدى النسبة على ١٥]

$= \frac{٤}{٥}$.

[١ ـ ٣] تدريبـــــات :

(١) أكمل المستطيلات التالية بحيث تتحقق صحة النسبة المبينة فى شكل [١ ـ ٣] .



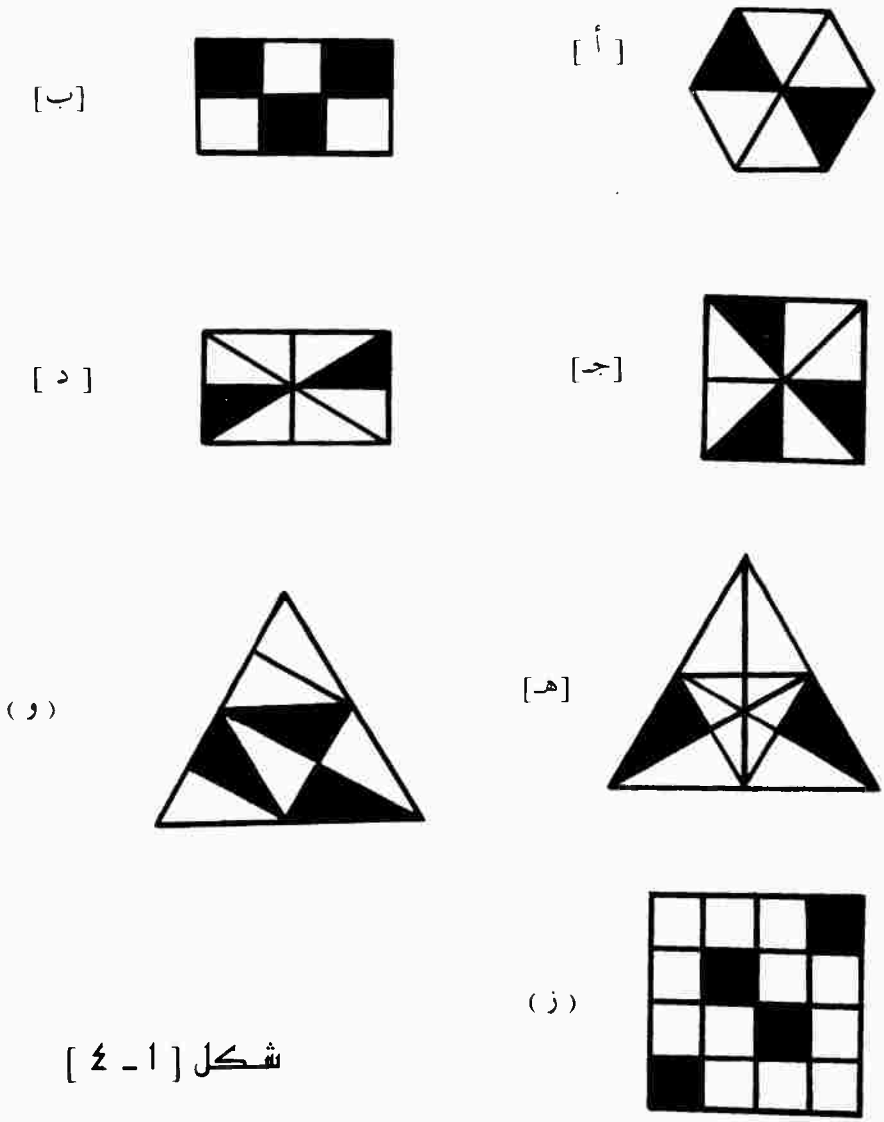
شكل [١ ـ ٣]

(٢) الأشكال المختلفة التالية المبينة فى شكل [١ ـــ ٤] تم تقسيم كل منها إلى أجزاء متساوية فى المساحة والمطلوب حساب :

[أ] نسبة مساحة الجزء المظلل إلى المساحة الكلية للشكل .

[ب] نسبة مساحة الجزء المظلل إلى مساحة الجزء الغير مظلل .

[جـ] نسبة مساحة الجزء الغير مظلل إلى المساحة الكلية للشكل .



شكل [١ـ ٤]

(٣) ضع كلاً من النسب التالية فى أبسط صورة :

[أ] ٤٥ : ٥٤
[ب] ١٨ : ٧٢
[جـ] ٦٦ : ١٣٢
[د] ١٤٧ : ٢٣١
[هـ] ٥٥ : ٧٧ : ١٢١
[و] ٥٤ : ٨١ : ١٨٩
[ز] ٦٥ : ٩١ : ١٥٦
[ح] ٢٢ : ٧٧ : ٤٤٠
[ط] $١\frac{١}{٢}$: $٢\frac{١}{٢}$
[ك] $١\frac{١}{٢}$: ٣ : $٤\frac{١}{٢}$
[ل] $٢\frac{١}{٢}$: $١\frac{١}{٢}$
[م] $\frac{٧}{١٠}$: $\frac{٢}{٣}$

(٤) ضع كلاً من النسب التالية فى أبسط صورة :

[أ] ٢ مم : ٢٥ سم
[ب] ٥٠ قرش : ٤ جنيه
[جـ] ٤ مم : ٦ سم
[د] ٢٠ دقيقة : ١ ساعة
[هـ] ٢٥ دقيقة : ١,١٥ [ساعة وربع]
[و] ٦ ساعة : ٣ أيام
[ز] ٣ أسابيع : عام .
[ح] ٧٠ جنيه : ٢١٠ جنيه .
[ط] ١٢ سم : ٨٠ مم : ٠,٤٨ م
[ك] ٣ كم : ٢,٢٥ كم : ٧٥٠ م
[ل] ١ اسبوع : ٥ أيام : ٢ يوم
[م] ١,٦ جـ : ١,٢ جـ : ٦٠ قرش

(٥) عبر عن النسب التالية فى أبسط صورة لها .

[أ] $\frac{٥}{٤}$: $\frac{٢}{٤}$
[ب] $\frac{٧}{٨}$: $\frac{٣}{٤}$
[جـ] $\frac{١}{٣}$: $\frac{٧}{٢}$
[د] $\frac{٥}{٦}$: $\frac{٣}{٤}$
[هـ] $\frac{٣}{٥}$: $\frac{٣}{٤}$
[و] $\frac{٢}{٣}$: $\frac{٣}{٧}$: $\frac{٤}{٤٢}$
[ز] $١\frac{١}{٢}$: ٣ : $٤\frac{١}{٢}$
[ح] $\frac{١}{٢}$: $\frac{٢}{٣}$: $\frac{٣}{٤}$
[ط] $\frac{٧}{١٠}$: $\frac{٢}{٣}$
[ك] $\frac{٥}{٦}$: $\frac{٣}{٤}$
[ل] $\frac{٥}{٨}$: $\frac{٢}{٣}$
[م] $\frac{٧}{٨}$: $\frac{٣}{١٠}$

(٦) موظف يصرف شهرياً ٢٠٠ جنيه على الغذاء ، ٧٠ جنيه ملابس ، ٢٠ جنيه علاج وأدوية ، ٤٥ جنيه مصاريف نثرية ، ٦٥ جنيهاً إيجار مسكن فأوجد :

[أ] نسبة إنفاقه على الغذاء بالنسبة لكل ما ينفقه شهرياً .

[ب] نسبة إنفاقه على الغذاء مقارنة بما ينفقه على العلاج والأدوية .

[جـ] النسبة التى يمثلها إيجار المسكن بالنسبة للغذاء .

[د] نسبة إنفاقه على المصاريف النثرية وإيجار السكن بالنسبة لإنفاقه على الملابس .

[هـ] ما تمثله نسبة إنفاقه على الملابس مقارنة بإنفاقه على المصاريف النثرية .

(٧) يستذكر **أحمد** دروسه فى ٤ ساعات ويلعب **ساعتين** ويذهب للمدرسة ست ساعات وينام ثمان ساعات ويشاهد التلفزيون لمدة ساعتان يومياً . فاحسب :

[أ] نسبة وقت المدرسة إلى وقت التليفزيون .

[ب]نسبة وقت التليفزيون إلى وقت اللعب .

[جـ] نسبة وقت اللعب إلى وقت المدسة .

[د] نسبة وقت النوم إلى وقت التليفزيون والمدرسة .

[هـ] نسبة وقت المذاكرة إلى وقت المدرسة ثم إلى وقت النوم .

(٨) **أكمل الجدول التالى جدول** [١ ــ ١] :

النسبة	ما يعادلها فى صورة كسرية	ما يعادلها بالنسبة المئوية
٣ : ٥	$\frac{٣}{٥}$	٪٦٠
٣ : ٤	؟	٪٧٥
٧ : ٢٠	؟	؟
؟	$\frac{٢}{٥}$	؟
؟	؟	٪٨٥
٧ : ٨	؟	؟
٢ : ٣	؟	؟
؟	$\frac{١١}{٢٠}$	؟

جدول (١ ـ ١)

(٩) إذا كانت نسبة التلميذات إلى التلاميذ فى أحد المدارس المشتركة هى ١ : ٣ وكان عدد التلاميذ هو ٦٢٧ تلميذاً فكم يكون عدد التلميذات وكم يكون عدد تلاميذ المدرسة من الجنسين .

(١٠) قسم ٤٠ جنيهاً بنسبة ٣ : ١ .

(١١) قسم ١٠٠ جنيهاً بنسبة ٣ : ٢ .

(١٢) قسم ٤٥ متر بنسبة ٥ : ٣ .

(١٣) مثلث طول محيطه ٣٦ متراً فإذا كانت نسب أطوال أضلاعه هى ٣ : ٤ : ٥ فكم يبلغ طول كل ضلع من أضلاعه .

(١٤) مستطيل تبلغ نسبة طوله إلى عرضه ٤ : ٣ فكم يبلغ عرض المستطيل إذا كان طوله ٢٤ متراً .

(١٥) إذا كانت نسبة عمر محمد إلى والده هى ١ : ٥ وكان عمر محمد ٦ سنوات وستة شهور فكم يبلغ عمر والده .

(١٦) يبلغ عمر رجل ٦٠ عاماً فإذا كانت نسبة عمر زوجته إلى عمره هى $\frac{٧}{٨}$ فكم يبلغ عمر الزوجة .

(١٧) فى مدينة الملاهى للأطفال كانت نسبة الحاضرين من الأطفال والأمهات والرجال هى ٧ : ٢ : ٣ فإذا كان عدد الحاضرين هو ٢٦٨٢٠ فكم يبلغ :

[أ] عدد الرجال . [ب] عدد الأمهات . [جـ] عدد الأطفال .

(١٨) يراد تقسيم ١٤٠ كتاباً إلى ثلاثة مجموعات بنسبة ٢ : ٣ : ٥ فكم يبلغ عدد الكتب فى كل مجموعة .

(١٩) شارك كل من محمد وأمير وأحمد فى شراء عمارة بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه فإذا كانت نسبة المبالغ المدفوعة من كل منهم على الترتيب هى ١ : ٣ : ٦ .

فكم يبلغ مقدار ما دفعه كل منهم .

[١ ـ ٤] التناسب Proportion :

تمهيد :

إذا كان سعر كتاب ما ٥ جنيهات وأردنا معرفة سعر ٣ ، ٥ ، ٩ ، ٢٠ ، ٢٦ كتاباً فتكون النتيجة كما هو بالجدول التالى ، جدول [١ ـ ٢] .

عدد الكتب	ثمنها بالجنيهات
١	٥
٣	١٥
٥	٢٥
٩	٤٥
٢٠	١٠٠
٢٦	١٣٠

× ٥

جدول [١ ـ ٢]

ومن الجدول نُلاحظ أن كل عدد بالصف الثانى هو عبارة عن حاصل ضرب العدد المناظر له بالصف الأول فى ٥ .

كما وأن كل عدد موجود فى الصف الأول ينتج عن قسمة العدد المناظر له فى الصف الثانى على ٥ ، كذلك .

ويلاحظ كذلك أن :

[أ] $\frac{٥}{١} = \frac{١٥}{٣} = \frac{٢٥}{٥} = \frac{٤٥}{٩} = \frac{١٠٠}{٢٠} = \frac{١٣٠}{٢٦}$

[ب] $\frac{١}{٥} = \frac{٣}{١٥} = \frac{٥}{٢٥} = \frac{٩}{٤٥} = \frac{٢٠}{١٠٠} = \frac{٢٦}{١٣٠}$

فى هذه الحالة يمكننا القول :

أن الأعداد الموجودة فى الصف الأول متناسبة أو تتناسب مع الأعداد المناظرة لها فى الصف الثانى .

مثـــال (١) :

أكمل الجدول التالى ، جدول [١ ـ ٣] ، بحيث تتناسب الأعداد فى كل من العمودين .

× ...

٦	٩
..	٢٤
٥,٤	..
..	٦
..	١٥
٧	..

$\times \frac{٣}{٢}$

جـــدول [١ ـ ٣]

لحساب العدد الناقص فى الصف الثانى ، نضرب العدد المناظر له فى الصف الأول فى $\frac{٣}{٢}$.

$$\therefore \ ٥,٤ \times \frac{٣}{٢} = ٨,١٠$$

$$، \ ٧ \times \frac{٣}{٢} = ١٠,٥$$

ولحساب العدد الناقص فى الصف الأول نقسم العدد المناظر له فى الصف الثانى على $\frac{٣}{٢}$ (أى نضربه فى $\frac{٢}{٣}$) .

$\therefore ٦ \times \frac{٢}{٣} = ٤$

، $١٥ \times \frac{٢}{٣} = ١٠$

، $٢٤ \times \frac{٢}{٣} = ١٦$

وبذلك يصبح الجدول كالتالى ، [١ ـ ٤] .

٦	٩
١٦	٢٤
٥,٤	٨,١
٤	٦
١٠	١٥
٧	١٠,٥

جـدول [١ ـ ٤]

ومن هذا الجدول نلاحظ أن :

$\frac{٦}{٩} = \frac{١٦}{٢٤} = \frac{١٠}{١٥} = \ldots\ldots$ وهذا ما يُسمى بالتناسب

وعلى هذا فإن التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر .

● مثـــال (٢) :

أكمل التناسبات التالية :

[أ] $\frac{٧}{٨} = \frac{٤٢}{..}$ [ب] $\frac{٣}{..} = \frac{٢١}{٣٥}$

[جـ] $\frac{..}{٨} = \frac{٣}{٢٤}$ [د] $\frac{..}{٦} = \frac{٤,٥}{٩}$

● **الحـــل :**

[أ] $\frac{٧}{٨} = \frac{٤٢}{..}$ فالعدد الذى يضرب فى ٧ ليكون الناتج ٤٢ هو ٦ .

فيكون الحد الناقص هو ٨ × ٦ = ٤٨

∴ $\frac{٧}{٨} = \frac{٤٢}{٤٨}$.

[ب] $\frac{٣}{..} = \frac{٢١}{٣٥}$ فالعدد الذى يضرب فى ٣ ليكون الناتج ٢١ هو ٧ .

∴ فالحد الناقص هو العدد الذى يضرب فى ٧ ليكون الناتج ٣٥ .

وواضح أنه يساوى $\frac{٣٥}{٧} = ٥$

∴ $\frac{٣}{٥} = \frac{٢١}{٣٥}$.

[جـ] $\frac{..}{٨} = \frac{٣}{٢٤}$ فالعدد الذى يضرب فى ٨ ليكون الناتج ٢٤ هو ٣ .

∴ الحد الناقص لو ضرب فى ٣ لكان الناتج ٣ هو الواحد .

∴ $\frac{١}{٨} = \frac{٣}{٢٤}$.

[د] $\frac{..}{٦} = \frac{٤,٥}{٩}$

فالعدد الذى يضرب فى ٦ ليكون الناتج ٩ هو $١\frac{١}{٢}$.

∴ العدد الذى يضرب فى ١,٥ ليكون الناتج ٤,٥ هو ٣

∴ $\frac{٣}{٦} = \frac{٤,٥}{٩}$.

يتضح مما سبق أنه إذا ضربنا كلاً من حدى النسبة فى عدد ما أو قسمنا كل من حدى النسبة على نفس العدد فإن النسبة الأولى والنسبة الناتجة تكونان متساويتين .

أوجد الحد الناقص فى النسب التالية :

[أ] $\frac{٢}{٥} = \frac{؟}{٣٥}$ [ب] $\frac{؟}{٩٠} = \frac{٧,٥}{٦٠}$

[جـ] $\frac{٣٦}{؟} = \frac{٥٤}{١٢}$ [د] $\frac{٢٦}{٨٤} = \frac{٨}{؟}$

الحـــل :

فى هذه النوعية من المسائل يمكن إيجاد الحد الناقص بطريقة أسهل من الطريقة السابقة ، وذلك بأن نفترض أن الحد الناقص هو س مثلاً ويكون الحل كالتالى :

[أ] $\frac{٢}{٥} = \frac{س}{٣٥}$ بأن نضع س بدلاً من علامة الإستفهام

$\therefore$ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين .

والطرفين هنا هما ، ٢ ، ٣٥ بينما الوسطين هما ٥ ، س

$\therefore$ $٢ \times ٣٥ = ٥ \times$ س .... (١)

وللحصول على قيمة س نقسم كلاً من الطرفين فى (١) على ٥

$\therefore$ $= \frac{٢ \times ٣٥}{٥} = \frac{٥\ س}{٥}$

$\therefore$ س = ١٤

$\therefore$ النسبة هى $\frac{٢}{٥} = \frac{١٤}{٣٥}$

[ب] $\frac{س}{٩٠} = \frac{٧,٥}{٦٠}$

$\therefore$ س $\times ٦٠ = ٩٠ \times ٧,٥$

$\therefore$ س $= \frac{٩٠ \times ٧,٥}{٦٠} = \frac{٢٢,٥}{٢} = ١١,٢٥$

[حـ] $\frac{٣٦}{س} = \frac{٥٤}{١٢}$

∴ ٥٤ س = ٣٦ × ١٢

∴ س = $\frac{٣٦ \times ١٢}{٥٤}$ = ٨

∴ النسبة هى $\frac{٣٦}{٨} = \frac{٥٤}{١٢}$

[د] $\frac{٢٦}{٨٤} = \frac{٨}{س}$

∴ ٢٦ س = ٨٤ × ٨

∴ س = $\frac{٨٤ \times ٨}{٢٦} = \frac{٣٣٦}{١٣} = ٢٥ \frac{١١}{١٣}$

● مثـــال (٤) : على التقسيم التناسبى ***Proportional Parts***

إذا كان لدينا ٨٠ جنيهاً ويراد تقسيمها إلى جزئين بنسبة ٢ : ٣ .

فى هذه النوعية من المسائل نجمع حدى النسبة ٢ + ٣ = ٥ وبذلك فإنه يمكننا تقسيمها مبدئياً إلى خمسة أجزاء متساوية ولإيجاد قيمة كل جزء من هذه الأجزاء الخمسة نقسم المبلغ الكلى ٨٠ على ٥ فنحصل على قيمة الجزء .

∴ قيمة الجزء الواحد = $\frac{٨٠}{٥}$ = ١٦ جنيهاً .

وبذلك نقسم الخمسة أجزاء المتساوية هذه إلى جزئين جزء به ٢ × ١٦ = ٣٢

وجزء به ٣ × ١٦ = ٤٨

= ٨٠ = الإجمالى .

ونلاحظ أن $\frac{٣٢}{٤٨} = \frac{٢}{٣}$ وهذا تأكيد لصحة الإجابة .

● مثـــال (٥) : على التناسب المباشر *Direct* proportion :

يكون هناك تناسب مباشر بين أى كميتين ، لو أن أى زيادة (أو نقصان) فى إحدى الكميتين يناظره زيادة أو نقصان بنفس النسبة فى الكمية الأخرى .

ومثالنا هذا يوضح هذه النوعية من المسائل :

يبلغ سعر شراء ٩ كتب ٢٧ جنيهاً فكم يكون :

(أ) سعر شراء ٧ كتب .

(ب) سعر شراء ١١ كتاب .

ويمكن حل هذه النوعية من المسائل بطريقتين .

◄ الطريقة الأولى :

نوجد سعر شراء كتاب واحد ، ثم نوجد سعر شراء عدد الكتب المطلوب ،

، ∵ سعر شراء ٩ كتب = ٢٧ جنيهاً .

∴ سعر شراء كتاب واحد = $\frac{٢٧}{٩}$ = ٣ جنيهات .

ومن ثم ،

∴ سعر شراء ٧ كتب = ٧ × ٣ = ٢١ جنيهاً .

، سعر شراء ١١ كتاب = ١١ × ٣ = ٣٣ جنيهاً .

◄ الطريقة الثانية :

ويطلق عليها الطريقة الكسرية Fractional method

وذلك بأن نوجد التكلفة مباشرة وذلك بالتعبير عن الرقم المطلوب ككسر من العدد الأصلى ثم إيجاد قيمة هذا الكسر من التكلفة الكلية .

[أ] تكلفة شراء ٧ كتب يمكن إعتبارها = $\frac{٧}{٩}$ من سعر شراء ٩ كتب ومن ثم :

$\frac{٧}{٩}$ من ٢٧ جنيهاً = $\frac{٧}{٩}$ × ٢٧ = ٢١ جنيهاً .

∴ تكلفة شراء ٧ كتب = ٢١ جنيهاً .

[ب] تكلفة شراء ١١ كتاب :

= $\frac{١١}{٩}$ × ٢٧ = ٣٣ جنيهاً .

◄ مثـــال (٦) :

تحتاج سيارة ما إلى ٢٠ لتر بنزين لقطع مسافة ٢٥٠ كيلومتر فاحسب :

[ا] كمية البنزين اللازمة لقطع مسافة ٧٥ كيلومتراً .

[ب] المسافة التى تقطعها السيارة إذا استخدمنا ٣٧ لتر بنزين .

◄ الحـــــل :

من الواضح أن كمية البنزين تتناسب مع المسافة المقطوعة أى أن :

$$\frac{\text{كمية البنزين الأولى}}{\text{كمية البنزين الثانية}} = \frac{\text{المسافة المقطوعة أولاً}}{\text{المسافة المقطوعة ثانياً}}$$

[أ] فإذا رمزنا لكمية البنزين ثانياً بالرمز س

$$\therefore \quad \frac{٢٠}{س} = \frac{٢٥٠}{٧٥} = \frac{١٠}{٣}$$

∴ ١٠ س = ٣ × ٢٠ = ٦٠

∴ س = ٦ لتر

[ب] وإذا رمزنا للمسافة المقطوعة ثانياً بالرمز ص مثلاً :

$$\therefore \quad = \frac{٢٠}{٣٧} = \frac{٢٥٠}{ص}$$

$$\therefore \quad ص = \frac{٣٧ \times ٢٥٠}{٢٠} = ٤٦٢,٥ \text{ كيلومتراً}$$

[١ ـ ٥] تدريبـــات :

(١) سيارة يمكنها أن تسير ١٨٠ كم مستخدمة ١٥ لتراً من البنزين فما المسافة التى تسيرها باستخدام ٢٥ لتراً من البنزين .

(٢) موظف آلـة كاتبة يمكنه، أن يكتب ٤٢٥ كلمة فى ٥ دقائق . فكم كلمة يمكن أن يكتبها فى ١١ دقيقة .

(٣) كتاب به ٣٦٠ صفحة ويبلغ سمكه ٤,٨ سم فاحسب :

[أ] كم يبلغ سمك كتاب به ٣٠٠ صفحة من نفس نوع الورق .

[ب] كم عدد الصفحات فى كتاب سمكه ٤ سم من نفس نوع الورق .

(٤) شمعة طولها ٤٠ سم تحترق فى مدة قدرها ٦ ساعات فكم يلزم من الوقت لإحتراق شمعة من نفس السمك بطول ٥٠ سم .

(٥) يبلغ سعر ١٢ بيضة ١٨٠ قرشاً فاحسب :

[أ] كم بيضة يمكن شراؤها بمبلغ ٩ جنيهات .

[ب] كم يبلغ سعر ٣٥ بيضة .

(٦) يلزم ٥ دقائق لغلى ١,٥ لتر مياه فاحسب :

[أ] كم يلزم لغلى ٣,٥ لتر مياه .

[ب] كم لتراً يمكن غليها فى ٩ دقائق .

(٧) سيارة تسير بسرعة منتظمة تقطع ٧٥ كيلومتر فى ٥٠ دقيقة فاحسب :

[أ] فى كم من الوقت يمكنها قطع مسافة ١١٠ كيلومترات .

[ب] المسافة التى تقطعها إذا سارت لمدة مقدارها ٣٠ دقيقة .

(٨) يلزم ٢٠ عامل لجنى محصول الطماطم فى ٤ فدادين لمدة يوم عمل (٨ ساعات) فاحسب :

[أ] كم من العمال يلزم لجنى محصول الطماطم فى يوم ونصف .

[ب] الوقت اللازم لجنى المحصول إذا كان عدد العمال ٣٠ عاملاً .

(٩) يلزم لتغطية نفقات إحدى الرحلات التى تتكون من ٤٠ شخصاً أن يدفع كل شخص منهم ٢,٥ جنيه فإذا تغيب ١٥ شخصاً عن الرحلة فكم يلزم أن يدفع كل واحد من الباقى .

(١٠) يلزم لدهان أحد المنازل ، عامل واحد لمدة تسعة أيام (اليوم ٨ ساعة عمل) ، فكم يلزم من الأيام لإكمال دهان المنزل إذا كان العامل سيعمل لمدة ٦ ساعات فقط .

(١١) يلزم لإطعام ٨ حصان ، لمدة ١٥ يوماً ، طن واحد من الغذاء ، فكم يوماً تكفى لإطعام ١٠ حصان نفس كمية الغذاء .

(١٢) أيهما أفضل : أن نشترى باكو شيكولاتة وزنه ٣٠ جرام بسعر ٧٥ قرشاً أم باكو شيكولاتة من نفس النوع وزنه ١٥٠ جم بسعر ٣٢٥ قرشاً .

[لحل هذه النوعية من المسائل يلزم المقارنة بين كميتين متساويتين من الشيكولاتة] .

(١٣) يتم إنتاج نوع من العصير فى ثلاث أحجام مختلفة من العبوات :

[أ] زجاج ذات حجم ١٥٠ سم^{٣} بسعر ٥٠ قرشاً .

[ب] زجاج ذات حجم ٢٥٠ سم^{٣} بسعر ٨٠ قرشاً .

[جـ] زجاجة ذات حجم ٤٥٠ سم ^{٣} بسعر ١٣٠ قرشاً .

فأيهما أكثر وفراً إذا رغبنا فى الشراء من هذا النوع من العصير .

[١ ـ ٦] تطبيقات التناسب :

للتناسب تطبيقات كثيرة فى مختلف نواحى الحياة اليومية والعادية وفى الحسابات وسيقتصر تعرضنا هنا لبعض هذه التطبيقات مثل استخدامه فى رسم اللوحات والخرائط ''مقياس الرسم'' وفى عمليات التقسيم التناسبى وفى حسابات الشركات .

[١ ـ ٧] مقيـاس الرسـم :

عند رسم خريطة أو لوحة رسم لتمثيل مساحة أرض كبيرة أو مجسم كبير فإنه من المحال رسمها بنفس الأبعاد على ورقة الرسم ولعمل هذا وبحيث يكون الرسم دقيقاً على قدر الإمكان فإننا نقوم بتصغير الأبعاد الرئيسية لمساحة الأرض أو للمجسم تصغيراً مناسباً يكفى لرسمها على ورقة الرسم .

وتُسمى نسبة التصغير (أو التكبير) هذه بمقياس الرسم أو نسبة الخريطة Map Ratio .

ويتم عمل الخرائط واللوحات بمقاييس رسم كثيرة للعديد من الأغراض ويتوقف مقياس الرسم على مساحة أو حجم أو كبر الشيء المراد تمثيله على الخريطة أو الرسم .

فمثلاً : إذا قلنا أن خريطة مرسومة بمقياس رسم ١ : ٧٠٠٠٠٠ فإن هذا يعنى أن كل ١ سم على الخريطة يمثل ٧٠٠٠٠٠ سم فى الحقيقة ـ أى ٧٠٠٠ متر أى ٧ كيلومتر .

فإذا كانت المسافة بين القاهرة وطنطا ٩٠ كيلومتر على الطبيعة فإنه يمكن تمثيلها على خريطة مقياس رسمها ١ : ٩٠٠٠٠٠ بمسافة تساوى ١٠ سم حيث يمثل كل ١ سم على الخريطة ٩ كيلومتر على الطبيعة .

وإذا رسمنا خريطة ما بمقياس رسم ١ : ٧٠٠٠ فإن هذا يعنى أن كل ١ سم على الخريطة يُمثل ٧٠٠٠ سم فى الحقيقة أى يُمثل ٧٠ متراً .

ومقياس رسم مثل هذا يصلح لرسم خرائط ذات مساحات أصغر من السابقة ولكنه يُظهر المساحة بتفاصيل أكثر وعلى هذا فمقياس رسم ١ : ٧٠٠٠ يصلح لرسم شارع مثلاً .

◀ مثـــال (١) :

خريطة مقياس رسمها ١ : ٥٠٠٠ فاحسب :

[أ] كم يكون الطول الحقيقى لمسافة ٥ سم على الخريطة .

[ب] ما هى المسافة على الخريطة التى تمثل $\frac{١}{٢}$ ١ كيلومتر .

◀ الحـــل :

∴ ١ سم يمثل ٥٠٠٠ سم .

أى كل ١ سم يمثل $\frac{٥٠٠٠}{١٠٠}$ = ٥٠ متراً فى الحقيقة

∴ الطول على الرسم : الطول الحقيقى = ١ : ٥٠٠٠

، العرض على الرسم : العرض الحقيقى = ١ : ٥٠٠٠

، أى مسافة على الرسم : المسافة المناظرة **الحقيقية** = ١ : ٥٠٠٠

∴ [أ] ٥ سم على الخريطة = ٥ × ٥٠ = ٢٥٠ متراً فى الحقيقة .

[ب] $\frac{١}{٢}$ ١ كيلومتر = $\frac{١}{٢}$ ١ × ١٠٠٠ = ١٥٠٠ متراً .

، ١٥٠٠ متراً فى الحقيقة كل ٥٠ متراً منها يمثلها ١ سم فى الخريطة .

∴ = $\frac{١٥٠٠}{٥٠}$ = ٣٠

∴ ٣٠ سم على الخريطة تمثل $\frac{١}{٢}$ ١ كيلومتر فى الحقيقة .

مما سبق نجد أن :

الطول فى الرسم = الطول الحقيقى × مقياس الرسم

[١ ـ ٨] تدريبات على مقياس الرسم :

(١) فى الخريطة المبينة فى شكل [١ ـ ٥] ، تظهر الطرق التى تصل بين خمسة مدن مختلفة : فاحسب :

[أ] المسافة بين المدينة رقم (١) والمدينة رقم (٥)

[ب] المسافة بين المدينة رقم (١) والمدينة رقم (٤)

[جـ] المسافة بين المدينة رقم (٣) والمدينة رقم (٥)

[د] المسافة بين المدينة رقم (٢) والمدينة رقم (٣)

[هـ] المسافة بين المدينة رقم (٤) والمدينة رقم (٢)

[و] المسافة بين المدينة رقم (٢) والمدينة رقم (٥)

(٢) احسب مقياس الرسم للخرائط التالية :

[أ] ٤ سم على الخريطة تُمثل ١,٥ كيلومتر .

[ب] ٣,٥ سم تمثل ٧ كيلومتر .

[جـ] ١٥ كم ممثلة بـ ١٠ سم على الخريطة .

[د] ٢,٥ سم تمثل ١٠ كيلومتر .

[هـ] ١٥٠ كم ممثلة بـ ٥ سم على الخريطة .

[و] ٣ مم على الخريطة تمثل ٩ كيلومتر .

(٣) فى إحدى الخرائط كان مقياس الرسم ١ : ٥٠٠٠٠٠ فاحسب :

[أ] المسافة الحقيقية التى تناظر ٥ سم على الخريطة .
[ب] ما هى المسافة على الخريطة التى تناظر ٥ كم على الطبيعة .

(٤) على خريطة رسمت بمقياس رسم ١ : ٢٠٠٠٠٠ احسب المسافة الحقيقية التى يمثلها خط طوله ١٥ سم .

[١ ـ ٩] نماذج الموديلات Scale, Models :

بنفس طريقة عمل الخرائط فإن الموديلات يمكن عملها بمقياس رسم بهذه الطريقة ، فإن النموذج يتم بناؤه أو تصنيعه بالتناسب مع الأصل .

مثل نماذج الطائرات والسيارات والقطارات والسفن والأبراج والصواريخ والمبانى والتى تصنع لأغراض التعليم أو كلعب للأطفال أو كدعاية للشركات والمصانع .

◀ مثـــال :

يتم إنتاج نموذج (موديل) سيارة بنسبة ١ : ٥٠ من حجمها الكلى

[أ] فما طول جزء الموديل الذى يمثل متراً واحداً من السيارة الحقيقية .

[ب] ما طول جزء السيارة الحقيقى الذى يُمثله ٧ سم على النموذج .

◀ الحـــل :

[أ] ∵ الموديل : الحجم الحقيقى
يكون ١ : ٥٠

أى أن كل ٥٠ سم على السيارة الحقيقة تكون ممثلة بـ ١ سم على الموديل .

∴ ١٠٠ سم على السيارة الحقيقية تمثل بـ ٢ سم على الموديل .

[ب] ∵ ١ سم على الموديل يمثل ٥٠ سم على السيارة الحقيقية .

∴ ٧ سم على الموديل تُمثل ٥٠ × ٧ سم على السيارة الحقيقية .

أى تمثل ٣,٥ متراً على السيارة الحقيقية .

[١ ـ ١٠] تدريبات على نماذج الموديلات :

(١)سيارة طولها ٤,٥ متر وعرضها ١٨٠ سم يراد عمل نموذج لها بنسبة ١ : ٣٠ فاحسب طول وعرض النموذج المراد تصنيعه .

(٢) عند صنع نموذج لإحدى الطائرات كان طول النموذج ٣٠ سم وكان طول الطائرة الحقيقية ٦٠ متراً وعرضها ٣٠ متراً فاحسب :

[أ] نسبة مقياس الرسم أو النموذج .

[ب] عرض النموذج .

(٣)سفينة طولها ١٨٠ متراً تم عمل نموذج لها فكان طوله ٣٠ سم وعرضه ١٢ سم فاحسب :

[أ] نسبة تصغير النموذج .

[ب] عرض السفينة الحقيقية .

الدرس الثانى

القوى والأسس

Powers and indices

[٢ ـ ١] تعريف Definition :

يعرف أس أى عدد أو بمعنى آخر الأس المرفوع له العدد بأنه عدد مرات ضرب العدد فى نفسه ،ويتضح ذلك من الأمثلة التالية :

◄ مثال (١) :

٥ × ٥ × ٥ × ٥ ؛

هنا تم ضرب العدد ٥ فى نفسه ٤ مرات .

ويطلق على الرقم ٤ هنا بأنه أس العدد ٥ أى عدد مرات ضرب العدد ٥ فى نفسه.

وعموماً فإن الأس يستعمل للدلالة على عدد مرات ضرب العدد فى نفسه .

ويكتب هذا الرقم فوق العدد ذاته لليسار قليلاً فمثلاً :

$٦^{٥}$ معناها أن العدد ٦ مضروب فى نفسه ٥ مرات .

$٧^{٦}$ معناها أن العدد ٧ مضروب فى نفسه ٦ مرات .

حيث $٦^{٥}$ = ٦ × ٦ × ٦ × ٦ × ٦ (خمس مرات) .

= ٧٧٧٦

$٧^{٦}$ = ٧ × ٧ × ٧ × ٧ × ٧ × ٧ (ست مرات) .

= ١١٧٦٤٩

وكذلك ٦^{٢}= ٦ × ٦ = ٣٦ (مرتان) .

٦^{٣} = ٦ × ٦ × ٦ = ٢١٦ (ثلاث مرات) .

ويسمى الأس الثانى لأى عدد « مربع العدد ـ تربيع » .

بينما يُسمى الأس الثالث لأى عدد « معكب العدد ـ تكعيب » .

وكذلك ٦,٧ × ٦,٧ × ٦,٧ يمكن كتابتها (٦,٧)^{٣} أى مكعب العدد ٦,٧

∴ ٦,٧ × ٦,٧ × ٦,٧ = (٦,٧)^{٣} = ٣٠٠,٧٦٣

بينما ٦,٧ × ٦,٧ =(٦,٧)^{٢}مربع العدد ٦,٧ = ٤٤,٨٩

وهنالك قوى أو أسس أكبر من ٢،٣ أى أكبر من مربع العدد ومن مكعب العدد .

وقد تكون هذه القوى أو الأسس أعداداً صحيحة أو أعداداً كسرية .

[٢ ـ ٢] الأسس والقوى الأكبر من مربع العدد ومن مكعب العدد :

◄ مثـــال (١) :

إذا قلنا ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢

فإنها يمكن أن تكتب ٢ مرفوعة لأس ٥ أى ٢^{٥} أو الأس الخامس للعدد ٢ .

∴ ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ٢^{٥} = ٣٢ .

◄ مثـــال (٢) :

٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ٣ يمكن أن تكتب ٣ مرفوعة لأس ٦ أى ٣^{٦} أو الأس السادس للعدد ٣ .

∴ ٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ٣ = ٣^{٦} = ٧٢٩

ومن المفيد أن نرى قوى العدد ٢ و العدد ١٠ مرفوعة للقوى المختلفة فى الجدول (٢ – ١)،(٢ – ٢) ؛

$٢^{١}$	=	٢	=	٢
$٢^{٢}$	=	٢ × ٢	=	٤
$٢^{٣}$	=	٢ × ٢ × ٢	=	٨
$٢^{٤}$	=	٢ × ٢ × ٢ × ٢	=	١٦
$٢^{٥}$	=	٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢	=	٣٢
$٢^{٦}$	=	٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢	=	٦٤

جـدول [٢ ـــ ١]

قوى العدد ٢

$١٠^{١}$	=	١٠	=	١٠
$١٠^{٢}$	=	١٠×١٠	=	١٠٠
$١٠^{٣}$	=	١٠×١٠×١٠	=	١٠٠٠
$١٠^{٤}$	=	١٠×١٠×١٠×١٠	=	١٠٠٠٠
$١٠^{٥}$	=	١٠×١٠×١٠×١٠×١٠	=	١٠٠٠٠٠
$١٠^{٦}$	=	١٠×١٠×١٠×١٠×١٠×١٠	=	١٠٠٠٠٠٠

جـدول [٢ ـــ ٢]

قوى العدد ١٠

ملاحظة : أى عدد مرفوع للأس صفر يساوى « واحد صحيح » ولا يساوى صفر وأن هذا لا يعنى أن العدد مضروب فى نفسه صفر مرة .

فمثلاً $٢^{\text{صفر}} = ١$ ، $١٠^{\text{صفر}} = ١$ ، $١٠٠٠٠٠٠^{\text{صفر}} = ١$

، $٧^{٠} = ٥^{٠} = ٦^{٠} = ١٠٠^{٠} =$ أى $\text{عدد}^{\text{صفر}} = ١$ واحد صحيح .

[٢ ـ ٣] تدريبـــات :

(١) ضع ما يلى فى صورة أسية :

[أ] $٦ \times ٦ \times ٦ = ٦^{٣}$

[ب] $٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ =$

[حـ] $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ =$

[د] $١٠,٥ \times ١٠,٥ \times ١٠,٥ \times ١٠,٥ =$

[هـ] $أ \times أ \times أ \times أ \times أ \times أ =$

[و] $س \times س \times س \times س \times س =$

(٢) حلل الأسس التالية ثم أوجد قيمتها :

[أ] $٥^{٣} = ٥ \times ٥ \times ٥ = ١٢٥$

[ب] $٧^{٤} =$ $\qquad =$

[حـ] $٣^{٥} =$ $\qquad =$

[د] $٩^{٣} =$ $\qquad =$

[هـ] $٤^{٤} =$ $\qquad =$

[و] $٢^{٨} =$ $\qquad =$

(٣) أوجد قيمة ما يلى :

[أ] $٢^{٢} + ٣^{٢} =$

[ب] $٣^{٣} + ٤^{٢} =$

[حـ] $٢^{٣} \times ٢^{٤} =$

[د] $٧^{٣} - ٣^{٤} =$

[هـ] $٦^{٣} \div ٢^{٣} =$

[و] $(٤^{٣} \times ٣^{٥}) \div ٢^{٨} =$

[ز] $٢^{٦} \div ٤^{٢} =$

[ح] $٤^{٣} \div ٤ =$

[ط] $٦^{٨} \div ٦^{٥} =$

(٤) ضع ما يلى فى صورة أسس مرفوعة للأساس ١٠ .

[أ] ١٠٠٠٠ ، [ب] ١٠٠ ٠٠٠

[حـ] مليون ، [د] ألف مليون (مليار)

(٥) ضع ما يلى فى صورة أسس مرفوعة للأساس ٢

[أ] ٦٤ ، [ب] ٢٥٦

[حـ] ٥١٢ ، [هـ] ١٠٨٠

(٦) أوجد قيمة ما يلى :

[أ] $١٠^{٣} =$

[ب] $١٠^{٦} =$

[حـ] $١٠^{٩} =$

[د] $١٠^{\text{صفر}} =$

[هـ] $١٠^{١} =$

[و] $١٠^{٧} =$

(٧) استخدم الآلة الحاسبة وحاول إيجاد قيمة ما يلى :

[أ] $(١,٣)^{٥} =$

[ب] $٣٧٥^{\text{صفر}} =$

[حـ] $(٥,٢)^{٣} =$

[د] $(٢٩,٣)^{٤} =$

[هـ] $(٠,٧)^{٥} =$

[و] $(٢,٢٥^{٦} =$

[ز] $(٠,٩٩)^{٣} =$

الدرس الثالث

اساس الأعـداد

Number bases

[٣ ـ ١] مقدمـــة :

يحتاج الإنسان حالياً ومنذ العصور الأولى للتاريخ إلى وسيلة تُمكنه من عد وحصر ما يمتلكه ولإجراء عمليات المبادلة التجارية ومع تقدم البشرية وزيادة معارف الإنسان وحجم التجارة والسلع المتداولة كان لزاماً من معرفة نظام لتدوين وتسجيل وحصر الممتلكات والبضائع والأرباح والخسارة .

[٣ ـ ٢] رموز وأشكال الأعداد :

قديماً كانت عملية العد تتم بواسطة رموز أو أشكال يتم تشكيلها على الصخور والحجارة أو على الورق ومع تطور البشرية عرف الإنسان النظام المعمول به حالياً لرموز الأرقام وهو فى الأساس نظام هندى عربى النشأة .

وفى هذا النظام ، هنالك عشرة رموز للأرقام لا غير وبكتابتها بطرق معينة يمكن الحصول على أى عدد مهما كبر أو صغر .

وهذه الرموز هى :

صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

ويُعرف هذا النظام بالنظام العشرى للأرقام أو بالقاعدة العشرية (النظام الدينارى dinary numbers حيث أنه يستخدم عشرة رموز به السابق ذكرها .

وعند الرغبة فى تسجيل أى عدد أكبر من ٩ فإنه يتم الإستعانة بتركيبة من الأعداد يراعى فيها موقع كل عدد .

والعدد التالى للعدد ٩ هو ١٠ ويلاحظ أنه مُركب من عددين (صفر ، ١) ويأتى بعد ذلك بقية سلسلة الأعداد :

١١ (١ ، ١)، ١٢ (٢ ، ١) ، ١٣ (٣ ، ١) وهكذا حتى ١٩ (٩ ، ١)

ويأتى بعد ذلك ٢٠ (صفر ، ٢) ، ٢١ (١ ، ٢) وهكذا ..

والعدد ٩٩ (٩ ، ٩) ويأتى بعد ذلك ١٠٠ (صفر ، صفر ، ١) .

وهكذا ١٠١ (واحد ، صفر ، واحد) ،...

ثم العدد ٩٩٩ (تسعة ، تسعة ، تسعة) وهى أعداد مكونة من ثلاثة خانات .

أما الأعداد ابتداء من ١٠٠٠ ، ١٠٠١ ، ١٠٠٢ وحتى ٩٩٩٩ فهى مكونة من أربعة خانات ، وهكذا ..

[٣ ـ ٣] أساسات أخرى للأعداد :

من الممكن أن نستخدم نظم أخرى لأسس الأعداد غير النظام العشرى الذى تعودنا عليه جميعاً .

فإذا استعملنا النظام التساعى للأرقام ذو الأساس ٩ سنجد أن الأعداد فى هذا النظام تسير بطريقة متشابهة للنظام العشرى ولكن بدون استخدام العدد ٩ كالتالى :

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨

[وهى أساس الأرقام بالنظام التساعى]

أما العدد الذى يناظر ٩ فلن يكون بطبيعة الحال ٩ ولكنه سيكون مكوناً من رقمين (٠ ، ١) وهو ١٠ .

ويلاحظ أن ١٠ فى هذا النظام لا تعنى ولا تساوى ١٠ فى النظام العشرى .

ويأتى بعد ذلك ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ٢٠ [وعشرين هنا لا تعنى ولا تساوى عشرين بالنظام العشرى] .

ثم ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٣٠

[٣٠ هنا لا تساوى ٣٠ بالنظام العشرى]

وهكذا حتى نصل إلى ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ١٠٠

[خلاف ١٠٠ بالنظام العشرى]

وإذا قمنا بعمل مقارنة بين النظام العشرى للأرقام والنظام التساعى للأرقام ابتداء من العدد ١ وحتى ١٦ مثلاً نجد الآتى كما فى جدول [٣ ـ ١] .

النظام العشرى الأساس ١٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦
النظام التساعى الأساس ٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧

جـــدول [٣ ـ ١]

فالعدد ١٦ يكتب بالصورة التالية فى الأساس ٩ : $١٧_{٩}$

أى (سبعة ، واحد للأساس ٩) .

وعلى ذلك فإن $١٦_{١٠}$ = $١٧_{٩}$

وسنرى فى الجدول التالى بعض الأمثلة لأساسات أخرى للأعداد جدول [٣ ـ ٢] .

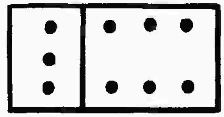
الأساس ١٠	٠، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ..
الأساس ٨	٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ،١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ...
الأساس ٦	٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ..
الأساس ٣	٠، ١ ، ٢ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٢ ، ١١٠ ، ١١١ ، ١١٢ ، ١٢١ ، ١٢٢ ، ..
الأساس ٢	٠ ، ١ ، ١٠ ، ١١ ، ٢٠ ، ١٠٠ ، ١٠١ ، ١١٠ ، ١١١ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠١ ، ١٠١٠ ، ١٠١١ ، ١١٠٠ ، ١١٠١ ، ١١١٠ ، ١١١١ ، ١٠٠٠٠ ، ...

جـدول [٣ ـ ٢]

وفى الجدول [٣ ـ ٢] تُسمى الأعداد التى أساسها ٢ بالأعداد الثنائية binary numbers وهى جزء من الأعداد ذات الأساس ١٠ وهى تُعد أكثر الأعداد شيوعاً فى النظام الحسابى .

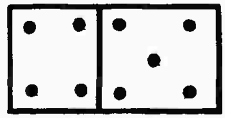
◀ مثـــال (١) :

هذا المثال يبين لنا بعض الطرق المختلفة للحساب فإذا كان لدينا تسعة وحدات فإنه يمكن ترتيبها بعدة طرق مختلفة لحسابها بأنظمة أخرى غير النظام العشرى .



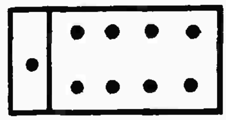
ستـات وحدات

١ ٣ = ١٣ للأساس ٦



خـمسات وحدات

١ ٤ = ١٤ للأساس ٥



أربعات وحدات

٢ ١ = ٢١ للأساس ٤

شكل [٣ ـ ١]

حاول التكملة على نفس النمط للأساس ٨ وللأساس ٧ .

[٣ ـ ٤] تدريبـــات :

(١)على نفس نمط المثال السابق اذكر الأساس المستخدم وكم عدد الوحدات الموجودة إذا قمنا بتسجيلها كما فى الجدول التالى جدول [٣ ـ ٣] .

[أ]

ثمانيات	وحدات
٣	٥

جـدول [٣ ـ ٣ ـ أ]

[ب]

خمسـات	وحدات
٢	٣

جـدول [٣ ــ ٣ ــ ب]

[جـ]

ثلاثـات	وحدات
٣	٢

جـدول [٣ ــ ٣ ــ جـ]

[د]

ستات	وحدات
٣	٤

جـدول [٣ ــ ٣ ــ د]

(٢)أكمل الناقص فى الجدول التالى جدول (٣ ــ ٤) .

الأساس ١٠	مئات (عشرة × عشرة)	عشرات	وحدات
الأساس ٣	تسعات (٣ × ٣)	ثلاثات	وحدات
الأساس ٤	ستة عشرات (٤ × ٤)	أربعات	وحدات
الأساس ٥	...	...	...
الأساس ٦	...	...	...
الأساس ٨	...	...	...

جدول [٣ ـ ٤]

(٣)اكتب من ١ إلى ٣٠ فى أنظمة الأرقام التالية .

(أ) نظام الأرقام ذو الأساس ٧ .

(ب) نظام الأرقام ذو الأساس ٥ .

(جـ) نظام الأرقام ذو الأساس ٤ .

◀ التحويل لأنظمة أعداد ذات أساسات أخرى :

(٤)حول الرقم ٢٥ فى النظام العشرى إلى :

(أ) الأساس ٤ (ب) الأساس ٥ (جـ) الأساس ٨

(٥)حول الرقم ٤٠ فى النظام العشرى (الديناري) إلى :

(أ) الأساس ٣ (ب) الأساس ٧ (جـ) الأساس ٥

(٦)حول الأرقام التالية فى النظام الديناري إلى النظام ذو الأساس ٣ :

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٩

(٧)حول الأرقام التالية فى النظام الدينارى إلى النظام ذو الأساس ٦ :

(أ) ٤٤ ، ١٠٠ ، ١٥٤ .

(٨)حول الأرقام التالية فى النظام الدينارى إلى النظام ذو الأساس ٨ :

(أ) ٧٥ (ب) ٨٨ (جـ) ١٢٣

(٩)أكمل الجدول التالى : جدول [٣ ـ ٥] :

	ستات وثلاثون	ستات	وحدات
(أ) $٥٠_{١٠}$			
(ب) $٧٨_{١٠}$			
(جـ) $١٢٥_{١٠}$			

جـدول [٣ ــ ٥]

	خمسات وعشرون	خمسات	وحدات
(د) $٣٢_{١٠}$			
(هـ) $٦٥_{١٠}$			
(و) $١٢٤_{١٠}$			

تابع جـدول [٣ ــ ٥]

	ستات عشر	أربعات	وحدات
(ز) $٢١_{١٠}$			
(ح) $٢٦_{١٠}$			
(ط) $٥٠_{١٠}$			

تابع جدول [٣ ـ ٥]

[٣ ـ ٥] *تحويل الأرقام ذات الأساس ١٠ إلى أرقام ذات أنظمة أسس أخرى :*

يمكننا بكتابة الأرقام أسفل بعضها فى كل أساس أن نكتشف العدد المناظر فى أساس ما إلى العدد المناظر له فى الأساس الآخر.

إلا أن هذه العملية طويلة ومملة وقد تكون مستحيلة أحياناً وللتغلب على هذه المشكلة فإننا نقوم باستخدام نظرية تعرف باسم نظرية تكرار القسمة أو نظرية التجميع .

وتعتمد هذه النظرية على قسمة الأرقام ذات الأساس ١٠ على أرقام الأسس المطلوب التحويل إليها حتى نصل إلى عدد لا يمكن أن يقبل القسمة .

والأمثلة التالية توضح ذلك :

◀ مثـــال (١) :

حول الرقم $٨٩٥_{١٠}$ إلى الأساس ٨ ، جدول [٣ ـــ ٦] نقوم بالقسمة على ٨ طبقاً للنظرية السابقة .

			٨٩٥	٨
الباقي :	٧	،	١١١	٨
، الباقي :	٧	،	١٣	٨
، الباقي :	٥	،	١	٨
، الباقي :	١	،	صفر	

جدول [٣ ــ ٦]

وهذا يبين أن الـ ٨٩٥ وحدة بها ٧ وحدات زائدة عند وضعها فى نظام مجموعات ذات الأساس ٨ .

[٧ هى باق أول عملية قسمة]

وبذلك فإن $٨٩٥_{١٠} = ١٥٧٧_{٨}$

لاحظ أن بواقى القسمة ٧ ، ٧ ، ٥ ، ١ هى مكونات الرقم $١٥٧٧_{٨}$ وقد تم كتابتها من أسفل لأعلى .

◀ مثـــال (٢) :

حول الرقم $٤٣٦_{١٠}$ إلى الأساس ٤ ، جدول [٣ ــ ٧] .

٤	٤٣٦			
٤	١٠٩	،	صفر	الباقى :
٤	٢٧	،	١	، الباقى :
٤	٦	،	٣	، الباقى :
٤	١	،	٢	، والباقى :
	صفر	،	١	، الباقى :

جـدول [٣ ــ ٧]

لاحظ أنه إذا كان الباقى = صفر فإنه يجب تسجيله حيث أنه يُعتبر أحد خانات الأرقام فى النظام الجديد ذو الأساس ٤

∴ $٤٣٦_{١٠} = ١٢٣١٠_{٤}$

◀ مثـــال (٣) :

حول $٨٥_{١٠}$ إلى الأساس ٢ (النظام الثنائى) انظر جدول (٣ ــ ٨) .

٢	٨٥	
٢	٤٢	الباقى : ١ ،
٢	٢١	، الباقى : صفر ،
٢	١٠	الباقى : ١ ،
٢	٥	، والباقى : صفر ،
٢	٢	، الباقى : ١ ،
٢	١	، والباقى : صفر ،
	صفر	، الباقى : ١ ،

جـدول [٣ ــ ٨]

∴ $٨٥_{١٠} = ١٠١٠١٠١_{٢}$

تدريبـــات :

(١) مسألة محلولة :

فى المسألة الموضحة أدناه ، تم حلها ، ادرسها وحاول حل المسائل التى تشبهها مما يلى :

حول $٣٤٩_{١٠}$ إلى رقم ذو أساس ٥

٥	٤٣٩	
٥	٨٧	، الباقي = ٤
٥	١٧	، الباقي = ٣
٥	٣	، الباقي = ٢
	صفر	، الباقي = ٣

$٣\ ٢\ ٣\ ٤_{٥}$

جـدول [٣ ـ ٩]

∴ $٤٣٩_{١٠} = ٣٢٣٤_{٥}$

(٢) حول $٥٨٣_{١٠}$ لرقم أساسه ٥

(٣) حول $٢٦٩_{١٠}$ لرقم أساسه ٧ .

(٤) حول $١٣٢٥_{١٠}$ لرقم أساسه ٦ .

(٥) حول $٩٢٤_{١٠}$ لرقم أساسه ٥ .

(٦) حول ٢٩١١ لرقم أساسه ٨ .

(٧) حول ٣٢٢ لرقم أساسه ٤ .

(٨) حول ٧٦٧ لرقم أساسه ٣ .

(٩) حول ١٥٣ لرقم أساسه ٢ .

[٣ ـ ٧] تحويل الأعداد ذات أساسات أخرى إلى أعداد ذات أساس ١٠ :

إذا فرضنا أن لدينا العدد ٥ ٤ ٣ ٦ للأساس ١٠ فإنه يمكن التعبير عنه فى الصورة التالية :

١	١٠	١٠٠	١٠٠٠
آحاد	عشرات	مئات	آلاف
٥	٤	٣	٦

أو $٥ \times ١ + ٤ \times ١٠ + ٣ \times ١٠٠ + ٦ \times ١٠٠٠$

أو $٥ + ٤ \times ١٠^{١} + ٣ \times ١٠^{٢} + ٦ \times ١٠^{٣}$.

مثـــال (١) :

وسوف نكرر هذه العملية على أعداد من أساس مختلف عن الأساس ١٠ وليكن الأساس ٨ ، العدد هو $٦٣٤٥_{٨}$

آحاد	$٨^{١}$	$٨^{٢}$	$٨^{٣}$
٥	٤	٣	٦

فالرقم الأول ٥ هو الآحاد كما فى أعداد الأساس ١٠ .

والرقم الثانى ٤ هو الثمانيات وهو ما يناظر العشرات .

والرقم الثالث ٣ هو ٨ × ثمانيات أى $٨^{٢}$ وهو ما يناظر المئات .

والرقم الرابع ٦ هو ٨ × ٨ × ثمانيات أى $٨^{٣}$ وهو ما يناظر الآلاف .

وبذلك فإن العدد يمكن كتابته فى نظام الأرقام ذات الأساس ٨ كالتالى :

آحاد	$٨^{١}$ = ٨	$٨^{٢}$ = ٦٤	$٨^{٣}$ = ٥١٢
٥	٤	٣	٦

جـدول [٣ ـــ ١٠]

∴ الـ ٦ تُمثل ٦ × ٥١٢ = ٣٠٧٢ فى الأساس ١٠
، الـ ٣ تُمثل ٣ × ٦٤ = ١٩٢ فى الأساس ١٠
، الـ ٤ تُمثل ٤ × ٨ = ٣٢ فى الأساس ١٠
، الـ ٥ تُمثل ٥ × ١ = ٥ فى الأساس ١٠

٣٣٠١

∴ ٦٣٤٥$_{٨}$ = ٣٣٠١$_{١٠}$

◀ مثـــال (٢) :

حول العدد ١٠١١٠١١$_{٢}$ إلى الأساس ١٠

انظر جدول [٣ ـ ١١] :

آحاد آحاد	$٢^{١}$ = ٢	$٢^{٢}$ = ٤	$٢^{٣}$ = ٨	$٢^{٤}$ = ١٦	$٢^{٥}$ = ٣٢	$٢^{٦}$ = ٦٤
١	١	٠	١	١	٠	١

جـدول [٣ ـ ١١]

∴ ١ × ٦٤ = ٦٤
، صفر × ٣٢ = صفر
، ١ × ١٦ = ١٦
، ١ × ٨ = ٨
، صفر × ٤ = صفر
، ١ × ٢ = ٢
، ١ × ١ = ١

بالجمع = ٩١ ∴ ٩١$_{١٠}$ = ١٠١١٠١١$_{٢}$

□ مثال (٣) :

حول $٤١٠٣٢_{٥}$ إلى الأساس ١٠ ، انظر جدول [٣ ـ ١٢] .

آحاد آحاد	$٥^{١}$ = ٥	$٥^{٢}$ = ٢٥	$٥^{٣}$ = ١٢٥	$٥^{٤}$ = ٦٢٥
٢	٣	٠	١	٤
٢ × ١ = ٢	٣ × ٥ = ١٥	٠ × ٢٥ = صفر	١ × ١٢٥ = ١٢٥	٤ × ٦٢٥ = ٢٥٠٠

جدول [٣ ــ ١٢]

∴ الإجمالى فى الأساس ١٠ = ٢٥٠٠
+ ١٢٥
+ صفر
+ ١٥
+ ٢

———

$٢٦٤٢_{١٠}$

∴ $٢٦٤٢_{١٠} = ٤١٠٣٢_{٥}$

[٣ ـ ٨] تدريبات :

شكل [٣ ــ ١] يمثل عدد ذو الأساس ٣ وهو يعادل العدد ١٧ فى الأساس ١٠ $١٧_{١٠} = ١٢٢_{١٠}$

(١) بنفس الطريقة حول الأرقام التالية ذات الأساس ٣ إلى الأرقام المناظرة ذات الأساس ١٠ .

(أ) ٢٠٢$_{٣}$ (ب) ١٣٢$_{٣}$ (جـ) ٢٢١$_{٣}$

(٢) أكمل الجدول التالى ، جدول [٣ ـ ١٣] .

الأساس ١٠	آحاد آحاد	$٤^{١}$ = ٤	$٤^{٢}$ = ١٦
=	٢	٣	٢
=	١	٢	٣
=	٣	١	١

جـدول [٣ ـ ١٣] (أ)

الأساس ١٠	آحاد آحاد	$٦^{١}$ = ٦	$٦^{٢}$ = ٣٦
=	٣	٢	٤
=	٤	صفر	٥
=	١	٤	٢

جـدول [٣ ـ ١٣] (ب)

الأساس ١٠	آحاد آحاد	7^1 $= 7$	7^2 $= 49$
=	٥	٤	٢
=	١	٣	٣
=	٤	٥	١

جـدول [٣ ــ ١٣] (جـ)

(٣) أكمل الجدول التالى ، جدول [٣ ــ ١٤]

أساس ٤	أساس ١٠
١٢٣٠ ٢١٢٣ ١٣٣٢	

جـدول [٣ ــ ١٤ ــ أ]

أساس ٧	أساس ١٠
١٢٣٥ ٢٣١٤ ١٤٤٤	

جدول [٣ ــ ١٤ ــ ب]

(٤) حول الأرقام التالية إلى الأساس ١٠

(أ) ١٢٣٢$_{٥}$ =

(ب) ١٢٧٥$_{٩}$ =

(جـ) ١٣٥٥$_{٨}$ =

(د) ٢٦٦$_{٧}$ =

(هـ) ٣٢٠٤$_{٥}$ =

(و) ١٢١٢$_{٣}$ =

[٣ ـ ٩] التحويل من أساس إلى أساس آخر (غير الأساس ١٠) :

سبق وأن عرفنا كيفية تحويل أعداد ذات الأساس ١٠ إلى أعداد ذات أساس غير ١٠ وتعلمنا كذلك تحويل الأعداد ذات الأساسات المختلفة ← إلى أعداد ذات الأساس ١٠ .

ولحل مسائل هذا البند فإننا نجرى الحل على مرحلتين :

(أ) نحول أساس عدد إلى عدد ذو أساس ١٠ .

(ب) ثم نحول العدد ذو الأساس ١٠ إلى العدد ذو الأساس المطلوب .

مثـــال (١) :

حول العدد ذو الأساس ٧ ، $٥٢٦_{٧}$ إلى أعداد الأساس ٤ .

الحـــل :

المرحلة الأولى :

نحول العدد $٥٢٦_{٧}$ إلى أعداد الأساس ١٠ انظر جدول [٣ ــ ١٥] .

الآحاد	$٧^{١}$ ٧ =	$٧^{٢}$ ٤٩ =
٦ ٦	٢ ٢ × ٧ = ١٤	٥ ٥ × ٤٩ = ٢٤٥

جـدول [٣ ــ ١٥]

∴ $٥٢٦_{٧}$ = ٢٤٥ + ١٤ + ٦ = $٢٦٥_{١٠}$

◀ المرحلة الثانية :

نحول العدد $٢٦٥_{١٠}$ إلى أعداد الأساس ٤ وذلك بعملية القسمة المتكررة على ٤ .

٤	٢٦٥		
٤	٦٦	،	الباقي = ١
٤	١٦	،	الباقي = ٢
٤	٤	،	الباقي = صفر
٤	١	،	الباقي = صفر
	صفر	،	الباقي = ١

$\therefore\ ٢٦٥_{١٠} = ١٠٠٢١_{٤}$

$\therefore\ ٥٢٦_{٧} = ٢٦٥_{١٠} = ١٠٠٢١_{٤}$

[٣ ـ ١٠] تدريبـــات :

١ ـ حول العدد $١٢٣٢_{٤}$ إلى :

(أ) أعداد الأساس ١٠ (ب) أعداد الأساس ٦

٢ ـ حول العدد $٤٢٥_{٦}$ إلى :

(جـ) أعداد الأساس ١٠ (د) أعداد الأساس ٤

٣ ـ حول العدد $١٠١١٠_{٢}$ إلى :

(أ) أعداد الأساس ١٠ (ب) أعداد الأساس ٥

٤ ـ حول العدد $٢٠٢١_{٣}$ إلى :

(أ) أعداد الأساس ١٠ (ب) أعداد الأساس ٢

٥ ـ حول العدد $٥٤٢_{٨}$ إلى :

(أ) أعداد الأساس ١٠ (ب) أعداد الأساس ٥

الدرس الرابع

عمليات أخرى على الأعداد ذات الأساسات المختلفة

[٤ ـ ١] مقدمـــة :

من السهل تطبيق العمليات الحسابية الأربعة الأساسية على الأعداد ذات الأساسات المختلفة مثلما الحال عند إجرائها على الأعداد ذات الأساس ١٠ .

وفيما يلى طرق اجراء الأربع عمليات الأساسية من الجمع والطرح والضرب والقسمة وأمثلة على ذلك ويتبعها تدريبات .

[٤ ـ ٢] الجمـــع :

◀ مثـــال (١) :

إجمع ٥ + ٨ للأساس ٩

فى الأساس ١٠ = ٥ + ٨ = $١٣_{١٠}$

ولكن $١٣_{١٠}$ = $١٤_{٩}$ لأن :

٩	١٣	
٩	١	الباق = ٤
	صفر	الباق = ١

∴ $(٥ + ٨)_{٩}$ = $١٤_{٩}$

◀ مثـــال (٢) :

إجمع $١٧_{٨} + ٥٦_{٨}$

(لا يوجد عدد أكبر من ٧ لمجموعات الأعداد ذات الأساس ٨)

نبدأ بجمع الأحاد = ٧ + ٦ = $١٣_{١٠}$.

، $١٣_{١٠} = ١٥_{٨}$.

لأن :

١٣		٨
١	والباقي = ٥	٨
صفر	والباقي = ١	

$١٥_{٨}$ ، حيث تكتب ٥ فى خانة الآحاد ويتبقى واحد يضاف لخانة الثمانيات ويجمع على (١ + ٥) ليصبح ٦ .

$$\begin{array}{r} \therefore\ ١٧_{٨} \\ +\ ٥٦_{٨} \\ \hline ٧٥_{٨} \end{array}$$

◀ مثـــال (٣) :

اجمع $١٢١٢_{٣} + ١٠٢_{٣} + ١٢١_{٣}$

(لا يوجد عدد أكبر من لمجموعات الأعداد ذات الأساس ٣)

نبدأ بجمع الآحاد :

$\therefore$ ٢ + ٢ + ١ = $٥_{١٠}$

ولكن $٥_{١٠} = ١٢_{٣}$

∴ نبدأ بتسجيل آحاد $١٢_{٣}$ وهى الـ ٢ فى المجموع ويتبقى ١ يُضاف إلى العمود التالى للآحاد :

$$∴ ١ + ١ + ٠ + ٢ = ٤_{١٠} = ١١_{٣}$$

وبالمثل نسجل الرقم ١ فى الخانة الثانية من المجموع ويتبقى واحد يضاف إلى العمود التالى

$$∴ ١ + ٢ + ١ + ١ = ٥_{١٠} = ١٢_{٣}$$

وبالمثل نسجل ٢ فى الخانة الثالثة فى المجموع ويتبقى واحد يضاف إلى العمود التالى :

$$∴ ١ + ١ = ٢_{١٠} = ٢_{٣}$$

ثم نسجل فى الخانة الأخيرة للإجابة الرقم ٢

$$
\begin{array}{lr}
∴ & ١٢١٢_{٣} \\
+ & ١٠٢_{٣} \\
+ & ١٢١_{٣} \\
\hline
= & ٢٢١٢_{٣}
\end{array}
$$

[٤ ـ ٣] تدريبات على الجمع :

(١) أوجد ناتج العمليات التالية للأساس ٥

(أ)
$$
\begin{array}{lr}
 & ٢٤ \\
+ & ١٣ \\
\hline
\end{array}
$$

(ب)
$$
\begin{array}{lr}
 & ٤٣٢ \\
+ & ٢٣٤ \\
\hline
\end{array}
$$

(جـ)
$$
\begin{array}{lr}
 & ٣٢١ \\
+ & ١٣٢ \\
+ & ٤٤٤ \\
\hline
\end{array}
$$

(٢) أوجد ناتج العمليات التالية للأساس ٧ :

(أ)
$$
\begin{array}{lr}
 & ٦٥٤ \\
+ & ٣٢٥ \\
\hline
\end{array}
$$

(ب)
$$
\begin{array}{lr}
 & ٦٦٦ \\
+ & ٤٥٦ \\
\hline
\end{array}
$$

(جـ)
$$
\begin{array}{lr}
 & ٣٤٥٦ \\
+ & ٦٥٤٣ \\
+ & ٥٣٤٦ \\
\hline
\end{array}
$$

(٣) أوجد ناتج جمع الآتى :

[أ] $٤١_{٦} + ٥٤٣_{٦} =$

[ب] $١٢٣_{٤} + ٣٣٣_{٤} + ٢٢١_{٤} =$

[حـ] $١٢١_{٣} + ٢٢١_{٣} + ١٢٠_{٣} =$

[د] $٧٦_{٨} + ٣٦٧_{٨} + ٧٧٧_{٨} =$

(٤) لقد تم جمع العمليات التالية وعليك إيجاد الأساس الذى أجريت عليه كل عملية جمع :

(أ)	(ب)	
٢٤٣	٣٧٥	١٠١٢
+ ٤٣٢	+ ١٤٣	+ ١١٢١
١٢٣٠	٥٤٠	٢٢١٠

(د)	(هـ)
٣٢٤	٢٣١
+ ٥٤٠	+ ٤٣٢
+ ١٢٣	+ ١١٢
١٠٨٧	١٢١٥

[٤ ـ ٤] الطــرح :

مثـال (١) :

اطرح $٣٤_{٧} - ١٥_{٧}$

(لا يوجد عدد أكبر من ٦ للأعداد ذات الأساس ٧)

ويتم حل هذه المسألة بنفس طريقة حل مسائل الأعداد ذات الأساس ١٠ مع شيء بسيط من الاختلاف .

وحيث أنه لا يمكن طرح ٥ من ٤ لذلك يلزم أن نستعير من العمود الثانى ويقل هذا العمود بمقدار ما نستعيره ولما كان العمود الثانى يحتوى على ثلاث سبعات ، لذا فإننا نستعير ٧ واحدة ويتبقى عدد (اثنين × ٧) .

$$
\begin{array}{r}
٣٤_{٧} \\
-\ ١٥_{٧} \\
\hline
١٦_{٧}
\end{array}
$$

∴ ٤ + ٧ = ١١

وبذلك يمكن طرح ٥ من ١١ فيتبقى ٦

ويتبقى بالعمود الثانى ٢ فنطرح منها ١ فيتبقى لنا ١

∴ $٣٤_{٧} - ١٥_{٧} = ١٦_{٧}$

مثـــال (٢) :

اطرح :

$٤٥٠٦_{٨} - ٣٤٢٧_{٨}$ ،

الحـــل :

بالطبع من الصعب طرح ٧ من ٦ ، لذا سنستعير ٨ من العمود المجاور ولكن بما أنه صفر فسنقلله إلى ٧ ونقلل الرقم الموجود فى العمود المجاور إلى ٤ بدلاً من ٥ .

$$
\begin{array}{r}
٤٥٠٦_{٨} \\
-\ ٣٤٢٧_{٨} \\
\hline
١٠٥٦_{٨}
\end{array}
$$

∴ ٦ + ٧ = ١٣

، ١٣ − ٧ = ٦ (خانة الآحاد)

، ٧ − ٢ = ٥ (العمود التالى) .

، ٤ − ٤ = صفر (العمود التالى) .

، ٤ − ٣ = ١ (العمود التالى) .

∴ $٤٥٠٦_{٨} - ٣٤٢٧_{٨} = ١٠٥٦_{٨}$

[٤ ـ ٥] تدريبات على الطرح :

(١) أوجد ناتج طرح ما يلى للأساس ٥

(أ)	(ب)	(جـ)
٤٣٢	٢٣٢	٢٠٤٣
− ٢٤٣	− ١٤٣	− ٣٢٤

(٢) أوجد ناتج طرح ما يلى للأساس ٨ .

(أ)	(ب)	(جـ)
٢٥٧	٥٥٣	٢٣١٤
− ١٥٣	− ٢٦٦	− ١٥٤٥

(٣) أوجد ناتج طرح ما يلى :

[أ]

$٥٣٤_{٧} - ٣٦٤_{٧} =$

[ب] $٢١٢١_{٣} - ١٢٢٢_{٣} =$

[حـ] $٨٧٦٥_{٩} - ٥٦٧٨_{٩} =$

[د] $٥٣٢٤_{٦} - ٢٥١٣_{٦} =$

[هـ] $٣٤٤١_{٥} - ١٤٤٤_{٥} =$

(٤) أوجد الأساس الذى استخدم فى إجراء عمليات الطرح التالية :

[أ] ١٤٣٢ − ٣٤٣ = ١٠٣٤

[ب] ١٢٠٢ − ٣٣٢ = ٢١٠

[حـ] ٥٤٢٣ − ٦٦٦ = ٤٥٣٥

[د] ٤٤١٢ − ١٤٤٥ = ٢٥٢٣

[هـ] ٤٣٦١ − ٢٣٧٦ = ١٨٧٤

[و] ٤٣٦ − ٣٥١ = ٥٥

[٤ ـ ٦] الضـــرب :

◀ مثـــال (١) :

أوجد حاصل ضرب ١٣٠٤٥ × ٤ للأساس ٦

$١٣٠٤٥_{٦}$ تُحل هذه المسائل بطريقة مشابهة لمسائل الأساس ١٠

٦٤ × ∴ ٤ × ٥ = ٢٠ وهى عبارة عن ٢ + (٣) × ٦

―――――― لذلك نسجل ٢ ويتبقى ٣ « ستات » فتضاف الثلاثة إلى

١٠٠٣١٢ خانة الضرب التالية :

∴ ٤ × ٤ + ٣ = ١٩ وهى عبارة عن ١ + (٣) × ٦

∴ ندون ١ ويتبقى ٣ تضاف لعملية الضرب التالية .

∴ ٤ × ٠ + ٣ = ٣ فندونها كما هى .

ثم ٤ × ٣ = ١٢ وهى عبارة عن ٠ + (٢) × ٦

∴ ندون الصفر ويتبقى ٢

ثم ٤ × ١ = ٤ + ٢ = ٦ وهى عبارة عن ٠ + (١) × ٦

∴ ندون الصفر ويتبقى ١ نضيفه كذلك .

لأن الـ ٦ فى الأساس ٦ تعادل ١٠ فى الأساس ١٠ .

◀ مثـــال (٢) :

اضرب $٢٦٠٥_{٧}$ × $٤٥_{٧}$

◀ الحـــل :

يتم حل هذا النوع من المسائل بنفس طريقة حل مسائل الأساس ١٠ .

$$
\begin{array}{r}
\text{٢٦٠٥}_{\text{٧}} \\
\times \quad \text{٤٥}_{\text{٧}} \\
\hline
\text{٢٠٢٣٤} \\
\text{١٤٣٢٦٠} \\
\hline
\text{١٦٣٥٢٤}
\end{array}
$$

نقوم بضرب العدد ٢٦٠٥ فى العدد ٥ وهو آحاد الرقم ٣٥ كما فى مسائل الأساس ١٠ ثم نضع صفر فى خانة الآحاد فى الصف التالى ، ثم نجرى عملية الضرب فى ٤ وتذكر أن المسألة للأساس ٧ .

ثم نجرى عملية جمع الصفين كما سبق وأن تعلمنا عملية الجمع .

[٤ ـ ٧] تدريبات على الضرب :

(١) أوجد حاصل ضرب ما يلى طبقاً للأساس المذكور :

(أ) $\text{٤}_{\text{٦}} \times \text{٥}_{\text{٦}} =$

(ب) $\text{٧}_{\text{٨}} \times \text{٦}_{\text{٨}} =$

(جـ) $\text{٢١}_{\text{٣}} \times \text{٢}_{\text{٣}} =$

(د) $\text{٣٣}_{\text{٤}} \times \text{٢}_{\text{٤}} =$

(هـ) $\text{٢٤١}_{\text{٥}} \times \text{٣}_{\text{٥}} =$

(٢) أوجد ناتج ما يلى مستخدماً نظرية الضرب المْطول :

(أ) $\begin{array}{r} \text{٦٥٤}_{\text{٧}} \\ \times \quad \text{٤٦}_{\text{٧}} \\ \hline \end{array}$ (ب) $\begin{array}{r} \text{٢٠١}_{\text{٣}} \\ \times \quad \text{١٢}_{\text{٣}} \\ \hline \end{array}$ (جـ) $\begin{array}{r} \text{٤٣٢}_{\text{٥}} \\ \times \quad \text{٤٣}_{\text{٥}} \\ \hline \end{array}$

(٣) احسب الأساس الذى بناءً عليه تمت عمليات الضرب التالية :

(أ) ٤ × ٣ = ٢٠

(ب) ٥ × ٢ = ١٢

(جـ) ٦ × ٤ = ٣٣

(د) ١٣ × ٣ = ٤٤

(هـ) ١٢٢ × ٢ = ١٢١٢

(و) $\begin{array}{r} \text{٢٣٥} \quad \times \\ \text{٣٢} \\ \hline \text{٥٠٣} \\ \text{١٠٤١٠} \\ \hline \text{١١٢١٣} \end{array}$

[٤ ـ ٨] القسمة :

تختلف عملية القسمة هنا اختلافاً كبيراً عن القسمة للأساس ١٠ وذلك كما يتضح من الأمثلة التالية .

◀ مثال (١) :

اقسم ٤٥٣٦$_{٧}$ ÷ ٦$_{٧}$

٠٥٤١	
٤٥٣٦$_{٧}$	٦$_{٧}$

عند قسمة ٤ ÷ ٦ لا يصح وبالتالى فالإجابة تكون صفر ويتبقى ٤ وندون الصفر ؛ ثم أن الباقى هذا يضرب فى الأساس ٧ .

∴ ٤ × ٧ = ٢٨ ، ثم يجمع على الرقم التالى هو ٥

∴ ٢٨ + ٥ = ٣٣

ولكن ٣٣ ÷ ٦ = ٥ والباقى ٣ فنقوم بتدوين رقم ٥ ثم أن الباقى هذا يضرب فى الأساس ٧ .

∴ ٣ × ٧ = ٢١ ، ثم يجمع على الرقم التالى وهو ٣

∴ ٢١ + ٣ = ٢٤ ولكن ٢٤ ÷ ٦ = ٤ والباق صفر فنقوم بتدوين رقم ٤ ويجمع الصفر على الرقم التالى وهو ٦ .

∴ ٠ + ٦ = ٦

، ٦ ÷ ٦ = ١

ويمكن التأكد من صحة الإجابة بضرب ٦$_{٧}$ × ٥٤١$_{٧}$

∴ ٤٥٣٦$_{٧}$ ÷ ٦$_{٧}$ = ٥٤١$_{٧}$

ويمكن بسهولة حل مسائل القسمة وذلك بتحويل العدد إلى الأساس ١٠ ثم نجرى عملية القسمة على هذا الأساس ، وفى النهاية نحول خارج القسمة من الأساس ١٠ إلى الأساس الذى كان عليه أساساً والمثال التالى يوضح ذلك :

◄ مثـــال (٢) :

اقسم ٧٥٣٢$_{٨}$ ÷ ٦$_{٨}$

نقوم بتحويل العددين ٧٥٣٢$_{٨}$ ، ٦$_{٨}$ إلى الأساس ١٠ كما سبق وعرفنا وباستخدام الجدول التالى : جدول (٤ ــ ١) .

الآحاد	$٨^{١}$ = ٨	$٨^{٢}$ = ٦٤	$٨^{٣}$ = ٥١٢	
٢ ٢	٣ ٢٤=٨×٣	٥ ٣٢٠=٦٤×٥	٧ ٣٥٨٤=٥١٢×٧	= ٣٩٣٠$_{١٠}$
٦$_{٨}$				= ٦$_{١٠}$

جـدول [٤ ــ ١]

وبذلك تصبح المسألة : ٣٩٣٠$_{١٠}$ ÷ ٦$_{١٠}$ = ٦٥٥$_{١٠}$

ثم نحول الإجابة ٦٥٥$_{١٠}$ إلى الأساس ٨ كما سبق :

∴ ٦٥٥$_{١٠}$ = ١٢١٧$_{٨}$

٨	٦٥٥		
٨	٨١	،	والباقي = ٧
٨	١٠	،	والباقي = ١
٨	١	،	والباقي = ٢
	صفر	،	والباقي = ١

$\therefore\ ٧٥٣٢_{٨} \div ٦_{٨} = ١٢١٧_{٨}$

[٤ ـ ٩] تمارين على القسمة :

أجر عمليات القسمة التالية :

(١) $١٣٢_{٦} \div ١٢_{٦} =$

(٢) $١٢١_{٥} \div ١٤_{٥} =$

(٣) $٣٢_{٤} \div ١٣_{٤} =$

(٤) $١١٠٠_{٢} \div ١١_{٢} =$

(٥) $١٢٠_{٣} \div ١٠_{٣} =$

أوجد ناتج قسمة ما يلي بالتحويل إلى الأعداد ذات الأساس ١٠ ثم إرجاع ناتج القسمة إلى الأساس الأصلي :

(٦) $١٢١٠_{٣} \div ٢٠_{٣}$ (٤٨ ÷ ٦)

(٧) $١٠٣٤_{٥} \div ١١_{٥}$ ١٤٤ ÷ ٦)

(٨) $١١١١٠_{٢} \div ١٠١_{٢}$ (٣٠ ÷ ٥)

(٩) $٣٤٠_{٦} \div ١٥_{٦}$

(١٠) $٢٣٤_{٨} \div ١٤_{٨}$