الفصل الثاني

المعادلات من المرتبة الاولى (١)

المعادلة ذات المتحولات المتفرقة ـ المعادلة المتجانسة

١ ـ المعادلة ذات المتحولات المتفرقة نقول : إن معادلة تفاضليـة ذات متحولات متفرقة إذا امكن كتابتها بأحد الشكلين :

$$\varphi(x)\,dy = g(y)\,dx \quad ، \quad \varphi(x)\,dx = g(y)\,dy$$

ونقول عن الشكل الأول إننا وضعنا المعادلة بوضع المتحولات المتفرقة .

نحل هذه المعادلة بأخذ تكامل طرفي الوضع ذي المتحولات المنفرقة فـــاذا فرضنا ان $\Phi(x)$ تابع أصلي لـ $\varphi(x)$ و $G(y)$ تابع أصلي لـ $g(y)$ ،كانحل المعادلة المفروض من الشكل :

$$\Phi(x) = G(y) + c$$

٢ ـ المعادلة المتجانسة : هي معادلة تفاضلية يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

نحل هذه المعادلة بأن نأخذ تابعاً جديداً معرفاً بالعلاقة :

$$y = xz \qquad \text{أو} \qquad \frac{y}{x} = z$$

فيكون

$$\frac{dy}{dx} = z + xz'$$

وتاخذ عندها المعادله الشكل التالي الذي هو ذو متحولات متفرقة :

$$x\frac{dz}{dx}=-z+f(z)$$

او

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{f(z)-z}$$

٣ - المادلات التي يمكن إرجاعها إلى معادلات متجانسة : هي معادلات يمكن كتابتها بأحد الشكلين :

$$(ax+by+c)\,dx=(a'x+b'y+c')\,dy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$$

تسمى عادة مثل هذه المادلة بذات الامثال الخطية .

لأرجاع مثل هذه المادلة الى معادلة متجانسة نتصور المستقيمين :

$$a'x+b'y+c'=0 \qquad , \qquad ax+by+c=0 \qquad (1)$$

ولنفرض انهما متقاطعان في نقطة احداثياها (α, β) فاذا اتخذنا متحولين جديدين معرفين بالعلاقتين .

$$Y=y+\beta \qquad X=x+\alpha$$

فان المادلة المفروضة تنقلب إلى معادلة متجانسة من الشكل :

$$\frac{dY}{dX}=\frac{MX+NY}{M'X+N'Y}$$

أما اذا كان المستقيان (١) متوازيين فمندها يمكننا ان نكتب :

$$ax+by=\lambda\,(a'x+b'y)$$

وتنقلب المادلة إلى معادلة ذات متحولات متفرقة فيما اذا فرضنا $z=ax+by$

تمارين محلولة

ضع المعادلات التالية بوضع المتحولات المتفرقة ثم حلها :

٣٠ - $y\,dx-x\,dy=xy\,dx$

الحل – يمكن كتابة هذه المعادلة على التتالي بالأشكال :

$$y\,dx - x\,y\,dx = x\,d\,y$$

$$y\,(1 - x)\,dx = x\,dy$$

$$\frac{1-x}{x}\,dx = \frac{dy}{y}$$

وبتكامل طرفي هذه المعادلة نجد :

$$\log x - x = \log y - \log c$$

$$x = \log \frac{c\,x}{y}$$

$$e^{x} = \frac{c\,x}{y}$$

ونجد أخيراً الحل العام لهذه المعادلة بالشكل :

$$y = c\,x\,e^{-x}$$

٣١ – $y' = e^{x+y}$

الحل – إن هذه المعادلة ذات متحولات متفرقة لانه يمكن كتابتها بالأشكال التالية :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} \cdot e^{y}$$

$$e^{-y}\,dy = e^{x}\,dx$$

وبتكامل طرفي المعادلة الأخيرة نجد :

$$-e^{-y} + c = e^{x}$$

او

$$e^{x} + e^{-y} = c$$

٣٢ – $(x^2 - y\,x^2)\,y' + y^2 + x\,y^2 = o$

الحل – إن هذه المعاذلة ذات متحولات متفرقة لانه يمكن كتابتها بالأشكال التالية :

$$x^2(1-y)y' + y^2(1+x) = o$$
$$x^2(1-y)dy + y^2(1+x)dx = o$$
$$\frac{(1+x)dx}{x^2} = \frac{(y-1)dy}{y^2}$$

وبايجاد تكامل الطرفين نجد :

$$\log x - \frac{1}{x} = \log y + \frac{1}{y} + \log c$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل :

$$\log \frac{x}{y} = \frac{x+y}{xy} + \log c$$

او بالشكل :

$$\frac{x}{y} = c\, e^{\frac{x+y}{xy}}$$

٣٣ - $(y^3+y-2)dx + xydy - 5ydy = o$

الحل : – إن هذه المعادلة ذات متحولات متفرقة لأنه يمكن كتابتها على التالي بالأشكال :

$$\frac{dx}{x-5} = \frac{-ydy}{y^3+y-2} \qquad (1)$$

يمكن تفريق الكسر الموجود في الطرف الأيمن من هذه المعادلة بعد ان نلاحظ :

$$y^3+y-2 = (y-1)(y^2+y+2)$$

$$\frac{-y}{(y-1)(y^2+y+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{By+C}{y^2+y+2}$$

وباتباع طريقة الأمثال غير المعينة نجد :

$$\frac{-y}{(y-1)(y^2+y+2)} = \frac{-1}{4(y-1)} + \frac{y-2}{4(y^2+y+^2)} =$$

$$\frac{-1}{4(y-1)} + \frac{1}{8}\,\frac{2y+1}{y^2+y+2} - \frac{5}{8}\,\frac{1}{y^2+y+2}$$

$$\frac{-y}{(y-1)(y^2+y+2)}=\frac{-1}{4(y-1)}+\frac{1}{8}\,\frac{2y+1}{y^2+y+2}-$$

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}$$

إذا وضعنا هذا الناتج في الطرف الأيمن من المعادلة (١) وكاملنا طرفيها فسوف نجد :

$$\log|x-5|=-\frac{1}{4}\log|y-1|+\frac{1}{8}\log|y^2+y+2|-$$

$$\frac{10}{8\sqrt{7}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2y+1}{\sqrt{7}}+c$$

٣٥ - حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{e^{x^2}dx}{\cos y}+\frac{\sin y\,dy}{x}=0$$

الحل : إن هذه المعادلة ذات متحولات متفرقة لأنه يمكن كتابتها بالشكل :

$$xe^{x^2}dx+\sin y\cos y\,dy=0$$

وبأخذ تكامل طرفي المعادلة الاخيرة نجد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{2}\sin^2 y=c$$

٣٦ - حل المعادلة التفاضلية :

$$x\,e^{x+2y}+y'=0$$

الحل : إن هذه المعادلة ذات متحولات متفرقة لأنه يمكن كتابتها على التوالي :

$$xe^x\,e^{2y}+\frac{dy}{dx}=0$$

$$x\,e^x\,dx=-e^{-2y}\,dy$$

وبتكامل طرفي هذه المعادلة نجد الحل العام :

$$xe^x - e^x = \frac{1}{2} e^{-2y} + c$$

٣٧ – اوجد المنحنيات التكاملية للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}} \qquad (1)$$

الحل : لنفرض $x = a \operatorname{ch} u$ ، $y = b \operatorname{ch} v$ فتأخذهذه المعادله الشكل :

$$du = dv$$

ويكون حلها العام : $v = u + c$

وتكون المعادلات الوسيطية لمنحنيات التكامل العام هي :

$$x = a \operatorname{ch} u \quad , \quad y = b \operatorname{ch} (u + c)$$

ومن أجل حذف الوسيط u يمكننا ان نكتب :

$$y = b (\operatorname{ch} u \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} c)$$

نستنتج من العلاقتين الأخيرتين العلاقة :

$$(ay - b x \operatorname{ch} c)^2 = b^2 (x^2 - a^2) \operatorname{sh}^2 c \qquad (2)$$

وهي معادلات قطوع زائدة مماسة إلى المستقيمين $x^2 - a^2 = o$ في نقاط تقاطع هذين المستقيمين مع المستقيم $a y - b x \operatorname{ch} c = o$ ويبرهن بسهولة تامة أن هذه المنحنيات تمس المستقيمين $y^2 - b^2 = o$

إن الحلول $x^2 - a^2 = o$ ، $y^2 - \quad = o$ هي حلول شاذة لأنها تحقق المعادلة المفروضة دون ان يمكن استنتاجها من الحل العام (2) من اجل قيم ما للثابت الاختياري c .

يمكن الوصول إلى النتيجة الأخيرة بان نفتش عن مغلفات جملة المنحنيات (٢) وذلك بأن نحذف الثابت c بين المعادلة ٢) والمعادلة الناتجة

باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة لـ c اي :

$$(3) \quad -2bx(ay - bx\,\mathrm{ch}\,c)\,\mathrm{sh}\,c = 2b^2(x^2 - a^2)\,\mathrm{sh}\,c\,\mathrm{ch}\,c$$

نستنتج من هذه المعادلة ان : $\mathrm{ch}\,c = \dfrac{yx}{ab}$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلة (٢) نجد :

$$\left(ay - \frac{bxyx}{ab}\right)^2 = b(x^2 - a^2)\left(\frac{y^2x^2}{a^2b^2} - 1\right)$$

بعد الاصلاح تأخذ هذه المعادلة الشكل :

$$a^2(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = o$$

وتظهر بسهولة الحلول : $x^2 - a^2 = o \quad , \quad y^2 - b^2 = o$

يمكن الوصول إلى هذه النتيجة بكتابة المعادلة المفروضة بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

ونلاحظ ان هذه المعادلة محققة من أجل $y^2 - b^2 = o$

لانه من أجل المستقيمين $y = \pm b$ يكون $y' = o$

وتكون هذه المعادلة محققة ايضاً من أجل $x^2 - a^2 = o$ لانـه من أجل المستقيمين $x = \pm a$ يكون $y' = \infty$

٣٨ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$$

الحل : إن هذه المعادلة التفاضلية متجانسة من الدرجة الأولى فلنفرض:

$$y = tx \;,\; dy = t\,dx + x\,dt$$

لنبدل في المعادلة المفروضة فتأخذ الشكل :

$$x(t\,dx + x\,dt) - tx\,dx = \sqrt{x^2 + x^2t^2}\,dx$$

اذا قسمنا طرفي هذه المعادلة على x ورتبناها فانها تأخـــذ شكلاً ذا متحولات متفرقة :

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{dx}{x}$$

$$\log (t + \sqrt{t^2 + 1}) = \log x + \log c$$

$$t + \sqrt{t^2 + 1} = cx$$

إذا عدنا إلى المتحولات الاصلية مانا نجد على التوالي :

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = cx$$

$$y^2 + x^2 = (c x^2 - y)^2$$

وبعد الاصلاح والاختصار نجد حل المعادلة المفروضة .

$$c^2 x^2 - 2 c y = 1$$

٣٩ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x \cos \frac{y}{x} . \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$$

الحل : إن هـذه المعادلة متجانسة لاننا لو بدلنـــا فيها y , x بـ λx , λy فانها لاتتغير . نقسم طرفيها على x ثم نفرض :

$$t= \frac{y}{x} \quad , y = t x , \quad y' = t + t' x$$

وتأخذ عندها المعادلة المفروضة الشكل :

$$(t+t'x) \cos t= t \cos t- 1$$

$$x \cos t \frac{d t}{d x} = - 1$$

$$\cos t \, dt = \frac{-dx}{x}$$

$$\sin t + \log x = c$$

واذا عدنا إلى المتحولات الأصلية فان الحل العام يكتب بالشكل :

$$xe^{\sin\frac{y}{x}} = c$$

٤٠ – حل المعادلة التفاضلية :

$$\left(x - y \operatorname{Arc}\sin\frac{y}{x} \right) dx + x \operatorname{Arc}\sin\frac{y}{x}\, dy = o$$

الحل : إن هذه المعادلة متجانسة نفرض من أجل حلها :

$$\frac{y}{x} = t \;,\; y = xt \;,\; dy = x\,dt + t\,dx$$

وتأخذ عندها الشكل التالي :

$$(x - x t \operatorname{Arc}\sin t) dx + x \operatorname{Arc}\sin t (x\,dt + t\,d x) = o$$

نقسم الطرفين على x ثم نختصر فتأخذ الشكل ذا المتحولات المتفرقة :

$$\frac{dx}{x} + \operatorname{Arc}\sin t\, d t = o$$

إذا كاملنا طرفي هذه المعادلة فاننا نجد :

$$\log x + t \operatorname{Arc}\sin t + \sqrt{1 - t^2} = c$$

$$\log x + \frac{y}{x} \operatorname{Arc}\sin \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}} = c$$

٤١ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(2 x + y - 1) dy = (4 x - y + 7) dx$$

الحل – إن هذه المعادلة من النوع ذي الأمثال الخطية لحلها نفتش عن تقاطع المستقيمين :

$$4 x - y + 7 = o \qquad 2 x + y - 1 = o$$

فنجد أنهما يتقاطعان في النقطة (3 ، 1 –) فلنفرض :

$$x = X - 1 \quad , \quad y = Y + 3$$

فنحصل على المعادلة المتجانسة بالنسبة للمتحولين الجديدين (X ، Y) :

$$(2 X + Y) d Y = (4 X - Y) d X$$

تحل هـذه المعادلة بفرض $Y = v\,X$ فتؤول إلى الشكل ذي المتحولات المتفرقة :

$$(2 + v)\, X\, dv + (v^2 + 3\, v - u)\, dX = o$$

$$\left(\frac{3}{v-1} + \frac{2}{v+4}\right) dv + \frac{5\, d\, X}{X} = o$$

وبعد تكامل الطرفين نحصل على المعادلة :

$$3 \log | v - 1 | + 2 \log | v + 4 | + 5 \log X = \log c$$

$$(v - 1)^3 \cdot (v + 4)^2 \cdot X^5 = c$$

لنعد إلى المتحول Y : $\quad (Y - X)^3 (4\, X + Y)^2 = c$

واذا بدلنا X ، Y بما يساويها بدلال x ، y نجد :

$$(y - x - 4)^3 (y + 4\, x + 1)^2 = c$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة .

٤٢ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(2\, x - 4\, y + 5)\, y' + x - 2\, y + 3 = o$$

الحل – نلاحظ أن المستقيمين المثلين بمثلي dx ، dy في المعادلة المفروضة متوازيان :

$$2\, x - 4\, y + 5 = o \qquad x - 2\, y + 3 = o$$

لذا نفرض تابعاً جديداً معرفاً بالعلاقة :

$$z = x - 2\, y \quad , \quad y' = \frac{1}{2} (1 - z')$$

بعد هذا التحويل تأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$(2\, z + 5)\, z' = 4\, z + 11$$

وهي معادلة ذات متحولات متفرقة يمكن كتابتها بالشكل :

$$\frac{(2\, z + 5)\, dz}{4\, z + 11} = d\, x$$

$$\left(1 - \frac{1}{4\, z + 11} \right) dz = 2\, d\, x$$

وباستكمال طرفي هذه المعادلة نحصل على الحل العام

$$4z - \log|4z + 11| = 8x - c$$

وإذا عدنا إلى المتحولات الأصلية فسوف نجد الحل العام بالشكل :

$$4x + 8y + \log|4x - 8y + 11| = c$$

٤٣ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(2x^2 + 3y^2 - 7)x\,dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)y\,dy = 0$$

الحل : إذا اجرينا التحويل المعرف بالعلاقتين $x^2 = u$ ، $y^2 = v$ فان المعادلة المفروضة تصبح ذات امثال خطية وتأخذ الشكل :

$$(2u + 3v - 7)\,du - (3u + 2v - 8)\,dv = 0$$

اذا لاحظنا أن المستقيمين $2u + 3v - 7 = 0$ ، $3u + 2v - 8 = 0$ يتقاطعان في النقطة ($v = 1$ ، $u = 2$) فان التحويل $u = s + 2$ ، $v = t + 1$ يجعل هذه المعادلة متجانسة بالشكل :

$$(2s + 3t)\,ds - (3s + 2t)\,dt = 0$$

نفرض : $s = rt$, $ds = r\,dt + t\,dr$ فتأخذ المعادلة السابقة الشكل :

$$2(r^2 - 1)\,dt + (2r + 3)\,t\,dr = 0$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بشكل ذي متحولات متفرقة :

$$2\frac{dt}{t} + \frac{2r + 3}{r^2 - 1}\,dr = 0$$

$$2\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\frac{dr}{r + 1} + \frac{5}{2}\frac{dr}{r - 1} = 0$$

$$4\log|t| - \log|r + 1| + 5\log|r - 1| = \log c$$

$$\frac{t^4(r - 1)^5}{r + 1} = \frac{(s - t)^5}{s + t} = \frac{(u - v - 1)^5}{u + v - 3} = \frac{(x^2 - y^2 - 1)^5}{x^2 + y^2 - 3} = c$$

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة المفروضة بالشكل :

$$(x^2 - y^2 - 1)^5 \cdot (x^2 + y^2 - 3)^{-1} = c$$

تمارين للحل

ضع المعادلات التفاضلية التالية بشكل ذي متحولات متفرقة وتحقق من صحة الحل بمقارنة الناتج مع الجواب المرافق لكل منها :

٤٤- $(1+y)\,dx-(1-x)\,dy=0$ $\qquad (1+y)(1-x)=c$

٤٥- $(1+x)\,y\,dx+(1-y)\,x\,dy=0$ $\qquad \log xy+x-y=c$

٤٦- $(x^2-y\,x^2)\,y'+y^2+x\,y^2=0$ $\qquad \dfrac{x+y}{xy}+\log\dfrac{y}{x}=c$

٤٧- $\sin\theta\cos\varphi\,d\theta-\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi=0$ $\qquad \cos\varphi=c\cos\theta$

٤٨- $(1+x^2)\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$ $\qquad \operatorname{Arc\,sin} y-\operatorname{Arc\,tg} x=c$

٤٩- $\sqrt{1-x^2}\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$ $\qquad y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=c$

٥٠- $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$ $\qquad \operatorname{tg} y=c(1-e^x)^3$

٥١- $2x^2y\,dy=(1+x^2)\,dx$ $\qquad y^2=-\dfrac{1}{x}+x+c$

حل المعادلات التالية وتأكد من النتائج المرافقة :

٥٢- $\sqrt{y^2-1}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$ $\qquad \operatorname{Arc\,sin} x+\sqrt{y^2-1}=c$

٥٣- $e^{x+y}\,dx+e^{2y-x}\,dy=0$ $\qquad e^{2x}+2e^y=c$

٥٤- $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2\sqrt{1-y^4}}{2y}$ $\qquad y^2=\sin(x^3+c)$

٥٥- $$\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{dy}{\sqrt{y^2+y+1}}$$

ج : $(2x+1)\sqrt{y^2+y+1}-(2y+1)\sqrt{x^2+x+1}=c$

٥٦- $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$ $\qquad x^2+y^2-2\mu xy=1-\mu^2$

٥٧- $(x+y)\,dx + x\,dy = o$ $\qquad x^2 + 2y_1x = c_1$

٥٨- $(x+y)dx + (y-x)\,dy = o$ $\qquad \log\sqrt{x^2+y^2} - \text{Arc tg}\frac{y}{x} = c$

٥٩- $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\sin\frac{y}{x}(x\,dy - y\,dx)$

ج : $x\,y\cos\frac{y}{x} = c$

٦٠- $(x^2+y^2)\,dx + x\,y\,dy = o$ $\qquad x^4 + 2x^2y^2 = c^2$

٦١- $(x^2+y^2)\,dx - 2x\,y\,dy = o$ $\qquad x^2 - y^2 = c\,x$

٦٢- $(y+\sqrt{x^2-y^2})\,dx - x\,dy = o$ $\qquad \log|c\,x| = \text{Arc sin}\frac{y}{x}$

٦٣- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-\sqrt{xy}}$ $\qquad -2\sqrt{\frac{x}{y}} = \log|c\,y|$

٦٤- $y(y + x\,e^{\frac{x}{y}})\,dx - x^2 e^{\frac{x}{y}}\,dy = o$ $\qquad e^{\frac{x}{y}} + \log|x| = c$

٦٥ – أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $y\,dx + (y-x)\,dy = o$

الذي يتحقق من أجل $x = 4$, $y = 1$.

٦٦ – اوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = o$ الذي يتحقق من اجل $x = 3$ ، $y = 4$

حول المعادلات التالية إلى معادلات متجانسة ثم حلها وتأكـــد من النتائج المرافقة .

٦٧- $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = o$ $\qquad x + 3y + 2\log(2-x-y) = c$

٦٨- $(2x-5y+3)dx - (2x+4y-6)dy = o$ $\qquad (4y-x-3)(y+2x-3)^2 = c$

٦٩- $(x-y-1)dx + (4y+x-1)dy = o$

ج : $\log[4y^2 + (x-1)^2] + \text{Arc tg}\frac{2y}{x-1} = c$

٧٠- $(x+y+1)\,dx + (2x+2y+1)\,dy = o$

ج : $x + 2y + \log|x+y| = c$

٧١- $(3x + 2y + 1)\,dx - (3x + 2y - 1)\,dy = 0$

ج : $\log(15x + 10y - 1) + \frac{5}{2}(x - y) = c$

اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التالية ضمن الشروط المرافقة :

٧٢- $x\,dy + 2y\,dx = 0$ ، $x = 2$ ، $y = 1$

ج : $x^2 y = 4$

٧٣- $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$ ، $x = 1$ ، $y = -1$

ج : $x^4 + 2x^2y^2 = 3$

٧٤- $\cos y\,dx + (1 + e^{-x})\sin y\,dy = 0$ ، $x = 0$ ، $y = \frac{\pi}{4}$

ج : $(1 + e^x)\sec y = 2\sqrt{2}$

* * *