

## الفصل الثالث

### المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى (٢)

المعادلة الخطية - معادلة بيرنولي - معادلة جاكوبي - معادلة ديكاني

١ - المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى :

$$(1) \quad y' + f(x)y = g(x)$$

يدعى  $g(x)$  بالطرف الثاني للمعادلة وإذا كان  $g(x) \equiv 0$  سميت المعادلة بالمعادلة الخطية المتجانسة أو بمعادلة خطية بلا طرف ثان .

إن المعادلة الخطية المتجانسة هي معادلة تفاضلية ذات متحولات متفرقة تكتب بالشكل :

$$(2) \quad \frac{dy}{y} + f(x) dx = 0$$

ويكون حلها من الشكل :

$$(3) \quad y = c e^{-\int f(x) dx}$$

لحل المعادلة التامة نقتس عن تابع من الشكل (3) يحقق المعادلة التامة بشرط ان نعتبر  $c$  تابعاً لـ  $x$  وليس ثابتاً اختيارياً ويكون عندها الحل العام للمعادلة (1) من الشكل :

$$y = \lambda h(x) + k(x)$$

وهو تابع خطي بالنسبة للثابت الاختياري  $\lambda$  وينتج عن ذلك أنه إذا كان  $y_1, y_2$  حلين خاصين لهذه المعادلة و  $y$  الحل العام لها فانه يكون :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \text{const}$$

إذا عرفنا حلاً خاصاً للمعادلة (1) فان الحل العام يساوي مجموع الحل الخاص المذكور والحل العام للمعادلة بلا طرف ثان .

٢ - معادلة بيرنولي Bernoulli :  $y' + f(x)y = g(x)y^n$

حيث  $n$  عدد جبري كيفي .

نؤول هذه المعادلة الى معادلة خطية عندما نجري عليها التحويل  $z = y^{1-n}$  وتأخذ الشكل :

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + f(x)z = g(x)$$

يمكننا أن نعيد، إلى شكل بيرنولي، المعادلة التي من الشكل :

$$(4) \quad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy + k x^m (x dy - y dx) = c$$

وذلك باجراء التحويل  $y = u x$  فنأخذ الشكل :

$$[\varphi(u) + u \psi(u)] \frac{dx}{du} + x \psi(u) + k x^{m+2} = 0$$

ونعتبر  $x$  هو التابع و  $u$  المتحول .

٣ - معادلة جاكوبي Jacobi

$$(a + a_1 x + a_2 y) (x dy - y dx) - (b + b_1 x + b_2 y) dy + (c + c_1 x + c_2 y) dx = 0.$$

إذا  $a = b = c = 0$  تحولت المعادلة إلى معادلة بيرنولي من

الشكل (٤) ، ولتعيدها الحالة العامة إلى هذه الحالة الخاصة نفرض :

$$y = Y + \beta \quad , \quad x = X + \alpha$$

ويجب من أجل ذلك أن يكون :

$$\frac{a + a_1 \alpha + a_2 \beta}{1} = \frac{b + b_1 \alpha + b_2 \beta}{\alpha} = \frac{c + c_1 \alpha + c_2 \beta}{\beta} = \gamma$$

ونحقق  $\gamma$  بالآتي :

$$\begin{vmatrix} a - \gamma & a_1 & a_2 \\ b & b_1 - \gamma & b_2 \\ c & c_1 & c_2 - \gamma \end{vmatrix} = 0$$

٤ - معادلة ريكاتي Riccati :

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y = h(x)$$

إذا علم حل خاص لهذه المعادلة نرمز له بـ  $y_1$  فإن تغيير المتحول يجعلها لا تحتوي حداً مستقلاً عن  $z$  وهي من الشكل :

$$\frac{dz}{dx} + [g(x) + 2f(x)y_1]z + f(x)z^2 = 0$$

وهي معادلة من نوع بيرنوئي نحل بفرض  $u = \frac{1}{z}$  ونجد :

$$u = c \cdot h(x) + \varphi(x)$$

$$y = y_1 + \frac{1}{c \cdot h(x) + \varphi(x)} = \frac{c \cdot h_1(x) + \varphi_1(x)}{c \cdot h(x) + \varphi(x)} \quad \text{ويكون}$$

إن الطرف الثاني من هذه العلاقة تناظري بالنسبة لـ  $c$  ويتبع عن ذلك أنه إذا كان  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  أربع حلول خاصة للمعادلة المذكورة تقابل القيم  $c_1, c_2, c_3, c_4$  للثابت الاختياري  $c$  فإنه يكون :

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{c_4 - c_1}{c_4 - c_2} : \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} = \text{const}$$

ومعنى ذلك أنه إذا عرفت ثلاثة حلول خاصة للمعادلة المفروضة فإن الحل العام يحقق المعادلة :

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \text{const}$$

### تمارين محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$y' - ay = e^{bx} \quad - \text{V5}$$

إن هذه المعادلة خطية نحلها بلا طرف ثان فنجد على التوالي :

$$y' - ay = 0 \quad , \quad \frac{dy}{y} = ax \quad , \quad y = c e^{ax}$$

لنطبق طريقة تحويل الثابت الاختياري c فنجد :

$$y' = ace^{ax} + c'e^{ax}$$

لنحل قيمة المشتق في المعادلة المفروضة فنجد :

$$a ce^{ax} + c'e^{ax} - ace^{ax} = e^{bx}$$

$$c'e^{ax} = e^{bx} \quad , \quad c' = e^{(b-a)x}$$

$$c = \int e^{(b-a)x} dx = \frac{e^{(b-a)x}}{b-a} + \lambda \cdot$$

ويكون أخير حل المعادلة التفاضلية المفروضة هو :

$$y = \frac{e^{bx}}{b-a} + \lambda e^{ax}$$

حيث  $\lambda$  ثابت اختياري .

$$y' \sin x - y \cos x = \operatorname{tg} x \quad - \text{٧٦}$$

إن هذه المعادلة خطية نحلها بدون طرف ثان فنجد على التوالي :

$$y' \sin x - y \cos x = 0 \quad , \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

وبأخذ تكامل طرفي العلاقة الأخيرة نجد :

$$\log y = \log \sin x + \log c \quad , \quad y = c \sin x$$

لنحول الثابت الإختياري c ونحسب مشتق y ونبدل في المعادلة المفروضة :

$$y' = c' \sin x + c \cos x$$

$$(c' \sin x + c \cos x) \sin x - c \sin x \cos x = \operatorname{tg} x$$

$$c' \sin^2 x = \operatorname{tg} x \quad , \quad dc = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}$$

$$c = \log | \operatorname{tg} x | + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة :

$$y = \sin x [ \lambda + \log | \operatorname{tg} x | ]$$

$$x y' + y = y^3 \quad - \text{٧٧}$$

إن هذه المعادلة من نوع بيرنولي تؤول الى معادلة خطية إذا فرضنا  
 $z = y^{-3}$  ويكون :

$$z' = -3 y' \cdot y^{-4}$$

تأخذ المعادلة المفروضة بعد ان نقسم طرفيها على  $y^3$  الشكل :

$$x y' y^{-3} + y^{-2} = 1$$

$$- \frac{1}{2} x z' + z = 1 \quad \text{او}$$

وهذه معادلة خطية بالنسبة لـ  $z$  حلها العام  $z = 1 + \lambda x^2$  ويكون  
 حل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$\lambda x^2 y^2 + y^2 = 1$$

٧٨ - حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' - \frac{1 + 3x^2}{x(1+x^2)} y = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$

وعين الحل الخاص الذي ينعدم من أجل  $x = 1$

إن هذه المعادلة خطية نحلها بدون طرف ثان :

$$\frac{dy}{y} = \frac{(1 + 3x^2) dx}{x(1+x^2)}$$

$$\log y = \log x (1+x^2) + \log c$$

$$y = c x (1+x^2)$$

لنعول  $c$  ولنحسب  $y'$  ثم لنحمل هذه القيمة في المعادلة المفروضة :

$$y' = c(1+3x^2) + c'x(1+x^2)$$

$$c(1+3x^2) + c'x(1+x^2) - \frac{(1+3x^2) \cdot cx(1+x^2)}{x(1+x^2)}$$

$$= \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$c' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

و بتطبيق الدستور :

$$2(n-1)I_n = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}$$

$$\text{حيث : } I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \text{ نجد :}$$

$$2I_2 = 2 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + \text{Arc tg } x + \lambda$$

ونجد أخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = x(1+x^2) \left[ \frac{x}{1+x^2} + \lambda \right] = x^2 + \lambda x(1+x^2)$$

لتحقيق الشرط المعطى بنص المسألة وهو ان  $y=0$  من أجل  $x=1$

نبدل في الحل العام فنجد :

$$0 = 1 + 2\lambda$$

ومنه :  $\lambda = -\frac{1}{2}$  ويكون الحل الخاص المطلوب هو :

$$y = x^2 - \frac{x(1+x^2)}{2}$$

$$\text{٧٩- حل المعادلة : } \left( \frac{x}{y} + y \right) dy + dx = 0$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = -y$$

وهي معادلة خطية عندما نعتبر  $x$  تابعاً و  $y$  متحولاً .  
فنحلها بدون طرف ثان فنجد :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad , \quad \log x + \log y = \log c$$

$$x = \frac{c}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{c'}{y} - \frac{c}{y^2} \quad \text{لتحول الثابت :}$$

$$\frac{c'}{y} = -y \quad , \quad c' = -y^2 \quad , \quad c = -\frac{y^3}{3} + \lambda$$

$$x = -\frac{y^2}{3} + \frac{\lambda}{y} \quad \text{ويكون الحل العام للمعادلة :}$$

$$\text{٨. حل المعادلة التفاضلية : } \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a y^2 \log x$$

الحل : إن هذه المعادلة من نوع بيرنولي فلنقسم طرفيها على  $y^2$  ولنفرض

$$\frac{1}{y} = z \quad . \quad z' = \frac{-y'}{y^2}$$

فتأخذ المعادلة المفروضة ، على التوالي ، الأشكال :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = a \log x$$

$$(1) \quad -z' + \frac{1}{x} z = a \log x$$

وهي معادلة خطية نجعلها أولاً بلاطرف ثان فنجد :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \quad , \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad , \quad z = c x$$

فحول الثابت الاختياري ونشتق  $z$  ثم نبدل في المعادلة (١) فنحصل على

المراحل التالية :

$$z' = c' x + c$$

$$-c' x - c + c = a \log x \quad , \quad -c' x = a \log x$$

$$c' = -\frac{a}{x} \log x \quad , \quad c = -a \int \log x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} a \log^2 x + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة (١) :

$$z = -\frac{1}{2} a x \log^2 x + \lambda x$$

وإذا عدنا إلى التابع  $y$  فإننا نحصل على التكامل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = \frac{2}{2 \lambda x - a x \log^2 x}$$

٨١ - حل المعادلة التفاضلية  $3 y^2 y' - a y^3 = x + 1$

الحل : يمكن حل هذه المعادلات بطريقتين نفرض في الأولى  $z = y^3$  فتصبح المعادلة المفروضة خطية :

$$z' - a z = x + 1$$

نحلها حسب المراحل التالية :

$$\frac{dz}{z} = a dx \quad z = c e^{ax}$$

$$z' = c' e^{ax} + a c e^{ax}$$

$$c' e^{ax} = x + 1$$

$$c = \int e^{-ax} x dx + \int e^{-ax} dx$$

$$c = -\frac{x}{a} e^{-ax} - \frac{1}{a^2} e^{-ax} - \frac{1}{a} e^{-ax} + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$z = y^3 = \lambda e^{ax} - \frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2}$$

أما إذا قسمنا طرفي المعادلة المفروضة على  $y^2$  فإنها تأخذ الشكل :

$$3 y' - a y = (x + 1) y^{-2}$$

وهي معادلة من نوع بيرنولي نحلها بأن نفرض  $y^3 = z$  ونتابع كالسابق :

٨٢ - حل المعادلة التفاضلية :  $1 = \frac{dy}{dx} \cdot (x^2 y^3 + x y)$

الحل : يمكن اعتبار  $x$  تابعاً و  $y$  متحولاً وكتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$\frac{dx}{dy} - x y = x^2 y^3$$

فتأخذ كما نلاحظ شكل معادلة بيرنولي نحلها بأن نفرض  $x = \frac{1}{z}$

$$x' = \frac{-z'}{z^2} \text{ وتأخذ هذه المعادلة الشكل :}$$

$$z' + yz = -y^3$$

وهي معادلة خطية نحلها فنجد على التوالي :

$$\frac{dz}{z} + y dy = 0 \quad , \quad \log z + \frac{1}{2} y^2 = \log c$$

$$z = c e^{-\frac{1}{2} y^2}$$

لنعتبر  $c$  متحولاً فنحصل على المعادلة التي تعطينا  $c$  :

$$c' e^{-\frac{1}{2} y^2} = -y^3 \quad , \quad c = - \int y^3 e^{\frac{1}{2} y^2} dy$$

نفرض في هذا التكامل  $t = \frac{1}{2} y^2$  فتأخذ الشكل :

$$c = - 2 \int t e^t dt = - 2 ( t e^t - e^t ) + \lambda = ( 2 - y^2 ) e^{\frac{1}{2} y^2} + \lambda$$

$$z = \frac{1}{x} = ( 2 - y^2 ) e^{\frac{1}{2} y^2} + \lambda \quad \text{ومنه}$$

$$e^{\frac{1}{2} y^2} = x [ ( 2 - y^2 ) e^{\frac{1}{2} y^2} + \lambda ] \quad \text{أو}$$

وهو الحل العام للمعادلة المطلوبة :

$$(2) \quad (x^2 - y^4) \frac{dy}{dx} = x y \quad \text{— ٨٣ — حل المعادلة التفاضلية :}$$

الحل : يمكن هذه المعادلة بطرق متعددة :

الطريقة الأولى : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$x y \frac{dx}{dy} = x^2 - y^4$$

فاذا اعتبرنا  $z = x^2$  تابعاً و  $y$  متحولاً أنقلبت المعادلة إلى معادلة خطية من الشكل :

$$(3) \quad yz' - 2z = -2y^4$$

نحلها بدون طرف ثان فنجد على التوالي :

$$y z' = 2z \quad , \quad \frac{dz}{z} = \frac{2 dy}{y} \quad , \quad \log z = 2 \log y + \log c \quad , \quad z = c y^2$$

نحول الثابت الاختياري ونحسب  $z'$  ونحمل الناتج في المعادلة (٣) فنجد على التوالي:

$$c' y^3 = -2y^4, \quad c' = -2y, \quad c = -y^2 + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة (٣) ومن بعده الحل العام للمعادلة المفروضة:

$$z = -y^4 + \lambda y^2$$

$$x^2 = -y^4 + \lambda y^2$$

$$x^2 + y^4 = \lambda y^2$$

أو:

**الطريقة الثانية:** إذا قسمنا طرفي المعادلة (٢) على  $x$  فإنه يمكن

كتابة الناتج بالشكل:

$$y \frac{dx}{dy} - x = -x^{-1} y^4$$

وهي كما يلاحظ: معادلة من نوع بيرنولي نحلها بالطرق المعروفة.

**الطريقة الثالثة:** يمكننا أن نتخذ تابعاً جديداً  $u$  معرفاً بالعلاقة

$$x = u y \quad \text{فنجد:}$$

$$dx = u dy + y du$$

وبذلك تأخذ المعادلة الشكل:

$$(u^2 y^2 - y^4) dy = u y^2 (u dy + y du)$$

$$y dy + u du = 0 \quad \text{أو}$$

$$y^2 + u^2 = \lambda^2$$

ومن

$$y^4 + x^2 = \lambda^2 y^2$$

وإذا عدنا إلى  $x$  نجد:

$$\text{٨٤ - حل المعادلة التفاضلية: } (x - y^2) dx + 2xy dy = 0$$

الحل: يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل:

$$2xy' - y = \frac{-x}{y}$$

وهي من نوع بيرنولي كما يلاحظ بسهولة فلنفرض  $z = y^2$   $z' = 2yy'$

فتأخذ المعادلة الشكل:

$$xz' - z = -x$$

وهي معادلة خطية نحلها حسب المراحل التالية :

$$x z' - z = 0 \quad , \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad , \quad z = c x$$

نحول الثابت الاختياري  $c$  فنجد :

$$x^2 c' = -x \quad , \quad c' = -\frac{1}{x} \quad , \quad c = -\log x + \lambda \quad , \quad z = \lambda x - x \log x$$

ونجد أخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة وهو :

$$y^2 = \lambda x - x \log x$$

٨٥ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(2x \operatorname{sh} \frac{y}{x} + 3y \operatorname{ch} \frac{y}{x}) dx - 3x \operatorname{ch} \frac{y}{x} dy + \frac{3(x dy - y dx)}{x^2} = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة يمكن كتابتها بشكل يجعلها من نوع بيرنولي

وذلك إذا فرضنا :

$$du = \frac{x dy - y dx}{x^2} \quad , \quad u = \frac{y}{x} \quad , \quad dy = u dx + x du \quad , \quad y = x u$$

فتأخذ عندها المعادلة الشكل التالي بعد تقسيم طرفيها على  $x$  :

$$(2 \operatorname{sh} u + 3u \operatorname{ch} u) dx - 3 \operatorname{ch} u (u dx + x du) + 3x^{-1} du = 0$$

$$2 \operatorname{sh} u \frac{dx}{du} - 3x \operatorname{ch} u + 3x^{-1} = 0$$

وتؤول إلى معادلة خطية عندما نفرض  $z = x^2$  بعد ضرب طرفيها بـ  $x$  :

$$(1) \quad \operatorname{sh} u z' - 3z \operatorname{ch} u = -3$$

نحلها بدون طرف ثان فنجد على التوالي :

$$\frac{dz}{z} = \frac{3 \operatorname{ch} u du}{\operatorname{sh} u} \quad , \quad \log z = 3 \log \operatorname{sh} u + \log c$$

$$z = c \operatorname{sh}^3 u$$

نعتبر  $c$  متحولاً تابعاً لـ  $x$  ونشتق هذه العلاقة لحساب  $z'$  ثم حمل هذا

المشتق في المعادلة (١) فنجد على التوالي :

$$z' = c' \operatorname{sh}^3 u + 3 c \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch} u$$

$$c' \operatorname{sh}^4 u = -3 \quad , \quad c = -3 \int \frac{du}{\operatorname{sh}^4 u}$$

إن من المعروف ان :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} = \frac{\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u} = \frac{1 - \operatorname{th}^2 u}{\operatorname{th}^2 u}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^4 u} = \frac{(1 - t^2)^2}{t^4} \quad , \quad du = \frac{dt}{1 - t^2} \quad \text{يكون} \quad t = \operatorname{th} u$$

وإذا فرضنا  $t = \operatorname{th} u$  يكون

$$c = -3 \int \frac{dt}{1 - t^2} \cdot \frac{(1 - t^2)^2}{t^4} = -3 \int \frac{1 - t^2}{t^4} dt$$

$$c = -3 \int \frac{dt}{t^4} + 3 \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t^3} - \frac{3}{t} + \lambda$$

وإذا بدلنا  $t$  بالقيمة التي فرضناها فسوف نجد :

$$z = \operatorname{ch}^3 u - 3 \operatorname{ch} u \operatorname{sh}^2 u + \lambda \operatorname{sh}^3 u$$

وإذا عدنا إلى المتحولات الأصلية نجد الحل العام للمعادلة المفروضة من

الشكل :

$$x^2 = \lambda \operatorname{sh}^3 \frac{y}{x} + \operatorname{ch}^3 \frac{y}{x} - 3 \operatorname{ch} \frac{y}{x} \operatorname{sh}^2 \frac{y}{x}$$

٨٦ - حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$(x + 3y) dx + 2y dy + a(x + y)(x dy - y dx) = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة حالة خاصة من معادلة جاكوبي يمكن جعلها من

نوع معادلة التمرين السابق بأن نقسم طرفيها على عامل  $(x dy - y dx)$

وهو  $x + y$  فتأخذ الشكل التالي :

$$\frac{x + 3y}{x + y} dx + \frac{2y}{x + y} dy + a(x dy - y dx) = 0$$

ثم نفرض كما سبق  $u = \frac{y}{x}$  فتأخذ الشكل :

$$\frac{1+3u}{1+u} dx + \frac{2u}{1+u} (u dx + x du) + ax (u dx + x du - u dx) = 0$$

وبعد الاختصار والجمع والتقسيم على  $du$  تأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$\frac{2u^2 + 3u + 1}{1+u} \frac{dx}{du} + \frac{2ux}{1+u} + ax^2 = 0$$

أن هذه المعادلة من نوع بيرنولي حيث نعتبر  $x$  تابعاً و  $u$  متحولاً نحل بأن

نتخذ تابعاً جديداً  $z$  معرفاً بالعلاقة  $z = \frac{1}{x}$  فتأخذ عندها المعادلة السابقة

الشكل :

$$\frac{2u^2 + 3u + 1}{1+u} z' - \frac{2uz}{1+u} = a$$

وهي معادلة خطية محلها بدون طرف ثان حسب المراحل التالية :

$$\frac{dz}{z} = \frac{2u du}{2u^2 + 3u + 1} = \frac{2du}{u+1} - \frac{2du}{2u+1}$$

$$\log z = 2 \log (u+1) - \log (2u+1) + \log c$$

$$z = \frac{c(u+1)^2}{2u+1}$$

نحول الثابت الاختياري  $c$  ونشتق  $z$  ثم نحمل الناتج في المعادلة التفاضلية

بالنسبة لـ  $z$  فتأخذ الشكل :

$$\frac{c'(u+1)^2}{2u+1} \cdot \frac{2u^2 + 3u + 1}{1+u} = a$$

$$c'(u+1)^2 = a \quad , \quad c = \int \frac{a du}{(1+u)^2} = \frac{-a}{1+u} + \lambda$$

إذا حملنا قيمة  $c$  هذه في إفادة  $z$  فإنها تأخذ الشكل :

$$z = \frac{-a(u+1)}{2u+1} + \lambda \frac{(u+1)^2}{2u+1}$$

وإذا عدنا إلى المتحولين  $y, x$  فسوف نجد الحل العام للمعادلة المفروضة

بالشكل :

$$\frac{1}{x} = \frac{-a(y+x)}{2y+x} + \lambda \frac{(y+x)^2}{x(2y+x)}$$

أو بالشكل :

$$2y+x+ax(y+x) = \lambda(y+x)^2$$

٨٧ - حل المعادلة التفاضلية التالية :

الحل : إن هذه المعادلة هي من الشكل العام لمعادلة جاكوبي . حلها نعيدها إلى الشكل الخاص الذي يطابق شكل معادلة التمرين السابق وذلك بإجراء تحويل معرف بالعلاقين :

$$y = Y + \beta \quad , \quad x = X + \alpha$$

ونختار  $\alpha, \beta$  بحيث تكون المعادلة الناتجة مشابهة لمعادلة التمرين السابق أي أن تكون أمثال  $dx, dy, dx dy - y dx$  غير حاوية لأعداد ثابتة . لتبدل في المعادلة المفروضة :

$$\begin{aligned} & (X + \alpha - Y - \beta + 1) dX + (X + \alpha - Y - \beta - 1) dY + (X + \\ & \alpha + Y + \beta - 1) [(X + \alpha) dY - (Y + \beta) dX] = 0 \\ & (X - Y) dX + (\alpha - \beta + 1) dX + (X - Y) dY + (\alpha - \beta - 1) dY \\ & + (X + Y) (X dY - Y dX) + (X + Y) (\alpha dY - \beta dX) + \\ & (\alpha + \beta - 1) (X dY - Y dX) + (\alpha + \beta - 1) (\alpha dY - \beta dX) = 0 \end{aligned}$$

لتأخذ هذه المعادلة الشكل المختصر للتمرين السابق يجب أن يكون عاملاً

$dY, dX$  المستقلين عن  $X, Y$  مساويين للصفر أي أن يكون :

$$\begin{aligned} & (\alpha - \beta + 1) - \beta (\alpha + \beta - 1) = 0 \\ & (\alpha - \beta - 1) + \alpha (\alpha + \beta - 1) = 0 \end{aligned}$$

( معادلات تفاضلية )

يمكن كتابة هاتين المعادلتين بالشكل :

$$(1) \quad \frac{\alpha + \beta - 1}{1} = \frac{\alpha - \beta + 1}{\beta} = \frac{\alpha - \beta - 1}{-\alpha} = \lambda$$

حيث فرضنا القيمة المشتركة للنسب الثلاثة مساوية لـ  $\lambda$  .

ينتج عن (١) المعادلات الخطية الثلاثة بالنسبة لـ  $\alpha$  ,  $\beta$  ،

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha + \beta - (1 + \lambda) = 0 \\ \alpha - (\lambda + 1)\beta + 1 = 0 \\ \alpha(1 + \lambda) - \beta - 1 = 0 \end{cases}$$

لإمكان حل جملة المعادلات الخطية (٢) ذات المجهولين  $\alpha$  ,  $\beta$  اي لتكون

هذه المعادلات متوافقة ، يلزم وبكفي أن يكون :

$$(3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -(1 + \lambda) \\ 1 & -(\lambda + 1) & 1 \\ 1 + \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

إذا نشرنا هذا المعين بالطرق المعروفة فاننا نجد :

$$\Delta = (2 + \lambda)^2 (\lambda - 1)$$

ويكون للمعادلة (٣) جذر مضاعف هو  $(\lambda - 1)$  وجذر بسيط هو (١)

إذا بدلنا في المعادلات (٢)  $\lambda$  بـ  $(\lambda - 1)$  فانها تصبح كلها من شكل

واحد وهذا يعني أن هذه القيمة غير متوافقة أما إذا بدلنا  $\lambda$  بـ (١) فان هذه

المعادلات تأخذ الشكل :

$$\alpha + \beta - 2 = 0$$

$$\alpha - 2\beta + 1 = 0$$

$$2\alpha - \beta - 1 = 0$$

ونلاحظ بسهولة أن المعادلة الثالثة تنتج عن المعادلتين الأولى والثانية

بجمعها الى بعضها . نحل المعادلتين الأولى والثانية فنجد  $\alpha = 1$  ,  $\beta = 1$  .

إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة المفروضة فإنها تأخذ الشكل التالي، حيث

نلاحظ مرة ثانية أن العاملين الثابتين لـ  $dx$  و  $dy$  معدومان :

$$(X - Y + 1) dX + (X - Y - 1) dY + (X + Y + 1) [(X + 1) dY - (Y + 1) dX] = 0$$

$$(X - Y) dX + (X - Y) dY + (X + Y) (X dY - Y dX) + (X dY - Y dX) + (X + Y) (dY - dX) = 0$$

وبعد الترتيب تأخذ هذه المعادلة الشكل :

$$-3Y dX + 3XdY + (X + Y) (X dY - Y dX) = 0$$

تقسم على  $X + Y$  ونفرض  $Y = uX$  فنجد :

$$\frac{-3u}{1+u} dX + \frac{3}{1+u} (u dX + X du) + [X (u dX + X du) - X u dX] = 0$$

وبعد الإصلاح نلاحظ أنه لن تبقى في هذه المعادلة حدود تحوي

التفاضل  $dX$  بل تكون من الشكل :

$$\left[ \frac{3X}{1+u} + X^2 \right] du = 0$$

وهذا يعني ان  $du = 0$  أو  $u = c$  وإذا عدنا إلى الفرضيات التي

فرضناها اعلاه نجد ان الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$u = \frac{Y}{X} = \frac{y-1}{x-1} = c, \quad y-1 = c(x-1)$$

— **^^** — برهن أن للمعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad y' (1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$$

الحل الخاص  $y_1 = \cos x$  ثم اوجد حلها العام .

المطل : لكي نبرهن ان  $y_1 = \cos x$  حل خاص للمعادلة المفروضة نشق هذا التابع ونبدل في المعادلة ونظهر أنها تنقلب إلى مطابقة :

$$y' = -\sin x$$

$$(2) \quad - (1 - \sin x \cos x) \sin x + \cos^3 x - \cos x + \sin x \equiv 0$$

$$-\sin x + \sin^2 x \cos x + \cos^3 x - \cos x + \sin x \equiv 0$$

$$(1 - \cos^2 x) \cos x + \cos^3 x - \cos x \equiv 0$$

ونلاحظ بسهولة صحة المطابقة الأخيرة .

بعد ان برهننا ان  $y_1 = \cos x$  حل خاص نلاحظ ان المعادلة المفروضة

هي معادلة ريكاتي ونجري تغيير التابع المعرف بالعلاقة  $y = y_1 + z$

$$y' = z' - \sin x : \text{ونجد} \quad y = z + \cos x \quad \text{أي}$$

$$(z' - \sin x) (1 - \sin x \cos x) + (z + \cos x)^2 \cos x$$

$$- (z + \cos x) + \sin x = 0$$

واستناداً إلى العلاقة (١) فان هذه المعادلة تصبح بعد الاختصار من

الشكل :

$$z' (1 - \sin x \cos x) + z (z + 2 \cos x) \cos x - z = 0$$

المعادلة التي يمكن كتابتها بالشكل :

$$z' (1 - \sin x \cos x) + z (2 \cos^2 x - 1) + z^2 \cos x = 0$$

وهي كما يلاحظ من نوع بيرنولي نحلها بأن نقسم طرفها على  $z^2$  ثم نفرض

$$\text{وتأخذ عندها المعادلة} \quad u = \frac{1}{z} \quad \text{فيكون} \quad u' = \frac{-z'}{z}$$

الشكل التالي :

$$(3) \quad (1 - \sin x \cos x) u' - (2 \cos^2 x - 1) u = \cos x$$

وهي معادلة خطية نحلها بلا طرف ثان :

$$\frac{du}{u} = \frac{2 \cos^2 x - 1}{1 - \sin x \cos x} dx = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \sin x \cos x} dx$$

إذا لاحظنا ان صورة الطرف الثاني تساوي مشتق المخرج مضروباً بإشارة (-) فاننا نجد بعد استكمال الطرفين :

$$\log u = \log c - \log (1 - \sin x \cos x)$$

$$u = \frac{c}{1 - \sin x \cos x}$$

نطبق طريقة تحويل الثابت c من أجل حساب الحل العام للمعادلة (3) فنجد :

$$c = \sin x + \lambda \quad , \quad c' = \cos x$$

ونجد على التوالي :

$$u = \frac{1}{z} = \frac{\sin x + \lambda}{1 - \sin x \cos x} \quad , \quad z = \frac{1 - \sin x \cos x}{\sin x + \lambda}$$

$$y = z + \cos x = \frac{1 - \sin x \cos x}{\sin x + \lambda} + \cos x = \frac{1 + \lambda \cos x}{\sin x + \lambda}$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة ونلاحظ عليه التناظر بالنسبة للثابت الإختياري  $\lambda$ .

٨٩ - تكن المعادلة :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 y - 2x}{1 - x^3}$$

آ - يطلب البرهان على أن لهذه المعادلة حل خاص من الشكل  $\alpha x^n$  حيث n عدد موجب صحيح يطلب حسابه .

ب - يطلب حساب الحل العام لهذه المعادلة

ج - يطلب البرهان على أن لهذه المعادلة ثلاثة حلول خاصة من الشكل  $y = ax + b$  وإيجاد الحل العام .

الحل : آ - لبرهان المطلوب الأول وحساب  $\alpha$  ، n نبدل في المعادلة

المفروضة (١) التي يجب ان تنقلب إلى المطابقة :

$$n \alpha x^{n-1} \equiv \frac{\alpha^2 x^{2n} - \alpha x^{n+2} - 2x}{1-x^3}$$

يمكن كتابة هذه المطابقة بالشكل :

$$n \alpha x^{n-1} - n \alpha x^{n+2} \equiv \alpha^2 x^{2n} - \alpha x^{n+2} - 2x$$

نقسم طرفي هذه المطابقة على  $x$  الذي لا يمكن ان يكون مطابقاً للصفر :

$$(2) \quad n \alpha x^{n-2} - n \alpha x^{n+1} \equiv \alpha^2 x^{2n-1} - \alpha x^{n+1} - 2$$

نلاحظ أنه لتستقيم هذه المطابقة يجب ان يطابق الحد الأخفض درجة

في الطرف الأيمن الحد الأخفض درجة في الطرف الأيسر أي :

$$n \alpha x^{n-2} \equiv -2$$

وهذا يعني أن الاس  $n-2$  يجب ان يكون مساوياً للصفر أي  $n=2$  و  $\alpha=-1$

وهذا يحقق المطابقة وينتج عن ذلك أن الحل الخاص هو  $y_1 = -x^2$

ب - لايجاد الحل العام فنجري تغيير التابع حسب العلاقة التالية ، بعد أن

نلاحظ ان المعادلة المفروضة هي معادلة من نوع ريكاتي :

$$y = -x^2 + u \quad , \quad y' = -2x + u'$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (١) فإنها تأخذ الشكل :

$$-2x + u' = \frac{(u - x^2)^2 - x^2(u - x^2) - 2x}{1 - x^3}$$

تأخذ هذه المعادلة بعد الاصلاح الشكل :

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 3ux^2}{1 - x^3}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{3x^2}{1-x^3}u = \frac{u^2}{1-x^3}$$

وهي ، كما هو واضح ، معادلة من نوع بيرنولي نحلها بأن نقسم طرفيها على

$u^2$  ثم نفرض  $z = \frac{1}{u}$  فتأخذ الشكل :

$$(4) \quad z' - \frac{3x^2}{1-x^3} z = -\frac{1}{1-x^3}$$

وهي معادلة خطية نحلها بدون طرف ثان حسب المراحل :

$$\frac{dz}{z} = \frac{3x^2}{1-x^3} dx, \quad \log z = \log c - \log(1-x^3)$$

$$z = \frac{c}{1-x^3}$$

إذا اعتبرنا  $c$  متحولاً تابعاً لـ  $x$  وأخذنا مشتق العلاقة السابقة وحملنا كل ذلك في المعادلة (4) فاننا نجد :

$$\frac{c'}{1-x^3} = -\frac{1}{1-x^3}, \quad c' = -1 \quad c = -x + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة (4) من الشكل :

$$z = \frac{-x + \lambda}{1-x^3}$$

وإذا عدنا إلى المتحولات الاصلية فسوف نجد على التوالي :

$$u = \frac{1}{z} = \frac{1-x^3}{\lambda-x}$$

$$y = u - x^2 = \frac{1-x^3}{\lambda-x} - x^2 = \frac{1-x^2\lambda}{\lambda-x}$$

وهو الحل العام لمعادلة ريكاتي المفروضة .

ج - لنكتب ان الحل يطابق الشكل  $ax + b$  ومن ثم لنحسب قيم  $\lambda$  التي تحقق مثل هذا الشكل :

$$\frac{1-x^2\lambda}{\lambda-x} \equiv ax + b$$

تأخذ هذه المطابقة بعد اصلاحها الشكل :

$$(a-\lambda)x^2 + (b-a\lambda)x + 1-b\lambda \equiv 0$$

لتكون هذه المطابقة محققة مهما كانت قيمة المتحول  $x$  يجب ان يكون :

$$a - \lambda = 0 \quad , \quad b - a \lambda = 0 \quad , \quad 1 - b \lambda = 0$$

نستخرج من المعادلة الاولى ان  $a = \lambda$  ومن المعادلة الثانية انه  $b = \lambda^2$

ومن المعادلة الثالثة ان  $\lambda^3 = 1$  ويكون ل  $\lambda$  ثلاث قيم هي الجذور

التكعيبية للوحدة :

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = \omega \quad , \quad \lambda_3 = \omega^2$$

وتكون التكاملات الخاصة للمعادلة المفروضة التي هي من الشكل المطلوب أي :

$$y_1 = x + 1 \quad , \quad y_2 = \omega x + \omega^2 \quad , \quad y_3 = \omega^2 x + \omega$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة من الشكل :

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \mu$$

$$y = \frac{-(1 + \mu \omega^2) x^2 + \mu + \omega^2}{-(\mu + \omega^2) x + 1 + \mu \omega^2} \quad : \text{ او}$$

واذا فرضنا  $c = \frac{1 + \mu \omega^2}{\mu + \omega^2}$  فان التكامل السابق يأخذ الشكل :

$$y = \frac{-c x^2 + 1}{-x + c}$$

وهو مطابق للشكل الذي وجدناه اعلاه .

## تمارين للمل

حل المعادلات التفاضلية التالية وتحقق من الاجوبة المرافقة :

$$y = a + c \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad (1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = ax \quad - 90$$

$$y = (c + x) \sin x \quad , \quad y' \sin x - y \cos x - \sin^2 x = 0 \quad - 91$$

$$y = x^2 - 1 + c \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad y' (x^2 - 1) - xy - x(x^2 - 1) = 0 \quad - 92$$

$$y = \log x + 1 + c x \quad , \quad x y' - y + \log x = 0 \quad - 93$$

$$y = \frac{1}{5} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 + c \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad , \quad y' + \frac{y}{1-x^2} - \frac{1+x}{(1-x)^3} = 0 \quad - 94$$

$$y = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c(x+1)^2 \quad , \quad \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{3}{2}} \quad - 95$$

$$y = a x + c x \sqrt{1-x^2} \quad , \quad x(1-x^2)dy + (2x^2-1)ydx = a x^3 dx \quad - 96$$

$$y = x^2 (1 + ce^{\frac{1}{x}}) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2} y = 1 \quad - 97$$

$$y' \sin x + 3y \cos x = \frac{1}{\cos^3 x} \quad - 98$$

$$y = \frac{2}{\sin^2 2x} - \frac{1}{2 \sin^3 x} \log \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{c}{\sin^3 x} \quad : \zeta$$

$$y = x + 1 + c \sqrt{2x-x^2} \quad , \quad (2x-x^2)y' + (x-1)y = 2x-1 \quad - 99$$

$$y = \frac{c}{\cos x} - \operatorname{tg} x + \frac{\sin^3 x}{3 \cos x} \quad , \quad y' - y \operatorname{tg} x + \cos^2 x = 0 \quad - 100$$

$$y = \frac{x}{x^2+1} (c - \log x^2) \quad , \quad (1+x^2)y' + \frac{x^2-1}{x} y + 2 = 0 \quad - 101$$

$$x y = \sin x + c \cos x \quad , \quad x \cos x y' + y(x \sin x + \cos x) = 1 \quad - 102$$

$$y \log x = \log^2 x + c \quad \quad x \log x y' + y = 2 \log x \quad - 103$$

$$x = e^{-y} (c + \operatorname{tg} y) \quad \quad d x + x d y = e^{-y} \sec^2 y d y \quad - 104$$

$$x = y (y^2 + c) \quad \quad (x + 2y^3) y' = y \quad - 105$$

$$y = (x-2)^3 + c(x-2) \quad , \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad - 106$$

$$y \sin x + 2e^{\cos x} = c \quad \quad y' + y \operatorname{cotg} x \pm 2e^{\cos x} = 0 \quad - 107$$

$$2x \log y = \log^2 y + c \quad , \quad y \log y d x + (x - \log y) d y = 0 \quad - 108$$

بين أن المعادلات التالية من نوع بيرنولي ثم حلها بعد تحويلها الى معادلات خطية وتأكد من النتائج المرافقة :

$$y^{-2} = x^2 + 1 + ce^{x^2} \quad \cdot \frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3 \quad - 109$$

$$y = (c\sqrt{1-x^2} - a)^{-1} \quad (1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy = ax y^2 - 110$$

$$y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{\sin x + c} \quad \cdot y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x) - 111$$

$$x^3 y^3 - 3a^2 x + c = 0 \quad xy' + y = \frac{a^2}{x^2 y^2} \quad - 112$$

$$y = \frac{1}{1 + cx + \log x} \quad \cdot xy' + y = y^2 \log x \quad - 113$$

$$s^2 = t^2 \log t^2 + ct^2 \quad \frac{ds}{dt} = \frac{t^2 + s^2}{st} \quad - 114$$

$$xy + \frac{1}{2}y^3 = c \quad \left(\frac{x}{y} + y\right) dy + dx = 0 \quad - 115$$

$$y = ce^{-\frac{y}{x}} \quad y^2 dx - (x^2 + xy) dy = 0 \quad - 116$$

$$x = 2y^3 + cy^{-2} \quad (2x - 10y^3) y' + y = 0 \quad - 117$$

$$dx + x dy = e^{-y} \sec^2 y dy \quad 118$$

$$y^{-4} = x + \frac{1}{2} + ce^{4x} \quad y' - y = x y^5 \quad - 119$$

$$y^{-3} = -\frac{1}{2} + ce^{3x^2} \quad y' + 2xy + x y^4 = 0 \quad - 120$$

$$y - 3 = -1 - 2x + ce^x \quad y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(1 - 2x)y^4 \quad - 121$$

$$\frac{x^2}{y^2} = -\frac{1}{2}x^3 \left(\frac{1}{2} + \log x\right) + c \quad \cdot x dy - [y + xy^3(1 + \log x)] dx = 0 - 122$$

حل المعادلات التفاضلية :

$$(y - x - 1)(dx + dy) + (x + y + 1)(xdy - ydx) = 0 \quad - 123$$

$$x - y + 1 + xy + \frac{1}{2}y^2 = c(1 + x)^2 \quad : ج$$

$$(x + 3y + 2)dx - (x - y - 2)dy + (x + y + 2)(xdy - ydx) = 0 \quad - 124$$

$$y(x + y) = 1 + x + y + c(x + y)^2 \quad : ج$$

$$(14x + 13y + 6)dx + (4x + 5y + 3)dy - (7x + 5y) \quad - 125$$

$$(xdy - ydx) = 0$$

$$(y + 2) = c(x - 1) \quad : ج$$

$$(7x - 8y + 5)dx - (7x - 8y)dy + 5(x + y)(xdy - ydx) = 0 \quad - 126$$

$$(2x - 3y + 1)(x + y + 1) = c(x + y - 1)^2 \quad : ج$$

$$(-x + 1)dx + (1 - y)dy + (x - y)(xdy - ydx) = 0 \quad - 127$$

$$(x + y + 1)^2 = c(x^2 + y^2 + 1) \quad : ج$$

أوجد حلاً بسيطاً خاصاً لكل من معادلات ويكافي التالية ثم أوجد

الحل العام لكل منها .

$$xy' - y + y^2 = x^2 \quad - 128$$

$$xy' - y - y^2 = x^2 \quad - 129$$

$$3xy' - y - y^2 = x^{\frac{3}{2}} \quad - 130$$

131 - حل المعادلة التفاضلية التالية بعد ان تبهرن أنها تقبل الحل

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{الحاص}$$

$$y' + y^2 - 3y \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$$

132 - برهن أن للمعادلة التالية  $y' + y^2 - \frac{a^2}{x^4} = 0$  حلاً من الشكل :

$$\frac{c}{x^2} + \frac{d}{x}$$

ثم أوجد حلها العام .

١٣٣ - حل المعادلة التفاضلية :

$$m ( 1 + x^2 ) y' = m^2 y^2 + m ( m - 3 ) \frac{1 - x^2}{x} y - (m - 2)(m - 4)$$

إذا علمت أنها تكون محققة من أجل تابع من الشكل  $y = \frac{m-2}{m} x$

★ ★ ★