

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى (٣)

المعادلة التامة - عامل التكامل

١ - المعادلة التامة : نقول عن المعادلة :

$$(١) \quad p(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

إنها تامة فيما إذا تحقق الشرط اللازم والكافي :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

أي إذا كان الطرف الأيسر من هذه المعادلة تفاضلاً تاماً لتابع ما أي إذا أمكن كتابة

هذه المعادلة بالشكل :

$$dU = 0$$

$$U = c$$

ويكون حلها العام

تتوصل إلى هذا الحل بأن تجري التكامل الأول :

$$U = \int p(x, y) dx$$

حيث نعتبر x متحولاً و y وسيطاً ثابتاً ونأخذ ثابت التكامل تابعاً لـ y فلو فرضنا

أن $\varphi(x, y)$ تابعاً أصلياً لـ $p(x, y)$ حيث نعتبر y ثابتاً فإنه يمكننا أن نكتب :

$$U = \varphi(x, y) + \psi(y)$$

حيث $\psi(y)$ يمثل ثابت التكامل .

لحساب $\psi(y)$ نطابق بين المشتق الجزئي بالنسبة لـ y للطرف الثاني من هذه العلاقة

وبين $Q(x, y)$ أي .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q(x, y)$$

٢ - عامل التكميل : يمكننا تطبيق هذه الطريقة من أجل كل معادلة تفاضلية من الشكل .

$$p dx + Q dy = 0$$

دون أن يكون الطرف الأيسر فيها تفاضلاً تاماً . نجعل هذا الطرف تفاضلاً تاماً بضربه بعامل من الشكل $\mu(x, y)$ نسميه بعامل التكميل ويكون الشرط الذي يجب أن يحققه μ من أجل ذلك هو :

$$p \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0$$

وهذه العلاقة معادلة تفاضلية جزئية يعطي حلها عوامل التكميل للمعادلة المفروضة .

حالات خاصة : آ - إذا كان :

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

غير تابع لـ y فإن للمعادلة المفروضة عامل تكميل لا يتبع إلا x وهو من الشكل :

$$\mu = e^{\int X dx}$$

$$X = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \quad \text{حيث نفرض}$$

ب - إذا كان : $Y = - \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{p}$ غير تابع لـ x بل لـ y فإن

للمعادلة المفروضة عامل تكميل لا يتبع إلا y وهو من الشكل :

$$\mu = e^{\int Y dy}$$

ح - إذا كانت المعادلة (١) متجانسة وكان $P x + Q y \neq 0$ فإن

التركيب التالي عامل تكميل لهذه المعادلة :

$$\frac{1}{Px + Qy}$$

د - إذا أمكن كتابة المعادلة (١) بالشكل : $yf(xy) dx + xg(xy) dy = 0$

وكان $f(xy) \neq g(xy)$ فإن التركيب :

$$\frac{1}{xy[f(xy) - g(xy)]} = \frac{1}{Mx - Ny}$$

هو عامل تكميل للمعادلة المفروضة :

هـ - يمكننا أن نفتش عن عامل من الشكل : $\mu = f(x + y) = f(z)$

فيما إذا كان :

$$-Z = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P - Q}$$

يتبع مجموع المتحولين $z = x + y$ فقط ويكون عندها عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int Z dz}$$

و - يمكننا أن نفتش عن عامل تكميل من الشكل : $\mu = f(xy) = f(z)$

فيما إذا كان :

$$-Z = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Px - Qy}$$

تابعاً للجداء $z = xy$ فقط ويكون عندها عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int Z dz}$$

ز - إن المعادلة التفاضلية :

$$x^r y^s (m y dx + n x dy) + x^a \cdot y^b (\mu y dx + \nu x dy) = 0$$

عامل تكميل من الشكل : $x^a y^b$ حيث نفرض $(\alpha, \beta, \mu, \nu, r, s, m, n)$
 اعداد ثابتة وان : $m\nu - n\mu \neq 0$
 و - بعض عوامل التكميل :

<u>التركيب</u>	<u>عامل التكميل</u>	<u>التفاضل الكلي</u>
$x dy - y dx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$x dx - y dy$	$\frac{1}{y^2}$	$-\frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$
$x dy - y dx$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = d\left(\log \frac{y}{x}\right)$
$x dy - y dx$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\left(\text{Arc tg} \frac{y}{x}\right)$
$x dy + y dx$	$\frac{1}{(xy)^n}$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{x dy + y dx}{(xy)^n} &= d \frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}} \\ \frac{x dy + y dx}{xy} &= d(\log xy) \end{aligned} \right.$
$x dx + y dy$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^n} &= d \frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}} \\ \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} &= d \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \end{aligned} \right.$

تمارين محلولة

برهن أن المعادلات التالية هي معادلات تامة ثم أوجد الحل العام لكل منها :

$$\cos y dx + (2y - x \sin y) dy = 0 \quad - 134$$

إذا قارنا هذه المعادلة مع الشكل العام للمعادلات التفاضلية المثبت في مطلع هذا الفصل فإننا نجد :

$$P = \cos y \quad , \quad Q = 2y - x \sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y \quad : \text{ونلاحظ بسهولة أن:}$$

حل هذه المعادلة يمكننا ان نكتبها بالشكل التالي :

$$(\cos y \, dx - x \sin y \, dy) + 2y \, dy = 0$$

ونلاحظ بسهولة تامة ان الافادة الموجودة بين القوسين هي تفاضل التركيب

$x \cos y$ ويكون الحل العام هو :

$$x \cos y + y^2 = c$$

ويمكن حل هذه المعادلة بالطريقة العامة فنكتب

$$U = \int p \, dx = \int \cos y \, dx = x \cos y + \varphi(y)$$

ثم نطابق بين المشتق الجزئي لـ U بالنسبة لـ y وبين Q فنجد :

$$-x \sin y + \varphi'(y) = 2y - x \sin y$$

$$\varphi'(y) = 2y \quad \varphi(y) = y^2 \quad \text{ويكون}$$

$$U = x \cos y + y^2 = c \quad \text{ويكون الحل العام}$$

$$(e^{y^2} + y e^x) \, dx + (2xy e^{y^2} + e^x) \, dy = 0 \quad \text{١٣٥}$$

إن هذه المعادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y e^{y^2} + e^x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y e^{y^2} + e^x$$

حل هذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل :

$$(e^{y^2} \, dx + 2xy e^{y^2} \, dy) + (y e^x \, dx + e^x \, dy) = 0$$

ونلاحظ بسهولة تامة ان التركيب الموجود في القوس الأولى هو تفاضل

للتركيب $x e^{y^2}$ وان التركيب الموجود في القوس الثانية هو تفاضل تام
 $y e^{x^2}$ ويكون الحل العام لهذه المعادلة :

$$x e^{y^2} + y e^{x^2} = c$$

١٣٦ - حل المعادلة التالية :

$$\frac{(1 + y^2) y dx + (1 + x^2) x dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة تامة لأن :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y + y^3}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{1 + x^2 + y^2 + 3 x^2 y^2}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

حل هذه المعادلة نكتب :

$$U(x, y) = \int \frac{(1 + y^2) y dx}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \Phi(y)$$

إذا حسبنا التكامل الموجود في هذه العلاقة حسب الطرق المعروفة
 فاننا نجد :

$$U(x, y) = \frac{x y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \Phi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \Phi'(y) = \frac{x + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ومنه :}$$

$$\Phi'(y) = 0 \quad \cdot \quad \Phi(y) = c \quad \text{أي :}$$

$$\frac{x y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = c \quad \text{ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو :}$$

ملاحظة : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي وحلها باعتبارها ذات متحولات متفرقة :

$$(1 + y^2) y dx + (1 + x^2) x dy = 0$$

$$\frac{dx}{x(1+x^2)} + \frac{dy}{y(1+y^2)} = 0 \quad \text{أو :}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{x dx}{1+x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{y dy}{1+y^2} = 0$$

وبعد تكامل طرفي هذه العلاقة نجد :

$$\log x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \log y - \frac{1}{2} \log(1+y^2) = \log c$$

$$\frac{xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} = c \quad \text{أو}$$

إذا ربعنا طرفي هذه العلاقة ثم طرحنا الصور من الخارج ومن ثم أخذنا جذري الطرفين فاننا نجد على التوالي :

$$\frac{x^2 y^2}{1+x^2+y^2+x^2 y^2} = c^2$$

$$\frac{x^2 y^2}{1+x^2+y^2} = \frac{c^2}{1-c^2} = \lambda^2$$

$$\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \lambda$$

وهو الحل العام الذي وجدناه أعلاه .

١٣٧ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3) dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2) dy$$

الحل : إن هذه المعادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y e^{xy^2} + 2y^3 x e^{xy^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

ويكون :

$$U(x, y) = \int (y^2 e^{xy^2} + 4x^3) dx = e^{xy^2} + x^4 + \varphi(y)$$

بشرط أن يكون :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy e^{xy^2} + \varphi'(y) = 2xy e^{xy^2} - 3y^2$$

$$\varphi'(y) = -3y^2, \quad \varphi(y) = -y^3$$

ويكون أخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$$

١٣٨ - حل المعادلة التفاضلية :

$$\log(y^2 + 1) dx + \frac{2y(x-1)}{y^2+1} dy = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{y^2+1} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{y^2+1}$$

ويكون :

$$U(x, y) = \int \log(y^2 + 1) dx = x \log(y^2 + 1) + \varphi(y)$$

ويشترط أن يكون :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2xy}{1+y^2} + \varphi'(y) = \frac{2y(x-1)}{y^2+1}$$

ونستنتج مما سبق أن :

$$\varphi'(y) = -\frac{2y}{y^2+1}, \quad \varphi(y) = -\log(y^2 + 1)$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$x \log(y^2 + 1) - \log(y^2 + 1) = c$$

أوجد عامل تكميل للمعادلات التالية ثم أوجد الحل العام لكل منها :

$$\frac{1}{x} dy + \frac{y}{x^2} dx - 2x dx = 0 \quad - ١٣٩$$

نلاحظ بسهولة أنه إذا ضربنا طرفي هذه العلاقة بـ x^2 فانها تأخذ الشكل :

$$x dy + y dx - 2x^3 dx = 0$$

حيث نلاحظ ان $x dy + y dx$ تفاضل تام $d(x \cdot y)$ وان

$- 2x^3 dx$ تفاضل للتابع $\frac{1}{4} x^4$ وهذا يعني إن لهذه المعادلة عامل تكامل

هو x^2 وحلها العام :

$$x y - \frac{1}{4} x^4 = c$$

$$x dy - y dx + x(x+1) dx = 0 \quad - ١٤٠$$

الحل : نلاحظ ان القسم الأخير من هذه المعادلة $x(x+1) dx$ لا يحوي

إلا x وأنه لو وجدنا عامل تكميل للقسم الأول من المعادلة لا يتبع إلا x فانه

يكون عامل تكامل للمعادلة كاملة كما نلاحظ بسهولة ان :

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

إن x^{-2} هو عامل تكميل للمعادلة المفروضة وتأخذ بعد ضرب طرفيها بـ

x^{-2} الشكل :

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} + \frac{x+1}{x} dx = 0$$

ونجد بأخذ تكامل الطرفين الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$\frac{y}{x} + x + \log x = c$$

$$x dy - y dx + (x^2 + y^2) \operatorname{tg} y dy = 0 \quad - ١٤١$$

الحل : إذا قسمنا طرفي هذه المعادلة على $x^2 + y^2$ أخذت الشكل :

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \operatorname{tg} y dy = 0$$

إن هذه المعادلة تتألف من قسمين كل منها تفاضل تام : القسم الأول هو

$$d \left(\text{Arc tg} \frac{y}{x} \right) \text{ والثاني } d [\lg \cos y] - \text{ فيكون إذن :}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2}$$

عامل تكميل للمعادلة المفروضة التي حلها العام هو :

$$\text{Arctg} \frac{y}{x} - \log \cos y = C$$

$$x dy - y dx + x^2 y dy + y^2 x dx = 0 \quad - ١٤٢$$

الحل : إذا قسمنا طرفي هذه العلاقة على xy فانها تأخذ الشكل التام :

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} + x dy + y dx = 0$$

فيكون $\frac{1}{xy}$ عامل تكميل لهذه المعادلة وحلها العام هو :

$$\log \frac{y}{x} + x y = c$$

$$(1) \quad 3 y dx - 2 x dy + x^2 y^{-1} (10 y dx - 6 x dy) = 0 \quad - ١٤٣$$

الحل : ان هذه المعادلة من النوع المذكور في الفقرة (ز) صفحة (٦٣)

فهي تقبل عامل تكميل من الشكل $x^a y^b$ وتصبح عندها معادلة تامة من الشكل :

$$(2) \quad 3 x^a y^{\beta+1} dx - 2 x^{a+1} y^{\beta} dy + x^{a+2} y^{\beta-1} (10 y dx - 6 x dy) = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$(3) \quad (3 x^a y^{\beta+1} + 10 x^{a+2} y^{\beta}) dx - (2 x^{a+1} y^{\beta} + 6 x^{a+3} y^{\beta-1}) dy = 0$$

لكي تكون هذه المعادلة تامة يجب ان يكون المشتقان الجزئيان التاليمان

متطابقين :

$$\frac{\partial}{\partial y} (3 x^a y^{\beta+1} + 10 x^{a+2} y^{\beta}) = 3 (\beta + 1) x^a y^{\beta} + 10 \beta x^{a+2} y^{\beta-1}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} (2 x^{\alpha+1} y^{\beta} + 6 x^{\alpha+3} y^{\beta-1}) = -2 (\alpha + 1) x^{\alpha} y^{\beta} - 6 (3 + \alpha) x^{\alpha+2} y^{\beta-1}$$

ولكي يتحقق هذا التطابق يلزم ويكفي ان يكون :

$$\begin{aligned} 3 (\beta + 1) &= -2 (\alpha + 1) & ; & \quad 2 \alpha + 3 \beta = -5 \\ 10 \beta &= -6 (3 + \alpha) & ; & \quad 6 \alpha + 10 = -18 \end{aligned}$$

ونجد أخيراً $\alpha = 2$ ، $\beta = -3$ ويكون عامل التكامل هو

$\mu = x^2 y^{-3}$ وعندما تأخذ المعادلة (٣) الشكل :

$$(4) \quad (3 x^2 y^{-2} + 10 x^4 y^{-3}) dx - (2 x^3 y^{-3} + 6 x^5 y^{-4}) dy = 0$$

ان الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالعلاقة :

$$U(x,y) = \int \left(\frac{3x^2}{y^2} + \frac{10x^4}{y^3} \right) dx = \frac{x^3}{y^2} + \frac{2x^5}{y^3} + \varphi(y)$$

وإذا طابقتنا المشتق الجزئي بالنسبة لـ y ، لهذا التابع مع عامل dy في

المعادلة (٤) فإننا نجد : $\varphi'(y) = 0$. $\varphi(y) = c$ ويكون الحل العام

لهذه المعادلة هو :

$$\frac{x^3}{y^2} + \frac{2x^5}{y^3} = c$$

$$(1 - xy) dx + (xy - x^2) dy = 0 \quad - \text{ } \xi \xi$$

الحل : نلاحظ ان $P = 1 - xy$ ، $Q = xy - x^2$ وان

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y - 2x \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = x - y$$

ونجد أخيراً ان :

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{x - y}{x(y - x)} = -\frac{1}{x}$$

ان لهذه المعادلة عامل تكميل μ تابع لـ x فقط ويحقق المعادلة :

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x} , \log |\mu| = -\log |x| , \mu = \frac{1}{x}$$

وتأخذ المعادلة المفروضة بعد ضربها بهذا العامل ، الشكل :

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) dx + (y - x) dy = 0$$

وهي معادلة تامة حلها العام :

$$\log |x| - xy + \frac{1}{2} y^2 = c$$

$$(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy = 0 \quad - ١٤٥$$

الحل : لنحسب المشتقات الجزئية التالية :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 9y^2 , \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 3y^2$$

فنستنتج أن المعادلة غير تامة لنحسب إذن التفاضل :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y^2 - 4x$$

إن هذا التفاضل لا يمكن أن يصبح مستقلاً عن x أو y فيألو قسمناه

على P أو Q

لنجرى تقسيم هذا التركيب على التفاضل :

$$P - Q = 2x^2 + 2xy - 3xy^2 - 3y^3 = -(x+y)(3y^2 - 2x)$$

ويكون :

$$-\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P - Q} = \frac{2}{x+y} = \frac{2}{z}$$

• حيث فرضنا $z = x + y$

إن لهذه المعادلة عامل تكميل تابع لـ z نرسم له بـ $\mu(z)$ يحقق المعادلة :

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2 dz}{z} \quad , \quad \mu = z^2 = (x + y)^2$$

تأخذ المعادلة المفروضة بعد ضرب طرفيها بهذا العامل الشكل التام :

$$(x + y)^2 (5x^2 + 2xy + 3y^2) dx + 3(x + y)^2 (x^2 + xy^2 + 2y^3) dy = 0$$

إن الحل العام لهذه المعادلة التامة هو :

$$(x^2 + y^3)(x + y)^3 = c$$

٤٦ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y) dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x) dy = 0$$

الحل : لنحسب المشتقين الجزئيين :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 8xy^3 e^y + 2xy^4 e^y + 6xy^2 + 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^4 e^y - 2xy^2 - 3$$

ثم لنشكل التفاضل :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xy^3 e^y + 8xy^2 + 4$$

ونلاحظ بسهولة أن هذا التركيب يختلف عن عامل dx بالعامل $\frac{4}{y}$

فينتج عن ذلك :

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{4}{y} = -Y$$

إن للمعادلة التفاضلية المفروضة عامل التكميل :

$$\mu = e^{-4 \int y^{-1} dy} = e^{-4 \log y} = \frac{1}{y^4}$$

إذا ضربنا طرفي المعادلة المفروضة بهذا العامل فإنها تأخذ الشكل :

$$(2x e^y + 2 \frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}) dx + (x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3 \frac{x}{y^4}) dy = 0$$

يمكننا كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي حيث نجعلها مجموع تفاضلات كلية:

$$(2x e^y dx + x^2 e^y dy) + (\frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy) + (\frac{1}{y^3} dx - \frac{3x}{y^4} dy) = 0$$

ونلاحظ بسهولة إن الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$$

$$(x y^3 + 2 x^2 y^2 - y^2) dx + (x^2 y^2 + 2 x^3 y - 2 x^2) dy = 0 \quad ١٤٧$$

الحل : لنحسب التفاضلين الجزئيين :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x y^2 + 4 x^2 y - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x y^2 + 6 x^2 y - 4x$$

لنشك التفاضل بين هذين التركيبين فنجد :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = x y^2 - 2 x^2 y - 2y + 4x$$

نلاحظ أنه إذا قسمنا هذا التركيب على P فإننا لن نجد تركيباً تابعاً لـ y فقط وكذلك لو قسمناه على Q فلن يكون الناتج مستقلاً عن y وكذلك لو جربنا وقسمناه على P - Q فلن نجد تركيباً يمكن اعتباره تابعاً لـ (x + y). أما إذا قسمنا هذا التركيب على :

$$P x - Q y = x^2 y^3 + 2 x^3 y^2 - x y^2 - (x^2 y^3 + 2 x^3 y^2 - 2 x^2 y) = 2 x^2 y - x y^2$$

فإننا نجد :

$$-\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P x - Q y} = 1 - \frac{2}{xy} = 1 - \frac{2}{z}$$

حسب فرضنا $z = x \cdot y$.

نستنتج بما تقدم أن للمعادلة التفاضلية المفروضة عامل تكميل يحقق المعادلة التفاضلية :

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = 1 - \frac{2}{z}$$

$$\mu = e^z z^{-2} = e^{xy} \cdot x^{-2} y^{-2} \quad \text{ومنه}$$

وتأخذ المعادلة المفروضة - بعد ضربها بعامل التكميل الذي وجدناه ، الشكل التالي .

$$e^{xy} \left(\frac{y}{x} + 2 - \frac{1}{x^2} \right) dx + e^{xy} \left(1 + \frac{2x}{y} - \frac{2}{y^2} \right) dy = 0$$

ونجد بعد حل هذه المعادلة ان الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$e^{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) = c$$

٤٨ - حل المعادلة التفاضلية :

$$y (x^2 y^2 + 2) dx + x (2 - 2 x^2 y^2) dy = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة من الشكل :

$$y f (xy) dx + x g (xy) dy = 0$$

$$P x - Q y \neq 0$$

إن هذه المعادلة من النوع (4) وتقبل عامل التكميل :

$$\frac{1}{P x - Q y} = \frac{1}{3 x^3 y^3}$$

تأخذ المعادلة المفروضة بعد ضربها بهذا العامل الشكل التام :

$$\frac{x^2 y^2 + 2}{3 x^3 y^2} dx + \frac{2 - 2 x^2 y^2}{2 x^2 y^3} dy = 0$$

بعد حل هذه المعادلة التامة نجد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$x = c y^2 e^{x^2 y^{-2}}$$

تمارين للعمل

بين ان المعادلات التفاضلية التالية تامة واوجد حل كل منها وقارنه مع

الجواب المرافق :

$$2xy + y^2 = c \quad y dx + (x + y) dy = 0 \quad - 149$$

$$xy + \log|x| = c \quad (y + \frac{1}{x}) dx + x dy = 0 \quad - 150$$

$$(2xy^3 - 2y^2 + 4x^3) dx + (3x^2y^2 - 4xy - 3y^2) dy = 0 - 151$$

$$x^2y^3 - 2xy^2 + x^4 - y^3 = c \quad : ج$$

$$(y^2 - \frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}) dx + (2xy + \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}) dy = 0 - 152$$

$$xy^2 + e^{\frac{y}{x}} = c : ج$$

$$[\cos(x+y) - y \sin xy] dx + [\cos(x+y) - x \sin xy] dy = 0 - 153$$

$$\sin(x+y) + \cos xy = c : ج$$

$$(4x^3y^3 - 2xy) dx + (3x^4y^2 - x^2) dy - 154$$

$$x^4y^3 - x^2y = c : ج$$

$$(3e^{3x}y - 2x) dx + e^{3x} dy = 0 - 155$$

$$e^{3x}y - x^2 = c : ج$$

$$(\cos y + y \cos x) dx + (\sin x - x \sin y) dy = 0 - 156$$

$$x \cos y + y \sin x = c : ج$$

$$y e^{x^2} - x^2 = c \quad , \quad 2x(y e^{x^2} - 1) dx + e^{x^2} dy = 0 - 157$$

$$(6x^5y^3 + 4x^3y^5) dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4) dy = 0 - 158$$

$$x^6y^3 + x^4y^5 = c : ج$$

أوجد عامل التكميل لكل من المعادلات التالية ثم أوجد حل كل منها :

$$x^2 dy + xy dx + (x^2 + 1) dx - 159$$

$$x^2 + 2xy + 2 \log |x| = c \quad : \text{ج}$$

$$x dy - y dx + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}(x dx + y dy) - 160$$

$$\frac{1}{3} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + \text{Arc tg } \frac{y}{x} = c$$

$$2xy + e^{-2y} = c \quad y e^{2y} dx + (x e^{2y} - 1) dy - 161$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2y}{x} = c \quad (x^3 + y) dx + x(xy - 1) dy - 162$$

أوجد عامل تكميل لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(xy)^{-3} \cdot y dx + x(1 - 3x^2 y^2) dy = 0 - 163$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot x dx + y dy + 4y^3(x^2 + y^2) dy = 0 - 164$$

$$x^{-2} \cdot x dy - y dx - (1 - x^2) dx = 0 - 165$$

$$x^2 y \cdot x(4y dx + 2x dy) + y^3(3y dx + 5x dy) = 0 - 166$$

$$(8y dx + 8x dy) + x^2 y^3(4y dx + 5x dy) = 0 - 167$$

$$xy \quad : \text{ج}$$

$$x^3 y^3(2y dx + x dy) - (5y dx + 7x dy) = 0 - 168$$

$$\frac{-8}{x^3} \cdot \frac{-10}{y^3} \quad : \text{ج}$$

أوجد عامل تكميل لكل من المعادلات التالية ثم حلها .

$$(x^2 + y^2 + x) dx + xy dx - 169$$

$$\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y^2 = c \quad , \quad x \quad : \text{ج}$$

$$(2x^3 y^2 + 4x^2 y + 2xy^2 + xy^4 + 2y) dx + 2(y^3 + x^2 y + x) dy = 0 - 170$$

$$(2x^2 y^2 + 4xy + y^4) e^{x^2} = c \quad , \quad \mu = e^{x^2} \quad : \text{ج}$$

$$y^4 = 4x^4 \log x + c x^4 e x^{-5} e (x^4 + y^4) dx - xy^3 dy - 171$$

$$y^2 dx + (x^2 - xy - y^2) dy = 0 - 172$$

$$(x - y) y^2 = c(x + y) \quad , \quad \frac{1}{y(x^2 - y^2)} : \int$$

$$x dx + y dy = (x^2 + y^2) dx = 0 - 173$$

$$x^2 + y^2 = ce^{2x} \quad (x^2 + y^2)^{-1} : \int$$

$$x^2 y = x^3 + c \quad , \quad x \quad , \quad (2y - 3x) dx + x dy = 0 - 174$$

$$y^2 + x \log x = cx \quad , \quad x^{-2} \quad , \quad (x - y) dx + 2xy dy = 0 - 175$$

$$x dy - y dx = 3x^2(x^2 + y^2) dx - 176$$

$$\text{Arctg} \frac{y}{x} = x^3 + c \quad , \quad (x^2 + y^2)^{-1} : \int$$

$$(y + x^3 y + 2x^2) dx + (x + 4xy^4 + 8y^3) dy = 0 - 177$$

$$\log(xy + 2)^3 + x^3 + 3y^4 = c \quad , \quad (xy + 2)^{-1}$$

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من صحة الجواب المرافق :

$$y = c x + x e^x \quad , \quad x dy - y dx = x^2 e^x dx - 178$$

$$\text{Arc tgy} = \log \frac{x}{x+1} + c \quad , \quad (1 + y^2) dx = (x + x^2) dy - 179$$

$$x^3 y^4 - 4y^3 = c \quad ; \quad 3x^2 y^2 dx + 4(x^3 y - 3) dy = 0 - 180$$

$$\frac{x}{y} + \log x = c \quad , \quad y(x+y) dx - x^2 dy = 0 - 181$$

$$(2y + 3xy^2) dx + (x + 2x^2 y) dy = 0 - 182$$

$$x^2 y (1 + xy) = c \quad : \int$$

$$y(y^2 - 2x^2) dx + x(2y^2 - x^2) dy = 0 - 183$$

$$x^2 y^2 (y^2 - x^2) = c \quad : \int$$

$$x^2 + y^2 = cx \quad (x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0 - 184$$

$$(x^2 + y^2) e^x = c \quad e^x (x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y e^x dy = 0 - 185$$

$$e^x (x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y e^x dy = 0 - 186$$

$$(x^2 + y^2) e^x = c : \text{с}$$

$$y = (x^2 + c) e^{x^3} ; (3xy + 2e^{x^3}) x dx - dy = 0 - 187$$

$$(5y^2 - 6xy) dx + (6x^2 - 8xy + y^2) dy = 0 - 188$$

$$\log \frac{y^2}{y - 3x} + \frac{2x}{y} = c : \text{с}$$

$$(xy^2 - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}) dx + x^2 y dy = 0 - 189$$

$$x^2 y^2 + 2e^{x^{-1}} = c : \text{с}$$