

## الفصل الأول

### تشكيل المعادلات التفاضلية

#### ١ - تعاريف :

آ - المعادلة التفاضلية هي معادلة من الشكل :

$$f [ x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)} ] = 0$$

حيث نجد متحولاً  $x$  وتابعاً  $y$  ومشتقاته المتتالية  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  ونقول إن هذه المعادلة من المرتبة  $n$  إذا حوت المشتق من المرتبة  $n$  التابع  $y$

ب - نسمى محل المعادلة التفاضلية أو بتكاملها ، كل تابع من الشكل  $y = \varphi(x)$  بحيث أننا لو بدلنا في الطرف الأيسر من المعادلة المفروضة  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  بهذا التابع ومشتقاته فان هذا الطرف من المعادلة ينتقل إلى تابع لـ  $x$  مطابق للصفر في مجال يكون فيه  $(\varphi)$  ومشتقاته المتتالية معرفة .

وإذا مثلنا التابع  $y = \varphi(x)$  بمنحنى  $\Gamma$  في مستو محمول على محورين متعامدين  $Ox, Oy$  فإننا نسمي هذا المنحني بالمنحني التكاملي للمعادلة المفروضة .

> - حل المعادلة التفاضلية هو إيجاد كل الحلول أو كل المنحنيات التكاملية لهذه المعادلة .

#### ٢ - تشكيل المعادلات التفاضلية :

لنتصور مجموعة من المنحنيات تتعلق بعدد من الوسطاء ولنفرض أن هذه المعادلات ممثلة بالمعادلة :

$$(1) \quad f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$$

يبرهن أن هذه المنحنيات تحقق ، في الحالة العامة ، معادلة تفاضلية من المرتبة  $n$  تنتج عن حذف الوسطاء  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  بين المعادلة (١) و  $(n-1)$  معادلة أخرى تنتج عن المعادلة (١) بالإشتقاقات المتتالية أي :

$$f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$$

$$f'(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$$

$$f^{(n-1)}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$$

حيث نعتبر ، من أجل الإشتقاق ،  $y$  تابعاً ضمنياً لـ  $x$  .  
هذا ويمكن أن تكون المعادلات التفاضلية تفسيراً لخواص هندسية او فيزيائية معينة .

### ٣ - الحل العام والحل والخاص :

يبرهن أن حل المعادلة التفاضلية من المرتبة  $n$  قد يحوي ثوابت اختيارية مستقلة عن بعضها عددها  $n$  ونسمى مثل هذا الحل بالحل العام كما نسمي كل حل ينتج عن الحل العام ، بأعطاء هذه الثوابت أو بعضها قيماً خاصة ، بحل خاص. إن عدد الحلول الخاصة غير متناه .

### ٤ - الحل الشاذ :

نسمي بحل شاذ حل تابع يحقق المعادلة ولا يدخل تحت الحل العام .

### تمارين محلولة

١ - شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل التابع  $y = cx + c - c^2$

حلاً لها .

الحل : لنشتق هذا التابع فنجد :

$$y' = c$$

إذا حملنا قيمة الثابت الاختياري هذه ، في التابع المفروض ، فاننا نجد

المعادلة التفاضلية :

$$y = xy' + y' - y'^2$$

وهي المعادلة المطلوبة .

٢ - شكل المعادلة التفاضلية لمجموع المنحنيات حيث  $c$  وسيط و  $a$

عدد ثابت :

$$(1) \quad y^2 - cx^2 + \frac{a^2c}{1+c} = 0$$

الحل : لنشتق العلاقة (١) فنجد :

$$2 y y' - 2 c x = 0$$

$$c = \frac{y y'}{x} \quad \text{ومنه نجد :}$$

لنستبدل في العلاقة (١) المفروضة  $\frac{y y'}{x}$  بـ  $c$  فيكون :

$$y^2 - x y y' + \frac{a^2 y y'}{x + y y'} = 0$$

وبعد الاصلاح نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$x y (1 - y'^2) = (x^2 - y^2 - a^2) y'$$

٣ - شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل التابع  $y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + c_3$  حلاً لها .

الحل : لحذف الثوابت الاختيارية الثلاثة التي يجوبها هذا التابع نحتاج ، بالإضافة إلى التابع المذكور نفسه ، إلى ثلاث علاقات نحصل عليها باشتقاقات ثلاثة متتالية لعلاقة التابع المفروض أي :

$$y' = c_1 - \frac{c_2}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2 c_2}{x^3}$$

$$y''' = \frac{-6 c_2}{x^4}$$

ونجد العلاقة ، بين التابع ومشتقاته ، المستقلة على الثوابت الإختيارية ، بسهولة تامة وهي :

$$y''' + \frac{3}{x} y'' = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة :

٤ - لتكن  $x = A \cos ( p t - \alpha )$  معادلة الحركة النوسية البسيطة . احذف الثابتين الإختياريين  $( \alpha , A )$  .

الحل : لنشتق المعادلة المفروضة مرتين متتاليتين فنجد :

$$x' = - p A \sin ( p t - \alpha )$$

$$x'' = - p^2 A \cos ( p t - \alpha )$$

ونلاحظ بسهولة أن المعادلة الحالية من الثابتين الإختياريين هي :

$$x'' = - p^2 x$$

وهي معادلة من المرتبة الثانية تبين الخاصة الأساسية في الحركة النوسية وهي ان التسارع يتناسب مع بعد النقطة المتحركة عن المبدأ .

٥ - تأكد بجذب الثابت الإختياري  $C$  ، من أن التابع :

$$(1) \quad y = Cx + \frac{1}{C}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(2) \quad y = x y' + \frac{1}{y'}$$

وتحقق من أن  $y^2 = 4x$  هو حل لهذه المعادلة لا يمكن استنتاجه من الحل العام ( حل شاذ ) وبرهن أن هذا الحل الشاذ يمثل مغلف المنحنيات التكاملية التي يمثلها الحل العام .

إن المعادلة (٢) معادلة تفاضلية من المرتبة الأول والعلاقة (١) تحوي ثابتاً اختيارياً واحداً فإذا حقق التابع (١) المعادلة (٢) كان هذا التابع هو الحل العام للمعادلة (٢) كما يمكننا ان نتوصل إلى النتيجة ذاتها فيما إذا حذفنا الثابت الإختياري  $c$  وحصلنا بنتيجة ذلك على المعادلة (٢) .

لنشتق العلاقة (١) :

$$y' = c$$

إذا بدلنا كل من  $c$  بـ  $y'$  في العلاقة (١) فنجد :

$$y = y' x + \frac{1}{y}$$

وهي المعادلة (٢) نفسها .

لنبين أن المعادلة (٢) تقبل ، كحل لها العلاقة ،  $y^2 = 4x$  نشق هذه العلاقة الأخيرة ونستخرج من الناتج قيمة  $y'$  التي نحلها في المعادلة (٢) فنقلب إلى مطابقة .

$$2 y y' = 4$$

$$y' = \frac{2}{y}$$

$$y = \frac{y^2}{4} \cdot \frac{2}{y} + \frac{y}{2}$$

إن معادلة مغلف المنحنيات  $y = c x + \frac{1}{c}$  ، هي المعادلة الناتجة عن حذف الثابت الإختياري  $c$  بين هذه المعادلة والمعادلة الناتجة عنها باستقائها بالنسبة لـ  $c$  ، أي :

$$y = c x + \frac{1}{c}$$

$$0 = x - \frac{1}{c^2}$$

$$c^2 x = 1 , c = \pm \frac{1}{\sqrt{x}} , y = \frac{c^2 x + 1}{c}$$

$$y = \pm 2 \sqrt{x} \quad y^2 = 4x$$

إن من الملاحظ ان هذا الحل اي  $y = \pm 2 \sqrt{x}$  لا يمكن ان ينتج عن الحل العام :

$$y = c x + \frac{1}{c}$$

من أجل أي قيمة لـ  $c$  فهو إذن حل شاذ .

٦ - اوجد المعادلة التفاضلية التي تعطي مجموعة الدوائر التي طول نصف قطر كل منها يساوي  $a$ .

الحل : إذا فرضنا  $(\alpha, \beta)$  احدائبي مركز دائرة من هذه الدوائر فان معادلتها تكون :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - a^2 = 0$$

إن  $\beta, \alpha$  ثابتان اختياريان يمكن حذفهما بين هذه المعادلة والمعادلتين الناتجتين عنها باشتقاقين متتاليين لها بالنسبة ل  $x$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - a^2 = 0 \\ x - \alpha + (y - \beta) y' = 0 \\ 1 + y'^2 + (y - \beta) y'' = 0 \end{array} \right.$$

نستخرج من المعادلة الأخيرة  $y - \beta$  ثم من المعادلة الثانية  $x - \alpha$  ونعمل هاتين القيمتين في المعادلة الأولى فنحصل على المعادلة التفاضلية :

$$(1 + y'^2)^3 - a^2 y''^2 = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة .

٧ - برهن أن التابع :

$$(1) \quad y = c_1 x \cos \log x + c_2 x \sin \log x + x \log x$$

حل للمعادلة التفاضلية .

$$(2) \quad x^2 y'' - x y' + 2 y = x \log x$$

الحل : يمكن حل هذه المسألة بطريقتين :

آ - الطريقة الأولى : نحقق المعادلة (2) بالتابع (١) بعد ان نحسب المشتق الاول والمشتق الثاني لهذا التابع :

$$y' = c_1 \left( \cos \log x - x \sin \log x \cdot \frac{1}{x} \right) + c_2 \left( \sin \log x + x \cos \log x \cdot \frac{1}{x} \right) + \log x + x \cdot \frac{1}{x} .$$

$$(3) \quad y' = c_1 ( \cos \log x - \sin \log x ) + c_2 ( \sin \log x + \cos \log x ) + \log x + 1$$

$$(4) \quad y'' = c_1 \left( -\frac{1}{x} \sin \log x - \frac{1}{x} \cos \log x \right) + c_2 \left( \frac{1}{x} \cos \log x - \frac{1}{x} \sin \log x \right) + \frac{1}{x}$$

لنضرب طرفي المعادلة (1) بـ (2) وطرفي المعادلة (3) بـ  $(-x)$  وطرفي

المعادلة (4) بـ  $x^2$  ونجمع النواتج إلى بعضها فنجد :

$$\begin{aligned} x^2 y'' - x y' + 2 y &= c_1 ( 2 x \cos \log x - x \cos \log x + \\ x \sin \log x - x \sin \log x - x \cos \log x ) &+ c_2 ( 2 x \sin \log x - x \sin \log x \\ - x \cos \log x + x \cos \log x - x \sin \log x ) &+ x \log x - x + x \\ &= x \log x \end{aligned}$$

وبذلك يثبت المطلوب .

ب - الطريقة الثانية : نحذف الوسيطين بين المعادلة (1) والمعادلتين

الناجتين عن هذه المعادلة باشتقاقين متتاليين بعد ان نكتب هذه المعادلات بالشكل :

$$c_1 x \cos \log x + c_2 x \sin \log x + x \log x - y = 0$$

$$c_1 ( \cos \log x - \sin \log x ) + c_2 ( \sin \log x + \cos \log x ) + \log x + 1 - y' = 0$$

$$\frac{-c_1}{x} ( \sin \log x + \cos \log x ) + \frac{c_2}{x} ( \cos \log x - \sin \log x ) +$$

$$\frac{1}{x} - y'' = 0$$

لتكن هذه المعادلات الثلاثة الخطية وذات المجهولين  $(c_1, c_2)$  قابلة

للحل اي لتمثل جملة معادلات متوافقة، يلزم وبكفي ان يكون المعين التالي  $\Delta$  :

$$\begin{vmatrix} x \cos \log x & x \sin \log x & x \log x - y \\ \cos \log x - \sin \log x & \sin \log x + \cos \log x & \log x + 1 - y \\ -\frac{1}{x}(\sin \log x + \cos \log x) & \frac{1}{x}(\cos \log x - \sin \log x) & \frac{1}{x} - y'' \end{vmatrix} = 0$$

إذا ضربنا السطر الأخير بـ  $x^2$  والسطر الثاني بـ  $(-x)$  وجمعنا السطرين الناتجين إلى مثلي السطر الأول فاننا نحصل على معين يساوي مثلي المعين الأول :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \log x - 2y + xy' - x^2 y'' \\ \cos \log x - \sin \log x & \sin \log x + \cos \log x & \log x + 1 - y' \\ \frac{\sin \log x + \cos \log x}{-x} & \frac{\cos \log x - \sin \log x}{x} & \frac{1}{x} - y'' \end{vmatrix} = 0$$

إن هذا المعين يساوي جداء مضروبين يجب أن يكون أحدهما مساوياً للصفر :

$$2\Delta = (x \log x - 2y + x y' - x^2 y'') \times$$

$$\begin{vmatrix} \cos \log x - \sin \log x & \sin \log x + \cos \log x \\ -\frac{1}{x} (\sin \log x + \cos \log x) & \frac{1}{x} (\cos \log x - \sin \log x) \end{vmatrix} = 0$$

إن المضروب الثاني لا يمكن أن يكون معدوماً دوماً لأنه يساوي

$\frac{2}{x}$  فلا بد إذن من أن يكون المضروب الأول مطابقاً للصفر ومنه نجد :

$$x^2 y'' - x y' + 2y = x \log x$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة .

٨ - شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل التابع التالي حلاً لها :

$$(1) \quad y = (c_1 + c_2 x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$$

الحل : لحذف الثابتين الإختياريين  $c_1, c_2$  من العلاقة (١) نحتاج ، بالإضافة إلى هذه العلاقة ، إلى علاقتين نحصل عليهما باشتقاق العلاقة المذكورة مرتين متتاليتين فيكون :

$$c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2} - y = 0$$

$$c_1 k e^{kx} + c_2 (1+kx)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2} - y' = 0$$

$$c_1 k^2 e^{kx} + c_2 (2k+k^2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2} - y'' = 0$$

ليمكن حذف  $c_1, c_2$  من هذه المعادلات يلزم ويكفي ان تكون هذه المعادلات الخطية الثلاثة متوافقة اي ان يكون المعين التالي مطابقاً للصفر :

$$\begin{vmatrix} e^{kx} & x e^{kx} & \frac{e^x}{(k-1)^2} - y \\ k e^{kx} & (1+kx)e^{kx} & \frac{e^x}{(k-1)^2} - y' \\ k^2 e^{kx} & (2k+k^2x)e^{kx} & \frac{e^x}{(k-1)^2} - y'' \end{vmatrix} \equiv 0$$

إن هذا الشرط يكافيء شرطنا أن يكون المعين الناتج عن هذا المعين ، بعد تقسيم عموده الأول وعموده الثاني على  $e^{kx}$  ، معدوماً أي :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \frac{e^x}{(k-1)^2} - y \\ k & 1+kx & \frac{e^x}{(k-1)^2} - y' \\ k^2 & 2k+k^2x & \frac{e^x}{(k-1)^2} - y'' \end{vmatrix} = 0$$

نضرب السطر الأول بـ  $k$  ونطرح الناتج من الثاني ونضربه بـ  $k^2$  ونطرح الناتج من السطر الثالث فيأخذ هذا المعين الشكل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & \frac{e^x}{(k-1)^2} - y \\ 0 & 1 & \frac{e^x}{1-k} - y' - ky \\ 0 & 2k & \frac{e^x(1+k)}{1-k} - y'' - k^2y \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & & \frac{e^x}{1-k} - y' - ky \\ & 2k & \frac{e^x(1+k)}{1-k} - y'' - k^2y \end{vmatrix} \equiv 0$$

نطرح من السطر الثاني السطر الأول مضروباً بـ  $y$  فيأخذ الشكل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & & \frac{e^x}{1-k} - y' - ky \\ & 0 & e^x - y'' + 2ky' - k^2y \end{vmatrix} = 0$$

وهذا يكافئ العلاقة :

$$y'' - 2ky' - k^2y = e^x$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة :

٩ - برهن انه إذا كان  $a, b$  ثابتين اختياريين فان للمعادلتين

التفاضليتين :

$$(1) \quad y - y' = 2be^{-x} \quad , \quad y + y' = 2ae^x$$

حل عام مشترك .

الحل : إن كلام من هاتين المعادلتين من المرتبة الأولى ونحوي ثابتا

اختبارياً واحداً فينتج عن ذلك أن الحل العام لكل منهما يحوي ثابتين اختياريين .

إذا حذفنا، في كل منها، الثابت الاختياري فسوف نحصل على معادلة تفاضلية واحدة هي :

$$(2) \quad y'' - y = 0$$

إن كل حل لإحدى المعادلتين (١) هو حل للمعادلة (٢) وبما أن الحلين العامين لهاتين المعادلتين يميوزان ثابتين اختياريين فكل منهما يمثل الحل العام للمعادلة (٢) وبما أنه لا يوجد سوى حل عام واحد للمعادلة تفاضلية فان هذين الحلين متطابقين وهو المطلوب .

١٠ - اكتب المعادلة التفاضلية لحزمة المنحنيات .

$$(1) \quad x = a ( t - \sin t ) \quad , \quad y = a ( 1 - \cos t )$$

حيث  $a$  ثابت اختياري . يسمى هذا المنحني عادة بالـ سيكلويد .  
لنأخذ تفاضل المعادلتين (١) فنجد :

$$dx = a ( 1 - \cos t ) dt \quad , \quad dy = a \sin t dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cotg \frac{t}{2} \quad : \text{ومنه}$$

إذا قسمنا المعادلتين (١) على بعضها فاننا نجد :

$$\frac{x}{y} = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$$

ومنه نستخرج :

$$(2) \quad \frac{x}{y} ( 1 - \cos t ) + \sin t = t$$

ولكن :

$$1 - \cos t = \frac{1 - \cos t}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} =$$

$$\frac{2}{1 + \cotg^2 \frac{t}{2}} = \frac{2}{1 + y'^2}$$

$$\sin t = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \cotg \frac{t}{2}}{1 + \cotg^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 y'}{1 + y'^2}$$

وتأخذ المعادلة (٢) الشكل التالي :

$$\frac{2x}{y(1+y'^2)} + \frac{2y'}{1+y'^2} = 2 \operatorname{Arccotg} y'$$

وتصل إلى المعادلة التفاضلية المطلوبة بعد الإصلاح وهي :

$$x = y[(1 + y'^2) \operatorname{Arc} \cotg y' - y']$$

١١ - أوجد المعادلة التفاضلية لنواظم السطح المخروطي الدوراني :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

الحل : من المعروف انه إذا كتبنا معادلة سطح ما بالشكل

$f(x, y, z) = 0$  فان الشعاع ذا المركبات  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  محمول على

الناظم على السطح في النقطة  $(x, y, z)$  وإذا لاحظنا أنه من أجل السطح المخروطي المفروض :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z$$

تكون معادلة الناظم على هذا السطح هي :

$$\frac{X-x}{x} = \frac{Y-y}{y} = \frac{Z-z}{-z}$$

تعيين نقطة من سطح ما بواسطة وسيطين يمكن أخذهما الإحداثيين

$x, y$  ولترمز لهذين الوسيطين بالشكل  $x = \alpha, y = \beta$  فتأخذ عندها معادلة

الناظم الشكل :

$$\frac{x - \alpha}{\alpha} = \frac{y - \beta}{\beta} = \frac{z - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

ينتج عن هذه العلاقات المعادلتين :

$$(1) Y = \frac{\beta}{\alpha} X \quad , \quad (2) Z = 2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} X$$

وينتج باشتقاق هاتين المعادلتين :

$$(3) \quad Y' = \frac{\beta}{\alpha} \quad (4) \quad Z' = - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha}$$

إذا ربعنا طرفي المعادلة (٣) ثم أضفنا فيها الخارج إلى الصور نجد :

$$Y'^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$Y'^2 + 1 = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2} = Z'^2$$

وإذا حاننا قيمة  $\frac{\beta}{\alpha}$  في المعادلة (١) نجد المعادلة التفاضلية :

$$Y = Y' X$$

وتكون المعادلتان التفاضليتان :

$$Y = Y' X \quad , \quad Y'^2 + 1 = Z'^2$$

هما المعادلتان التفاضليتان لجملة النواظم على السطح المخروطي المفروض .

١٢ - اكتب المعادلات التفاضلية لمجموعة نواظم السطح المجسم المكافئ

الدوراني :

$$x^2 + y^2 = 2z$$

إن الشعاع الذي مركباته  $x, y, -1$  هو شعاع محمول على الناظم

فاذا اعتبرنا أن الوسيطين  $x = \alpha$  و  $y = \beta$  يعينان وضعية نقطة على السطح

المفروض ويعينان بالتالي الناظم في هذه النقطة، فان معادلة هذا الناظم هي :

( معادلات تفاضلية ) ٢

$$\frac{X - \alpha}{\alpha} = \frac{Y - \beta}{\beta} = -Z + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

ونستنتج بما سبق المعادلتين :

$$(1) \quad Y = \frac{\beta}{\alpha} X, \quad Z = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{X}{\alpha} + 1$$

لنشتق هاتين المعادلتين فنجد :

$$Y' = \frac{\beta}{\alpha}, \quad Z' = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{-1}{Z'}, \quad \beta = -\frac{Y'}{Z'}$$

إذا حملنا هاتين العلاقتين في المعادلتين (1) نجد المعادلتين التفاضلتين لنواظم السطح المفروض :

$$Y = Y'X, \quad Z = \frac{1 + Y'^2}{2Z'^2} + XZ' + 1$$

### تمارين للمحل

حقق أن كلا من المعادلات التفاضلية التالية تقبل كحل لها التابع المرافق لكل منها .

$$y \cdot y'^2 + 2x y' - y = 0 \quad y^2 = 2cx + c^2 \quad - 13$$

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0 \quad y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^x \quad - 14$$

$$x^2 y'' - 5x y' + 5y = \frac{1}{x} \quad 4y = \frac{1}{3x} + c_1x^5 + c_2x \quad - 15$$

$$x \frac{dy}{dx} - y + x \sqrt{x^2 - y^2} = 0 \quad \text{Arc sin } \frac{y}{x} = c - x \quad - 16$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \quad y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x} \quad - 17$$

$$(1 - x^2)y'' - x y' - y = 0 \quad y = c_1 e^{\arcsin x} + c_2 e^{-\arcsin x} - 18$$

$$y'' + \frac{2}{x} y' = 0 \quad y = \frac{c_1}{x} + c_2 - 19$$

احذف الثوابت الاختيارية من الافادات التالية وتحقق أنه ينتج عن كل تركيب المعادلة التفاضلية المرافقة :

$$y = A e^x + B e^{-x} + C \quad y^{(3)} = y' - 20$$

$$y = A e^x + B e^{2x} + C e^{3x} \quad y^{(3)} - 6 y'' + 11 y' - 6 y = 0 - 21$$

$$y = e^x (A \cos x + B \sin x) \quad y'' - 2 y' + 2 y = 0 - 22$$

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x}{c} \quad y \log [y' + \sqrt{1 + y'^2}] = x \sqrt{1 + y'^2} - 23$$

٢٤ - اوجد المعادلة التفاضلية لكل القطوع المكافئة التي يوازي محورهما المحور  $oy$  ج :  $y^{(3)} = 0$

٢٥ - اوجد المعادلة التفاضلية لكل الدوائر المارة بمبدأ الإحداثيات .

$$(x^2 + y^2) y'' = 2(x y' - y)(1 + y'^2) \quad \text{ج :}$$

٢٦ - برهن أن المعادلة التفاضلية الناتجة عن حذف الثابت  $a$  من المعادلة :

$$2y = x y' + a x$$

وحذف الثابت  $b$  من المعادلة :

$$y = x y' - b x^2$$

هي المعادلة :  $x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = 0$

أوجد الحل المشترك للمعادلتين الأولى والثانية وذلك بأن تكتب أن قيمة  $y'$  المستخرجة من المعادلة الأولى مساوية إلى قيمتها المستخرجة من المعادلة

الثانية ثم برهن أن هذا الحل يحقق المعادلة الثالثة .

٢٧ - برهن أن كل منحني يحقق المعادلة التفاضلية :

$$y' = 1 + x y'^2 + x^2 y''$$

يقطع محور السينات تحت زاوية تساوي  $45^\circ$  .

٢٨ - اوجد زاوية المنحنيين التكامليين للمعادلة التفاضلية :

$$y'^2 = y^2 - 2x + x^2$$

مع محور السينات في النقطة (1,2) وبرهن أن نصف قطر تقوس

كل منها في النقطة المذكورة يساوي (4) .

٢٩ - اوجد المعادلات التفاضلية لكل مجموعة من مجموعات المنحنيات التالية .

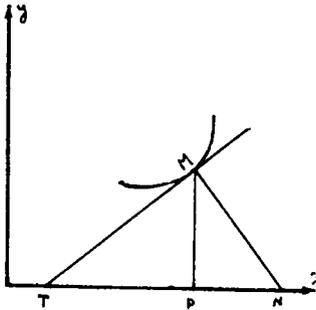
آ - المنحنيات التي يكون فيها تحت الناظم ثابتاً  $(1)$  .

ب - المنحنيات التي يكون فيها تحت المماس ثابتاً .

ج - المنحنيات التي يكون فيها طول الناظم ثابتاً .

د - المنحنيات التي يكون فيها طول المماس ثابتاً .

(١) لنصور منحنيًا محمولاً على محورين متعامدين  $ox, oy$  ولننتهي به من نقطة



من تقاطعه ولنسميها M ، مماساً وناظماً

يقطع الأول المحور  $ox$  في T ويقطعه الثاني

في N وليكن p مقطع M على  $ox$

نسمي بالتعريف :

$\overline{PT}$  تحت المماس و  $\overline{PN}$  تحت الناظم

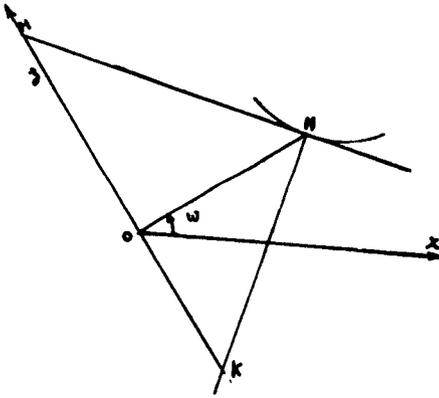
و  $MT$  بالمماس و  $MN$  بالناظم .

- هـ - المنحنيات التي يكون تحت الناظم القطبي ثابتاً (١)  
و - المنحنيات التي يكون تحت المماس القطبي ثابتاً .  
ز - المنحنيات التي يكون فيها الناظم القطبي ذا طول ثابت .  
ح - المنحنيات التي يكون فيها المماس القطبي ذا طول ثابت .
- الاجوبة :

آ -  $yy' = 0$     ب -  $\frac{y}{y'} = a$     ج -  $y^2 + y^2 y'^2 = a^2$

د -  $y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = a^2$     هـ -  $\rho' = a$     و -  $\rho^2 + \rho'a = 0$

ز -  $\rho^2 + \rho'^2 = a^2$     ح -  $\rho^2 \rho'^2 + \rho^4 = a^2 \rho'^2$



(١) لتصور الآن منحنيًا معرفًا بمادلته القطبية  $\rho = f(\omega)$  ولتكن  $M(\rho, \omega)$  نقطة من تقاطعه ولنرمز بـ  $O$  للقطب و  $Ox$  للمحور القطبي .

لننشئ من  $O$  عموداً على  $OM$  ولنأخذ على هذا الناظم الاتجاه  $Oz$  المعرف بالعلاقة :

$$(Ox, Oz) = \omega + \frac{\pi}{2}$$

وليكن  $H$  نقطة تقاطع المماس في  $M$  مع  $Oz$  و  $K$  نقطة تقاطع الناظم مع المستقيم المذكور .

نعتبر الاتجاه الموجب الاتجاه  $Oz$  ونسمي القطعتين المستقيمتين الموجهتين  $\overline{OH}$  ،  $\overline{OK}$  على الترتيب بتحت المماس وتحت الناظم القطبيين كما نسمي الطولين  $MH$  ،  $MK$  بطول المماس وطول الناظم القطبيين .