

الفصل العاشر

محمد المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

١ - جملة معادلتين :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \quad , \quad (2) \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

حيث نعتبر x متحولاً مستقلاً و y و z تابعين مجهولين لـ x .
حل هذه الجملة نستخرج قيمة z من الاولى ونضع هذه القيمة في الثانية فنجد علاقة يمكن كتابتها بعد حلها بالنسبة لـ z بالشكل :

$$(3) \quad z = h(x, y, y')$$

نشق هذه العلاقة ونبدل قيمة z' بـ $g(x, y, z)$ فنحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ y :

$$y'' = k(x, y, y')$$

إذا حلت هذه المعادلة فان حلها سيكون تابعاً لثابتين اختياريين وهو من الشكل :

$$y = \varphi(x, c_1, c_2)$$

إذا حلنا هذه القيمة في المعادلة (٣) فاننا نجد z من الشكل $z = \psi(x, c_1, c_2)$ وهو يتعلق بالثابتين الاختياريين c_1, c_2 نفسها .

٢ - خطوط القوى : ل نرمز بـ \vec{F} لحقل قوى ول مركباته بـ : X, Y, Z إن

خط القوى، حسب التعريف، هو كل منحني يمر في كل نقطة من تقاطعه شعاع الحقل المتعلق بهذه النقطة وتتميز هذه الخطوط بجملة المعادلتين :

٥ - جملة المعادلات الخطية :

نفرض أن هذه الجملة قد حلت بالنسبة لمشتقات التوابع المختلفة الداخلة فيها وأخذت الشكل القانوني .

$$y_j' + \sum_1^n a_{j,k} y_k = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

يفرض مبدئياً أن الأمثال $a_{j,k}$ تابعة للتحويل x أما y_j فهي توابع لـ x .

٦ - جملة ثلاث معادلات خطية . جملة الحلول الأساسية :

٦ - جملة المعادلات متجانسة :

$$y' = a y + b z + c u$$

$$z' = a_1 y + b_1 z + c_1 u$$

$$u' = a_2 y + b_2 z + c_2 u$$

إذا كانت y_1, z_1, u_1 حلولاً لجملة المعادلات المفروضة فإن $c y_1 + c z_1 + c u_1$ حل لها أيضاً .

وإذا كانت y_2, z_2, u_2 جملة ثانية من الحلول فإن $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ تحقق جملة المعادلات المفروضة .

وإذا كان y_3, z_3, u_3 جملة ثالثة من الحلول فإن التوابع التالية تحقق الجملة :

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3, \quad c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \quad c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$$

تؤلف هذه الجمل الثلاثة جملة حلول أساسية فيما إذا كان :

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

لا يطابق الصفر .

ويكون عندها الحل العام للجملة هو :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3, \quad z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3$$

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$$

ب - جملة المعادلات ذات أطراف ثانية :

$$y' = a y + b z + c u + d$$

$$z' = a_1 y + b_1 z + c_1 u + d_1$$

$$u' = a_2 y + b_2 z + c_2 u + d_2$$

نطبق من أجل إيجاد الحل العام لجملة المعادلات التامة طريقة لا غرانج وهي طريقة تحويل التوابث الإختيارية .

٧ - جملة المعادلات الخطية ذات الأمثال الثابتة :

آ - الجملة متجانسة :

$$j = 1, 2, \dots, n \quad y_j' + \sum_1^n a_{j,k} y_k = 0$$

تقبل هذه الجملة حلولاً من الشكل : $y_j = a_j e^{rx}$ حيث (a_j, r) ثوابت .

مسائل و تمارين محلولة

٤٢٣ - حل جملة المعادلتين :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = y + 2z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -y + 4z$$

الطريقة الأولى : نحل هذه الجملة بالطريقة العامة فنشتق المعادلة الأولى ثم نحذف بين جملة المعادلات المفروضة والمعادلة الناتجة التابع z ومشتقه فنجد على التوالي :

$$y'' = y' + 2z' \quad , \quad z' = -y + 2(y' - y) = -3y + 2y'$$

$$y'' = y' + 2(-3y + 2y') = 5y' - 6y$$

ونحصل على المعادلة الخطية من المرتبة الثانية

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$(2) \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad \text{حلها العام} :$$

وإذا حملنا قيمة التابع y هذه ومشتقها في المعادلة الأولى نجد :

$$(3) \quad z = \frac{1}{2} c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

إن التابعين (٣,٢) يمثلان الحل العام لجملة المعادلات المفروضة .

الطريقة الثانية : في بعض الحالات يمكننا ان نتوصل لحل جملة المعادلات بتوكيب معادلات هذه المجموعة مع بعضها بحيث نتوصل إلى معادلات تفاضلية عادية تحوي توابع إضافية فمثلاً من أجل هذا التمرين يمكننا ان نطرح المعادلة الثانية من الأولى فنجد :

$$y' - z' = \frac{d(y - z)}{dx} = 2(y - z)$$

$$\frac{d(y - 2z)}{dx} = 3(y - 2z) \quad \text{وإذا طرحنا من الأولى مثلي الثانية نجد :}$$

$$y - z = \lambda e^{2x} \quad \text{إن حلي هاتين المعادلتين هما :}$$

$$y - 2z = \mu e^{3x}$$

$$y = 2\lambda e^{2x} - \mu e^{3x} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad \text{ونجد من جديد :}$$

$$z = \lambda e^{2x} - \mu e^{3x} = \frac{1}{2} c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y' + 3y + z = 1, \quad z' - y + z = x \quad \text{— حل جملة المعادلتين :}$$

$$z = 1 - 3y - y' \quad \text{الحل : نستنتج من المعادلة الأولى :}$$

ونجد بأخذ مشتق الطرفين واستنتاج قيمة z' من جملة المعادلتين :

$$z' = -3y' - y'' = x + y - (1 - y' - 3y)$$

$$y'' + 4y' + 4y = 1 - x \quad \text{ومنه :}$$

وهي معادلة خطية ذات امثال ثابتة حلها العام :

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + \frac{-x + 2}{4}$$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلة الأولى من المجموعة فإننا نجد :

$$z = -[(c_1 + c_2) + c_2 x]e^{-2x} + \frac{3x-1}{4}$$

٤٢٥ --- حل جملة المعادلات :

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = y - z, \quad \frac{dy}{dt} = z - x, \quad \frac{dz}{dt} = x - y$$

الحل : لنحاول إيجاد بعض التكاملات الأولية وذلك في سبيل خفض مرتبة هذه الجملة .

إذا جمعنا المعادلات الى بعضها فاننا نجد :

$$(2) \quad x + y + z = a \quad \text{ومنه} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0$$

إذا اضفنا المعادلات (١) الى بعضها بعد ضربها على الترتيب بـ x, y, z

نجد :

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad \text{ومنه} \quad x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0$$

يمكننا استخراج z, y من المعادلتين (٢, ٣) بدلالة x ونجد على

التوالي :

$$(4) \quad y^2 + z^2 = b^2 - x^2, \quad y + z = a - x$$

$$(y - z)^2 = 2(y^2 + z^2) - (y + z)^2 = 2(b^2 - x^2) - (a - x)^2$$

$$= (2b^2 - a^2) + 2ax - 3x^2$$

$$(5) \quad y - z = \pm \sqrt{3} \sqrt{c^2 - (x - \frac{a}{3})^2}$$

حيث c ثابت إختياري .

ونستنتج من المعادلة الاولى :

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{3} \sqrt{c^2 - (x - \frac{a}{3})^2}$$

إذا كاملنا بالطرق المعروفة نجد :

$$x = \frac{a}{3} + c \sin \sqrt{3} (t - t_0)$$

وإذا حملنا هذه القيمة في المعادلتين (٤ , ٥) فإننا نجد :

$$y = \frac{a}{3} - \frac{c}{2} \sin \sqrt{3} (t - t_0) + \frac{\sqrt{3}c}{2} \cos \sqrt{3} (t - t_0)$$

$$z = \frac{a}{3} - \frac{c}{2} \sin \sqrt{3} (t - t_0) - \frac{\sqrt{3}c}{2} \cos \sqrt{3} (t - t_0)$$

تعطي المعادلات الثلاثة الاخيرة الحل العام لجملة المعادلات المفروضة .

٤٢٦ - حل جملة المعادلات التفاضلية التالية وعين منحنياتها التكاملية :

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = x - y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = x + y$$

الحل : إذا جمعنا هاتين المعادلتين الى بعضها، بعد ضرب الاولى بـ x

والثانية بـ y ، فإننا نجد :

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 \quad , \quad \frac{1}{2} u' = u \quad u = (x^2 + y^2)$$

$$u = x^2 + y^2 = c^2 e^{2t} \quad , \quad \log \frac{u}{c^2} = 2t \quad , \quad \frac{du}{u} = 2 \quad \text{منه}$$

وإذا طرحنا الاولى من الثانية بعد ضرب الاولى بـ y والثانية بـ x نجد :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 \quad , \quad \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = dt$$

إذا انتقلنا إلى الاحداثيات القطبية فإننا نجد :

$$x = \rho \cos \theta \quad , \quad y = \rho \sin \theta \quad , \quad dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta \quad , \\ dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

$$x dy - y dx = \rho \cos \theta \sin \theta d\rho + \rho^2 \cos^2 \theta d\theta - \rho \cos \theta \sin \theta d\rho \\ + \rho^2 \sin^2 \theta d\theta = \rho^2 d\theta$$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\theta = dt$$

$$\theta + k = t \quad \text{ومن}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = c^2 e^{2t} = c^2 e^{2(\theta+k)} \quad \text{ونجد:}$$

$$r = c e^{\theta+k} \quad \text{أو}$$

إن المنحنيات التكاملية حلزونات لوجارتمية معطاة بالمعادلة القطبية الأخيرة .

٤٢٧ - حل جملة المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = x$$

الحل : إن هذه الجملة خطية وذات أمثال ثابتة نفش عن حلول لها من الشكل :

$$x = \alpha e^{rt}, \quad y = \beta e^{rt}, \quad z = \gamma e^{rt}$$

إذا أخذنا مشتقات هذه التوابع وحملناها في المعادلات (١) فإننا نجد المعادلات الجبرية :

$$\alpha r - \beta = 0, \quad \beta r - \gamma = 0, \quad \alpha - \gamma r = 0$$

بالنسبة للجاهيل α, β, γ

إن هذه المعادلات متجانسة وليكون لها حل مخالف للصفر يجب ان يكون معين أمثالها معدوماً أي .

$$\Delta = \begin{vmatrix} r & -1 & 0 \\ 0 & r & -1 \\ 1 & 0 & -r \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = r^3 - 1 = (r - 1)(r^2 + r + 1) = 0 \quad \text{ومن}$$

$$1, \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{إن حلول هذه المعادلة المميزة هي}$$

ويكون بنتيجة ذلك :

$$x = c_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

$$y = \frac{dx}{dt} = c_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_3 - \frac{1}{2} c_2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_3 + \frac{1}{2} c_2 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]$$

$$z = \frac{d^2x}{dt^2} = c_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left[- \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_3 + \frac{1}{2} c_2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_2 - \frac{1}{2} c_3 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]$$

تمثل هذه التوابع الحل العام لجملة المعادلات المفروضة وهي تتعلق كما

نلاحظ بثلاثة ثوابت اختيارية .

$$5y' + 4y - 2z' - z = e^{-x}, \quad y' + 8y + 3z = 5e^{-x} \quad - \text{٢٨}$$

إذا حملنا قيمة y من المعادلة الأولى الى المعادلة الثانية فاننا نجد :

$$(1) \quad \begin{cases} y' + 8y + 3z = 5e^{-x} \\ z' - 7z + 18y = 12e^{-x} \end{cases}$$

إن هذه الجملة خطية ذات امثال ثابتة . نفقش عن حلول لهاتين المعادلتين

بدون أطراف ثانية من الشكل :

$$y = \alpha e^{rx}, \quad z = \beta e^{rx}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلتين (1) فاننا نحصل بعد الاختصار على

المعادلتين الخطيتين المتجانستين الجبريتين بالنسبة لـ α, β :

$$(r + 8) \alpha - 3 \beta = 0$$

$$18 \alpha + (r - 7) \beta = 0$$

ليكون لهذه الجملة حل لا يساوي الصفر يجب ان يكون معين امثالهـ

معدوماً :

$$\Delta = \begin{vmatrix} r + 8 & -3 \\ 18 & r - 7 \end{vmatrix} = r^2 + r - 2 = 0$$

ونجد ان لهذه المعادلة المميزة الجذران : (2 , - 1) ويكون لمجموعه
المعادلات الحلين e^{-2x} ، e^x

$$y_1 = A e^x + B e^{-2x} \quad \text{ونجد مثلاً :}$$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلة الأولى من المجموعة (1) بعد حذف طرفها
الثاني نجد :

$$z_1 = 3 A e^x + 2 B e^{-2x}$$

إن z_1 ، y_1 هما الحلان العامان لمجموعه المعادلتين (1) مجردة عن الاطراف
الثانية ولايجاد الحل العام للمجموعه التامة نطبق طريقة لاغرانج أي طريقة تحويل
الثوابت الاختيارية فنجد المعادلتين :

$$A' e^x + B' e^{-2x} = 5 e^{-x}$$

$$3 A' e^x + 2 B' e^{-2x} = 12 e^{-x}$$

بحل هاتين المعادلتين الخطيتين نجد : $A' = 2 e^{-2x}$ ، $B' = 3 e^x$

$$B = 3 e^x + \mu \quad , \quad A = - e^{-2x} + \lambda \quad \text{ومنه}$$

ويكون الحل العام لمجموعه المعادلتين المفروضة :

$$y = (- e^{-2x} + \lambda) e^x + (3 e^x + \mu) e^{-2x} = 2 e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{-2x}$$

$$z = 3 (- e^{-2x} + \lambda) e^x + 2 (3 e^x + \mu) e^{-2x} = 3 e^{-x} + 3 \lambda e^x + 2 \mu e^{-x}$$

٢٩٤ - حل جملة المعادلات التالية إذا علمت ان جملة المعادلات بدون

أطراف ثانية تقبل حلولاً من الشكل $y_1 = \alpha x^r$ ، $y_2 = \beta x^r$ حيث α, β, r اعداد ثابتة .

$$(1) \quad x y' + y + 2 z = x^2 \cos x \quad , \quad x z' - 3 y - 4 z = 0$$

الحل : إن هذه الجملة خطية نكتبها بدون طرف ثان :

$$(2) \quad x y' + y + 2 z = 0 \quad , \quad x z' - 3 y - 4 z = 0$$

وانفتش عن حلول لهذه الجملة من الشكل $y_1 = \alpha x^r$; $z_1 = \beta x^r$ إذا ما أخذنا مشتقي هذين التابعين وبدلنا في جملة المعادلات (٢) ثم اختصرنا فاننا نحصل على جملة المعادلتين الجبريتين الخطيتين :

$$(3) \quad \begin{cases} (r+1) \alpha + 2 \beta = 0 \\ -3 \alpha + (r-4) \beta = 0 \end{cases}$$

ليكون لهاتين المعادلتين حل مغاير للصفر ، يجب ان يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} r+1 & 2 \\ -3 & r-4 \end{vmatrix} = r^2 - 3r + 2 = 0$$

اي ان يكون $r = 1$ او $r = 2$.

من اجل $r = 1$ تعطي المعادلتان (٣) $\beta = -\alpha$ ونجد الحل الخاص :

$$y = A x \quad , \quad z = -A x$$

أما من اجل $r = 2$ فان هذه المعادلات تعطي $\beta = \frac{-3}{2} \alpha$ ونجد الحل

$$y = 2 B x^2 \quad , \quad z = -3 B x^2 \quad \text{الخاص :}$$

ويكون الحل العام لجملة المعادلتين (2) هو :

$$(4) \quad y = A x + 2 B x^2 \quad , \quad z = -A x - 3 B x^2$$

حيث A , B عددان اختياريان .

لإتمام حل جملة المعادلتين المفروضة نفتش عن حلها العام من الشكل (٤) حيث نفرض A , B تابعين مجهولين لـ x ونطبق طريقة تحويل الثوابت

فنحصل عندها على المعادلتين الخطيتين الجبريتين بالنسبة للمجهولين A' , B' :

$$x (A' x + 2 B' x^2) = x^2 \cos x$$

$$x (-A' x - 3 B' x^2) = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد : $A' = 3 \cos x$ ، $B' = -\frac{\cos x}{x}$

$$B = - \int \frac{\cos x}{x} dx + \mu \quad , \quad A = 3 \sin x + \lambda \quad \text{ويكون}$$

ويكون الحل العام لجملة المعادلتين :

$$y = \lambda x + 2 \mu x^2 + 3 x \sin x - 2 x^2 \int \frac{\cos x}{x} dx$$

$$z = - \lambda x - 3 \mu x^2 - 3 x \sin x + 3 x^2 \int \frac{\cos x}{x} dx$$

حيث λ, μ عددان ثابتان اختياريان والتابع $\int \frac{\cos x}{x}$ لا يمكن حسابه بدلالة التوابع العادية المعروفة ، نقيه في الجواب بشكل تكامل

٤٣ - لتكن جملة المعادلات التفاضلية :

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} + (b-c)yz=0, \quad \frac{dy}{dt} + (c-a)zx=0, \quad \frac{dz}{dt} + (a-b)xy=0$$

أوجد تكاملين اوليين لهذه الجملة وأعد حلها الى عملية تكامل ؛ أتم حل هذه الجملة من أجل الحالة التي ينعدم فيها كل من y, z من أجل $t=0$.

الحل : نجمع المعادلات (١) إلى بعضها بعد ضرب الأولى من اليسار بـ x والثانية بـ y والأخيرة بـ z فنجد :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \quad \text{ومنه} \quad x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{y}{c-a} \quad \text{بـ} \quad \text{والثانية بـ} \quad \frac{x}{b-c}$$

وطرحنا الناتجين من بعضها فاننا نجد :

$$\frac{x^2}{b-c} - \frac{y^2}{c-a} = \gamma \quad \text{ومنه} \quad \frac{x}{b-c} \frac{dx}{dt} - \frac{y}{c-a} \frac{dy}{dt} = 0$$

يمكننا بعد هذا ان نستخرج قيمتي x, y من المعادلتين :

$$\frac{x^2}{b-c} - \frac{y^2}{c-a} = \gamma$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 - z^2$$

$$(2) \quad y^2 \left(\frac{b-c}{c-a} + 1 \right) = \lambda^2 - z^2 - \gamma (b-c) \quad \text{فتجد}$$

$$x^2 \left(\frac{c-a}{b-c} + 1 \right) = \lambda^2 - z^2 + \gamma (c-a)$$

$$(a-b)xy =$$

$$\mp \sqrt{(c-a)(b-c) \cdot [\lambda^2 - z^2 + \gamma(c-a)] [\lambda^2 - z^2 - \gamma(b-c)]}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة الأخيرة من المعادلات (1) فالتنا نجد :

$$\frac{dz}{\sqrt{[\lambda^2 - z^2 + \gamma(c-a)] \cdot [\lambda^2 - z^2 - \gamma(b-c)]}} =$$

$$\mp \sqrt{(c-a)(b-c)} dt$$

وبذلك نكون قد أعدنا حل الجملة المفروضة الى عملية تكامل .

الحالة الخاصة : لينعدم y, z في وقت واحد مع t يلزم أن يكون

$\gamma = 0$ وبأخذ عندها التكامل الأخير الشكل :

$$\frac{dz}{\lambda^2 - z^2} = \pm \sqrt{(c-a)(b-c)} dt$$

$$\frac{\lambda + z}{\lambda - z} = e^{\alpha(t-t_0)} \quad , \quad \frac{1}{2\lambda} \log \frac{\lambda + z}{\lambda - z} = \mp \sqrt{(c-a)(b-c)} (t - t_0)$$

$$\alpha = \pm 2 \lambda \sqrt{(c-a)(b-c)} \quad \text{حيث فرضنا}$$

$$z = \lambda \frac{e^{\alpha(t-t_0)} - 1}{e^{\alpha(t-t_0)} + 1} = \lambda \operatorname{th} \frac{1}{2} \alpha (t-t_0) \quad \text{ومنه}$$

إذا حلنا هذه القيمة في المعادلتين (٢) فإننا نجد :

$$x = \frac{\pm \lambda \sqrt{\frac{b-c}{b-a}}}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} e^{\alpha(t-t_0)}} \quad y = \frac{\pm \lambda \sqrt{\frac{c-a}{b-a}}}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} e^{\alpha(t-t_0)}}$$

٤٣١ - حل لمل المعادلات التالية :

$$(1) \quad \frac{dx}{x - m y} = \frac{dy}{y - m x} = \frac{dz}{z}$$

حيث نعتبر m عدداً ثابتاً :

الحل : الطريقة الأولى - نضرب حدي النسبة الأولى بـ x وحدي النسبة الثانية بـ y ونجمع صورتى النسبتين الناتجتين الى بعضها وكذلك نخرجيهما فنحصل على نسبة تساوي النسب الأصلية :

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z}$$

ونجد باستكمال طرفي هذه العلاقة :

$$\frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) = \log z + \log A$$

$$(2) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = A z \quad \text{ومنه}$$

أما إذا ضربنا حدي النسبة الأولى بـ x وحدي النسبة الثانية بـ y وطرحنا صورة النسبة الثانية الناتجة من صورة النسبة الأولى الناتجة وكذلك الخارج فإننا نجد :

$$\frac{x dy - y dx}{m (x^2 + y^2)} = \frac{dz}{z}$$

يمكن كتابة هذه المعادلة ، بعد تقسيم حدي الطرف الاول على x^2 ، بالشكل :

$$\frac{1}{m} \frac{\frac{x dy - y dx}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{dz}{z}$$

وإذا فرضنا $u = \frac{y}{x}$ فإن $du = \frac{x dy - y dx}{x^2}$ ويكون :

$$\frac{1}{m} \frac{du}{1+u^2} = \frac{dz}{z}$$

$$\frac{1}{m} \text{Arc tg } \frac{y}{x} + \log B = \log z \quad \text{أو}$$

وإذا علمنا ان الزاوية القطبية θ تحقق العلاقة $\text{Arc tg } \frac{y}{x} = \theta$ فانه

يكون :

$$(3) \quad z = B e^{\frac{\theta}{m}}$$

إن العلاقتين (٢ و ٣) تمثلان تكاملين أوليين لجملة المعادلات (١) وبما أن هذه الجملة تحوي تابعين مجهولين (y, z) مثلاً، فهي من المرتبة الثانية وتمثل العلاقتان (٢ و ٣) الحل العام لها .

الطريقة الثانية : يمكننا كتابة جملة المعادلات المفروضة بالشكل :

$$(4) \quad \frac{dx}{x - m y} = \frac{dy}{y - m x} = \frac{dz}{z} = dt$$

ونستنتج من هذا الشكل جملة المعادلات الخطية التالية حيث نعتبر t المتحول

المستقل و (x, y, z) توابع مجهولة :

$$(5) \quad x' = x - m y, \quad y' = y + m x, \quad z' = z$$

بجمل هذه الجملة بالطرق المعروفة نجد الحلول :

$$x = e^t (A \cos m t + B \sin m t), \quad y = e^t (A_1 \cos m t + B_1 \sin m t) \\ z = C e^t$$

لايجاد العلاقات بين الثوابت الاختيارية الخمسة الداخلة في هذه الحلول نبدل اولاً في المعادلة الاولى من المجموعة (5) فنجد العلاقتين :

$$B_1 = A \quad , \quad A_1 = -B$$

ونجد حل جملة المعادلات بشكل وسيطي :

$$x = e^t (A \cos m t + B \sin m t) \quad , \quad y = e^t (-B \cos m t + A \sin m t)$$

$$z = C e^t$$

ونجد بسهولة تامة :

$$x^2 + y^2 = (A^2 + B^2) e^{2t} = \frac{A^2 + B^2}{C} z^2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{-B \cos m t + A \sin m t}{A \cos m t + B \sin m t} = \frac{\operatorname{tg} m t - \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} m t}$$

$$\cdot \operatorname{tg} \omega = \frac{B}{A} \quad \text{حيث فرضنا}$$

استناداً إلى الدستور :

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} a + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} b = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{a + b}{1 - ab}$$

$$\theta = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = m t - \omega \quad \text{نجد :}$$

$$t = \frac{\theta + \omega}{m} \quad \text{ومنه :}$$

$$z = C e^{\frac{\omega}{m}} e^{\theta} = C_1 e^{\theta} \quad \text{ونجد اخيراً :}$$

وهذا يطابق ما وجدناه بالطريقة الاولى :

٤٣٢ - حل جملة المعادلات :

$$(1) \quad y' = x'' - 3x - 3y - t - 1 \quad , \quad y' = x' + 2x - 2y \quad ,$$

$$z' = 2x + 2y - z$$

الحل - الطريقة الأولى : يمكننا حل هاتين المعادلتين بتوحيدها مع بعضها بحيث نتوصل إلى معادلة لا تحوي إلا أحد التابعين نحلها بالطرق المعروفة ونستنتج الحل العام للمعادلة إذا جمعنا المعادلتين (١) الأخيرتين من المجموعة إلى بعضها فاننا نجد :

$$x'' - x' - 5x - y - t - 1 = 0$$

$$\text{ومن } y = x'' - x' - 5x - t - 1 \text{ و } y' = x^{(3)} - x'' - 5x' - 1$$

إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة الثانية من المجموعة (١) فاننا نجد :

$$x^{(3)} - x'' - 5x' - 1 = x' + 2x - 2(x'' - x' - 5x - t - 1)$$

$$\text{ونجد بعد الاصلاح : } x^{(3)} + x'' - 8x' - 12x = 2t + 3$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الثالثة امثالها ثابتة وحلها العام :

$$x = c_1 e^{3t} + e^{-2t} (c_2 + c_3 t) - \frac{1}{6} t - \frac{5}{36}$$

ومن ثم نتوصل بدون عمليات تكامل لإيجاد قيمتي y , z بمجمل قيمة x ومشتقاتها في المعادلتين الأولى والثالثة من الجملة المفروضة .

الطريقة الثانية : يمكننا ان نستنتج من المعادلتين الثانية والثالثة من الجملة (١) جملة مؤلفة من ثلاث معادلات خطية من المرتبة الأولى وذلك بادخال تابع وسيط معرف بالعلاقة $\eta = x'$:

$$y' = x' + 2x - 2y, \eta = x', y' = \eta' - 3x - 3y - t - 1$$

وبعد حل هذه الجملة بالنسبة للمشتقات تأخذ الشكل :

$$x' - \eta = 0, y' - \eta - 2x + 2y = 0, \eta' - \eta - 5x - y = t + 1$$

نحل هذه الجملة بدون أطراف ثانية أي نحل الجملة :

$$(2) \quad x' - \eta = 0, y' - \eta - 2x + 2y = 0, \eta' - \eta - 5x - y = 0$$

ونفتش عن حلول من الشكل : $x = \alpha e^{rt}$, $y = \beta e^{rt}$, $\eta = \gamma e^{rt}$

فندخل بعد حمل هذه القيم في المعادلات (٢) على جملة المعادلات الجبرية

الخطية بالنسبة لـ (α, β, γ) :

$$\alpha r - \gamma = 0 \quad , \quad -2\alpha + (r+2)\beta - \gamma = 0$$

$$-5\alpha - \beta + (r-1)\gamma = 0$$

ومن المعلوم انه ليكون لهذه الجملة حلول مخالفة للصفر يجب ان يكون

معين امثالها معدوماً اي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} r & 0 & -1 \\ -2 & r+2 & -1 \\ -5 & -1 & r-1 \end{vmatrix} = (r+2)(r^2 - r - 6) = 0$$

إن جذور هذه المعادلة المميزة هي : $r_3 = +3$, $r_1 = r_2 = -2$

ويكون : $x = c_1 e^{3t} + e^{-2t} (c_2 + c_3 t)$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلات (٢) فاننا نجد :

$$\eta = 3c_1 e^{3t} + e^{-2t} (c_3 - 2c_2 - 2c_3 t)$$

$$y = c_1 e^{3t} + e^{-2t} (c_2 - 5c_3 + c_3 t)$$

من اجل ايجاد الحل العام لجملة المعادلات التامة نستخدم طريقة لاغرانج او

طريقة تحويل الثوابت الاختيارية فنجد المعادلات الجبرية التالية :

$$c_1' e^{3t} + e^{-2t} (c_2' - 5c_3' + c_3' t) = c_1' e^{3t} + e^{-2t} (c_2' + c_3' t) = 0$$

$$3c_1' e^{3t} + e^{-2t} (c_3' - 2c_2' - 2c_3' t) = t + 1$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

$$5c_1' = t e^{-3t} + e^{-3t} \quad , \quad c_1 = -\frac{1}{15} t e^{-3t} - \frac{4}{45} e^{-3t} + \lambda$$

$$5c_2' = -t e^{2t} - e^{-2t} \quad , \quad c_2 = -\frac{1}{10} t e^{2t} - \frac{1}{20} e^{2t} + \mu$$

$$c_3' = 0$$

إذا حملنا هذه القيم في إفاذة x مثلاً فاننا نجد :

$$x = \lambda e^{3t} + e^{-2t} (\mu + c_3 t) - \frac{t}{6} - \frac{5}{36}$$

وهي تطابق تماماً ما وجدناه اعلاه . وبالطريقة السابقة نجد إفاذتي y , z

تمارين للمحل

حل مجموعات المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من الاجوبة المرافقة :

$$\frac{d x}{d t} = x - 2 y, \frac{d y}{d t} = 5 x + 3 y \quad - \quad ٤٣٣$$

$$x = e^{2t} (A \cos 3 t + B \sin 3 t) \quad : \text{ج}$$

$$y = \frac{1}{2} e^{2t} [- (A + 2 B) \cos 3 t + (3 A - B) \sin 3 t]$$

$$c x^2 = z^2 + c_1, \quad y = c x, \quad \frac{d x}{x} = \frac{d y}{y} = \frac{z d z}{y x} \quad - \quad ٤٣٤$$

$$y = c_1 x, \quad z = c_2 x \quad : \text{ج} \quad \frac{d x}{x} = \frac{d y}{y} = \frac{d z}{z} \quad - \quad ٤٣٥$$

$$y = c_1 x, \quad z = c_2 x + y \quad : \text{ج} \quad \frac{d x}{x} = \frac{d y}{y} = \frac{d z}{x + y} \quad - \quad ٤٣٦$$

$$\frac{d x}{y} = - \frac{d y}{x} = \frac{d p}{q} = - \frac{d q}{p} \quad - \quad ٤٣٧$$

$$x^2 + y^2 = c_1^2, \quad p^2 + q^2 = c_2^2, \quad p y + q x = c_3 \quad : \text{ج}$$

$$\frac{d x}{x - y} = \frac{d y}{x + y} = \frac{d z}{z} \quad - \quad ٤٣٨$$

$$\log r - \text{Arc tg } \frac{y}{x} = c_1, \quad z = c_2 r, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad : \text{ج}$$

$$(z - y)^2 dy = z dx, \quad (z - y)^2 dz = y dx \quad - \quad ٤٣٩$$

$$(z - y)^2 + 2 x = c, \quad z^2 - y^2 = c_1 \quad : \text{ج}$$

$$dz = 2y^2 z dt, dy = 2y^3 dt, dx = (x^3 + 3xy^2) dt \quad - \xi \xi \bullet$$

$$z = c_1 y, (x^2 + y^2) y = c x^2 \quad : \epsilon$$

$$z dy = (z - 1) dx, dx = (y - x) dz \quad - \xi \xi \uparrow$$

$$(y - x) z = c, (y - x) e^{\frac{z}{y-x}} = c_1 \quad : \epsilon$$

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} \quad - \xi \xi \uparrow$$

$$x + y + z = c, x^2 + y^2 + z^2 = c_1 \quad : \epsilon$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad - \xi \xi \uparrow$$

$$y = c_1 x, z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c_2 \quad : \epsilon$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x-y}{z-t}, \frac{dy}{dt} = \frac{x-y}{z-t}, \frac{dz}{dt} = x-y+1 \quad - \xi \xi \xi$$

$$x - y = c, z - t(x - y + 1) = c_1, y - \log(z - t) = c_2 \quad : \epsilon$$

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} \quad - \xi \xi 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1 y, z = c_2 y \quad : \epsilon$$

$$\frac{dx}{y(x+y)} = \frac{-dy}{x(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)} \quad - \xi \xi \uparrow$$

$$x^2 + y^2 = c, (x+y)(x+y+z) = c_1 \quad : \epsilon$$

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x+y)} \quad (x=0, y=1) \quad - \xi \xi \uparrow$$

$$z = c(x-y), y(y-2x)^3 = (x-y)^2 \quad : \epsilon$$

$$y' - x + 6y = e^{2x}, x' + 5x - 2y = e^x \quad - \xi \xi \wedge$$

$$x = 2A e^{-4t} + B e^{-7t} + \frac{7}{40} e^t + \frac{1}{27} e^{2t} \quad : \epsilon$$

$$y = A e^{-4t} - B e^{-7t} + \frac{1}{40} e^t + \frac{7}{54} e^{2t}$$

$$z' = z + y + e^{ax} \quad , \quad y' = 3z - y \quad - \xi \xi 9$$

$$y = A e^{2x} + B e^{-2x} + \frac{3 e^{ax}}{a^2 - 4} \quad : \zeta$$

$$z = A e^{2x} - \frac{1}{3} B e^{-2x} + \frac{(a+1) e^{ax}}{a^2 - 4}$$

$$y' + x + 2y = \sin t \quad , \quad x' = 2x + 4y + \cos t \quad - \xi 0 \cdot$$

$$x = A(1+2t) - 2B - 2\cos t - 3\sin t \quad , \quad y = -At + B + 2\sin t \quad : \zeta$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2} \quad - \xi 0 1$$

$$z = \frac{c_1 - c + 2x}{2\sqrt{c-2x}} \quad , \quad y = \frac{c + c_1 - 2x}{2\sqrt{c-2x}} \quad : \zeta$$

$$y' + 2y - z' + z = e^{-x} \quad , \quad y'' + y' + z'' - z = e^x \quad - \xi 0 2$$

$$8y = e^x + (8 - A + 3B - 2Bx) e^{-x} \quad : \zeta$$

$$8z = (3x + c) e^x + (A + Bx) e^{-x}$$

$$y'' - 2m^2 x = 0 \quad , \quad x'' + 2m^2 y = 0 \quad - \xi 0 3$$

$$x = e^{mt} (A \cos mt + B \sin mt) + e^{-mt} (C \cos mt + D \sin mt) \quad : \zeta$$

$$y = e^{mt} (A \sin mt - B \cos mt) + e^{-mt} (D \cos mt - C \sin mt)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -z \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x - y \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 3(y - x - z) \quad - \xi 0 4$$

$$z = A \cos t + B \sin t \quad , \quad x + 3y - 3z = Ct + D \quad : \zeta$$

$$x - y + z = E \cos 2t + F \sin 2t$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = x + y - z \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x - y + z \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -x + y + z \quad - \xi 0 0$$

$$x + y + z = A e^t + B e^{-t} \quad , \quad x - y = C \cos t \sqrt{2} + D \sin t \sqrt{2} \quad : \text{c}$$

$$y - z = E \cos t \sqrt{2} + F \sin t \sqrt{2}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + y + z - 5 = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 3y + 4z - 3 - \text{ξ06}$$

$$y = -23 - 2(A + C + D x) e^x - 2(B - D - D x) e^{-x} \quad : \text{c}$$

$$z = 18 + (A + C x) e^x + (B + D x) e^{-x}$$

$$t y' + 2y - t x' = 0 \quad , \quad t x'' + 2x' + t x = 0 \quad - \text{ξ07}$$

$$t x = A \cos t + B \sin t \quad : \text{c}$$

$$t^2 y = c + (A t + 2 B) \cos t + (B t - 2 A) \sin t$$