

ملحق

## تمارين عامة

٥٣٧ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad x (3y^2 x^4 + 1) dy + (3x^4 y^2 - 1) y dx = 0$$

(جامعة دمشق، ر. ف الدورة الأولى ١٩٧١)

الحل :

إن هذه المعادلة التفاضلية ليست تامة لأن :

$$[x(3y^2 x^4 + 1)]'_x \neq [(3x^4 y^2 - 1)y]'_y$$

$$15y^2 x^4 + 1 \neq 9x^4 y^2 - 1 \quad \text{أي :}$$

لنبحث عن عامل تكامل  $\mu$  لهذه المعادلة فنجد الشرط .

$$[x(3y^2 x^4 + 1)\mu]'_x \equiv [(3x^4 y^2 - 1)y\mu]'_y$$

أي أننا نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية في  $\mu$  :

$$(15y^2 x^4 + 1)\mu + x(3y^2 x^4 + 1)\mu'_x$$

$$= (9x^4 y^2 - 1)\mu + y(3x^4 y^2 - 1)\mu'_y$$

ولنبحث الآن عن وجود عامل تكامل تابع لـ  $x$  فقط ، عندئذ

يكون  $\mu'_y = 0$  وبالتالي تأخذ المعادلة الأخيرة الشكل :

$$2(3x^4y^2 + 1)\mu = -x(3y^2x^4 + 1)\mu'_x$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2dx}{x} \quad \text{أو :}$$

$$\mu = \frac{c}{x^2} \quad \text{وبالمكاملة نجد :}$$

وهكذا نرى أن  $\mu = \frac{1}{x^2}$  هو عامل تكامل لـ (1) . لنضرب طرفيها

به فتصبح تامة :

$$(2) \quad \frac{3y^2x^4 + 1}{x} dy + \frac{(3x^4y^2 - 1)y}{x^2} dx = 0$$

للحصول على حل هذه المعادلة نكامل الحد الأول بالنسبة لـ y مع

اعتبار x ثابتة فنجد :

$$\frac{y^3x^4 + y}{x} + h(y)$$

ونعين  $h(y)$  بحيث يكون مشتق المقدار الأخير بالنسبة لـ x مطابقاً

لأمثال dx في (2) فنجد :

$$h'(y) = 0$$

$$h(y) = \text{const} \quad \text{ومنه :}$$

والحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$y^3x^3 + \frac{y}{x} = c$$

٥٣٨ - حل المعادلة التفاضلية :

$$x y'' + y' = x y'^2$$

( جامعة دمشق ، ر. ف. الدورة الأولى ١٩٧١ )

الحل :

إن هذه المعادلة لا تحوي  $y$  لذلك يمكن تخفيض مرتبتها بفرض  $y' = z$   
فتأخذ الشكل :

$$x z' + z = x z^2$$

وهذه معادلة برنويبي ، حلها تقسم على  $z^2$  ونفرض  $\frac{1}{z} = t$  فنجد :

$$-x t' + t = x$$

وهذه معادلة خطية ، نحلها بدون طرف فنجد :

$$t = c x$$

حلها مع ظرف نحول للثابت  $c$  ونعوض فنجد :

$$c' x = -1$$

$$c = c_1 - \lg x \quad \text{ومنه :}$$

$$t = c_1 x - x \lg x \quad \text{وبالتالي :}$$

وبالانتقال إلى  $z$  نجد :

$$z = \frac{1}{c_1 x - x \lg x}$$

وبما أن  $y' = z$  نجد :

$$dy = \frac{dx}{c_1 x - x \lg x}$$

وبالمكاملة نجد :

$$y = c_2 + \int \frac{dx}{x (c_1 - \lg x)}$$

لحساب التكامل الأخير نفرض  $c_1 - \lg x = u$  فيكون :

$$y = c_2 - \int \frac{du}{u} = c_2 - \lg u$$

$$y = c_2 - \lg ( c_1 - \lg x ) \quad \text{أو :}$$

وهو الحل العام المطلوب .

٥٣٩ - حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^3 y}{d x^3} - 4 \frac{d^2 y}{d x^2} + 5 \frac{dy}{dx} - 2 y = e^{2x} + \sin 2 x + x^2$$

( جامعة دمشق ، ر. ف. الدورة الأولى ١٩٧١ )

الحل :

إن الحل العام لهذه المعادلة هو مجموع حل عام لها بدون طرف ثان مع حل خاص لها بطرف ثانٍ . لذلك نبدأ بالحصول على الحل العام للمعادلة ( المتحول هو  $x$  ) :

$$y''' - 4 y'' + 5 y' - 2 y = 0$$

إن المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي :

$$\rho^3 - 4 \rho^2 + 5 \rho - 2 = 0$$

نلاحظ أن  $\rho = 1$  هو حل لهذه المعادلة . بالتحويل إلى ائعوامل نجد

أن هذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$(\rho - 1)^2 (\rho - 2) = 0$$

فلمعادلة الميزة الجذر المضاعف ( مرتين )  $\rho = 1$  والجذر البسيط  $\rho = 2$   
 فالحل العام اذن :

$$(1) \quad y = c_1 e^{2x} + (c_2 x + c_3) e^x$$

ان الحل الخاص للمعادلة بطرف ثان هو مجموع ثلاثة حلول خاصة  
 $y_1$  و  $y_2$  و  $y_3$  للمعادلات الثلاث التالية على الترتيب :

$$(2) \quad y_1''' - 4 y_1'' + 5 y_1' - 2 y_1 = e^{2x}$$

$$(3) \quad y_2''' - 4 y_2'' + 5 y_2' - 2 y_2 = \sin 2x$$

$$(4) \quad y_3''' - 4 y_3'' + 5 y_3' - 2 y_3 = x^2$$

للحصول على  $y_1$  نلاحظ أن  $\rho = 2$  هو حل للمعادلة الميزة لذلك  
 فإن ل (2) حلاً خاصاً من الشكل :

$$y_1 = a x e^{2x}$$

بحساب  $y_1'$  و  $y_1''$  و  $y_1'''$  والتعويض نجد :

$$a = 1$$

$$y_1 = x e^{2x} \quad \text{اذن :}$$

للحصول على  $y_2$  نلاحظ أن  $2i$  ليس حلاً للمعادلة الميزة ولذلك فإن  
 $y_2$  من الشكل :

$$y_2 = A \sin 2x + B \cos 2x$$

لنعوض في (3) فنجد :

$$(2A + 14B) \cos 2x + (14A - 2B) \sin 2x \equiv \sin 2x$$

$$2A + 14B = 0 \quad ; \quad 14A - 2B = 1 \quad \text{ومنه :}$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$A = \frac{7}{100} ; B = -\frac{1}{100}$$

$$y_2 = \frac{1}{100} (7 \sin 2x - \cos 2x) \quad \text{إذن :}$$

للحصول على  $y_2$  نلاحظ أن الطرف الأيسر من (4) يحوي حداً بـ  $y_3$  لذلك فإن  $y_3$  من الشكل :

$$y_3 = A x^2 + B x + c$$

بالتعويض في (4) نجد :

$$-2 A x^2 + (10 A - 2 B) x - 8 A + 5 B - 2 c \equiv x^2$$

ومنه :

$$-2 A = 1 ; 10 A - 2 B = 0 , -8 A + 5 B - 2 c = 0$$

وبحل جملة المعادلات هذه نحصل :

$$A = -\frac{1}{2} , B = -\frac{5}{2} , C = -\frac{17}{4}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{2} x - \frac{17}{4} \quad \text{إذن :}$$

والحل العام المطلوب هو :

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + c_1 e^{2x} + (c_2 x + c_3) e^x$$

يمكن بطريقة ثانية (طريقة المؤثرات التفاضلية) الحصول على الحل

الخاص للمعادلة المفروضة . إن هذه المعادلة تكتب على الشكل :

$$F(D) y \equiv (D^3 - 4 D^2 + 5 D - 2) y = e^{2x} + \sin 2x + x^2$$

ومنه :

$$y = \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} (e^{2x} + \sin 2x + x^2)$$

فإذا علمنا أن :

$$\frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} = \frac{1}{D - 2} - \frac{1}{D - 1} - \frac{1}{(D - 1)^2}$$

وأن :

$$(5) \quad \frac{1}{D - a} Q(x) = e^{ax} \int e^{-ax} Q(x) dx$$

فإن :

$$y = e^{2x} \int (1 + e^{-2x} \sin 2x + x^2 e^{-2x}) dx$$

$$- e^x \int (e^x + e^{-x} \sin 2x + x^2 e^{-x}) dx$$

$$- e^x \int \left[ \int (e^x + e^{-x} \sin 2x + x^2 e^{-x}) dx \right] dx$$

وبحساب هذه التكاملات نصل إلى المطلوب .

غير انه من المستحسن اتباع الطرق التالية في حل المعادلة :

$$F(D) y = Q(x)$$

$$y = \frac{1}{F(D)} Q(x) \quad \text{أي :}$$

٦- إذا كان  $Q$  من الشكل  $e^{ax}$  فمعدنذ يكون :

$$y = \frac{1}{F(a)} e^{ax} \quad F(a) \neq 0$$

أما إذا كان  $F(a) = 0$  فعمدئذ نلجأ إلى الطريقة (5) .

٢ - أما إذا كان  $Q$  من الشكل  $x^m$  فعمدئذ يكون :

$$y = \frac{1}{F(D)} x^m = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_m D^m) x^m \quad a_0 \neq 0$$

حيث نخلص على أمثال  $x^m$  في الطرف الأيمن من تقسيم 1 على  $F(D)$  مع الاكتفاء بالحدود التي درجتها أقل من  $m$  أو تساويها .

٣ - أما إذا كان  $Q$  من الشكل  $\sin(ax+b)$  أو  $\cos(ax+b)$  فإننا نستفيد من القواعد التالية :

$$\frac{1}{F(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \sin(ax+b)$$

$$\frac{1}{F(D^2)} \cos(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \cos(ax+b)$$

وذلك بفرض  $F(-a^2) \neq 0$  أما إذا كان  $F(-a^2) = 0$  فإننا نبحث ، في الحالة الأولى مثلاً ، عن حل المسألة :

$$\frac{1}{F(D^2)} \sin[(a+b)x+b]$$

ثم نجعل  $h \rightarrow 0$  في الجواب .

٤ - أما إذا كان  $Q$  من الشكل  $e^{ax} g(x)$  فعمدئذ يكون :

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} g(x) = e^{ax} \frac{1}{F(D+a)} g(x)$$

٥ - وإذا كان  $Q$  من الشكل  $x g(x)$  فيكون :

$$y = \frac{1}{F(D)} x g(x) = x \frac{1}{F(D)} g^{(x)} - \frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2} g(x)$$

ففي مسألتنا يكون :

$$y_1 = \frac{1}{(D-2)(D-1)^2} e^{2x} = \frac{1}{D-2} \left( \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-1} e^{2x} \right)$$

$$\frac{1}{D-1} e^{2x} = e^{2x} \quad \text{ولكن :}$$

اذن :

$$y_1 = \frac{1}{D-2} e^{2x} = e^{2x} \int e^{2x} e^{-2x} dx = x e^{2x}$$

ويكون :

$$y_2 = \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} x^2 = \left( -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}D - \frac{17}{8}D^2 \right) x^2$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{2} x - \frac{17}{4}$$

وأخيراً :

$$y_3 = \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} \sin 2x = \frac{1}{-4D + 16 + 5D - 2} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{D + 14} \sin 2x = \frac{D - 14}{D^2 - (14)^2} \sin 2x = \frac{D - 14}{-200} \sin 2x$$

$$= -\frac{1}{200} (2 \cos 2x) + \frac{7}{100} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{100} (7 \sin 2x - \cos 2x)$$

وهو المطلوب .

٥٤ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad 2x(1-x)y'' + (x+1)y' - y = 0$$

مع العلم أنها تقبل حلاً خاصاً على شكل كثير حدود في  $x$  من الدرجة الأولى .

استعمل طريقة تحويل الثوابت لحل المعادلة :

$$(2) \quad 2x(1-x)y'' + (x+1)y' - y = (1-x)^2$$

(جامعة دمشق ، ر. ف. الدورة الأولى ١٩٧٠)

الحل :

لنضع  $y = Ax + B$  في (1) فنجد :

$$(x+1)A - (Ax+B) \equiv 0$$

ومنه  $A=B$  وبالتالي فإن  $y = A(x+1)$  حل للمعادلة (1) مهما

كان  $A$  . لنجعل  $A=1$  فيكون :

$$y_1 = x + 1$$

حلاً خاصاً لـ (1) . نستفيد من هذا الحل للحصول على الحل العام

لـ (1) فنكتب :

$$y = (x+1)z$$

نعوض في (1) فنجد :

$$2x(1-x^2)z'' - (3x^2 - 6x - 1)z' = 0$$

وهذه معادلة لا تحوي  $z$  حلها نضع  $z' = u$  فنحصل :

$$\frac{du}{u} = \frac{3x^2 - 6x - 1}{2x(1-x^2)} dx = \left[ -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right] dx$$

وبكاملة هذه المعادلة نجد :

$$u = \frac{c(x-1)}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$

$$z' = \frac{c(x-1)}{\sqrt{x}(x+1)^2} \quad \text{ومنه :}$$

$$z = c \int \frac{(x-1) dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} \quad \text{وبالتالي :}$$

ولحساب هذا التكامل نضع  $x = t^2$  فيكون :

$$z = 2c \int \frac{(t^2-1) dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{2ct}{t^2+1} + c_1 = \frac{-2c\sqrt{x}}{x+1} + c_1$$

والحل العام للمعادلة (1) هو :

$$y = c_1(x+1) - 2c\sqrt{x}$$

$$(3) \quad y = c_1(x+1) + c_2\sqrt{x}$$

للحصول على الحل العام لـ (2) يكفي أن نجد حلاً خاصاً لها بـ  $u$  أن وجدنا لها حلاً عاماً بدون طرف ثانٍ .

لنحول الثوابت في (3) ونأخذ :

$$c_1'(x+1) + c_2'\sqrt{x} = 0$$

ثم نحسب  $y'$  و  $y''$  ونعوض بالمعادلة فنجد :

$$c_1' + \frac{c_2'}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2x}$$

وبجمل المعادلتين الأخيرتين نجد :

$$c_1' = -1 ; c_2' = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

بالمكاملة نجد ( مع اهمال الثوابت ) :

$$c_1 = -x ; c_2 = \frac{2\sqrt{x}}{3} (x+3)$$

فالحل الخاص ل (2) هو :

$$y = \frac{x}{3} (3-x)$$

والحل العام المطلوب هو :

$$y = c_1 (x+1) + c_2 \sqrt{x} + \frac{x}{3} (3-x)$$

٥٤٦ - اذا كانت لدينا المعادلة :

$$(y^2 - 1)(xy + 1) dx + x(xy^2 + y + x) dy = 0$$

فهل لها عامل تكامل من الشكل  $(py+q)^n$  حيث  $p$  و  $q$  تابعان ل  $x$  و  $n$  ثابت ؟ في حال الإيجاب ، أوجد الحل العام للمعادلة المذكورة .

( جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٩ )

الحل :

كي يكون  $(py + q)^n$  عامل تكيل للمعادلة المفروضة يلزم ويكفي أن تتمكن من تعيين  $p(x)$  و  $q(x)$  بحيث يكون :

$$\left[ (py + q)^n (xy^3 + y^2 - xy - 1) \right]'_y \equiv \\ \left[ (py + q)^n (x^2y^2 + xy + x^2) \right]'_x$$

أو بالاشتقاق وبالاختصار على  $(py + q)^{n-1}$  نجد :

$$np(xy^3 + y^2 - xy - 1) + (py + q)(3xy^2 + 2y - x) \equiv$$

$$n(p'y + q')(x^2y^2 + xy + x^2) + (py + q)(2xy^2 + y + 2x)$$

والطرفان كثيرا حدود (من الدرجة الثالثة) بالنسبة إلى  $y$ . إذن

فهذه المطابقة تكافئ المطابقات الأربع التالية :

$$nxp = 3xp \equiv ny^2p' + 2xp$$

$$np + 2p + 3xq \equiv nxp' + nx^2q' + p + 2xq$$

$$-nxp - xp + 2q \equiv nx^2p' + nxq' \times 2xp + q$$

$$-np - xq \equiv nx^2q' + 2xq$$

والمطابقة الأولى تعطي :

$$nx^2p' \equiv nxp + xp$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{n+1}{n} \frac{dx}{x} \quad \text{أو :}$$

( قسمنا على  $n$  ، لأنه لو كان  $n=0$  لكان عامل التكيل  $\equiv 1$  )

أي أن المعادلة تامة ، ومن التجربة المباشرة نرى أن ذلك غير صحيح .

ومنه :

$$\lg \frac{p}{a} = \frac{n+1}{n} \lg x$$

$$p = a x^{1 + \frac{1}{n}} \quad \text{أي :}$$

حيث  $a$  ثابت ( حتى الآن كيفي ) .

والمطابقة الرابعة تعطي :

$$n x^2 q' = -3 x q - n a x^{1 + \frac{1}{n}}$$

$$n x q' = -3 q - n a x^{\frac{1}{n}} \quad \text{أو :}$$

وهي معادلة خطية بجمعها نجد :

$$q = -\frac{n}{4} a x^{\frac{1}{n}} + b x^{-\frac{3}{n}}$$

حيث  $b$  ثابت ( حتى الآن كيفي ) .

وتبقى المتطابقتان الثانية والثالثة . فاذا عوضنا أولاً في الثانية نجد :

$$(n \times 1) a x^{1 + \frac{1}{n}} - \frac{n}{4} a x^{1 + \frac{1}{n}} + b x^{1 - \frac{3}{n}} \equiv$$

$$n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) a x^{1 + \frac{1}{n}} + n \left[ -\frac{1}{4} a x^{\frac{1}{n} + 1} - \frac{3}{n} b x^{1 - \frac{3}{n}} \right]$$

ويبقى منها :

$$b = -3b$$

$$b = 0 \quad \text{اذن :}$$

ومنه :

$$q = -\frac{1}{4} n a x \frac{1}{n}$$

وتكون المطابقة الثانية عندئذ محققة أيضاً ، وتبقى الثالثة . نموض فيها فنجد بمد الاختصار :

$$-(n+3)a = (n+1)a$$

أو :

$$(2n+4)a = 0$$

ولو كان  $a = 0$  لكان  $p \equiv 0$  و  $q \equiv 0$  ولكان عامل التكميل  $0 \equiv$  وهو عامل تكميل سخيف . نتركه فيبقى  $2n+4=0$  ، اذن  $n = -2$  وبذلك تتحقق المطابقة الثالثة أيضاً .

فالشرط اللازم الكافي لتحقق المطابقات الأربع هو أن يكون :

$$p = a x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad q = \frac{1}{2} a x^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad n = -2$$

وبذلك يكون للمعادلة عامل تكميل من الشكل المطلوب هو :

$$\left( a x^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} a x^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}$$

حيث  $a$  ثابت كفي . ويكتب عامل التكميل هذا ، اذا أخذنا

$$: \left( \frac{1}{2} a \right)^{-2} = 1 \quad \text{بالشكل :}$$

$$\frac{x}{(2xy+1)^2}$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة نضرب طرفيها بعامل التكامل السابق فتصبح :

$$\frac{x(x y + 1)(y^2 - 1)}{(2 x y + 1)^2} d x + \frac{x^2(x y^2 + y + x)}{(2 x y + 1)^2} d y = 0$$

وهي تامة ، حلها نبدأ بحساب التكامل :

$$x^2 \int \frac{x y^2 + y + x}{(2 x y + 1)^2} d y$$

حيث نعتبر  $x$  ثابتاً . لننتقل الى متحول جديد  $z : z = 2 x y + 1$  فيأخذ التكامل بعد التعويض الشكل :

$$\frac{1}{8} \int \left( 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{4 x^2}{z^2} \right) d z$$

وبالمكاملة نجد :

$$\frac{1}{8} \left[ z + \frac{1}{z} - \frac{4 x^2}{z} \right] + f(x)$$

اذن :

$$F(x, y) = \frac{1}{8} \left[ (2 x y + 1) + \frac{1 - 4 x^2}{2 x y + 1} \right] + f(x)$$

حيث  $f(x)$  تابع لـ  $x$  نعيّنه بالاشتقاق بالنسبة لـ  $x$  ومطابقة الناتج مع امثال  $d x$  فنجد :

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left[ 2 y + \frac{-8(2 x y + 1) - 2 y(1 - 4 x^2)}{(2 x y + 1)^2} \right] + f'(x) \\ \equiv \frac{x(x y + 1)(y^2 - 1)}{(2 x y + 1)^2} \end{aligned}$$

ومنه :

$$f'(x) \equiv 0$$

وبالتالي :

$$f(x) = \text{const}$$

اذن يمكن أن نأخذ :

$$F(x, y) = \frac{1}{8} \left( 2xy + 1 + \frac{1 - 4x^2}{2xy + 1} \right)$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو :

$$2xy + \frac{1 - 4x^2}{2xy + 1} = c_1$$

$$\frac{x^2(y^2 - 1)}{2xy + 1} = c \quad \text{أو}$$

حيث  $c$  ثابت كفي .

٥٤٢ - عيّن التابع  $F(x)$  بحيث يكون للمعادلة :

$$y' + y^2 + [f(x) - 2x^2]y + [f(x) - 1] = 0$$

حلان خاصان  $y_1$  و  $y_2$  يحققان العلاقة  $y_2 = 2y_1 + 1$  . ثم عوض  
عن  $f(x)$  بالقيمة التي تجدها ، وأوجد الحل العام للمعادلة الناتجة .

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٧ )

الحل :

لكي يتحقق الشرط المطلوب ، يلزم ويكفي أن يكون هناك تابعان  
ل  $x$  ،  $y_1$  و  $y_2$  يحققان الشروط الآتية :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' + y_1^2 + (f - 2x^2)y_1 + (f - 1) = 0 \\ y_2' + y_2^2 + (f - 2x^2)y_2 + (f - 1) = 0 \\ y_2 = 2y_1 + 1 \end{array} \right.$$

بتعويض الثالثة في الثانية نجد أن هذه الشروط تكافئ :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' + y_1^2 + (f - 2x^2)y_1 + (f - 1) = 0 \\ 2y_1' + (4y_1^2 + 4y_1 + 1) + (f - 2x^2)(2y_1 + 1) \\ \quad + (f - 1) = 0 \\ y_2 = 2y_1 + 1 \end{array} \right.$$

وهي تكافئ (نطرح من الثانية ضعفي الأولى) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' + y_1^2 + (f - 2x^2)y_1 + (f - 1) = 0 \\ y_1^2 + 2y_1 + 1 - x^2 = 0 \\ y_2 = 2y_1 + 1 \end{array} \right.$$

وهذه تكافئ المجلتين اللتين نحصل عليهما بتعويض  $\alpha$  بـ  $1 + \alpha$  أو

1 - في :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' + y_1^2 + (f - 2x^2)y_1 + (f - 1) = 0 \\ y_1 = \alpha x - 1 \\ y_2 = 2y_1 + 1 \end{array} \right.$$

أو (بالتعويض من الثانية في الأولى والثالثة) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 3x^2 - 2\alpha x - 2\alpha x^3 + \alpha x f = 0 \\ y_1 = \alpha x - 1 \\ y_2 = 2\alpha x - 1 \end{array} \right.$$

ونسنتج من الأولى أن :

$$f(x) = 2x^2 - 3\alpha x + 2 - \frac{1}{x}$$

اذن لكي يتحقق الشرط المطلوب يلزم ويكفي أن يتحقق أحد الشرطين :

$$\begin{cases} f = 2x^2 - 3x + 2 - \frac{1}{x} \\ y_1 = x - 1 \\ y_2 = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 2x^2 + 3x + 2 - \frac{1}{x} \\ y_1 = -x - 1 \\ y_2 = -2x - 1 \end{cases}$$

أي أن هناك قيمتين للتابع  $f(x)$  تحققان الشرط المطلوب ويوافق كل قيمة منها حلان خاصان. بالتعويض عن  $f$  بقيمته في المعادلة تصبح :

$$(*) \quad y' + y^2 + \left( -3\alpha x + 2 - \frac{1}{x} \right) y + \left( 2x^2 - 3\alpha x + 1 - \frac{1}{x} \right) = 0$$

لايجاد الحل العام نجري التغير :

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = z$$

ونعوض في المعادلة فتصبح :

$$z' + (y_1 - y_2) z = 0$$

$$z' - \alpha x z = 0 \quad \text{أو} :$$

ومنه بالمكاملة :

$$z = c e^{\frac{1}{2} \alpha x^2}$$

ويصبح الحل العام معيناً بالعلاقة :

$$\frac{y - (\alpha x - 1)}{y - (2 \alpha x - 1)} = c e^{\frac{1}{2} \alpha x^2}$$

وبالحل نجد :

$$y = \frac{(2 \alpha x - 1) c e^{\frac{1}{2} \alpha x^2} - (\alpha x - 1)}{c e^{\frac{1}{2} \alpha x^2} - 1}$$

نعوض  $\alpha = 1$  فنحصل على الحل العام للمعادلة الأولى التي تنتج عن (\*) من أجل  $\alpha = 1$  . وإذا عوضنا  $\alpha = -1$  نحصل على الحل العام للمعادلة الثانية التي تنتج عن (\*) من أجل  $\alpha = -1$  .

٥٤٣ - حل معادلة جاكوبي :

$$(x - y) (x dy - y dx) + (5x + 2y + 5) dx - (x + 3y + 5) dy = 0$$

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٧ )

الحل :

نبدأ بالتخلص من الحدين الثابتين في أمثال dx و dy ويكون ذلك  
باجراء التغير :

$$x = a + X \quad ; \quad y = b + Y$$

فتصبح المعادلة :

$$(X - Y + a - b) (X dY - Y dX) + (X - Y + a - b) \\ (a dY - b dX) + (5X + 2Y + 5a + 2b + 5) dX \\ - (X + 3Y + a + 3b + 5) dY = 0$$

ويجمع الحدود المتشابهة : أمثال dX من الحد الثاني مع الثالث  
وأمثال dY من الحد الثاني مع الرابع ، نجد أن الحد الثابت في أمثال  
dX هو :

$$5a + 2b + 5 - b(a - b)$$

وفي أمثال dY هو :

$$-(a + 3b + 5) + a(a - b)$$

ثم نعين a و b بحيث يكون هذان المقداران معدومين ، أي :

$$(1) \quad \frac{a + 3b + 5}{a} = \frac{5a + 2b + 5}{b} = \frac{a - b}{1} = \lambda$$

حيث  $\lambda$  مجهول مساعد .

من (1) نحصل على المعادلات :

$$(2) \quad \begin{cases} (1 - \lambda) a + 3b + 5 = 0 \\ 5a + (2 - \lambda) b + 5 = 0 \\ a - b - \lambda = 0 \end{cases}$$

وهذه ثلاث معادلات خطية بمجهولين يلزم كي يكون لها حل مشترك  
أن تحقق  $\lambda$  المعادلة المميزة :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 5 \\ 5 & 2-\lambda & 5 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

أو (بعد الاصلاح) :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 13\lambda + 15 = 0$$

ومن الواضح أن  $\lambda_1 = 1$  جذر لهذه المعادلة . فإذا استفدنا من هذا الجذر  
نجد أن الجذرين الآخرين هما  $\lambda_2 = -3$  و  $\lambda_3 = 5$  .

إذا جعلنا  $\lambda = 1$  في المعادلات (2) نجد ان :

$$a = -\frac{2}{3} \quad b = -\frac{5}{3}$$

ولو عوضنا الجذر الثاني في (2) لوجدنا ان  $b = 1$  ;  $a = -2$  .  
اما الجذر الثالث فيعطينا  $b = -15$  ;  $a = 10$  . ومن الواضح ان من  
الأبسط ان نأخذ  $b = 1$  ,  $a = -2$  فتصبح المعادلة الجديدة بـ  $X$  و  $Y$  هي :

$$(X - Y - 3) (X dY - Y dX) + (X - Y - 3) (-2 dY - dX) \\ + (5X + 2Y - 3) dX - (X + 3Y + 6) dY$$

أو :

$$(3) \quad (X - Y) (X dY - Y dX) + (6Y + 4X) dX \\ - (Y + 6X) dY = 0$$

ولحل هذه المعادلة نقسم على  $X - Y$  فتصبح أمثال  $dX$  و  $dY$  متجانسة

ثم نفرض  $\frac{Y}{X} = u$  ونعوض فنجد :

$$(1 - u) X^2 du + (6u + 4) dX - (u + 6) (X du + u dX) = 0$$

أو :

$$(1 - u) X^2 - (u + 6) X + (6u + 4 - u^2 - 6u) \frac{dX}{du}$$

وهي معادلة برنوي في  $X$  (حيث  $u$  متحول مستقل) .

$$(-u^2 + 4) \frac{dX}{du} - (u + 6) X + (1 - u) X^2 = 0$$

حل معادلة برنوي هذه نفرض  $\frac{1}{X} = z$  فنحصل على المعادلة الخطية:

$$(u^2 - 4) \frac{dz}{du} - (u + 6) z = u - 1$$

ولحلها نبدأ بحلها بدون طرف ثان فنجد :

$$\frac{dz}{z} = \frac{u + 6}{(u - 2)(u + 2)} du = \frac{2 du}{u - 2} - \frac{du}{u + 2}$$

وبالمكاملة نجد :

$$z = c \frac{(u - 2)^2}{u + 2}$$

حيث  $c$  ثابت كيفي . لحل المعادلة بطرف ثانٍ نحول الثابت  $c$  ونعوض في المعادلة فنحصل على :

$$d c = \frac{u-1}{(u-2)^3} d u = \frac{d u}{(u-2)^2} + \frac{d u}{(u-2)^3}$$

ومنه :

$$c = -\frac{1}{u-2} - \frac{1}{2(u-2)^2} + \frac{c_1}{2}$$

فالحل العام للمعادلة الخطية هو :

$$z = -\frac{u-2}{u+2} - \frac{1}{2(u+2)} + \frac{c_1(u-2)^2}{2(u+2)}$$

ومنه يكون حل معادلة برنويبي :

$$X = \frac{2u+4}{c_1(u-2)^2 - 2u+3}$$

للحصول على حل المعادلة (3) نضع  $u = \frac{Y}{X}$  فنجد بعد الاصلاح :

$$c(Y-2X)^2 - 2XY + 3X^2 = 2Y + 4X$$

نضع الآن  $Y = y - 1$  ,  $X = x + 2$  فنجد حل المعادلة الأصلية :

$$c(y-2x-5) - 2(xy+2y-x-2) + 3(x^2+4x+4) = 2y+4x+6$$

أو :

$$\frac{2xy - 3x^2 + 6y - 10x - 10}{y - 2x - 5} = c$$

٥٤٤ - أوجد الحل العام لكل من المعادلتين :

$$x + y y' = (1 + y'^2)^{3/2} ; (y + y')^3 = y - y'$$

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٨ )

الحل :

حل المعادلة الأولى نبدأ بتمثيل السطح :

$$x + y z = (1 + z^2)^{3/2}$$

وسيطياً ، فنجد :

$$x = -u v + (1 + v^2)^{3/2} ; y = u ; z = v$$

ثم نعوض في المعادلة :

$$d y = z d x$$

فنجد :

$$d u = v \left[ -v d u - u d v + \frac{3}{2} (1 + v^2)^{1/2} 2 v d v \right]$$

$$(1 + v^2) d u = v \left[ -u + 3 v (1 + v^2)^{1/2} \right] d v \quad \text{أو :}$$

$$(1) \quad (1 + v^2) \frac{d u}{d v} + u v = 3 v^2 \sqrt{1 + v^2} \quad \text{أو :}$$

وهي معادلة خطية في u نبدأ بحلها بدون طرف ثاني :

$$(1 + v^2) \frac{d u}{d v} = -u v$$

$$\frac{d u}{u} = - \frac{v d v}{1 + v^2} \quad \text{أو :}$$

وبالمكاملة نجد :

$$\lg \frac{u}{c} = \lg \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

وبإزالة اللوغارتم :

$$u = \frac{c}{\sqrt{1+v^2}}$$

للحصول على حل المعادلة بطرف ثان نحول الثابت ونعوض في المعادلة فنجد :

$$\frac{d c}{d v} = 3 v^2$$

$$c = v^3 + c_1 \quad \text{ومنه :}$$

فالحل العام لـ (1) هو :

$$u = \frac{v^3 + c_1}{\sqrt{1+v^2}}$$

نعوض في المعادلات الوسيطة فنحصل :

$$x = - \frac{v (v^3 + c_1)}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{(1+v^2)^2}{\sqrt{1+v^2}}, \quad y = \frac{v^3 + c_1}{\sqrt{1+v^2}}, \quad z = v$$

نحذف الأخيرة فنحصل على المنحنيات التكاملية ممثلة وسيطياً بدلالة  $v$  :

$$x = (1+v^2) \sqrt{1+v^2} - \frac{v (v^3 + c_1)}{\sqrt{1+v^2}}, \quad y = \frac{v^3 + c_1}{\sqrt{1+v^2}}$$

حل المعادلة الثانية تمثل السطح :

$$(y + z)^3 = y - z$$

وسيطياً ، وذلك بفرض  $y + z = u$  فيكون  $y - z = u^3$  ومنه :

$$y = \frac{1}{2} (u + u^3) , \quad z = \frac{1}{2} (u - u^3)$$

ونأخذ مع هاتين المعادلتين :  $x = v$

ف نجد التمثيل الوسيطى ( بدلالة الوسيطين  $u$  و  $v$  ) . نعوض في المعادلة

$$dy = z dx$$

$$\frac{1}{2} (1 + 3u^2) du = \frac{1}{2} (u - u^3) dv$$

$$dv = \left[ \frac{1}{u} + \frac{2}{1-u} - \frac{2}{1+u} \right] du \quad \text{أو :}$$

وبالمكاملة نجد :

$$v = \lg \frac{u}{(1-u^2)^2} + c$$

وبالتعويض في المعادلات الوسيطية نجد :

$$x = \lg \frac{u}{(1-u^2)^2} + c , \quad y = \frac{1}{2} (u + u^3) , \quad z = \frac{1}{2} (u - u^3)$$

نحذف الأخيرة ونقتصر على الأولى والثانية فنجد ان هاتين المعادلتين

تمثلان الحل العام وسيطياً ( بدلالة  $u$  ) .

٥٤٥ - حل المجموعة الآتية :

$$y' - y + z - 5u = 0$$

$$z' - y - z = -x^2$$

$$u' + y - z + 4u = 0$$

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٧ )

الحل :

نبدأ بحل المجموعة بدون أطراف ثانية فنفتش عن حل خاص من

الشكل :

$$y = A x^r , \quad z = B x^r , \quad u = C x^r$$

نعوض ونطابق فنجد :

$$(r - 1) A + B - 5C = 0$$

$$-A + (-1 + r) B = 0$$

$$A - B + (4 + r) C = 0$$

وهذه جملة معادلات خطية متجانسة في A و B و C . يلزم كي يكون لها حل غير الحل البديهي ان ينعدم معين الأمثال فنحصل على المعادلة المميزة :

$$\begin{vmatrix} r-1 & 1 & -5 \\ -1 & -1+r & 0 \\ 1 & -1 & 4+r \end{vmatrix} = 0$$

$$(r+1)(r+1)(r+2) = 0$$

ولهذه المعادلة الجذور البسيطة التالية :  $r = 1, -1, -2$

إن الجذر الأول  $r=1$  يعطينا :

$$B - 5C = 0 \quad -A = 0 \quad A - B + C = 0$$

$$A = 0 \quad , \quad B = 5C \quad \text{ومنه :}$$

$$0 \quad , \quad 5e^x \quad , \quad e^x \quad \text{فالحل الخاص هو :}$$

أما الجذر الثاني  $r=-1$  فيعطي :

$$-2A + B - 5C = 0 \quad , \quad -A - 2B = 0 \quad , \quad A - B + 3C = 0$$

$$A = -2B \quad , \quad B = C \quad \text{ومنه :}$$

فالحل الخاص هو :

$$-2e^{-x} \quad , \quad e^{-x} \quad , \quad e^{-x}$$

أما الجذر الثالث  $r=-2$  فيعطي :

$$-3A + B - 5C = 0 \quad , \quad -A - 3B = 0 \quad , \quad A - B + 2C = 0$$

$$A = -3B \quad , \quad C = 2B \quad \text{ومنه :}$$

فالحل الخاص هو :

$$-3e^{-2x} \quad , \quad e^{-2x} \quad , \quad 2e^{-2x}$$

إن هذه الحلول الثلاثة مستقلة خطياً فالحل العام بدون أطراف ثانية هو :

$$y = -2c_2 e^{-x} - 3c_3 e^{-2x}$$

$$z = 5c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

$$u = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{-2x}$$

للحصول على الحل الخاص بأطراف ثانية نحول الثوابت ونعوض في المجموعة فنجد :

$$\begin{aligned}
 & - 2 c_2' e^{-x} - 3 c_3' e^{-2x} = 0 \\
 5 c_1' e^x + c_2' e^{-x} + c_3' e^{-2x} &= -x^2 \\
 c_1' e^x + c_2' e^{-x} + 2 c_3' e^{-2x} &= 0
 \end{aligned}$$

وبالحل نجد :

$$c_1' = -\frac{1}{6} x^2 e^{-x}, \quad c_2' = -\frac{1}{2} x^2 e^x, \quad c_3' = \frac{1}{3} x^2 e^{2x}$$

وبالمكاملة :

$$c_1 = \frac{1}{6} e^{-x} (x^2 + 2x + 2)$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} e^x (x^2 - 2x + 2)$$

$$c_3 = \frac{1}{12} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1)$$

ومنه الحل الخاص :

$$y = \frac{1}{4} (2x^2 - 6x + 7)$$

$$z = \frac{1}{4} (2x^2 + 10x + 3)$$

$$u = \frac{1}{2} (2x - 1)$$

وللحصول على الحل العام بأطراف ثانية نضيف هذا الحل الخاص إلى  
الحل العام بدون أطراف ثانية فينتج المطلوب .

٥٤٦ - أوجد بطريقة التخفيض ، جميع حلول المعادلة :

$$y'^2 y^{(4)} - 4 y' y'' y''' + 3 y''^3 = 0$$

( جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧٠ )

الحل :

نفرص أولاً أن  $y' = z(x)$  ونعوض فنجد :

$$z^2 z''' - 4 z z' z'' + 3 z'^3 = 0$$

وهي معادلة متجانسة في  $z$  ومشتقاته ولهذا نفرص :

$$\frac{z'}{z} = u(x)$$

فيكون :

$$z' = z u , z'' = z ( u' + u^2 ) , z''' = z ( u'' + 3 u u' + u^3 )$$

بالتعويض نجد :

$$z [ u'' + 3 u u' + u^3 - 4 u ( u' + u^2 ) + 3 u^3 ] = 0$$

ولكن  $z = 0$  اي  $y' = 0$  يعطي الحل  $y = c$  . ولذلك ( باصلاح ما داخل القوسين الكبيرين ) نصل إلى المعادلة :

$$u'' - u u' = 0$$

وهذه لا تحوي  $x$  لذلك نعتبر  $u$  متحولاً مستقلاً ونأخذ :

$$u' = p(u)$$

فيكون :

$$u'' = p' p$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$pp' - up = 0$$

ومنه إما :  $p = 0$  أي :  $u' = 0$  أي :  $u = c_1$

$$\frac{z'}{z} = c_1 \text{ وبالتالي ( } c_1 \text{ ثابت كيفي)}$$

$$y' = c_2 e^{c_1 x} \quad , \quad z = c_2 e^{c_1 x}$$

وبالمكاملة ثانية نجد :

$$y = \frac{c_2}{c_1} e^{c_1 x} + c_3$$

أو :

$$p' = u$$

وبالمكاملة :

$$p = \frac{1}{2} (u^2 + c)$$

حيث  $c$  ثابت كيفي . وبما أن :  $u' = p$  يكون :

$$u' = \frac{1}{2} (u^2 + c)$$

$$\frac{du}{u^2 + c} = \frac{1}{2} du \quad \text{أو :}$$

وهنا نميز ثلاث حالات اذا كان  $c$  موجباً نضع :

$$c = c_1^2 \text{ ( } c_1 \text{ ثابت كيفي) فنجد :}$$

$$\frac{du}{u^2 + c_1^2} = \frac{1}{2} dx$$

$$\operatorname{arctg} \frac{u}{c_1} = \frac{1}{2} c_1 x + c_2 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$u = c_1 \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} c_1 x + c_2 \right) \quad \text{أو :}$$

اذن :

$$\frac{dz}{z} = c_1 \frac{\sin \left( \frac{1}{2} c_1 x + c_2 \right)}{\cos \left( \frac{1}{2} c_1 x + c_2 \right)}$$

وبالمكاملة :

$$\operatorname{lg} \frac{z}{c_1} = - 2 \operatorname{lg} \cos \left( \frac{1}{2} c_1 x + c_2 \right)$$

$$y' = z = \frac{c_1^3}{\cos^2 \left( \frac{1}{2} c_1 x + c_2 \right)} \quad \text{اذن :}$$

ومنه :

$$y = \frac{2 c_1^3}{c_1} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} c_1 x + c_2 \right) + c_4$$

وإذا كان  $c$  سالباً نكتب :  $c = - c_1^2$  فنجد :

$$\frac{1}{2} dx = \frac{du}{u^2 - c_1^2} = \frac{1}{2c_1} \left( \frac{1}{u - c_1} - \frac{1}{u + c_1} \right) du$$

وبالمكاملة نجد :

$$\frac{u - c_1}{u + c_1} = c_2 e^{c_1 x}$$

$$u = c_1 \frac{1 + c_2 e^{c_1 x}}{1 - c_2 e^{c_1 x}} \quad \text{أو :}$$

$$\frac{dz}{z} = c_1 \frac{1 + c_2 e^{c_2 x}}{1 - c_2 e^{c_1 x}} dx \quad \text{ومنه :}$$

وللمكاملة هنا نفرض  $c_2 e^{c_1 x} = v$  فنجد بالتعويض :

$$\frac{dz}{z} = \frac{1 + v}{1 - v} \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} + \frac{2 dv}{1 - v}$$

$$\lg \frac{z}{c_3} = \lg \frac{v}{(1 - v)^2} \quad \text{ومنه :}$$

$$z = \frac{c_3 v}{(1 - v)^2} = c_3 \frac{c_2 e^{c_1 x}}{(1 - c_2 e^{c_1 x})^2} \quad \text{اذن :}$$

$$dy = c_3 c_2 \frac{e^{c_1 x}}{(1 - c_2 e^{c_1 x})^2} dx \quad \text{أي :}$$

نفرض أن  $c_2 e^{c_1 x} = W$  :

فيكون :  $dx = \frac{1}{c_1} \frac{dw}{W}$

$$dy = \frac{c_3}{c_1} \frac{dw}{(1-w)^2} \quad \text{اذن :}$$

$$y = \frac{c_3}{c_1} \cdot \frac{1}{1-w} = \frac{c_3}{c_1} \frac{1}{1-c_2 e^{c_1 x}} + c_4 \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{dx}{u^2} = \frac{1}{2} dx \quad \text{واذا كان } c \text{ معدوماً نجد :}$$

$$u = -\frac{2}{x+c_1} \quad \text{ومنه بعد المكاملة والاصلاح :}$$

$$z = \frac{c_2}{(x+c_1)^2} \quad \text{وبالعودة الى } z \text{ والمكاملة نجد :}$$

$$y = -\frac{c_2}{x+c_1} + c_3 \quad \text{واخيراً :}$$

٥٤٧ - تحقق من أن للمعادلة الخطية :

$$(1) \quad x(x^2 + 1)y'' + 2y' - 2xy = 0$$

حلاً خاصاً من الشكل  $y = x^n$  (حيث  $n$  ثابت).

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

أوجد بعد ذلك (بطريقة تحويل الثوابت) الحل العام للمعادلة :

$$(2) \quad x(x^2 + 1)y'' + 2y' - 2xy = x^2 + 1$$

(جامعة دمشق، مقرر المعادلات التفاضلية، الدورة الثانية ١٩٦٧)

الحل :

نعوض  $y = x^n$  في المعادلة (1) فنجد :

$$n(n-1)x^{n-1}(x^2+1) + 2nx^{n-1} - 2x^{n+1} = 0$$

أو :

$$(n^2 - n - 2)x^{n+1} + (n^2 + n)x^{n-1} \equiv 0$$

إذن يجب أن يكون :

$$n^2 - n - 2 = 0 \quad ; \quad n^2 + n = 0$$

$$(n+1)(n-2) = 0 \quad n(n+1) = 0 \quad : \text{أو}$$

وتحققان (فقط) لما  $n = -1$  وبالتالي يكون :

$$(1) \quad \text{حلاً خاصاً للمعادلة} \quad y = \frac{1}{x}$$

لنستخدم هذا الحل في تخفيض مرتبة المعادلة فنفرض :

$$y = \frac{z}{x} \text{ ونعوض في (1) فنجد :}$$

$$(x^2 + 1)z'' - 2xz' = 0$$

ولحل هذه المعادلة نضع :  $z' = t$  فيكون :

$$(x^2 + 1)t' - 2xt = 0$$

وهذه معادلة ذات متحولات قابلة للفصل فإذا كاملناها نجد :

$$t = c(x^2 + 1)$$

$$z' = c(x^2 + 1) \quad : \text{أي}$$

$$z = c \left( \frac{x^3}{3} + x \right) + c_1 \quad \text{ومنه :}$$

وإذا عوضنا  $z$  بما يساويها نجد الحل العام للمعادلة (1) :

$$(3) \quad y = \frac{c_1}{x} + c_2 (x^2 + 3)$$

لايجاد حل خاص لـ (2) نحول الثوابت في الحل العام (3) ونأخذ :

$$\frac{c_1'}{x} + c_2' (x^2 + 3)$$

ثم نحسب  $y'' y'$  ونعوض بالمعادلة فنجد :

$$x (x^2 + 1) \left[ -\frac{c_1'}{x^2} + c_2' (2x) \right] = x^2 + 1$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين نجد :

$$c_1' = -\frac{x^3 + 3x}{3(x^2 + 1)} ; \quad c_2' = \frac{1}{3(x^2 + 1)}$$

بالمكاملة نجد (بإهمال الثوابت) :

$$c_2 = \frac{1}{3} \text{arc tg} x \quad , \quad c_1 = -\frac{x^2}{6} - \frac{1}{3} \lg (x^2 + 1)$$

ومنه الحل الخاص لـ (2) :

$$y_1 = -\frac{x}{6} - \frac{1}{3x} \lg (x^2 + 1) + \frac{1}{3} (x^2 + 3) \text{arc tg} x$$

ويكون الحل العام لـ (2) :

$$y = y_1 + \frac{c_1}{x} + c_2 (x^2 + 3)$$

٥٤٨ - اذا كانت لدينا المعادلتان :

$$(1+x) x^2 y'' + (4 + 4x + x^2) xy' + (2 + 2x + x^2) y = 0$$

$$(1-x) x^2 y'' + (6 - 4x - x^2) xy' + (6 - 3x^2) y = 0$$

فهل توجد حلول مشتركة بينهما؟

في حالة الايجاب ، أوجد الحل العام للمعادلة الأولى ، ثم أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(1+x) x^2 y'' + (4 + 4x + x^2) xy' + (2 + 2x + x^2) y = (1+x)^2$$

( جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٩ )

الحل :

نوجد أمثال  $y''$  في المعادلتين المفروضتين فنضرب طرفي الأولى بـ  $(1-x)$  وطرفي الثانية بـ  $(1+x)$  ثم نطرح فنجد أن مجموعة المعادلتين الأصليتين تكافئ مجموعة المعادلتين :

$$(1+x) x^2 y'' + (4 + 4x + x^2) xy' + (2 + 2x + x^2) y = 0$$

$$(2 + 2x - 2x^2) xy' + (4 + 6x - 2x^2 - 2x^3) y = 0$$

ولايجاد الحلول المشتركة بين المعادلتين الأصليتين يكفي أن نجد الحلول المشتركة بين المعادلتين الأخيرتين ، ولهذا يكفي أن نجد جميع حلول المعادلة الثانية ثم نختار من بينها الحلول التي تحقق المعادلة الأولى . ولكن الثانية

تكتب بالشكل :

$$(2 + 2x - 2x^2) x \frac{dy}{dx} = (2x^3 + 2x^2 - 6x - 4) y$$

أو :

$$\frac{dy}{y} = - \frac{x^3 + x^2 - 3x - 2}{(x^2 - x - 1)x} dx = - \frac{x + 2}{x} dx$$

$$= - \left( 1 + \frac{2}{x} \right) dx$$

ومنه :

$$\lg \frac{y}{c} = - (x + 2 \lg x)$$

اذن :

$$y = c e^{-x - 2 \lg x} = \frac{c}{x^2} e^{-x}$$

وهذه هي جميع حلول المعادلة الثانية . وبالتعويض في المعادلة الأولى . نجد أن الطرف الأول يصبح :

$$\left[ (1+x)x^2 \left( \frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) + (4+4x+x^2)x \left( -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) + (2+2x+x^2) \left( \frac{1}{x^2} \right) \right] ce^{-x}$$

أو :

$$\left[ (1+x)(6+4x+x^2) + (4+4x+x^2)(-2-x) + (2+2x+x^2) \right] ce^{-x}$$

ومن السهل أن نرى ان هذا يطابق الصفر - اذن فالحلول المشتركة بين

المعادلتين هي التوابع :  $y = \frac{c}{x^2} e^{-x}$  حيث  $c$  ثابت كفي

لايجاد الحل العام للمعادلة الأولى نستخدم الحل الخاص :

$y = x^{-2} e^{-x}$  في تخفيض مرتبتها ، وذلك بفرض ان :

فيكون  $y = x^{-2} e^{-x} z$  :

$$y' = x^{-2} e^{-x} z' + (-2x^{-3} - x^{-2}) e^{-x} z$$

$$y'' = x^{-2} e^{-x} z'' + 2(-2x^{-3} - x^{-2}) e^{-x} z' + (6x^{-4} + 4x^{-8} + x^{-2}) e^{-x} z$$

وبالتعويض في المعادلة نجد :

$$(1 + x) x z'' = (2x + x^2) z'$$

$$(1 + x) z'' = (2 + x) z'$$

أو :

$$\frac{dz'}{z'} = \frac{x+2}{x+1} dx$$

وبالمكاملة نجد :

$$\lg \frac{z'}{c_1} = x + \lg(x+1)$$

أو :

$$z' = c_1 (x+1) e^x$$

وبالمكاملة مرة ثانية نجد :

$$\begin{aligned} z &= c_1 [ e^x (x + 1) - e^x ] + c_2 \\ &= c_1 x e^x + c_2 \end{aligned}$$

ومنه :

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 \frac{e^{-x}}{x^2}$$

وهذا هو الحل العام المطلوب .

لايجاد الحل العام للمعادلة :

$$\begin{aligned} (1 + x) x^2 y'' + (4 + 4x + x^2) xy' + (2 + 2x + x^2) y \\ = (1 + x)^2 \end{aligned}$$

نستخدم طريقة تحويل الثوابت ، وذلك بالبحث عن حل خاص لهذه المعادلة من الشكل :

$$y = c_1 \left( \frac{1}{x} \right) + c_2 \left( \frac{1}{x^2} e^{-x} \right)$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  تابعان لـ  $x$  ، نعينها بفرض أن :

$$c_1' \left( \frac{1}{x} \right) + c_2' \left( \frac{1}{x^2} e^{-x} \right) = 0$$

فيكون :

$$y' = c_1 \left( -\frac{1}{x^2} \right) + c_2 \left( -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) e^{-x}$$

$$y'' = c_1' \left( -\frac{1}{x^2} \right) + c_2' \left( -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) e^{-x} + \dots$$

وبالتعويض في المعادلة الجديدة نجد العلاقة الثانية :

$$(1+x)x^2 \left[ c_1 \left(-\frac{1}{x^2}\right) + c_2' \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x} \right] = (1+x)^2$$

وبذلك يكون علينا حساب  $c_2'$  و  $c_1'$  من المعادلتين :

$$c_1' x + c_2' e^{-x} = 0$$

$$c_1' x + c_2' (2+x) e^{-x} = -x(1+x)$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$c_1' = 1 \quad c_2' = -x e^x$$

وبالمكاملة :

$$c_1 = x \quad , \quad c_2 = (-x+1) e^x$$

ومنه الحل الخاص :

$$y = 1 + \frac{1-x}{x^2}$$

فالحل العام المطلوب هو :

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 e^{-x}}{x^2}$$

٥٤٩ - لدينا المعادلة :

$$y(y+z) dx + z(z+x) dy + y[y+f(x)] dz = 0$$

اكتب شرط الحل ، ثم عين التابع  $f(x)$  بحيث يكون هذا الشرط محققاً ، ثم عوض عن  $f(x)$  في المعادلة السابقة بالقيمة التي وجدتها ، ثم

أوجد الحل العام للمعادلة الناتجة .

( جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٧٠ )

الحل :

ان شرط الحل للمعادلة :

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

هو ، كما نعلم :

$$P \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \equiv 0$$

فبالنسبة للمعادلة المفروضة يكون هذا الشرط :

$$y ( y + z ) [ 2z + x - 2y - f(x) ] + z ( z + x ) [ y f' ( x ) - y ] + y [ y + f(x) ] [ 2y + z - z ] \equiv 0$$

أو :

$$y^2 [ 2z + x - 2y - f(x) ] + yz [ 2z + x - 2y - f(x) ] + z ( z + x ) y f' ( x ) - zy ( z + x ) + 2y^2 + 2y^2 f(x) \equiv 0$$

بما أن الطرف الأول كثير حدود في z ويطابق الصف فان أمثاله كلها تطابق الصفر .

$$y [ 1 + f' ( x ) ] \equiv 0$$

$$x y f' ( x ) - y f ( x ) \equiv 0$$

$$y^2 f ( x ) + y^2 x \equiv 0$$

من الأولى نجد  $f'(x) \equiv -1$  نعوض في الثانية فنحصل على :

$$f(x) \equiv -x \text{ ، ومنه } f(x) = -x \text{ ، وبالتالي :}$$

$f'(x) \equiv -1$  وهذا يعني أن  $f(x) \equiv -x$  يحقق الأولى والثانية .

نعوض في الثالثة فنجد  $-xy^2 + xy^2 \equiv 0$  فهي محققة ايضاً . إذن :

$$f(x) = -x \text{ يحقق الشرط المطلوب ( ولا يوجد غيره ) .}$$

نعوض في المعادلة المفروضة فنجد :

$$y(y+z) dx + z(z+x) dy + y(y-x) dz = 0$$

ان هذه المعادلة قابلة للحل تماماً ومتجانسة . نحسب المقدار :

$$\begin{aligned} Px + Qy + Rz &= y(y+z)x + z(z+x)y + y(y-x)z \\ &= xy^2 + xyz + z^2y + zy^2 \end{aligned}$$

فهو لا يطابق الصفر ، إذن المقدار :

$$\frac{1}{xy^2 + xyz + z^2y + zy^2}$$

عامل تكميل للمعادلة .

بتحليل المخرج نجد ان عامل التكميل هذا يكتب بالشكل :

$$\frac{1}{y(y+z)(x+z)}$$

لنضرب المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة :

$$\frac{dx}{x+z} + \frac{3 dy}{y(y+z)} + \frac{(y-x) dz}{(y+z)(x+z)} = 0$$

نكامل الحد الأول فنجد :

$$\lg(x+z) + h(y, z)$$

نشتق بالنسبة إلى  $y$  فنحصل على :

$$h'y = \frac{z}{y(y+z)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+z}$$

$$h = \lg y - \lg(y+z) + g(z) \quad \text{ومنه :}$$

نعوض  $h$  بقيمتها فنجد :

$$\lg(x+z) + \lg y - \lg(y+z) + g$$

نشتق بالنسبة إلى  $z$  فنحصل :

$$\frac{1}{x+z} - \frac{1}{y+z} + g'(z) = \frac{y-x}{(y+z)(z+x)}$$

$$g'(z) = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$g(z) = \text{const} \quad \text{اذن :}$$

فيكون تكامل الطرف الأول من المعادلة هو :

$$\lg(x+z) + \lg y - \lg(y+z) + \text{const}$$

والحل العام للمعادلة هو :

$$\lg \frac{y(x+z)}{y+z} = \text{const}$$

$$\frac{y(x+z)}{y+z} = c \quad \text{أو :}$$

حيث  $c$  ثابت كيفي .

٥٥٠ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x^2 - y^2 - z^2) p + 2xyq = 2x(z + 1)$$

ثم أوجد السطح التكامل الذي يحوي الدائرة :

$$x^2 + z^2 = 1 \quad ; \quad y = 1$$

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧٠ )

الحل :

نكتب المجموعة الملحقه .

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2x(z + 1)}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z + 1} \quad \text{من النسبتين الأخيرتين نجد :}$$

$$\frac{z + 1}{y} = c \quad \text{وحل هذه المعادلة هو :}$$

إذن :  $\frac{z + 1}{y}$  تكامل اولي نستخدمه في تخفيض المرتبة .

لنجعل :  $z = cy - 1$  في النسبتين الأولىين فنحصل :

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - (cy - 1)^2} = \frac{dy}{2xy}$$

ومنه :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 - (cy - 1)^2}{2xy}$$

وهي معادلة برنوبي يمكن حلها بالطريقة المعروفة ، أو نكتب

$$\frac{dx^2}{dy} = \frac{x^2}{y} - \frac{y^2 + (cy - 1)^2}{y}$$

وهي خطية في  $x^2$  . نحلها أولاً بدون طرف :

$$\frac{dx^2}{dy} = \frac{x^2}{y}$$

$$x^2 = ky \quad \text{فنجد :}$$

ثم نحول الثابت  $k$  :

$$y \frac{dk}{dy} = - \frac{y^2 + c^2 y^2 - 2cy + 1}{y}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل :

$$k = - (1 + c^2) y + 2c \lg y + \frac{1}{y} + c_1$$

اذن :

$$x^2 = - (1 + c^2) y^2 + 2cy \lg y + 1 + c_1 y$$

أو :

$$\frac{1}{y} [ x^2 + (1 + c^2) y^2 - 2cy \lg y - 1 ] = c,$$

ومنه التكامل الأولي :

$$\frac{1}{y} [ x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - 2(z + 1) \lg y - 1 ]$$

فالحل العام للمعادلة المفروضة يتعين بالمعادلة :

$$F \left[ \frac{z+1}{y}, \right. \\ \left. \frac{1}{y} (x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 2(z+1) \lg y - 1) \right] = 0$$

حيث F تابع كيني .

ولإيجاد السطح التكاملي الخاص نكتب المعادلات :

$$y = 1 ; x^2 + z^2 + 1 ; \frac{z+1}{y} = c_1$$

$$\frac{1}{y} [ x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 2(z+1) \lg y - 1 ] = c_2$$

ثم نعوض الأولى في البقية :

$$x^2 + z^2 = 1 ; z + 1 = c_1 ; x^2 + (z+1)^2 = c_2$$

$$x^2 + (c_1 - 1)^2 = 1 ; x^2 + c_1^2 = c_2 \quad \text{أو :}$$

$$c_2 - c_1^2 + (c_1 - 1)^2 = 1 \quad \text{أو :}$$

$$c_2 - 2c_1 = 0 \quad \text{إذن :}$$

فالسطح المطلوب :

$$\frac{1}{y} [ x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 2(z+1) \lg y - 1 ] = \frac{2(z+1)}{y}$$

أو :

$$x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 2(z+1) \lg y - 1 = 2(z+1)$$

أو :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(z+1) \lg y - 2 = 0$$

٥٥١ - أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة :

$$x^2 q (x p + y q) x p + z = 0$$

ثم أوجد السطح التكاملي الذي يحوي القطع :

$$x = \frac{1}{2} ; \quad z + (y + 1)^2 = 0$$

( جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٩ )

الحل :

لايجاد تكامل تام نكتب المجموعة الملحقة :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^3 q + x} &= \frac{dy}{x^3 p + 2 x^2 y q} = \frac{dz}{2 x^3 q p + x p + 2 x^2 y q^2} = \\ &= \frac{dp}{3 x^2 p q + 2 x y q^2 + 2 p} = \frac{-dq}{x^2 q^2 + q} \end{aligned}$$

ومن النسبتين الأولى والأخيرة نجد :

$$\frac{dx}{x(x^2 q + 1)} + \frac{dq}{q(x^2 q + 1)} = 0$$

أو :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dq}{q} = 0$$

ومنه التكامل الأولي :  $xq$  .

نكتب  $xq = a$  ، ومنه  $q = \frac{a}{x}$  وبالتعويض في المعادلة المفروضة نجد :

$$p = -\frac{a^2 y + z}{ax^2 + x}$$

وبالتعويض في :

$$dz = p dx + q dy$$

نجد :

$$(1) \quad dz = -\frac{a^2 y + z}{ax^2 + x} dx + \frac{a}{x} dy$$

لحلها نهمل الحد الأول فنجد :

$$z = \frac{ay}{x} + f(x)$$

وبالتعويض في المعادلة (1) مرة ثانية نجد :

$$\frac{-ay}{x^2} + f'(x) = -\frac{a^2 y + \frac{ay}{x} + f(x)}{ax^2 + x}$$

أو :

$$\frac{df}{dx} = -\frac{f}{x(ax+1)}$$

وبالمكاملة نجد :

$$f(x) = b \frac{ax+1}{x}$$

فالتكامل التام المطلوب :

$$z = \frac{ay}{x} + \frac{b}{x} + ab$$

لايجاد السطح التكاملية الذي يحوي القطع المشار إليه في نص السؤال نكتب معادلة القطع على الشكل .

$$x = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = t \quad z = -(t+1)^2$$

ثم نفتش عن سطوح التكامل التام التي تمر من النقطة المقابلة لـ  $t$  وتمس القطع فيها . بالتعويض في التكامل التام :

$$(2) \quad 2at + 2b + ab + (t+1)^2 = 0$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ  $t$  :

$$(3) \quad 2(t+1) + 2a = 0$$

من (2) و (3) نجد :

$$a = b = -(t+1)$$

وبالتعويض في التكامل التام نجد المجموعة البسيطة من سطوحه :

$$z = -(t+1) \frac{y}{x} - (t+1) \frac{1}{x} + (t+1)^2$$

حيث  $t$  هو الوسيط الوحيد : لنبحث عن مغلف هذه المجموعة فنكتب ان المعيز بالنسبة إلى الوسيط  $(t+1)$  معدوم :

$$(y+1)^2 + 4x^2z = 0$$

ومنه يكون :

$$z = - \frac{(y+1)^2}{4x^2}$$

هو السطح التكاملية المطلوب .

٥٥٢ - إذا كانت لدينا المعادلة :

$$(1) \quad z^2 dx + (z^2 - 2yz) dy + f(x, y, z) dz = 0$$

فيطلب تعيين جميع التوابيع  $f(x, y, z)$  التي تجعل هذه المعادلة قابلة للحل تماماً . اختر ( بعد ذلك ) أحد التوابيع الناتجة ( كما تشاء ) ،  
وسمه  $f_1(x, y, z)$  ، ثم أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2) \quad z^2 dx + (z^2 - 2yz) dy + f_1(x, y, z) dz = 0$$

وأوجد ( ايضاً ) جميع عوامل تكامل هذه المعادلة الأخيرة .

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧١ )

الحل :

كي تكون المعادلة (1) قابلة للحل تماماً يجب أن يتحقق الشرط :

$$z^2 [ 2z - 2y - f'_y ] + (z^2 - 2yz) [ f'_x - 2z ] = 0$$

أو :

$$(3) \quad (z - 2y) f'_x - z f'_y + 2yz = 0$$

حيث  $f$  تابع لـ  $x$  و  $y$  و  $z$  . إن المعادلة (3) جزئية خطية بطرف

ثان بالنسبة إلى  $f$  . لايجاد جميع حلولها نكتب المجموعة الملحقه :

$$\frac{dx}{z - 2y} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{0} = \frac{df}{-2yz}$$

من النسبة الثالثة نجد التكامل الأولي :  $z$  ومن الثانية والرابعة نجد

التكامل الأولي  $f - y^2$  ، لايجاد تكامل أولي ثالث نستفيد من الأول

فنكتب  $z = c$  ونعوض في النسبتين الأولى والثانية فنجد :

$$\frac{dx}{c - 2y} = \frac{dy}{-c}$$

أو :

$$c dx + (c - 2y) dy = 0$$

ومنه :

$$cx + cy - y^2 = \text{const.}$$

فالتكامل الأولي الثالث  $z(x+y) - y^2$  والحل العام لـ (3) يعطى بالعلاقة :

$$f - y^2 = H [z, xz + yz - y^2]$$

حيث  $H$  تابع كيني . إذن فجميع التوابع المطلوبة  $f(x, y, z)$  تعطى بالعلاقة :

$$f(x, y, z) = y^2 + H [z, xz + yz - y^2]$$

نختار أحد هذه التوابع وليكن  $f_1(x, y, z) = y^2$  ونعوض في (2) فنحصل على المعادلة :

$$z^2 dx + (z^2 - 2yz) dy + y^2 dz = 0$$

وهذه المعادلة قابلة للحل تماماً . حلها نبدأ بـ :

$$z^2 dx + (z^2 - 2yz) dy = 0$$

حيث نعتبر  $z$  ثابتاً . نكامل فنجد :

$$z^2 x + z^2 y - z y^2 = g(z)$$

فالحل العام يعطى بعلاقة من الشكل :

$$(4) \quad z^2 x + z^2 y - z y^2 - g(z) = 0$$

حيث  $g(z)$  تابع مجهول نريد تعيينه . نفاضل (4) :

$$z^2 dx + (z^2 - 2zy) dy + [2zx + 2zy - y^2 + g'] dz = 0$$

يجب أن تتناسب امثال هذه المعادلة مع امثال المعادلة الأصلية ومنه :

$$\frac{z^2}{z^2} \equiv \frac{z^2 - 2zy}{z^2 - 2zy} \equiv \frac{2zx + 2zy - y^2 - g'}{y^2}$$

ومنه المطابقات محققة من أجل جميع قيم  $x, y, z$  المحققة للعلاقة (4) ومنه :

$$2zx + 2zy - y^2 - g' = y^2$$

أو :

$$g' = -2y^2 + 2zx + 2zy$$

وبالاستفادة من (4) :

$$g' = \frac{2g}{z}$$

$$g = cz^2 \quad \text{ومنه :}$$

فالحل العام يعطى بالعلاقة :

$$zx + zy - y^2 - c^z = 0$$

حيث  $c$  ثابت كيفي .

لايجاد عامل تكامل نكتب :

$$x + y - \frac{y^2}{z} = c$$

ثم نفاضل فنجد

$$dx + \left(1 - \frac{2y}{z}\right)dy + \frac{y^2}{z^2}dz$$

ويكون عامل التكامل هو :

$$\mu_1 = \frac{1}{z^2} = \frac{1 - \frac{2y}{z}}{z^2 - 2yz} = \frac{y^2}{z^2}$$

وجميع عوامل التكميل هي :

$$\mu = \frac{1}{z^2} H\left(x + y - \frac{y^2}{z}\right)$$

حيث H تابع كيفي .

٥٥٣ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$z''x^2 - 4z''y^2 - 4z'x + 4z = (x + y) e^{x-y}$$

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٩ )

الحل :

نكتب هذه المعادلة بالشكل :

$$(D^2 - 4D'^2 - 4D + 4)z = (x + y)e^{x-y}$$

أو :

$$[(D - 2)^2 - 4D'^2]z = (x + y)e^{x-y}$$

$$(D + 2D' - 2)(D - 2D' - 2)z = (x + y)e^{x-y}$$

نبدأ بحل المعادلة بدون طرف ثان :

$$(1) \quad (D + 2D' - 2)(D - 2D' - 2)z = 0$$

ولهذا نأخذ المعادلة :

$$(D + 2D' - 2)z = 0$$

$$p + 2q - 2z = 0 \quad \text{أو :}$$

إن المجموعة الملحقة لهذه المعادلة هي :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{2z}$$

وبسهولة نجد التكاملين الأولين :

$$y - 2x ; \quad ze^{-2x}$$

فالحل العام هو :

$$ze^{-2x} = f_1(y - 2x)$$

$$z = e^{2x} f_1(y - 2x) \quad \text{أو :}$$

حيث  $f_1$  تابع كيني .

وكذلك نكتب المعادلة :

$$(D - 2D' - 2)z = 0$$

التي مجموعتها الملحقة :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{2z}$$

والتي تقبل :

$$y + 2x ; \quad ze^{-2x}$$

تكاملين أوليين لها ، إن الحل العام لهذه المعادلة إذن :

$$z = e^{2x} f_2(y + 2x)$$

والحل العام للمعادلة (1) هو :

$$z = e^{2x} f_1(y - 2x) + e^{2x} f_2(y + 2x)$$

لنفتش عن حل خاص بدون طرف ثان . نرمز لهذا الحل بالرمز  $z_1$  ونرمز لـ  $(D - 2D' - 2)z_1$  بالرمز  $u$  فيكون :

$$(D + 2D' - 2)u = (x + y)e^{x-y}$$

وبذلك يكفي أن يكون  $u_1$  حلاً خاصاً للمعادلة :

$$(2) \quad u'_x + 2u'_y - 2u = (x + y)e^{x-y}$$

إن المجموعة الملحقة لهذه المعادلة هي :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{(x+y)e^{x-y} + 2u}$$

هذه المعادلة تكامل أولي :  $y - 2x$  . لايجاد تكامل أولي ثان نكتب  $y - 2x = k$  ومنه  $y = 2x + k$  وبالتعويض في المجموعة الملحقة نجد :

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{2u + (3x + k)e^{-x-k}}$$

أي :

$$\frac{du}{dx} = 2u + (3x + k)e^{-x-k}$$

وبحل هذه المعادلة الخطية في  $u$  نجد :

$$u = -\frac{1}{3}e^{-x-k}(3x + k + 1) + c_1e^{2x}$$

حيث  $c_1$  ثابت كفي . بتعويض  $k$  بقيمتها وبغزل الثابت  $c_1$  نجد التكامل الأولي الثاني .

$$ue^{-2x} + \frac{1}{3}(x + y + 1)e^{-x-y}$$

والحل العام للمعادلة (2) هو :

$$ue^{-2x} \times \frac{1}{3} (x + y + 1) e^{-x-y} = f(y - 2x)$$

حيث  $f$  تابع كيفي . نأخذ  $f(t) \equiv 0$  فنجد الحل الخاص للمعادلة (2) :

$$u_1 = -\frac{1}{3} (x + y + 1) e^{x-y}$$

$$(D - 2D' - 2) z_1 = u_1 \quad \text{ربما أن :}$$

فإن :

$$z'_{1x} - 2z'_{1y} - 2z_1 = -\frac{1}{3} (x + y + 1) e^{x-y}$$

إن المجموعة الملحقه لهذه المعادلة هي :

$$(3) \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz_1}{2z_1 - \frac{1}{3} (x + y + 1) e^{x-y}}$$

لهذه المعادلة تكامل أولي :  $y + 2x$  . لايجاد تكامل أولي ثان نكتبه

$y + 2x = k$  . وبالتعويض في المجموعة الملحقه نجد :

$$\frac{dz_1}{dx} = 2z_1 - \frac{1}{3} (k + 1 - x) e^{3x - k}$$

وبحل هذه المعادلة الخطية في  $z_1$  نجد (بعد تعويض  $k$  بقيمتها) :

$$z_1 = -\frac{1}{3} (x + y + 2) e^{x-y} + c_2 e^{2x}$$

حيث  $c_2$  ثابت كيفي . بعزل الثابت  $c_2$  نجد التكامل الأولي الثاني :

$$z_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} (x + y + 2) e^{-x-y}$$

والحل العام للمعادلة (3) هو :

$$z_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} (x + y + 2) e^{-x-y} = f_1 (y + 2x)$$

حيث  $f_1$  تابع كفي . نأخذ  $f_1(t) \equiv 0$  فنجد الحل الخاص المطلوب .

$$z_1 = -\frac{1}{3} (x + y + 2) e^{x-y}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$z = e^{2x} f_1 (y - 2x) + e^{-2x} f_2 (y+2x) - \frac{1}{3} (x + y + 2) e^{x-y}$$

## تمارين غير محلولة

٥٥٤ - تحقق من أن للمعادلة :

$$(2xy^3 - y^2 + x^2y) dx + (x^3 - x^2y^2 + 2xy) dy = 0$$

عامل تكامل من الشكل  $(py + q)^n$  ، حيث  $p$  ،  $q$  تابعان لـ  $x$  فقط ) و  $n$  ثابت . ثم أوجد الحل العام للمعادلة ، وجميع عوامل تكاملها .  
( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، للسنة الثالثة ، الدورة الثانية ١٩٦٧ )

$$\text{ج : عامل التكامل : } \frac{1}{x^2(xy-1)^2}$$

$$\frac{y^2 + x}{x(xy-1)} = c \quad \text{الحل العام :}$$

وأما جميع عوامل التكامل فهي :

$$\frac{1}{x^2(xy-1)^2} \text{ F } \left[ \frac{y^2 + x}{x(xy-1)} \right]$$

٥٥٥ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x^2 + 4xy + x + y) dx + (8xy + 8y^2 + x + 4y) dy = 0$$

مع العلم بان لها عامل تكامل يتعلق بـ  $x + 2y$  فقط ، ثم أوجد جميع عوامل تكامل هذه المعادلة .

( جامعة دمشق : مقرر المعادلات التفاضلية للسنة الثالثة ، الدورة الأولى ١٩٦٨ )

$$\frac{1}{(2x+4y+1)^2} \quad \text{ج : عامل التكميل :}$$

$$\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{2x + 4y + 1} = c \quad \text{الحل العام :}$$

جميع عوامل التكميل :

$$\frac{1}{(2x + 4y + 1)^2} F \left[ \frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{2x + 4y + 1} \right]$$

٥٥٦ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xy^3 dx - (3xy + 2) dy = 0$$

وجميع عوامل تكميلها ، مع العلم بأن لها عامل تكميل (غير الصفر) من الشكل :

$$[p(y) + xq(y)]^n$$

حيث  $n$  ثابت .

(جامعة دمشق : شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧٠)

ج : للمعادلة عاملا تكميل من الشكل المذكور هما :

$$\mu_1 = (xy + 2)^{-3} \quad ; \quad \mu_2 = (xy^2 + y)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{xy^2 + y}{(xy + 2)^2} = c \quad \text{الحل العام :}$$

أما جميع عوامل التكميل فهي :

$$\frac{1}{(xy + 2)^3} F \left[ \frac{xy^2 + y}{(xy + 2)^2} \right]$$

٥٥٧ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y ( 1 - x ) dx + ( x + 2 x^2 + y^2 ) dy = 0$$

مع العلم بأن لها عامل تكميل من الشكل :

$( x p + q )^n$  حيث  $p$  و  $q$  تابعان لـ  $y$  و  $n$  ثابت .

( جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧١ )

ج : للمعادلة عاملا تكميل من الشكل المذكور هما :

$$( 2 x + y^2 + 1 )^{-\frac{5}{2}} ; ( 3 xy + y^3 )^{-\frac{5}{3}}$$

$$\frac{( 3 xy + y^3 )^2}{( 2x + y^2 + 1 )^3} = c \quad \text{الحل العام :}$$

٥٥٨ - حل المعادلة :

$$( 2 y^2 - xy + 2 y ) dx + ( x^2 - 2 xy + y ) dy$$

وأوجد جميع عوامل تكميلها ، مع العلم بأن لها عامل تكميل من الشكل

$$\frac{1}{y} f ( y + 2 x )$$

( جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٧٠ )

$$\mu = \frac{1}{y(y + 2x)^2} \quad \text{ج : عامل التكميل :}$$

الحل العام :

$$F = \frac{1}{4} \lg \frac{y}{y + 2x} - \frac{4 + 5y}{4} \frac{1}{y + 2x} = c$$

جميع عوامل التكميل :

$$\frac{1}{y(y+2x)^2} H(F)$$

حيث  $H$  تابع كيفي .

٥٥٩ - عين جميع التوابع  $f(x)$  التي يكون ( من اجل كل منها) للمعادلة:

$$0 = y' + [y + f(x)]^2$$

حلان خاصان  $y_1$  و  $y_2$  يحققان العلاقة :

$$y_2 = 4y_1 + 1$$

ثم تحقق من أن هناك تابعين  $f(x)$  يحقق كل منها الشرط السابق ،  
وينعدم كل منهما من أجل  $x = 0$  ، أوجد هذين التابعين ، ثم عوض  
بكل منهما عن  $f(x)$  في المعادلة الاصلية ، ثم أوجد الحل العام لكل من  
المعادلتين الناتجتين .

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٨ )

ج : التوابع  $f(x)$  المطلوبة هي :

$$f(x) = \frac{2}{(8+1,5a)(x-a)} + \frac{1}{3}$$

(  $a$  ثابت كيفي ) .

وأما التابعان  $f(x)$  اللذين ينعدمان عندما  $x = 0$  فهما :

$$\frac{x}{3x-2} \quad ; \quad \frac{x}{3(x+6)}$$

الحل العام الموافق للقيمة الاولى :

$$y = \frac{c(x-2) \sqrt[3]{3x-2} + (1-x)}{(3x-2)(1-c \sqrt[3]{3x-2})}$$

الحل العام الموافق للقيمة الثانية :

$$y = \frac{c(x-6)(x+6)^3 - (x+3)}{3(x+6)[1-c(6+x)^3]}$$

٥٦٠ - عين جميع التوابع  $f(x)$  التي تجمل للمعادلة :

$$xy' + y^2 + (x+1)y + x + 2f(x)$$

حلين خاصين  $y_1$  و  $y_2$  يحققان العلاقة :

$$y_2 = 2y_1 + x + 1$$

ثم حل المعادلة :

$$xy' + y^2 + (x+1)y + x + \frac{2}{9}x^2 = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٩)

٥٦١ - حل المعادلة :

$$(2x - 2y + 3) dx + (2x - 3y + 1) dy + (x + 2y + 3)(y dx - x dy) = 0$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٧٠)

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{2} + \frac{3x+y}{4x} \lg \frac{x+y}{3x+y} + c \frac{3x+y}{x} \quad : \text{ج}$$

٥٦٢ - حل المعادلة التالية ( بعد أن تخفض مرتبتها ) :

$$x^3 (x - y) y'' + x^3 y'^2 - xy (3x - y) y' + (2x - y)y^2 = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٧)

$$y = c_2 x ; y = x \frac{(1 - c) c_1 x - 1}{c_1 x^c - 1} \quad \text{ج}$$

٥٦٣ - حل المعادلة التالية ( بعد أن تخفض مرتبتها ) :

$$12 y'''' - 9 y'' y'''' + y''^2 y^{(5)} = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٨)

$$y = c_3 (x - c_2) \lg \left[ (x - c_2) + \sqrt{(x - c_2)^2 - c_1} \right] - c_3 \sqrt{(x - c_2)^2 - c_1} + c_4 x + c_5 \quad \text{ج}$$

٥٦٤ - خفض بطريقتين مختلفتين ، مرتبة المعادلة :

$$2 x^2 y y'' - x^2 y'^2 + y^2 = 0$$

واستنتج من ذلك ، في كل مرة ، حلها العام .

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٩)

$$y = c_1 x (\lg x + c)^2 \quad \text{ج}$$

٥٦٥ - اوجد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$x^3 y'''' + 4 x^2 y'' + x y' - y = \frac{1}{(x+1)^2}$$

مستخدماً (لايجاد الحل الخاص) طريقة تحويل الثوابت .

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٧)

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{c_3 \lg x}{x} + \frac{1-2x}{4x} + \frac{x^2-1}{2x} \lg \frac{x+1}{x} : \text{ج}$$

٥٦٦ - اوجد جميع الحلول المشتركة بين المعادلتين :

$$(4x^2 - 1)y'' + 4xy' - y = 0$$

$$(2x - 1)y'' + 2xy' - y = 0$$

ثم اوجد الحل العام للمعادلة الاولى منها .

اوجد بعد ذلك ( بطريقة تحويل الثوابت ) الحل العام للمعادلة :

$$(4x^2 - 1)y'' + 2xy' - y = \sqrt{4x^2 - 1}$$

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٨ )

ج : الحل المشترك  $y = c\sqrt{2x-1}$  : الحل العام المطلوب :

$$y = c_1 \sqrt{2x+1} + c_2 \sqrt{2x-1} + \frac{1}{3} \sqrt{4x^2-1}$$

٥٦٧ - اوجد الحلول المشتركة بين المعادلتين :

$$(1) \quad xy'' + 2(1-x)y' - 2y = 0$$

$$(2) \quad x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0$$

ثم اوجد الحل العام لكل منها .

ثم اوجد ( بطريقة تحويل الثوابت ) الحل العام للمعادلة :

$$(3) \quad xy'' + 2(1-x)y' - 2y = 1$$

( جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٨ )

$$y = \frac{c}{x}$$

ج : الحل المشترك

$$y = \frac{c_1}{2x} e^{2x} + \frac{c_2}{x} \quad \text{الحل العام للاولى :}$$

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 (x + 1) \quad \text{الحل العام للثانية :}$$

$$y = \frac{c_1}{2x} e^{2x} + \frac{c_2}{x} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{2} \quad \text{الحل العام للثالثة :}$$

٥٦٨ - اوجد الحل العام لكل من المعادلتين :

$$xy'' - 3y' - (x + 1)y = 0$$

$$(x + 4)y' + (x + 3)y = 5e^{-x}$$

مع العلم بان لهما حلا مشتركا

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧١)

$$y = c_1 (2x^2 - 4x + 3)e^x + c_2 (2x + 3)e^{-x} \quad \text{ج :}$$

$$y = -5e^{-x} + c(x + 4)e^{-x}$$

٥٦٩ - تحقق من أن للمعادلة :

$$(1) \quad y'' \sin^2 x + (\cos x - 3)y' \sin x + 2y = 0$$

حلين خاصين  $y_1$  و  $y_2$  يحققان العلاقة  $y_2 = y_1^2$  (أحدهما مربع الآخر) واوجد

هذين الحلين الخاصين ، والحل العام للمعادلة . ثم اوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2) \quad y'' \sin^2 x + (\cos x - 3)y' \sin x + 2y = (1 - \cos x)^2$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٨٠)

$$\text{tg} \frac{x}{2} , \quad \text{tg}^2 \frac{x}{2}$$

ج : الحلان الخاصان :

الحل العام للمعادلة (2):

$$y = c_1 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c_2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

٥٧٠ - حل المعادلة :

$$x (x^3 y''' + 6x^2 y' - 12y)' + (x-3)(x^3 y''' + 6x^2 y'' - 12y) = 3x^4 + 4x^5$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٩)

٥٧١ - اوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x_1^2 - x_2^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + 2x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_1 (x_3 + x_4) \frac{\partial z}{\partial x_3} = 2x_1 (z+1)$$

حيث  $z$  تابع لـ  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٧٠)

$$F \left[ \frac{z+1}{x_2}, \frac{1}{x_2} (x_1^2 + x_2^2 + (z+1)^2 - 2(z+1)) \right] = 0$$

$$\left[ \operatorname{lg} x_2 - 1, x_4, \frac{x^2}{(x_3 + x_4)^2} \right] = 0$$

٥٧٢ - اوجد تكاملا تاما للمعادلة :

$$p^2 + 2y^4 (xp + yq - 3z) = 0$$

ثم اوجد السطوح التكاملية التي تحوي القطع :

$$y = 1 \quad ; \quad z + x^2 = 1$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية الجزئية ، الدورة الأولى ١٩٦٨)

$$z = axy^2 + by^3 + \frac{a^2}{6} \quad \text{ج : التكامل التام :}$$

$$z = y^3 - \frac{3x^2y^4}{y^3 + z} \quad \text{السطح المطلوب :}$$

٥٧٣ - تحقق من أن المعادلة :

$$z^2 dx + (z^2 - 2yz) dy + (2y^2 - xz - yz) dz = 0$$

قابلة للحل تماما ، ثم اوجد حلها العام ، واستنتج منه عامل تكميل لطرفها الأيمن

عين جميع التوابع  $f(x, y, z)$  التي تجعل المعادلة التالية قابلة للحل تماما :

$$[z^2 + f(x, y, z)] dx + [z^2 - 2yz + f(x, y, z)] dy + [2y^2 - xz - yz + f(x, y, z)] dz = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية الجزئية ، الدورة الأولى ١٩٦٨)

$$\frac{(x+y)z - y^2}{z^2} = c \quad \text{ج : الحل العام :}$$

$$\frac{1}{z^3} \quad \text{عامل تكميل :}$$

التوابع  $f$  المطلوبة :

$$f = z^3 F(x+y+z) \left[ \frac{y^2 - xz - yz}{z^2} \right]$$

٥٧٤ - اوجد تكاملا تاما للمعادلة :

$$p^2 + 2y^8 (xp + yq - 7z)$$

ثم اوجد السطح التكاملي الذي يحوي القطع :

$$y = 1 \quad ; \quad 2z + 3x^2 = 0$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٧٠)

$$z = axy^6 + by^7 + \frac{a^2}{6} y^4 \quad \text{ج : التكاملي التام :}$$

$$z = - \frac{3}{2} x^2 y^8 \quad \text{السطح التكاملي :}$$

٥٧٥ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = (2x + y + 2) e^{x+2y}$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية الجزئية ، الدورة الأولى ١٩٧٠)

٥٧٦ - لدينا مجموعة المنحنيات :

$$xyz = c_1 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان كيفيان

اوجد جميع السطوح التي يتعامد كل منها ، في كل نقطة من نقاطه ، مع منعنى المجموعة السابقة المار من هذه النقطة .

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية الجزئية ، الدورة الثانية ١٩٦٨)