

الفصل الثاني عشر

المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبتين الأولى والثانية

١ - نقول عن معادلة إنها تفاضلية جزئية إذا حوت بالإضافة إلى التابع المجهول ومتحولاته (وهي على الأقل متحولان) المشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة للمتحويلات. فإذا ورد في المعادلة مشتقات جزئية من المرتبة الأولى على الأكثر قلنا إنها معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى وإن ورد في المعادلة مشتقات جزئية من المرتبة الثانية على الأكثر قلنا إنها معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية .
وعندما يكون التابع المجهول تابعاً لتحولين فقط يكون الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى :

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ و } q = \frac{\partial z}{\partial y} \text{ بفرض} \right)$$

ويكون الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية .

$$(2) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

$$\left(t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ و } s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ و } r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ بفرض} \right)$$

٢ - كل تابع في المتحويلات المستقلة يجعل من المعادلة التفاضلية الجزئية متطابقة في هذه المتحويلات يدعى حلاً للمعادلة التفاضلية أو تكاملاً لها .

٣ - نقول عن معادلة تفاضلية جزئية إنها خطية من المرتبة الأولى إذا كانت من الشكل .

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n P_i (x_1, x_2, \dots, x_n, z) p_i = R (x_1, x_2, \dots, x_n, z)$$

$$(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad \text{بفرض})$$

وتقول إنها خطية متجانسة إذا كانت من الشكل :

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n P_i (x_1, x_2, \dots, x_n) p_i = 0$$

وإذا كان عدد المتحولات اثنين آلتا (3) و (4) إلى الشكل :

$$(5) \quad P(x, y, z) p + Q(x, y, z) = k(x, y, z)$$

$$(6) \quad P(x, y) p + Q(x, y) q = 0$$

؛ - لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة من المرتبة الأولى (6) نبدأ بحل المعادلة التفاضلية :

$$(7) \quad \frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$$

فإذا كان حل هذه المعادلة هو :

$$(8) \quad \varphi(x, y) = c$$

فعمدئذ يكون الحل العام للمعادلة (6) هو :

$$(9) \quad z = \Phi[\varphi(x, y)]$$

حيث $\Phi(u)$ تابع كفي في u .

ه - لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة (4) نبدأ بحل مجموعة المعادلات :

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

فإذا كان لهذه المجموعة من المعادلات مجموعة الحلول الأساسية المستقلة :

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1}$$

يكون الحل العام للمعادلة (4) هو :

$$z = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$$

حيث $\Phi (u_1 , u_2 \dots , u_{n-1})$ تابع كفي للمتحولات u_1 و u_2 و \dots و u_{n-1} .
 ٦ - حل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى (5) نبدأ بحل المعادلات:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

فإذا كانت حلول مجموعة المعادلات هذه هي :

$$(10) \quad \varphi_1(x, y, z) = c_1 \quad \varphi_2(x, y, z) = c_2$$

(بفرض φ_1 و φ_2 تابعين مستقلين)
 يكون الحل العام للمعادلة المذكورة هو :

$$(11) \quad \varphi_1(x, y, z) = \Phi [\varphi_2(x, y, z)]$$

حيث $\Phi(u)$ تابع كفي في u .

٧ - لإيجاد حل خاص للمعادلة (5) أو (6) يمر بالمنحني :

$$(12) \quad x = x(u) \quad y = y(u) \quad z = z(u)$$

يبدل (12) في (9) أو في (11) فنجد شكل التابع Φ ومنه نعرف الحل الخاص
 ٨ - نقول عن تابع z في المتحولين x و y إنه تكامل تام للمعادلة (1) إذا كان
 يجوي ثابتين كفيين .

$$(13) \quad z = V(x, y, a, b)$$

وإذا كان من الممكن كذلك الحصول على المعادلة (1) بجذب a و b من المعادلات :

$$(14) \quad z = V(x, y, a, b) \quad p = V_x(x, y, a, b) \quad q = V_y(x, y, a, b)$$

٩ - للحصول على تكامل تام نكتب مجموعة المعادلات التفاضلية العادية :

$$(15) \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dy}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-F_x - pF_z - F_y - qF_z} = \frac{dq}{-F_y - qF_z}$$

والتي تدعى بالمعادلات التفاضلية للمميزات .

فإذا استطعنا إيجاد تكامل أول واحد لهذه المجموعة وليكن :

$$(16) \quad G(x, y, z, p, q) = a$$

(بفرض a ثابتة تكامل)

نسمى (24) بالشريط المميز

نبدل في (23) u بقيمة ثابتة مثل $u = 0$ و x و y و z و p و q بدلالة v من (24) فنحصل على الثوابت الخمس بدلالة v. نعود من جديد ونبدل في x و y و z من (23) هذه الثوابت بدلالة v فنحصل على تمثيل بسيط للسطح التكاملي المطلوب .

قد يكون من العسير أحياناً الحصول على (23) من (5) فعندئذ نحصل على تكامل تام (13) ثم نبدل (22) في (14) فنحصل على قيم a و b بدلالة v. نبدل هذه القيم في (13) فنحصل على حزمة سطوح (تابعة لوسيط v) ، مغلفها هو السطح التكاملي المطلوب .

١١ -- قول عن معادلة من الشكل :

$$(25) \quad Ar + 2Bs + Ct + Dp + Eq + Fz + G = 0$$

(بفرض أن الامثال A, B, ..., G توابع مستمرة في x و y) إنها خطية من المرتبة الثانية ، ونقول هذه المعادلة إنها زائدية أو ناقصية أو مكافئية في نقطة ما ، حسبما يكون المقدار $B^2 - AC$ موجباً أو سالباً أو معدوماً في تلك النقطة .

١٢ -- الشكل النظامي للمعادلة الزائدية هو :

$$(26) \quad \begin{cases} s + ap + bq + cz + d = 0 \\ r + t + a_1p + b_1q + c_1z + d_1 = 0 \\ t + a_2p + b_2q + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

والمعادلة الناقصية هو
والمعادلة المكافئية هو

بفرض أن الأمثال في هذه الأشكال توابع في x و y

١٣ -- للحصول على الشكل النظامي للمعادلة الزائدية نبدأ بإيجاد حلين مستقلين

$$(27) \quad \xi = \xi(x, y) \quad \eta = \eta(x, y)$$

$$(28) \quad A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0$$

ثم نجري تغييراً في المتحولات لـ (25) بوساطة دساتير التحويل (27)

أما إذا كانت المعادلة ناقصية فعندئذ تكون دساتير التحويل

$$u = \frac{1}{2} (\xi + \eta) \quad v = \frac{1}{2i} (\xi - \eta)$$

وفي حالة المعادلات المكننة تكون دساتير التحويل
 $\xi = \xi(x, y)$
 والتابع η في x و y يؤخذ كيفياً .

مسائل وتمارين محلولة

٤٩٦ - أوجد التكامل العام للمعادلة :

$$y p - x q = 0$$

الحل: نبدأ بحل المعادلة التفاضلية العادية (تدعى بالمعادلة التفاضلية للمميزات)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

$$x dx + y dy = 0 \quad \text{أو}$$

$$x^2 + y^2 = c_1 \quad \text{ومنه نجد}$$

$$z = \varphi(x^2 + y^2) \quad \text{والحل العام هو}$$

حيث $\varphi(u)$ تابع كيفي u .

٤٩٧ - أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الجزئية :

$$(y - 3) p - (x - 2) q = 0$$

والذي يمر بمنحني البدء :

$$x = 2 + 5 \sin v \quad y = 3 + 5 \sin v \quad z = 5 \cos v$$

الحل : نحل المعادلة التفاضلية العادية :

$$\frac{dx}{y - 3} = \frac{dy}{-(x - 2)}$$

$$(x - 2) dx + (y - 3) dy = 0 \quad \text{أو}$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 = c \quad \text{فنجد}$$

$$(1) \quad z = \varphi(x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13) \quad \text{والحل العام هو}$$

نبدل x و y و z من المعادلة الأخيرة بقيمها بدلالة v من منحنى البدء فنجد .

$$5 \cos v = \varphi (50 \sin^2 v)$$

$$50 \sin^2 v = \tau \quad \text{فاذا فرضنا}$$

$$\varphi (\tau) = \sqrt{\frac{50 - \tau}{2}} \quad \text{يكون}$$

وبذلك يأخذ الحل (1) الشكل :

$$2 z^2 = 50 - (x - 2)^2 - (y - 3)^2$$

وهو الحل الخاص المطلوب

٤٩٨ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x z \frac{\partial u}{\partial x} + y z \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

الحل : نحل مجموعة المعادلات التفاضلية العادية :

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x}$$

$$\frac{y}{x} = c_1 \quad z^2 - 2 x = c_2 \quad \text{فنجد}$$

ويكون الحل العام المطلوب هو :

$$u = \varphi \left(\frac{y}{x}, z^2 - 2 x \right)$$

بفرض أن $\varphi (u, v)$ تابع كفي في u و v .

٤٩٩ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2 x y \frac{\partial u}{\partial y} - 2 x z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

الحل : نكتب المعادلات التفاضلية للميزات :

$$\frac{dx}{y^2 + z^2 - x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz}$$

إن حل مجموعة المعادلات هذه :

$$\frac{z}{y} = c_1 \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$$

ويكون الحل العام المطلوب هو :

$$u = \varphi \left(\frac{z}{y}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} \right)$$

••• 0 - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x \frac{\partial \omega}{\partial x} + y \frac{\partial \omega}{\partial y} + z \frac{\partial \omega}{\partial z} + (x^2 + 2u) \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$$

الحل : المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{x^2 + 2u}$$

وحلول هذه المعادلات هي :

$$\frac{z}{x} = c_1 \quad \frac{y}{x} = c_2 \quad \frac{u - x^2 \lg x}{x^2} = c_3$$

والحل العام المطلوب هو :

$$\omega = \varphi \left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}, \frac{u - x^2 \lg x}{x^2} \right)$$

••• 1 - أوجد الحل الخاص للمعادلة :

$$x \frac{\partial \omega}{\partial x} + y \frac{\partial \omega}{\partial y} + (x^2 + y^2) \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

الذي يمر بمنحني البدء $z = 0$ $\omega = x + y$

الحل : مجموعة المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2} = 0$$

وحل هذه المجموعة :

$$\frac{y}{x} = c_1 \quad \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - z = c_2$$

والحل العام هو :

$$\omega = \varphi \left[\frac{y}{x}, \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - z \right]$$

لايجاد الحل الخاص نبدل كل z بصفر وكل ω بـ $x + y$ فنجد :

$$x + y = \varphi \left[\frac{y}{x} \text{ و } \frac{1}{2} (y^2 + x^2) \right]$$

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) = \sigma \quad \frac{y}{x} = \tau \quad \text{فلو فرضنا}$$

$$x = \frac{\mp \sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1+\tau^2}} \quad y = \frac{\mp \tau \sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1+\tau^2}} \quad \text{لوجدنا}$$

$$\varphi(\tau, \sigma) = \frac{\mp \sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1+\tau^2}} (1 + \tau) \quad \text{ولكان}$$

وهذا هو شكل التابع الكيفي الموافق لمنحني البدء . فالحل الخاص هو :

$$\omega = \varphi(\tau, \sigma) = \mp \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1+\tau^2}} (1 + \tau)$$

$$\tau = \frac{y}{x} \quad \sigma = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - z$$

بالتعويض نجد :

$$\omega^2 = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 - 2z)$$

٥٠٢ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$x z p + y z q = x$$

الحل : المعادلات التفاضلية للميزات هي :

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد التكامل الأولي $\frac{y}{x} = c_1$ ومن النسبتين

الأولى والثالثة نجد التكامل $2x - z^2 = c_2$ ويكون الحل العام :

$$2x - z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

حيث $\varphi(u)$ تابع كفي في u .

٥٠٣ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$x p + y q = x y + z$$

الحل : المعادلات التفاضلية للميزات هي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x y + z}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد $\frac{y}{x} = c_1$ فإذا عوضنا في النسبة

الثالثة وجدنا :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{c_1 x^2 + z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} z + c_1 x \quad \text{أو}$$

وتكامل هذه المعادلة التفاضلية العادية الخطية هو :

$$z = c_1 x^2 + c_2 x$$

فإذا عوضنا $\frac{y}{x} = c_1$ بـ وجدنا :

$$\frac{z - y x}{x} = c_2$$

والحل العام هو :

$$\frac{z - y x}{x} = \varphi \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$z = y x + x \varphi \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{او}$$

حيث φ تابع كفي في $\frac{y}{x}$.

٥٠٤ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$x z p + y z q + x y = 0$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يمر بالمنحنى $z = h$ $x y = a^2$

الحل : المعادلات التفاضلية للميزات هي :

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

ولهذه المعادلة مجموعة الحلول الأساسية :

$$(1) \quad \frac{y}{x} = c_1 \quad \frac{y (x y + z^2)}{x} = c_2$$

$$\frac{y}{x} (x y + z^2) = \varphi_1 \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{والحل العام هو}$$

$$(2) \quad z^2 + x y = \varphi_2 \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{او}$$

بفرض φ_1 و φ_2 هما تابعان كفيان في $\frac{y}{x}$

لتعين الحل الخاص نبدل في (2) $z = h$ و $xy = a^2$. فنجد :

$$h^2 + a^2 = \varphi_2 \left(\frac{y}{x} \right)$$

وهذه العلاقة تعطينا شكل التابع الكيفي الموافق لمنحني البدء . وإذا عوضنا في (2) وجدنا :

$$z^2 + x y = h^2 + a^2$$

وهو الحل الخاص المطلوب .

يمكن الحصول على الحل الخاص بطريقة ثانية نبدل h بـ z و $x y$ بـ a^2 في المعادلات (1) فنجد :

$$\frac{a^2 (h^2 + a^2)}{x^2} = c_2 \quad \frac{a^2}{x^2} = c_1$$

ومن هاتين العلاقتين نجد

لنعوض c_1 و c_2 من المعادلات (1) فنجد :

$$\frac{y}{x} (h^2 + a^2) = \frac{y (x y + z^2)}{x}$$

$$z^2 + x y = h^2 + a^2$$

٥٠٥ - أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$x (x^2 + y^2) p + 2 y^2 (x p + y q - z) = 0$$

الذي يمر بالدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ $z = h$

الحل : نكتب المعادلة التفاضلية على الشكل :

$$x (x^2 + 3 y^2) p + 2 y^3 q = 2 y^2 z$$

والمعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{x(x^2 + 3y^2)} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z}$$

(1) من النسبتين الثانية والثالثة نجد التكامل الأولي $\frac{z}{y} = c_1$

ومن النسبتين الأولى والثانية نجد التكامل الأولي

$$(2) \quad \frac{y(x^2 + y^2)}{x^2} = c_2$$

والحل العام هو :

$$(3) \quad y(x^2 + y^2) = x^2 \varphi\left(\frac{z}{y}\right)$$

للحصول على الحل الخاص نعوض منحنى البدء في (1) و (2) نجد :

$$y = \frac{h}{c_1} \quad \frac{y a^2}{a^2 - y^2} = c_2$$

من هاتين العلاقتين نجد علاقة c_2 بـ c_1

$$c_1 h a^2 = (c_1^2 a^2 - h^2) c_2$$

نعوض c_1 و c_2 بما يساويها من (1) و (2) فنجد الحل الخاص المطلوب :

$$(x^2 + y^2)(a^2 z^2 - h^2 y^2) = a^2 h x^2 z$$

يمكن الحصول على الحل الخاص بطريقة ثانية فاذا بدلنا في (3) متحولين

اثنين بدلالة الثالث (بالاعتماد على شروط البدء) نجد :

$$a^2 y = (a^2 - y^2) \varphi\left(\frac{h}{y}\right)$$

فاذا فرضنا $\frac{h}{y} = \sigma$ وجدنا :

$$(4) \quad \varphi(\sigma) = \frac{a^2 h \sigma}{a^2 \sigma^2 - h^2}$$

نبدل في (3) التابع φ بما يساويه بدلالة (4) فنجد :

$$y(x^2 + y^2) = x^2 \frac{a^2 h z y^2}{y(a^2 z^2 - h^2 y^2)}$$

$$(x^2 + y^2)(a^2 z^2 - h^2 y^2) = a^2 h x^2 z \quad \text{أو}$$

وهذه نفس النتيجة السابقة .

٥٠٦ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$2xz p + 2yz q = z^2 - x^2 - y^2$$

ثم أوجد السطح التكاملي الذي يمر بالقطع الزائد :

$$x = a \quad z^2 - y^2 = a^2$$

الحل : المعادلات التفاضلية للميزات هي :

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد التكامل الأولي $\frac{y}{x} = c_1$

للحصول على تكامل أولي ثان نضرب صورة ومخرج النسبة الأولى بـ x والثانية بـ y والثالثة بـ z ثم نجمع الصرر بعضها والمخرج لبعضها فنجد .

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{x dx + y dy + z dz}{z(x^2 + y^2 + z^2)}$$

من النسبتين الأولى والرابعة نجد :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = c_2$$

والحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = x \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

لتعيين الحل الخاص نبدل في الحل العام متحولين اثنين بدلالة الثالث (اعتماداً على منحنى البدء) فنجد :

$$2a^2 + 2y^2 = a \varphi\left(\frac{y}{a}\right)$$

فإذا فرضنا $\frac{y}{a} = \sigma$ حصلنا على شكل التابع φ الموافق لمنحني البدء المفروض :

$$(2) \quad \varphi(\sigma) = 2a(1 + \sigma^2)$$

فاذا بدلنا التابع φ في (1) بما يساويه بدلالة (2) نجد الحل الخاص المطلوب :

$$x(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x^2 + y^2)$$

٥٠٧ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u$$

الحل : إن مجموعة المعادلات التفاضلية للميزات هي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{x^2 + 2u}$$

ومن هذه المعادلات نجد مجموعة الحلول الأساسية .

$$\frac{y}{x} = c_1 \quad \frac{z}{x} = c_2 \quad \frac{u - x^2 \lg x}{x^2} = c_3$$

والحل العام المطلوب هو :

$$\frac{u - x^2 \lg x}{x^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$$u = x^2 \lg x + x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \quad \text{أو}$$

حيث $\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ تابع كيفي في $\frac{y}{x}$ و $\frac{z}{x}$.

٥٠٨ - أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة :

$$(1) \quad pq = x + y$$

الحل : إذا كتبنا المعادلة على الشكل :

$$F(x, y, z, p, q) \equiv pq - x - y$$

$$F_p = q \quad F_q = p \quad p F_p + q F_q = 2pq \quad \text{يكون}$$

$$-F_x - p F_z = 1 \quad -F_y - q F_z = 1$$

تكون مجموعة المعادلات التفاضلية للميزات هي :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{1} = \frac{dq}{1}$$

من النسبتين الرابعة والخامسة نجد التكامل الأولي :

$$(2) \quad p - q = a$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد :

$$(a + q)q = x + y$$

$$q^2 + aq - x - y = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في q ، نحسب منها q بدلالة x و y ولكننا

نكتفي بأحد حلولها :

$$(3) \quad q = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4x + 4y}}{2}$$

$$(4) \quad p = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4x + 4y}}{2} \quad \text{واعتماداً على (2)}$$

لو اعتبرنا x ثابتة في (3) وكاملنا بالنسبة ل y لوجدنا :

$$2z = -ay + \frac{1}{6} (a^2 + 4x + 4y)^{\frac{3}{2}} + \varphi(x)$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة ل x نجد :

$$2p = (a^2 + 4x + 4y)^{\frac{3}{2}} + \varphi'(x)$$

وبالاعتماد على العلاقة (4) نجد $\varphi'(x) = a$ أو $\varphi(x) = ax + b$

والتكامل التام يكون :

$$2z = a(x - y) + \frac{1}{6} (a^2 + 4x + 4y)^{\frac{3}{2}} + b$$

٥٠٩ - أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة :

$$(1) \quad z = px + qy + p^3$$

الحل : إذا كتبنا المعادلة على الشكل :

$$F(x, y, p, q) = z - px - qy - p^3$$

$$F_p = -x - 3p^2 \quad F_q = -y$$

يكون

$$p F_p + q F_q = -x p - y q - 3 p^3$$

$$- F_x - p F_z = p - p = 0$$

$$- F_y - q F_z = q - q = 0$$

ولكانت مجموعة المعادلات التفاضلية للميزات :

$$\frac{dx}{-x - 3p^2} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-x p - y q - 3 p^3} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

بسهولة نجد التكاملين الأولين :

$$(2) \quad G(x, y, z, p, q) = p - a = 0$$

$$H(x, y, z, p, q) = q - b = 0$$

وبما أن هذين التكاملين يحققان علاقة التشابك :

$$(H_x + p H_z) G_p + (H_y + q H_z) G_q - (G_x + p G_z) H_p - (G_y + q G_z) H_q = 0$$

فانه يمكن الحصول على تكامل تام بجذب p و q من (1) و (2) فنجد :

$$z = ax + by + a^3$$

وبصورة عامة لكل معادلة تفاضلية جزئية من الشكل :

$$z = px + qy + f(p, q)$$

تكاملاً تاماً من الشكل : $z = ax + by + f(a, b)$

٥١ - أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة :

$$(1) \quad p^2 + q^2 = z^2$$

الحل : نكتب المعادلة على الشكل $F(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - z^2$

$$F_p = 2p \quad F_q = 2q \quad p F_p + q F_q = 2(p^2 + q^2) = 2z^2 \quad \text{ف نجد}$$

$$-F_x - p F_z = 2pz \quad -F_y - q F_z = 2qz$$

وتكون مجموعة المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2z^2} = \frac{dp}{2pz} = \frac{dq}{2qz}$$

من النسبتين الخامسة والرابعة نجد التكامل الأولي :

$$q = ap$$

نبدل في المعادلة (١) فنجد :

$$p^2 = \frac{z^2}{1+a^2}$$

ويجذر هذه المعادلة والاكتفاء بإشارة + نجد :

$$p = \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}$$

وبالتكامل نجد :

$$\lg z = \frac{x}{\sqrt{1+a^2}} + \varphi(y)$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$\frac{q}{z} = \varphi'$$

$$q = \frac{az}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{ولكن}$$

$$\varphi' = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{ومنه}$$

$$\varphi = \frac{ay}{\sqrt{1+a^2}} + b \quad \text{بالتكامل نجد}$$

$$\lg z = \frac{x + ay}{\sqrt{1+a^2}} + b \quad \text{ويكون}$$

تكاملاً تاماً للمعادلة المفروضة

$$\text{٥١١ - أوجد السطح المار بالمنحني } x = 0 \quad z = y \quad \text{والذي يحقق المعادلة التفاضلة الجزئية}$$

$$2z - p^2 - q^2 = 0$$

الحل : المعادلات التفاضلية للميزات هي :

$$\frac{dx}{-2p} = \frac{dy}{-2q} = \frac{dz}{-2(p^2 + q^2)} = \frac{dp}{-2p} = \frac{dq}{-2q}$$

ومن هذه المعادلات نجد التكاملين الأولين المتشابهين

$$p = x + a \quad q = y + b$$

$$(2) \quad 2z - (x + a)^2 - (y + b)^2 = 0 \quad \text{ومن هنا نجد التكامل التام}$$

لإيجاد التكامل الخاص نكمل منحني البدء المفروض إلى شريط بدء .
من أجل ذلك نكتب معادلات المنحني بشكل وسيطي :

$$x = 0 \quad y = t \quad z = t$$

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} \quad \text{ومن العلاقة}$$

نجد $q = 1$ ومن المعادلة المفروضة نجد :

$$p = \mp \sqrt{2t-1}$$

وشريط البدء هو :

$$x = 0 \quad y = z = t \quad p = \mp \sqrt{2t-1} \quad q = 1$$

نبدل في (2) وفي العلاقتين اللتين تنتجان عنها بالاستقاقات الجزئية تارة
بالنسبة لـ x وتارة أخرى بالنسبة لـ y فنجد :

$$2t - a^2 - (t + b)^2 = 0$$

$$\mp 2\sqrt{2t-1} - 2a = 0$$

$$2 - 2(t + b) = 0$$

$$b = 1 - t \quad a = \mp \sqrt{2t-1} \quad \text{ومنه}$$

نبدل في (2) فنجد حزمة السطوح

$$2z - (x \pm \sqrt{2t-1})^2 - (y + 1 - t)^2 = 0$$

ومغلف هذه الحزمة هو السطح التكاملي

$$x = u \quad y = \frac{\pm u}{\sqrt{2t-1}} + t$$

$$2z = (u \pm \sqrt{2t-1})^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2t-1}}\right)^2$$

٥١٢ - أوجد السطح التكاملي الذي يحقق المعادلة التفاضلية
 $pq = 1$ ويمر بالمنحني .

$$x = \tau \quad y = \tau^3 \quad z = 2\tau^2$$

الحل : من المعادلات :

$$(1) \quad \frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

نجد التكاملات الاولى :

$$(2) \quad p = a \quad q = b \quad px - qy = c \quad z - 2qy = d$$

لنتم منحني البدء إلى شريط بدء :

$$\frac{dz}{d\tau} = p \frac{dx}{d\tau} + q \frac{dy}{d\tau}$$

$$4\tau = p + 3q\tau^2 \quad \text{أو}$$

بالاعتماد على المعادلة التفاضلية المفروضة نجد اما $p = \tau$ و $q = \frac{1}{\tau}$

أو $p = 3\tau$ و $q = \frac{1}{3\tau}$ ففي الحالة الأولى نجد بالتبديل في (2) :

$$(3) \quad a = \tau \quad b = \frac{1}{\tau} \quad c = 0 \quad d = 0$$

واعتماداً على (2) :

$$z = 2 b y + d = d + 2 b \left[\frac{a x - c}{b} \right]$$

$$z = d + 2 a x - 2 c$$

$$y = \frac{a}{b} x - \frac{c}{b}$$

واعتماداً على (3) نجد :

$$z = 2 \tau x$$

$$y = \tau^2 x$$

$$z^2 = 4 y x$$

والسطح التكاملي المطلوب هو

وفي الحالة الثانية نجد :

$$a = 3 \tau \quad b = \frac{1}{3 \tau} \quad c = \frac{8}{3} \tau^2 \quad d = \frac{4}{3} \tau^2$$

ويكون :

$$z = -4 \tau^2 + 6 \tau x$$

$$y = 9 \tau^2 x - 8 \tau^3$$

ويكون السطح :

$$x = \sigma \quad y = \tau^2 (9 \sigma - 8 \tau) \quad z = 2 \tau (3 \sigma - 2 \tau)$$

كذلك سطحاً تكاملياً

٥١٣ - لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية .

$$x^2 r + 2 x y s + y^2 t = 0$$

بين نوع هذه المعادلة ثم أرجعها إلى شكلها النموذجي و اعط الحل العام لها .

الحل : إن المعادلة المفروضة مكافئة دوماً لأن :

$$B^2 - AC = x^2 y^2 - x^2 y^2 \equiv 0$$

لإرجاعها إلى شكلها النموذجي نبدأ بحل المعادلة :

$$x^2 (\varphi_x)^2 + 2 x y \varphi_x \varphi_y + y^2 (\varphi_y)^2 = 0$$

$$(x \varphi_x + y \varphi_y)^2 = 0$$

$$x \varphi_x + y \varphi_y = 0 \quad \text{أو}$$

$$\varphi = \omega \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{والحل العام لهذه المعادلة}$$

حيث ω تابع كافي .

$$\xi = x \quad \eta = \frac{y}{x} \quad \text{لذلك نجري التحويل}$$

فيكون :

$$z_x = z_{\xi} - \frac{y}{x^2} z_{\eta} \quad z_y = \frac{1}{x} z_{\eta}$$

$$z_{xx} = z_{\xi\xi} - \frac{2y}{x^2} z_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} z_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3} z_{\eta}$$

$$z_{yx} = -\frac{1}{x^2} z_{\eta} + \frac{1}{x} z_{\eta\xi} - \frac{y}{x^3} z_{\eta\eta}$$

$$z_{yy} = \frac{1}{x^2} z_{\eta\eta}$$

بالتعويض في المعادلة المفروضة نجد

$$z_{\xi\xi} = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$z = \varphi(\eta) + \xi \psi(\eta)$$

$$z = \varphi \left(\frac{y}{x} \right) + x \psi \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{أو}$$

وذلك بفرض أن φ و ψ تابعان كفيان في $\frac{y}{x}$.

٥١٤ - لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل : إن هذه المعادلة زائدية دوماً (باستثناء الحالة التي يكون

فيها $x=0$ أو $y=0$) :

$$AC - B^2 = -x^2 y^2 \leq 0$$

لإرجاعها إلى الشكل النموذجي نبدأ بمحل المعادلة :

$$y^2 (\varphi_y)^2 - x^2 (\varphi_x)^2 = 0$$

$$y \varphi_y - x \varphi_x = 0 \quad \text{أو} \quad y \varphi_y + x \varphi_x = 0$$

والحل العام لهاتين المعادلتين :

$$\varphi = \omega(x y) \quad \varphi = \omega\left(\frac{x}{y}\right)$$

لذلك نجري التحويل $\xi = x y$ $\eta = \frac{x}{y}$

$$-2 \xi z_{\xi \eta} + z_{\eta} = 0 \quad \text{ف نجد المعادلة}$$

لحل هذه المعادلة نفرض $z_{\eta} = u$ فنجد :

$$-2 \xi u_{\xi} + u = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية في u (المتحول ξ) وحلها العام :

$$u = c(\eta) \sqrt{\xi}$$

حيث $c(\eta)$ هو تابع اختياري في η .

نعوض u بما يساويها فنجد :

$$z_{\eta} = c(\eta) \sqrt{\xi}$$

$$z = \sqrt{\xi} \int c(\eta) d\eta + \psi(\eta) \quad \text{ومنه}$$

$$z = \varphi(\eta) \sqrt{\xi} + \psi(\eta) \quad \text{أو}$$

وذلك بفرض $\varphi(\eta)$ و $\psi(\eta)$ هما تابعان كيفيان في η .

نعود للمتحولات الاصلية فنجد :

$$z = \psi (x y) + \varphi \left(\frac{y}{x} \right) \cdot \sqrt{x y}$$

تمارين غير محلولة

حل المعادلات التفاضلية الجزئية الآتية :

$$\cos y p + \cos x q = \cos x \cos y \quad - 515$$

$$z = \sin y + \varphi (\sin x - \sin y) \quad : \text{ج}$$

$$x y b - y^2 q + x (1 + x^2) = 0 \quad - 516$$

$$4 x y z = - x^4 - 2 x^2 + \varphi (x y) \quad : \text{ج}$$

$$x^2 p - x y q + y^2 = 0 \quad - 517$$

$$3 x y z = y^3 + \varphi (x y) \quad : \text{ج}$$

$$x p + y q = 2 x y \sqrt{a^2 - z^2} \quad - 518$$

$$z = a \sin \left[x y + \varphi \left(\frac{y}{x} \right) \right] \quad : \text{ج}$$

$$x p + y q = z + a \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad - 519$$

$$z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^{a+1} \varphi \left(\frac{y}{x} \right) \quad : \text{ج}$$

$$(y^2 + z^2 - x^2) p - 2 x y q + 2 x z = 0 \quad - 520$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = y \varphi \left(\frac{z}{y} \right) \quad : \text{ج}$$

$$(x y^3 - 2 x^4) p + (2 y^4 - x^3 y) q = 9 z (y^3 - x^3) \quad - 521$$

$$x^3 y^3 z = \varphi \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} \right) \quad : \text{ج}$$

$$(z + y - x)p + (z + x - y)q = x + y - z \quad - 522$$

$$(x + y + 2z)(x + y + z)^2 = \psi[(x - y)(x + y + 2z)] \quad \text{ج}$$

$$(z + e^x)p + (z + e^y)q = z^2 - e^{x+y} \quad - 523$$

$$y + ze^{-x} = \varphi(x + ze^{-y}) \quad \text{ج}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial z} + (y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = y + z \quad - 524$$

$$y + z + u = x^2 \varphi[x(y - z) \text{ و } x(y - u)] \quad \text{ج}$$

- 525 أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$xyp - y^2q = x$$

$$x = a \quad 2ayz = a^2 + 2 \quad \text{الذي يمر بالمنحني}$$

$$2xyz = x^2 + 2 \quad \text{الجواب :}$$

- 526 أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$z(x + z)p - y(y + z)q = 0$$

$$x = 1 \quad z = \sqrt{y} \quad \text{والذي يمر بالمنحني}$$

$$z^2 = xy \quad \text{الجواب :}$$

- 527 أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$x^2 + y^2 = ax \quad z = 1 \quad \text{الذي يمر بالدائرة}$$

$$axz = x^2 + y^2 \quad \text{الجواب :}$$

- 528 أوجد السطح التكاملي الذي يحقق المعادلة

$$xp + yq = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$$

$$x = 2z \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{الذي يمر بالقطع الناقص}$$

$$a^2 x^2 = 4 z (z - x) (x^2 + y^2) \quad \text{الجواب}$$

عين الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية الآتية وذلك من أجل منحنيات البدء المذكورة أمام كل معادلة وذلك مباشرة دون استخدام التكامل التام . ثم أوجد تكاملاً تاماً وبعد ذلك أوجد الحل الخاص ثانية عن طريق التكامل التام :

$$x = 0 \quad z = 2y \quad p = \sin(xq) \quad - 529$$

$$z = 2y + \sin^2 x \quad z = -\frac{1}{a} \cos ax + ay + b \quad : \text{ج}$$

$$x = 0 \quad z = (1 + y)^2 \quad p^2 - q^2 = 2z \quad - 530$$

$$z = (\sqrt{\frac{1}{2}} x + y + 1)^2 \quad z = \frac{1}{2} [(a + x)^2 - (b - y)^2] \quad : \text{ج}$$

$$y = 0 \quad z = a^3 x + b \quad p^2 = q^3 \quad - 531$$

$$z = a^3 x + a^2 y + b \quad z = Ax + A^{\frac{2}{3}} y + B \quad : \text{ج}$$

$$y = z = 0 \quad \frac{1}{x} e^p - q - y = 0 \quad - 532$$

$$z = x \lg \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 + 4y}} - \frac{1}{2} y^2 - x + \sqrt{x^2 + 4y} \quad : \text{ج}$$

$$z = x \lg a + x \lg x - x + ay - \frac{1}{2} y^2 + b$$

$$x = 0 \quad z = e^{-2y} \quad pq = z^2 \quad - 533$$

$$z = e^{-\frac{x}{2} - 2y} \quad z = b e^{\frac{x}{a}} + ay \quad : \text{ج}$$

حوّل المعادلات الآتية إلى الشكل النموذجي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad - 534$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad [\xi = x - y \quad \eta = x + y] \quad : \text{ج}$$

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad - 035$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad : \mathcal{E}$$

$$[\xi = y^2 \quad \eta = x^2]$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad - 036$$

$$\xi^2 z_{\xi\xi} - \eta z_{\eta} = 0 \quad [\xi = x \quad \eta = x e^y] : \mathcal{E}$$