الفصل التاسع

المعادلة الخطية من المرتبة الثانية

١ – المعادلة الخطية ذات أمثال ثابتة : إن الطرق التي اوردناها في الفصل السابق من اجل ايجاد حل خاص للمعادلة الخطية بصورة عامة تطبق تماماً على المعادلة الخطية من المرتبة الثانية التي نرمز لها بالشكل :

$$y'' + A\, y' + B\, y' = D\,(x)$$

ولكن من أجل بعض الحالات الخاصة للطرف الثاني يمكننا استعمال طرق اكثر مباشرة وأسهل تطبيقاً من الحالات التالية :

آ – الطرف الثاني كثير حدود : إذا كان $B \neq o$ وكان الطرف الثاني كثير حدود من الدرجة n ، فان للمعادلة المذكورة حلاً خاصاً مؤلفاً من كثير حدود قوته تساوي قوة كثير حدود الطرف الثاني. نعين امثال الحل الخاص بطريقة الأمثال غير المعينة .

اذا كان $A \neq o\,,\ B = o$ فاننا نفتش عن حل من الشكل $x\,P\,(x)$ حيث $P\,(x)$ كثير حدود من الدرجة n .

واذا كان $A = o\,,\ B = o$ فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل $x^2\,P(x)$.

ب – الطرف الثاني تابع أسي من الشكل αe^{ax}: اذا رمزنا بـ $\varphi(\rho)$ للمعادلة المميزة:

$$\varphi\,(\rho) = \rho^2 + A\,\rho + B$$

فاذا كان $\varphi\,(a) \neq o$ فان $y = \dfrac{\alpha e^{ax}}{\varphi(a)}$ حل خاص للمعادلة المفروضة .

أما اذا كان $\varphi\,(a) = o$ و $\varphi'\,(a) \neq o$ فان $y = \dfrac{\alpha\, x\, e^{ax}}{\varphi'(a)}$ حل خاص للمعادلة المفروضة .

اما إذا كان $\varphi(a) = o$ ، $\varphi'(a) = o$ فان $y = \frac{\alpha x^2 e^{ax}}{\varphi''(a)}$ حل خاص للمعادلة المفروضة .

حـ – الطرف الثـــاني مؤلف من تركيب مثلثي من الشكل :

$\alpha \cos \gamma x + \beta \sin \gamma x$: فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل :

$y = \lambda \cos \gamma x + \mu \sin \gamma x$.

وذلك اذا لم يكن الطرف الثاني للمعادلة التامة حلّاً خاصاً للمعادلة بدون طرف ثان .

أما اذا كان الطرف الثاني $\alpha \cos \gamma x + \beta \sin \gamma x$ حلّاً خاصاً للمعادلة المتجانسة فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل : $x (\lambda \cos \gamma x + \mu \sin \gamma x)$

د – الطرف الثاني مؤلف من جداء كثير حدود بتابع أسي $G(x) e^{ax}$:

إذا لم يكن a جذراً للعادلة المميزة فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل .

$$y = P(x) e^{ax}$$

حيث $P(x)$ كثير حدود من درجة $G(x)$.

أما اذا كان a جذراً بسيطاً للمعادلة المميزة فاننا نفتش عن حـــل من الشكل :

$$y = x P(x) e^{ax}$$

واذا كان a جذراً مضاعفاً لهـــذا المعادلة فاننا نفتش عن حل من الشكل

$$y = x^2 P(x) e^{ax} .$$

هـ – الطرف الثاني من الشكل : $e^{ay}(\alpha \cos \gamma x + \beta \sin \gamma x)$

يمكن إعادة هذه الحالة الى الحالة (ب) وذلك تطبيقاً لدساتير اولر :

$$\sin \gamma x = \frac{e^{i\gamma x} - e^{-i\gamma x}}{2i} \quad \cdot \quad \cos \gamma x = \frac{e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}}{2}$$

و – الطرف الثاني تركيب من الشكل : $P(x) \cos \gamma x$ او $P_1(x) \sin \gamma x$ حيث $P(x)$ كثير حدود: نفتش عن حل خاص للمعادلة المفروضة من الشكل : $Q(x) \cos \gamma x + Q_1(x) \sin \gamma x$ حيث $Q(x)$ ، $Q_1(x)$ كثيراً حدود من درجة $P(x)$ هذا إذا لم يكن γi جذراً للمعادلة المميزة أما اذا كان جذراً بسيطاً فاننا

نفتش عن حل خاص من الشكل : $x [Q (x) \cos \gamma x + Q_1 (x) \sin \gamma x)]$
ومن الشكل :

$$x^2 [Q (x) \cos \gamma x + Q_1 (x) \sin \gamma x]$$

اذا كان $i\gamma$ جذراً مضاعفاً .

٢ ـ المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات الامثال المتحولة:

لايوجد طريقة عامة لحل المعادلة التفاضلية الخطية ذات الامثال المتحولة ولقد اوردنا في الفصلين(٧ ، ٨) بعض القواعدالتي تطبق على أنواع معينة من المعادلات الخطية وسنورد فيما يلي طرائق لحل بعض الحالات الخاصة من المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التي نرمز لها ب :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R (x) \frac{dy}{dx} + S (x) y = Q(x) \qquad (1)$$

٣ ـ تغيير التابع لنعتبر $y = u v$ حيث كل من u و v تابعان للمتحول x فيكون :

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} , \frac{d^2y}{dx^2} = u \frac{d^2v}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} + v \frac{d^2u}{dx^2}$$

إذا حللنا هذه القيم في المعادلة (١) فانها تأخذ الشكل :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + R_1 (x) \frac{dv}{dx} + S_1 (x) v = Q_1(x) \qquad (2)$$

حيث :

$$Q_1 (x) = \frac{Q (x)}{u} \quad , \quad S_1 (x) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} + R (x) \frac{du}{dx} + S(x) . u \right\}$$

$$R_1 (x) = \frac{2}{u} \frac{du}{dx} + R(x)$$

آ ـ اذا كان u حلا خاصاً للمعادلة المتجانسة يكون $S_1 = o$ والمعادلة (٢)لاتحوي التابع v فيمكن عندها خفض مرتبتها وحلها .

ب ـ إذا كان $R_1 (x) = o$ ومنه

$$\frac{du}{u} = - \frac{1}{2} R (x) dx \qquad و \qquad u = e^{- \frac{1}{2} \int R(x) dx}$$

واذا كان فوق ذلك $S_1(x) = A$ من اجل قيمة u الذي حسبناها فان المعادلة (٢) تنقلب الى معادلة ذات امثال ثابتة :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + A\,v = \frac{Q}{u}$$

اما اذا كان $S_1(x) = \frac{A}{x^2}$ فان المعادلة تأخذ شكل معادلة كوشي .

$$x^2 \frac{d^2v}{dx^2} + A\,v = \frac{Q\,x^2}{u}$$

٤ ـ **تغيير المتحول** : لنفرض $t = \varphi(x)$ فيكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2t}{dx^2}$$

وتأخذ المعادلة (١) الشكل التالي :

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2t}{dx^2} + R\frac{dt}{dx}\right)\frac{dy}{dt} + S\,y = Q \qquad (3)$$

لنختار التابع بحيث يكون $\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{\pm S}{a^2}}$ وإذا نتج عن ذلك ان :

$$\frac{\frac{d^2t}{dx^2} + R\frac{dt}{dx}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2} = A$$

فان المعادلة ٣ تصبح ذات امثال ثابتة يمكن حلها .

تمارين محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية :

٣٧٣ ـ $y'' - 4\,y' = 5$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة هما $(0\,,\,4)$ فيكون الحل العام

للمعادلة المتجانسة هو : $y_1 = c_1 + c_2 e^{+4x}$ وبما ان الطرف الثاني كثير حدود من الدرجة صفر والمعادلة لاتحوي الحد $B y$ فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = \alpha x \quad ، \quad y_2' = \alpha \quad ، \quad y_2'' = 0$$

ويكون $-4\alpha = 5$ ، $\alpha = -\frac{5}{4}$ ، $y_2 = -\frac{5}{4} x$

والحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = c_1 + c_2 e^{+4x} - \frac{5}{4} x$$

٣٧٤ - $y'' - 6y' + 13y = 0$ (1)

الحل إنها معادلة خطية متجانسة معادلتها المميزة .

$\varrho^2 - 6\varrho + 13 = 0$ جذراها $\varrho = 3 \pm 2i$

الحل العام للمعادلة (1) : $y = e^{3x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

٣٧٥ - $2y'' + 5y' + 2y = 0$

الحل : المعادلة المميزة $2\varrho^2 + 5\varrho + 2 = 0$ جذراها $(-\frac{1}{2} , -2)$

الحل العام للمعادلة المفروضة $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

٣٧٦ - $y'' + 4y = 0$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 + 4 = 0$ جذراها $\varrho = \pm 2i$

الحل العام للمعادلة المفروضة $y = A \cos 2x + B \sin 2x$

٣٧٧ - $y'' - 2y' + 10y = 0$

الحل : المعادلة المميزة : $\varrho^2 - 2\varrho + 10 = 0$ ، جذراها $\varrho = 1 \pm 3i$

الحل العام للمعادلة المفروضة : $y = e^{x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

٣٧٨ - $y'' + 2y' - 15y = 0$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 + 2\varrho - 15 = 0$ ، جذراها $(-5 , 3)$.

الحل العام للمعادلة المفروضة : $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}$

٣٧٩ - $y'' + 6y' + 9y = 0$.

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 + 6\varrho + 9 = 0$ لها جذر مضاعف (-3)

الحل العام للمعادلة المفروضة : $(c_1 + c_2 x) e^{-3x}$

٣٨٠ - $y'' - 4y' + 13y = 0$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 - 4\varrho + 13 = 0$ جذراها $\varrho = 2 \pm 3i$

الحل العام للمعادلة المفروضة : $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

٣٨١ - $y'' + 25y = 0$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 + 25 = 0$ ، جذراها $\varrho = \pm 5i$

حل المعادلة المفروضة : $y = A \cos 5x + B \sin 5x$

٣٨٢ - $y'' - 3y' + 2y = e^x$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 - 3\varrho + 2 = 0$ ، الجذران $(1, 2)$

الحل العام للمعادلة المتجانسة : $y_1 = c_1 c^x + c_2 e^{2x}$

إن الطرف الثاني من المعادلة المفروضة حل للمعادلة المتجانسة لذا نفتش عن حل خاص من الشكل : $\lambda x e^x$ وهو :

$$\frac{x e^x}{\varphi'(a)}$$

حيث $\varphi(\varrho) = \varrho^2 - 3\varrho + 2$ ، $\varphi'(\varrho) = 2\varrho - 3$

$\varphi'(a) = \varphi'(1) = -1$

والحل الخاص هو $y_2 = -x e^x$ ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x$$

٣٨٣ - $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 - 3\varrho + 2 = 0$ ، الجذران (1 , 2)

الحل العام للمعادلة المميزة $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

إن الطرف الثاني لا يساوي أحد جذري المعادلة المفروضة لذا نفتش عن حل خاص من الشكل λe^{5x} وهو :

$$y_2 = \frac{e^{5x}}{\varphi(5)} = \frac{1}{12} e^{5x}$$

ويكون الحل العام : $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$

٣٨٤ - $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة هما (4 - , 1 -) ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$$

نفتش عن حل خاص للمعادلة التامة من شكل الطرف الثاني اي كثير حدود من الدرجة الاولى .

$$y'' = 0 \qquad y' = a \qquad y = ax + b$$

نحمل هذه القيم في المعادلة المفروضة فنجد :

$$5a + 4(ax + b) \equiv 3 - 2x$$

$$4ax + 5a + 4b \equiv 3 - 2x$$

ومنه : $4a = -2$ ، $a = -\frac{1}{2}$

$5a + 4b = 3$ ، $\frac{-5}{2} + 4b = 3$ $\qquad b = \frac{11}{8}$

ويكون الحل الخاص للمعادلة التامة $y_2 = \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x$ والحل العام لها هو :

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$$

٣٨٥ - $y'' + 9y = x \cos x$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة هما $\pm 3i$ فيكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

نكتب الطرف الثاني من المعادلة المفروضة بالشكل

$$x \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} x e^{ix} + \frac{1}{2} x e^{-ix}$$

ونفتش من اجل الحد الاول عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = (ax + b) e^{ix}$$

كما نفتش من اجل الحد الثاني عن حل خاص من الشكل :

$$y_3 = (\alpha x + \beta) e^{-ix}$$

ونتابع العمل كما أجريناه سابقاً فنجد بطريقة الأمثال غير المعينة الأعداد (a, b, α, β).

يمكن أن نطرق السؤال مباشرة ونفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = (ax + b) \cos x + (\alpha x + \beta) \sin x$$
$$y'_2 = a \cos x + \alpha \sin x - (ax + b) \sin x + (\alpha x + \beta) \cos x$$
$$y''_2 = -2a \sin x + 2\alpha \cos x - (ax + b) \cos x - (\alpha x + \beta) \sin x$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$(8ax + 8b + 2\alpha) \cos x + (8\alpha x + 8\beta - 2a) \sin x \equiv x \cos x$$

إذا طابقنا بين الطرفين وكتبنا إن الحدود المتشابهة في الطرفين أمثالها واحدة نجد :

$\alpha = 0$ ، $b = 0$ ، $a = \frac{1}{8}$ ، $\beta = \frac{1}{32}$ ويكون الحل الخاص المطلوب هو

$$y = \frac{x \cos x}{8} + \frac{\sin x}{32}$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$y = \frac{\cdot}{8} x \cos x + \frac{1}{32} \sin x + c_1 \cos 3 x + e_2 \sin x \cdot$$

٣٨٦ - $\quad y'' + 4 y = 2 \cos x \cos 3 x \quad (1)$

الحل : إن الحل العام للمعادلة بلا طرف ثان هو :

$$y_1 = c_1 \cos 2 x + c_2 \sin 2 x$$

قبل ان نفتش عن حل خاص للمعادلة التامة (١) لنضع الطرف الثاني بشكل مجموع تابعين مثلثين لأنه استناداً إلى دساتير التحويل يمكننا ان نكتب :

$$2 \cos x \cos 3 x = \cos 2 x + \cos 4 x$$

وتأخذ عندها المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$y'' + 4 y = \cos 2 x + \cos 4 x \quad (2)$$

يتألف الطرف الثاني من مجموع تابعين اولهما $\cos 2 x$ ، حل خاص المعادلة المتجانسة .

لإيجاد حل خاص للمعادلة التامة نفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = x (A \cos 2 x + B \sin 2 x)$$

للمعادلة : $\quad y'' + 4 y = \cos 2 x \quad (3)$

ثم نفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = \alpha \cos 4 x + \beta \sin 4 x$$

للمعادلة $\quad y'' + 4 y = \cos 4 x \quad (4)$

ويكون مجموع هذين الحلين $y_4 = y_2 + y_3$ حل خاص للمعادلة التامة :

$$y_2 = x (A \cos 2 x + B \sin 2 x)$$

$$y_2' = A \cos 2 x + B \sin 2 x + x (- 2 A \sin 2 x + 2 B \cos 2 x)$$

$$y_2'' = - 4 A \sin 2 x + 4 B \cos 2 x - x (4 A \cos 2 x + 4 B \sin 2 x)$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (٣) فاننا نجد :

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x \equiv \cos 2x$$

ونجد بالمطابقة بين الحدود المتشابهة في الطرفين ان : $A = 0$ ، $B = \frac{1}{4}$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (٣) :

$$y_2 = \frac{1}{4} x \sin 2x$$

ونجد بالطريقة ذاتها $y_3 = \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$

$$y_3' = -4\alpha \sin 4x + 4\beta \cos 4x$$

$$y_3'' = -16\alpha \cos 4x - 16\beta \sin 4x$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (٤) فاننا نجد :

$$-12\alpha \cos 4x - 12\beta \sin 4x \equiv \cos 4x$$

ومنه $\beta = 0$ $\alpha = -\frac{1}{12}$ ويكون الحل الخاص للمعادلة(٤) :

$$y_3 = -\frac{1}{12}\cos 4x$$

والحل الخاص للمعادلة التامة :

$$y_4 = y_2 + y_3 = \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{12}\cos 4x$$

أما الحل العام للمعادلة التامة فهو :

$$y = y_1 + y_4 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{12}\cos 4x$$

٣٨٧ - $y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة لهذه المعادلة هما $(1, -2)$ فيكون الحل العام للمعادلة المتجانسة :

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

لايجاد الحل الخاص للمعادلة التامة نفتش عن حل لها من شكل الطرف الثاني أي كثير حدود من الدرجة الثانية :

$$\begin{array}{r|l} -2 & y_2 = a x^2 + b x + c \\ 1 & y_2' = 2 a x + b \\ 1 & y_2'' = 2 a \end{array}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$-2 a x^2 + (2a - 2b) x + 2a + b - 2c \equiv -2x^2 + 2x + 2$$

ونستنتج بعد المطابقة بين الحدود المشابهة ان :

$a = 1$ ، $2a - 2b = 2$ ، $b = o$ ، $2a + b - 2c = 2$ ، $c = o$

ويكون : $y_2 = x^2$

ويكون الحل العام للمعادلة التامة : $y = y_1 + y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + x^2$

٣٨٨ - $y'' - 2y' + y = e^x$

إن للمعادلة المميزة : $\varrho^2 - 2\varrho + 1 = o$ جذر مضاعف : $\varrho = 1$

فيكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_1 = (c_1 + c_2 x) e^x$$

ونلاحظ أن الطرف الثاني هو e^x وان عامل x في اس e^x هو الواحد وهو جذر مضاعف المعادلة المميزة لذا نفتش عن حل من الشكل :

$$y = \alpha x^2 e^x$$

فيكون : $y' = \alpha (x^2 + 2x) e^x$, $y'' = \alpha (x^2 + 4x + 2) e^x$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$e^x [\alpha - 2\alpha + \alpha) x^2 + (4\alpha - 4\alpha) x + 2\alpha] = e^x$$

او $2\alpha = 1$ ومنه $\alpha = \frac{1}{2}$

ويكون الحل الخاص للمعادلة التامة : $y_2 = \frac{1}{2} x^2 e^x$

والحل العام لها هو : $y = (c_1 + c_2 x) e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$

٣٨٩ — $y'' - 4y = \operatorname{sh} 2x$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة وهي $(2\,,+2\,-)$ والحل العـــام للمعادلة المتجانسة هو : $y_1 = c_1 e^{2x} + e_2 c^{-2x}$.

يمكن كتابة المعادلة المفروضة بالشكل $y'' - 4y = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$.

إن الطرف الثاني من هذه المعادلة يتألف من مجموع حدين كل منهما حل للمعادلة بلا طرف ثانٍ ، نفتش إذن عن حل خاص المعادلة التامة من الشكل :

$$y_2 = \alpha x e^{2x} + \beta x e^{-2x}$$

ويكون : $y'_2 = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x} + (2\alpha e^{2x} - 2\beta e^{-2x})x$

$$y'' = 4\alpha e^{2x} - 4\beta e^{-2x} + (4\alpha e^{2x} + 4\beta e^{-2x})x$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$4\alpha e^{2x} - 4\beta e^{-2x} \equiv \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

ونجد بنتيجة المطابقة بين طرفي هذه العلاقة أن : $\alpha = \frac{1}{8}$ ، $\beta = \frac{1}{8}$

ويكون الحل الخاص للمعادلة المفروضة: $y_2 = \frac{x}{8}(e^{2x} + e^{-2x}) = \frac{x}{4} \operatorname{ch} 2x$

والحل العام للمعادلة التامة :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{x}{4} \operatorname{ch} 2x$$

ويمكن كتابة هذا الحل بالشكل :

$$y = \left(A + \frac{x}{4}\right) \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x$$

٣٩٠ — $y'' - \frac{3y'}{x} + \frac{3y}{x^2} = 2x - 1$

الحل : إن هذه المعادلة خطية ذات امثال متحولة ولو اعتبرناها متجانسة

بالنسبة للتابع ومشتقاته واجرينا التحويل $z = \frac{y'}{y}$ لانقلبت الى معادلة من المرتبة الاولى ومن نوع ريكاتي لا يمكن حلها إذا لم نعلم حلاً خاصاً لها .

نطبق على هذه المعادلة القواعد التي اوردناها في مطلع هذا الفصل ونجد أن x حل خاص لهذه المعادلة بدون طرف ثان .فاذا فرضنا $u = x$ وغيرنا التابع بالشكل $y = x\,v$ فاننا نحصل على المعادلة :

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = 2 - \frac{1}{x}$$

وهي معادلة لا تحوي التابع v يمكن حلها بفرض $p = \frac{dv}{dx}$ ونجد المعادلة الخطية من المرتبة الاولى :

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}\,p = 2 - \frac{1}{x}$$

حلها العام : $$p = \frac{dv}{dx} = 2\,x \log x + 1 + c\,x$$

ومنه :

$$v = \frac{y}{x} = \int (2\,x \log x + 1 + c\,x)\,dx = x^2 \log x + x + c_1 x^2 + c_2$$

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة المفروضة بالشكل :

$$y = c_1 x^3 + c_2 x + x^3 \log x + x^2$$

٣٩١ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) y = x\,e^x$$

الحل : يلاحظ أن : $$(2) \qquad R = -\frac{2}{x}, S = 1 + \frac{2}{x^2}$$

وإذا فرضنا : $$(3) \qquad \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} R\,d\,x \quad \text{أو} \quad \frac{2}{u}\frac{du}{dx} + R = 0$$

نجد : $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{2} R \frac{du}{dx} - \frac{1}{2} u \frac{dR}{dx}$

وينتج عن ذلك : $S_1 = S + \frac{R}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} = S + \frac{R}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx}$

أو
$$S_1 = S - \frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx} \qquad (4)$$

بعد أن بدلنا $\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$ بـ $-\frac{1}{2} R$.

إذا ادخلنا القيم (١) في العلاقة (٤) نجد :

$$S - \frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx} = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}\,\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x^2} = 1$$

وتستخرج من العلاقة (٣) $\log u = -\frac{1}{2}\int R\,dx = \int \frac{dx}{x}$ أو $u = x$

لنجري الآن تغيير التابع المعرف بالعلاقة $y = xz$ فيكون :

$$y' = x z' + z \quad , \quad y'' = x z'' + 2z'$$

وتأخذ عندها المعادلة المفروضة (١) الشكل الخطي ذا الامثال الثابتة :

$$z'' + z = e^x$$

إن الحل العام لهذه المعادلة هو .

$$z = \frac{y}{x} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

ومنه
$$y = x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{2} x e^x$$

٣٩٢ - حل المعادلة التفاضلية : $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 2x - 1 \qquad (1)$

لنحسب قيمة التركيب :

$$S - \frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx} = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{4x^2} - \frac{3}{2x^2} = \frac{-3}{4x^2}$$

ثم لنحسب u من العلاقة : $\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} R\, dx$ فنجد

$$\log u = -\frac{1}{2} \times -3 \int \frac{dx}{x} = \frac{3}{2} \log x , \qquad u = x^{\frac{3}{2}}$$

لنجري بعد ذلك تغيير التابع المعرف بالعلاقة $y = z\, x^{\frac{3}{2}}$ فنجد :

$$y' = z' \, x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} z\, x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad y'' - z'' x^{\frac{3}{2}} + 3 z' \, x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} z\, x^{-\frac{1}{2}}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (١) فاننا نجد :

$$x^{\frac{3}{2}} z'' - \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} z = 2x - 1$$

وإذا ضربنا طرفي هذه المعادلة بـ $x^{\frac{1}{2}}$ فاننا نحصل على معادلة كوشي :

$$x^2 z'' - \frac{3}{4} z = (2x - 1)\sqrt{x} \qquad (2)$$

لحل هذه المعادلة نغير المتحول حسب العلاقة $x = e^t$ فنجد :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dz}{dt} \quad , \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right)$$

وتأخذ المعادلة (٢) ، بعد أن نضع فيها هذه القيم ، الشكل :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} - \frac{3}{4} z = (2x - 1)\sqrt{x}$$

إن الحل العام للمعادلة بدون طرف ثان هو :

$$z_1 = c_1 e^{-\frac{1}{2} t} + c_2 e^{-\frac{3}{2} t}$$

ونجد بطريقة تحويل الثوابت الحل الخاص للمعادلة التامة :

$$z_2 = t\, e^{\frac{3}{2} t} + e^{\frac{1}{2} t}$$

ويكون اخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = c_1 x + c_2 x^3 + x^3 \log x + x^2$$

٣٩٣ - $y'' - (1 + 4e^x) y' + 3e^{2x} y = e^{2(x+e^x)}$

لحل هذه المعادلة نتبـع الطرق التالية :

الطريقة الاولى : نحل المعادلة بدون طرف ثان على أنها متجانسة بالنسبة للتابـع y ومشتقاته ونفرض :

$$y' = zy \quad , \quad y'' = z'y + zy' = y(z' + z^2)$$

فنأخذ المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$z' + z^2 - (1 + 4e^x) z + 3e^{2x} = 0$$

وهي معادلة من نوع ريكاتي تقبل الحل الخاص e^x . لحلهـا نبدل التابـع حسب العلاقة $z = t + e^x$

فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$t' + t^2 - t(1 + 2e^x) = 0$$

وهي معادلة من نوع بيرنوئي يمكن كتابتها بالشكل :

$$-\frac{t'}{t^2} + \frac{1 + 2e^x}{t} = 1$$

واذا فرضنا $\eta = \frac{1}{t}$ فانها تأخذ الشكل الخطي :

$$\eta' + (1 + 2e^x)\eta = 1$$

حلها العام

$$\eta = \frac{1}{2} e^{-x} + \lambda e^{-x-2e^x}$$

$$z = t + e^x = \frac{1}{\eta} + e^x = \frac{2e^x}{1 + 2\lambda e^{-2x}} + e^x$$

ومنه :

$$\frac{y'}{y} = \frac{3 + 2\lambda e^{-2e^x}}{1 + 2\lambda e^{-2e^x}} e^x$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{-4\,\lambda e^{-2e^x}\,e^x\,dx}{1+2\lambda e^{-2e^x}}+\frac{3+6\,\lambda\,e^{-2e^x}}{1+2\,\lambda\,e^{-2e^x}}\,e^x\,dx$$

$$\log y=\log\left(1+2\,\lambda\,e^{-2e^x}\right)+3\,e^x+\log\mu$$

ومنه
$$y=\mu\,e^{3e^x}\left(1+2\,\lambda\,e^{-2e^x}\right)=\mu\,e^{3e^x}+2\,\mu\,\lambda\,e^{e^x}$$

إذا فرضنا $c_1=2\,\mu\,\lambda$ ، $c_2=\mu$ يكون :

$$y=c_1\,e^{e^x}+c_2\,e^{3e^x}$$

وهو الحل الخاص للمعادلة المفروضة بدون طرف ثان ولايجاد الحل العام نطبق طريقة تحويل الثوابت الاختيارية فنحصل على المعادلتين الجبريتين الخطيتين بالنسبة لـ c_1' ، c_2' :

$$c_1'+c_2'\,e^{2e^x}=0$$

$$c_1'+\;3c_2'\,e^{2e^x}=e^x\cdot e^{2e^x}$$

ومنه
$$c_2=\frac{1}{2}\int e^x\cdot\,e^{-e^x}\,dx=\frac{-1}{2}\,e^{-e^x}+\lambda_2$$

$$c_1=\frac{-1}{2}\int e^x\,e^{e^x}\,dx=\frac{-1}{2}\,e^{-e^x}+\lambda_1$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة .

$$y=e^{e^x}\left(-\frac{1}{2}\,e^{e^x}+\lambda_1\right)+e^{3e^x}\left(\frac{-1}{2}\,e^{-e^x}+\lambda_2\right)$$

$$y=\lambda_1\,e^{e^x}+\lambda_2\,e^{3e^x}-e^{3e^x}$$

الطريقة الثانية : نلاحظ أن $R=(1+4\,e^x)$ ، $S=3\,e^{2x}$

إذا شكلنا التركيب $S-\frac{1}{4}R^2-\frac{1}{2}\frac{dR}{dx}$ فان قيمة هذا التركيب لن تكون مساوية لعدد ثابت أو لحد من الشكل A/x^2 لذا نفرض :

$$\frac{dt}{dx}=\sqrt{\frac{S}{a^2}}=\sqrt{\frac{3e^{2x}}{3}}=e^x$$

حيث أعتبرنا $a^2 = 3$ ثم نحسب التركيب

$$\frac{\dfrac{d^2t}{dx^2}+R\dfrac{dt}{dx}}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2}=\frac{e^x-(1+4e^x)}{e^{2x}}=-4=A$$

بما أن هذا التركيب يساوي مقداراً ثابتاً فانه لو اتخذنا متحولاً جديداً t معرفاً بالعلاقة $t = e^x$ فان المعادلة المفروضة ستصبح ذات امثال ثابتة :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}e^{2x}+\frac{dy}{dt}e^x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}e^{2x}+\frac{dy}{dt}e^x-(1+4e^x)\frac{dy}{dt}e^x+3e^{2x}y=e^{2(x+e^x)}$$

وبعد الاختصار على e^{2x} تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+3y=e^{2t}$$

وهي معادلة خطية ذات امثال ثابتة .

الحل العام للمعادلة بلا طرف ثان هو :

$$y_1 = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

ويبرهن بسهولة ان للمعادلة التامة الحل الخاص $-e^{2t}$ ونجد من جديد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = c_1 e^{e^x} + c_2 e^{3e^x} - e^{2e^x}$$

تمارين للحل

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من الاجوبة المرافقة :

٣٩٤ - $z'' - 13z' + 12z = 36$ ج : $z = 3 + A e^{x} + B e^{12x}$

٣٩٥ - $y'' + 4y = -10 \sin 3x$

ج : $y = 2 \sin 3x + A \cos 2x + B \sin 2x$

٣٩٦ - $z'' + 13z' + 42z = 112 e^{x}$

ج : $z = 2 e^{x} + c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-7x}$

٣٩٧ - $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 60 e^{-t}$

ج : $s = 6 e^{-t} + c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$

٣٩٨ - $\frac{d^2\varrho}{d\Theta^2} + \varrho = 12 \sin 2\Theta$

ج : $\varrho = -4 \sin 2\Theta + c_1 \cos \Theta + c_2 \sin \Theta$

٣٩٩ - $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{4\,dz}{dt} + 3z = 8 \cos t - 6 \sin t$

ج : $z = 2 \cos t + \sin t + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

٤٠٠ - $y'' + 5y' + 6y = 12$ ج : $y = 2 + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

٤٠١ - $z'' + 2z' + 5z = 80 e^{3x}$

ج : $z = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 4 e^{3x}$

٤٠٢ - $z'' + 2z' + 37z = 30 e^{7x}$

ج : $z = 0{,}3 e^{7x} + e^{-x} (c_1 \cos 6x + c_2 \sin 6x)$

٤٠٣ - $z'' + 9z = 40 \sin 5x$

ج : $z = -\frac{5}{2} \sin 5x + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

٤٠٤ — $y'' - 8y' - 9y = 40 \sin 5x$

ج : $y = \frac{25}{29} \cos 5x - \frac{10}{29} \sin 5x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{9x}$

٤٠٥ — $z'' + 8z' + 25z = 50$

ج : $z = 2 + e^{-4x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

٤٠٦ — $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} (x^2 + x)$

ج : $y = \frac{1}{2} e^{3x} (x^2 - 2x + 2) + c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

٤٠٧ — $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + x e^{-x}$

ج : $y = - e^{-x} \cos x + \frac{1}{6} x^3 e^{-x} + e^{-x} (c_1 + c_2 x)$

٤٠٨ — $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

ج : $y = \frac{1}{74} (5 \sin x + 7 \cos x) + c_1 e^{x} + e_2 e^{6x}$

٤٠٩ — $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x} + e^{x}$

ج : $y = \frac{1}{2} x^2 e^{x} + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x + e^{x} (c_1 + c_2 x)$

٤١٠ — $y'' + y = 2 \sin x \sin 2x$

ج : $y = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{8} \cos 3x + A \cos x + B \sin x$

٤١١ — $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + x e^{-x}$

ج : $y = \frac{1}{2} x e^{-x} \sin x + x e^{-x} + e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$

٤١٢ — $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = (x^2 + 2x + 1) e^{2x}$

ج : $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{x} (x + 1)^2 + x e^{2x}$

٤١٣ — $y'' - 2y' \operatorname{tg} x - 10y = 0$ ج : $y = \dfrac{c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}}{\cos x}$

حل المعادلات التفاضلية التالية بعد تغيير أحد المتحولين :

٤١٤ — $y'' - 4xy' + 4x^2 y = x e^{x^2}$

ج : $y = e^{x^2} (c_1 \cos \sqrt{2} x + c_2 \sin \sqrt{2} x) + \frac{1}{2} x e^{x^2}$

٤١٥ – $y'' - y' \cot g\, x - y \sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$

ج : $y = c_1 e^{-\cos x} + c_2 e^{\cos x} - \cos x$

٤١٦ – $y'' + (4 x - \frac{1}{x}) y' + 4 x^2 y = 3 x e^{-x^2}$

ج : $y = c_1 e^{-x^2} + c_2 x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}$

٤١٧ – $x^2 y'' - x(2 x + 3) y' + (x^2 + 3 x + 3) y = (6 - x^2) e^x$

ج : $y = c_1 x^3 e^x + c_2 x e^x + e^x (x^2 + 2)$

٤١٨ – $4 x^2 y'' + 4 x^3 y' + (x^2 + 1)^2 y = 0$

ج : $y = \sqrt{x}\, e^{-\frac{1}{4}x^2} (c_1 + c_2 \log x)$

٤١٩ – $x^2 y'' + (x - 4 x^2) y' + (1 - 2 x + 4 x^2)y = (x^2 - x + 1) e^x$

ج : $y = e^{2x} (c_1 \cos \log x + c_2 \sin \log x) + e^x$

٤٢٠ – $x y'' - y' + 4 x^3 y = 0$ ج : $y = c_1 \sin x^2 + c^2 \cos x^2$

٤٢١ – $x^4 y'' + 2 x^3 y' + y = \frac{1 + x}{x}$

ج : $y = c_1 \cos \frac{1}{x} + c_2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1 + x}{x}$

٤٢٢ – $x^8 y'' + 4 x^7 y' + y = \frac{1}{x3}$

ج : $y = c_1 \cos \frac{1}{3 x^3} + c_2 \sin \frac{1}{3 x^3} + \frac{1}{x^3}$