الفصل الثاني

علم الجبر عند البابليين

عرف السومريون والبابليون حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية والثالثة . ومن المسائل التي ظهرت في اللوحات التي حصل عليها علماء الآثار في منطقة بابل $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$ ، وكذلك $\frac{س}{٧} + \frac{ص}{١١} = ١$ ، $\frac{٦}{٧} س = \frac{١٠}{١١} ص$. كما أوجدوا ص + ٤س = ٢٨ ، س + ص = ١٠ . وقد حل الحاسب السومري هاتين المعادلتين بطريقة التعويض المباشر مثل ص = ١٠ − س .

$$\therefore ١٠ - س + ٤س = ٢٨ \Longleftarrow ٣س = ١٨ \Longleftarrow س = ٦ ،$$

أما ص = ١٠ − ٦ = ٤ .

كما أن أوتو نيكاباور (Otto Neugebarer) بلور في كتابه «العلوم الصرفية في القديم» (Exact Sciences in Antiquity) فكرة أن البابليين يعرفون تمام المعرفة المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الواحد $س^{٢} - ب س = جـ$ ،

وجذرها $س = \sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} + جـ} + \frac{ب}{٢}$.

$$\therefore س^{٢} - ب س = جـ$$

$$س^{٢} - ب س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = جـ + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} \Longleftarrow$$

$$\left(س - \frac{ب}{٢}\right)^{٢} = حـ + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$$

$$س - \frac{ب}{٢} = \sqrt{حـ + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}}$$

$$س = \sqrt{حـ + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}} + \frac{ب}{٢}$$

(١) مثال أوجد قيمة س للمعادلة $س^{٢} + ٢س = ٣$ بطريقة البابليين

الحل : $س^{٢} - ب\,س = حـ$

$\therefore - ب = ٢ \qquad ب = -٢$

$حـ = ٣$

ولكن $س = \sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}} + حـ + \frac{ب}{٢} = \sqrt{\left(\frac{-٢}{٢}\right)^{٢}} + ٣ - \frac{٢}{٢}$

$= \sqrt{١ + ٣} - ١ = ٢ - ١ = ١$

مثال (٢) : أوجد قيمة س للمعادلة $س^{٢} - ٣س = ٤$ بطريقة البابليين

الحل : بما أن س٢ - ب س = حـ

$\therefore - ب = - ٣ \Leftarrow ب = ٣$

$حـ = ٤$

وبما أن $س = \sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} + حـ} + \frac{ب}{٢}$

$$= \sqrt{\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} + ٤} + \frac{٣}{٢} = \sqrt{\frac{٩}{٤} + ٤} + \frac{٣}{٢}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٥}{٤}} + \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٢} + \frac{٣}{٢} = ٤$$

أما أورثر كيتلمان فيذكر في كتابه «تاريخ الرياضيات» أن البابليين مطلعين على المتطابقة $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$ ، وكذلك $(أ + ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$ واستعملوهما في كثير من المسائل الهندسية .

أما كارل بوير فيذكر في كتابه «تاريخ الرياضيات» أن علماء بابل كانوا على معرفة تامة في كل من :

(١) س٢ + ب س = حـ

(٢) س٢ = ب س + حـ

(٣) س٢ + حـ = ب س

وهذه المعادلات الثلاث أدّت دوراً كبيراً في علم الرياضيات خلال العصور الوسطى ، وتظهر واضحة وجلية في كتاب «الجبر والمقابلة» لمحمد ابن موسى الخوارزمي الذي سنقدمه قريباً .

ولم يهمل أبداً علماء بابل المعادلة من الدرجة الثالثة ، فهناك نوعان معروفان لدى علماء بابل هما : $س^{٣} = حـ$ وهذا النوع يحصلون على قيمة

(س) مباشرة من الجداول الرياضية البابلية التي عملت لـ :

$س^{٢} + س^{٣}$ ، ٢س ، $س^{٢} - س^{٣}$ ، $س + \frac{١}{س}$.

أما إذا كانت $أ\,س^{٣} + ب\,س^{٢} = حـ$ فإن البابليين استخدموا الطريقة الآتية :

ضربوا طرفي المعادلة $\frac{أ^{٢}}{ب^{٣}}$

$$\therefore \frac{أ^{٣}}{ب^{٣}} س^{٣} + \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}} س^{٢} = \frac{أ^{٢} حـ}{ب^{٣}}$$

وهذه الصورة القياسية . وعندما يحصلون عليها بطريقة التبسيط ، من السهولة بمكان إيجاد قيمة ($\frac{١}{ب}$ س) من الجداول الرياضية البابلية . كما أضاف كارل بوير في كتابه آنف الذكر أنه يشك أن علماء بابل كانوا على علم بالصيغة النموذجية $أ\,س^{٣} + ب\,س^{٢} + جـ\,س = د$. ولكنه في الوقت نفسه ذكر أن البابليين وصلوا إلى حل المعادلة $أ\,س^{٤} + ب\,س^{٢} = حـ$ ، $أ\,س^{٨} + ب\,س^{٤} = حـ$.

ويذكر هورد ايفز في كتاب «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» أنه اكتشف مؤخراً لوحات بابلية فيها جداول رياضية منها جدول المكعبات الآتية :

ن	$ن^{٢}$	$ن^{٣}$	$ن^{٢} + ن^{٣}$
١	١	١	٢
٢	٤	٨	١٢
٣	٩	٢٧	٣٦
٤	١٦	٦٤	٨٠
٥	٢٥	١٢٥	١٥٠
٦	٣٦	٢١٦	٢٥٢
٧	٤٩	٣٤٣	٣٩٢
٨	٦٤	٥١٢	٥٧٦
٩	٨١	٧٢٩	٩١٠
١٠	١٠٠	١٠٠٠	١١٠٠
١١	١٢١	١٣٣١	١٤٥٢
١٢	١٤٤	١٧٢٨	١٨٧٢
١٣	١٦٩	٢١٩٧	٢٣٦٦
١٤	١٩٦	٢٧٤٤	٢٩٤٠

لإيجاد حل للمعادلة التكعيبية $\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٣١٣٦$ = صفر .

إذن $(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}) + \text{س}^{٢} = (٥٦)^{٢}$

لو أخذنا الرقم ١٤ من الجدول وجدنا أنه يحقق الغرض .

إذن ٢٩٤٠ + ١٩٦= ٣١٣٦ وهو المطلوب .

ويذكر هورد ايفز أيضاً في كتابه المذكور أعلاه أن لوحات جامعة ييل تحتوي على مئات من المعادلات الآنية غير المحلولة مثل س ص = ٦٠٠ ، $١٥٠ (\text{س} - \text{ص}) - (\text{س} + \text{ص})^{٢} = -١٠٠٠$ ، وكــــذلــــك س ص = أ ،

$\frac{\text{ب س}^{٢}}{\text{ص}} + \frac{\text{حـ ص}^{٢}}{\text{س}} + \text{د} = ٠$ كما أضاف ايفز أن نيكاباور وجد من دراسته لإنتاج البابليين متواليتين هما :

(١) $١ + ٢ + ٢^{٢} + \ldots + ٢^{٩} = ٢^{٩} + ٢^{٩} - ١$

(٢) $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \ldots + ١٠^{٢} = ٥٥ \left[١\left(\frac{١}{٣}\right) + ١٠\left(\frac{٢}{٣}\right) \right] = ٣٨٥$.

وهذه حالة خاصة من الصيغة العامة . $= \frac{\text{ن}(\text{ن} + ١)(٢\text{ن} + ١)}{٦}$

لو أردنا تطبيق القانون في صيغته العامة :

إذا كانت ن = ١٠

$\therefore = \frac{\overset{٥}{\cancel{١٠}}\,(١١)\,\overset{٧}{\cancel{(٢١)}}}{\cancel{٢}\,\cancel{٣}} = ٣٥ \times ١١ = ٣١٥$

ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن البابليين عرفوا المعادلة الأسية مثل$(١+٠,٢٠)^{\text{س}} = ٢$. وتوجد هذه المسألة في اللوح المرقم (A06770) والمحفوظ في متحف

اللوفر والذي يعـود تاريخه إلـى (٢٠٠٠) قبـل الميلاد . والمعادلـة الأسية $(١ + ٠,٢٠)^{س} = ٢$ تدل على إيجاد الزمن الذي يأخذه مبلغ من المال ليضاعف نفسه بسعر فائدة ٢٠٪ . والمعروف أن المطلوب إيجاد قيمة س . كما يوجد مسألة هامة في لوح محفوظ في ستراسبورغ ومضمونها (مساحة تتكون من مجموع مربعين مقدارها ١٠٠٠ ، إذا كان ضلع أحد المربعين $\frac{٢}{٣}$ الآخر ناقصاً عشرة ، فما هما ضلعا المربعين) أي : $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠٠$ (١)

$س = \frac{٢}{٣} ص - ١٠$ (٢) بالتعـويض عـن س نجـد أن :

$$(\frac{٢}{٣} ص - ١٠)^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠٠ \Leftarrow \frac{٤}{٩} ص^{٢} - \frac{٤٠ص}{٣} + ١٠٠ + ص^{٢} = ١٠٠٠ \Leftarrow ١٣ص^{٢} - ١٢٠ص - ٨١٠٠ = صفر$$

وقد حل علماء بابل هذه المسألة ، فوجدوا أن ص = ٣٠ ، بينما س = ١٠ . لذا يجب أن لا نندهش عندما نرى أفكاراً رياضية متقدمة عند البابليين ، إذ إنهم حلوا المعادلة الأسية التي تعتبر من النظريات المتطورة في علم الرياضيات ، كما أنهم تميزوا عن غيرهم في اختزال الكسور المتماثلة وحذف الكمية المجهولة بالتعويض وإدخال كمية مجهولة مساعدة .

ويذكر هورد ايفز في كتابه «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» أن هناك مسائل في اللوحات البابلية (٣٠٠ قبل الميلاد) الموجودة في متحف اللوفر (A Louvre Tablet) تدل على طول باع علماء بابل في حل المعادلات الهندسية الجبرية ومنها على سبيل المثال مستطيل طول ضلعيه س ، ص ومساحته وحدة واحدة ، ونصف محيطه هو أ .

بما أن س ص = ١ (١)

س + ص = أ (٢) ، لأن محيط المستطيل = ٢ (س + ص)

من (١) ص = $\frac{١}{س}$ (٣)

من (٢) ، (٣) نجد أن س + $\frac{١}{س}$ = أ $\Leftarrow$ س^{٢} + ١ = أ س

إذن س^{٢} − أ س + ١ = صفر $\Leftarrow$ س^{٢} − أ س = −١

ولكن س^{٢} −ب س = جـ

∴ −ب = −أ $\Leftarrow$ ب = أ جـ = −١

ولكن س = $\sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} + حـ} + \frac{ب}{٢}$

$$= ب + \sqrt{\frac{ب^{٢} + ٤ حـ}{٢}}$$

$$س = \sqrt{\left(\frac{أ}{٢}\right)^{٢} - ١} + \frac{أ}{٢}$$

$$= \sqrt{\frac{أ^{٢}}{٤} - ١} + \frac{أ}{٢} = \frac{\sqrt{أ^{٢} - ٤}}{٢} + \frac{أ}{٢}$$

$$= + أ = \frac{\sqrt{أ^{٢} - ٤}}{٢}$$

لذا $\text{س} = \frac{\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^2 - ٤}}{٢}$ (٤)

من (٣) ، (٤) نجد أن $\text{ص} = \frac{٢}{\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^2 - ٤}}$

كما أضاف هورد ايفز أنهم استخدموا المتطابقة

$$\left[\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right]^2 = \left[\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right]^2 - \text{س ص}$$

$$\therefore \frac{\text{س}^2 + ٢\text{س ص} + \text{ص}^2}{٤} - \text{س ص}$$

$$\frac{\text{س}^2 + ٢\text{س ص} + \text{ص}^2}{٤} + \frac{٢\text{س ص}}{٤} - \frac{٦\,\text{س ص}}{٤}$$

$$\frac{\text{س}^2 + ٢\text{س ص} + \text{ص}^2}{٤} - \frac{٤\,\text{س ص}}{٤}$$

$$= \left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)^2 - \text{س ص}$$

لذا $\frac{(\text{س} - \text{ص})^2}{٤} = \frac{\text{أ}^2}{٤} - ١$ ، لأن $\text{س} + \text{ص} = \text{أ}$

ومنها $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} = \frac{\text{أ}}{٢} \Leftarrow \left[\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right]^2 = \frac{\text{أ}^2}{٤}$ ، $\text{س ص} = ١$

إذن $\frac{(\text{س} - \text{ص})^2}{٤} = \frac{\text{أ}^2 - ٤}{٤} \Leftarrow (\text{س} - \text{ص})^2 = \text{أ}^2 - ٤ \Leftarrow$

$$\text{س} - \text{ص} = \sqrt{\text{أ}^{٢} - ٤} \qquad (٥)$$

$$\text{ولكن س + ص = أ معطى} \qquad (٦)$$

من (٥) ، (٦) ينتج أن $٢\text{س} = \text{أ} + \sqrt{\text{أ}^{٢} - ٤}$

إذن $\text{س} = \dfrac{\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^{٢} - ٤}}{٢}$

من (٣) نجد أن $\text{ص} = \dfrac{٢}{\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^{٢} - ٤}}$

ونوه كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما المذكور أعلاه أن البابليين كانوا على علم في الإشارات التالية + × + = + ، − × − = + ، + × − = − × + = − . كما عرف البابليون العلاقة الآتية :

$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ٤^{٣} + \ldots + \text{ن}^{٣} = (١ + ٢ + ٣ + \ldots \text{ن})^{٢}$. وهذه حالة خاصة من الصيغة العامة $= \dfrac{\text{ن}^{٢}(\text{ن} + ١)^{٢}}{٤}$. والجدير بالذكر أن الإشارات السالبة والموجبة لم ترد في مؤلفات الأوروبيين إلا في القرن الثالث عشر الميلادي ، لأول مرة في كتابات ليوناردو أوف بيزا . وللمقارنة :

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ٤^{٣} = (١ + ٢ + ٣ + ٤)^{٢} = (١٠)^{٢} = ١٠٠$$

أو $\dfrac{٤^{٢}(٥)^{٢}}{٤} = \dfrac{\cancel{١٦}^{\,٤}(٢٥)}{\cancel{٤}} = ١٠٠$

كما أورد هورد ايفز أيضاً في كتابه المذكور أعلاه أن علماء بابل حلوا وبكل جدارة المسائل ذات الثلاثة مجاهيل والتي يعود تاريخها إلى حوالي (١٨٠٠) قبل الميلاد وهي :

$$\text{س ص ع} + \text{س ص} = \frac{٧}{٦} \quad (١) \text{ ،}$$

$$\text{ص} = \frac{٢}{٣}\,\text{س} \quad (٢) \text{ ،}$$

$$\text{ع} = ١٢ \quad (٣) \text{ ،}$$

بالتعويض عن ص ،ع في المعادلة (١) : $\text{س}\,(١٢\,\text{س})\,(\frac{٢}{٣}\,\text{س}) + \text{س}\,(\frac{٢}{٣}\,\text{س}) = \frac{٧}{٦}$

$$\therefore\ ٨\,\text{س}^{٣} + \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{٢} = \frac{٧}{٦}$$

فرضوا أن $\text{س} = \frac{١}{٢}$ ، لذا $٨\,(\frac{١}{٢})^{٣} + \frac{٢}{٣}\,(\frac{١}{٢})^{٢} = ١ + \frac{١}{٦} = \frac{٧}{٦}$

$$\text{و ص} = \frac{٢}{٣}\,(\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٣}$$

$$\text{ع} = ١٢\,(\frac{١}{٢}) = ٦$$

ومن ذلك نستخلص أن السومريين والبابليين كانوا على دراية وافية بعلم الجبر ، فقد حلوا كثيراً من المعادلات الآنية ذات المجهولين ، وكذلك المعادلات الآنية ذات ثلاثة مجاهيل ، ووضعوا أسس وقواعد لحلولهم هذه المسائل المهمة . ولا ننسى أنهم تميزوا في حلولهم للمعادلات التكعيبية والأسية . كما أنهم تعاملوا مع الأرقام السالبة ، ووضعوا قوانين لها . وبذلك أحرز البابليون تفوقاً عظيماً في علمي الجبر والحساب ، ولكنهم تميزوا في علم الجبر ، حيث كانت أفكارهم وتأملاتهم في هذا المجال يتناقلها المؤرخون للعلوم عبر التاريخ ، وقد نوه محمد موسى الخوارزمي عن دور علماء بابل في ميدان الجبر ومدحهم لهذا العمل المهم .