

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (٤)

المعادلات غير المحلولة - معادلة لاغرانج - معادلة كليرو

إذا لم تكن المعادلة التفاضلية $f(x, y, y') = 0$ ممكنة الحل بسهولة بالنسبة لـ y' حاولنا الاستفادة من التمثيل الوسيط للمتولين (x, y) كما في الحالات التالية :

١ - المعادلة لا تحوي التابع وهي من الشكل : $G(x, y') = 0$ إذا أمكن تمثيل المنحني $G(X, Y) = 0$ وسيطياً بدلالة وسيط نرمز له بـ t وبالشكل :

$$Y = \psi(t) \quad , \quad X = \varphi(t)$$

فإن المنحنيات التكاملية تتمين بالمعادلتين :

$$dy = \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \psi(t) \quad , \quad x = \varphi(t)$$

$$y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt \quad , \quad x = \varphi(t)$$

٢ - المعادلة لا تحوي المتحول x وهي من الشكل $H(y, y') = 0$: إذا أمكن استبدال هذه العلاقة بتمثيل وسيطي من الشكل :

$$y' = \mu(t) \quad , \quad y = \lambda(t)$$

فإن نقاط المنحنيات التكاملية تحقق المعادلات :

$$dx = \frac{dy}{\mu(t)} = \frac{\lambda'(t)}{\mu(t)} dt \quad , \quad dy = \mu(t) dx \quad , \quad y = \lambda(t)$$

$$x = \int \frac{\lambda'(t)}{\mu(t)} dt \quad , \quad y = \lambda(t)$$

٣ - الحالة العامة :

ليكن السطح $f(x, y, z) = 0$ ولنفرض أنه امكن تمثيل هذا السطح
وسيطياً بدلالة وسيطين (u, v) بالشكل :

$$z = \eta(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad x = \varphi(u, v)$$

إن معادلة المنحنيات التكاملية هي من الشكل :

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \eta(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right)$$

وهي معادلة تفاضلية محلولة بالنسبة للمشتق $\frac{dv}{du}$ من الشكل :

$$\frac{dv}{du} = g(u, v)$$

٤ - المعادلة محلولة بالنسبة لـ y :

$y = f(x, y')$ نشق هذه المعادلة بعد أن نفرض $y' = p$ فنجد :

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} = F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

وهي معادلة محلولة بالنسبة لـ $\frac{dp}{dx}$ نعتبر فيها أحد التحويلين (x, p) متحولاً

مستقلاً والآخر تابعاً .

٥ - المعادلة محلولة بالنسبة لـ x :

$$y' = p, \quad x = f(y, p)$$

نشق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ y فنجد :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}$$

وهي معادلة محلولة بالنسبة لـ $\frac{dp}{dy}$ نعتبر فيها أحد التحويلين (y, p) متحولاً

مستقلاً والآخر تابعاً .

٦ - معادلة لاغرانج : Lagrange

$$y = x \varphi(y') + \psi(y')$$

معادلات تفاضلية-٦

نشق طرفي هذه العلاقة فنجد بعد ان نفرض $y' = p$:

$$p = \varphi(p) + x \varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

إذا اعتبرنا p متحولاً مستقلاً و x تابعاً له تتحول هذه المعادلة الى معادلة خطية :

$$[\varphi(p) - p] \frac{dx}{dp} + x \varphi'(p) + \psi'(p) = 0$$

ونجد x ، y بملاقتين من الشكل :

$$y = c F_1(p) + \Phi_1(p) \quad x = c F(p) + \Phi(p)$$

٧ - معادلة كليرو Clairaut : $y = x y' + f(y')$

هي حالة خاصة من معادلة لاغرانج وينتج عن التحويل الذي أجريناه من اجل معادلة لاغرانج معادلة من الشكل :

$$[x + f'(p)] \frac{dp}{dx} = 0$$

ويتكون الحل العام من المستقيمات $\frac{dp}{dx} = 0$ ، $p = y' = C$

والحل الشاذ المعروف بالملاقتين : $y = c x + d$

$$y = p x + f(p) \quad ، \quad x + f'(p) = 0$$

ملاحظة : عندما يمكن تمثيل منحني جبري وسيطياً نسميه بالمنحني المتصل وسنذكر

فيما يلي بعض خواص هذه المنحنيات :

المنحنيات المتصلة Courbes unicursales نقول عن منحني مستو إنه متصل عندما يمكن تمثيل إحداثيي نقطة كيفية منه بتوابع عادية لوسيط نرمز له بـ t من الشكل :

$$y = \frac{\varphi(t)}{h(t)} \quad ، \quad x = \frac{f(t)}{h(t)}$$

حيث $f(t)$ ، $h(t)$ ، $g(t)$ كثيرات حدود صحيحة للوسيط t

يمكن التعرف على بعض المنحنيات المتصلة بالملاحظات التالية :

١ - منحني الدرجة الثانية :

إذا كان C منحنياً من الدرجة الثانية لايجوي نقطة مضاعفة وإذا اتخذنا أحد نقاط

هذا المنحني ممدأ للاحداثيات فان معادله تأخذ الشكل :

$$\varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) = 0$$

حيث $\varphi_1(x, y)$ كثير حدود متجانس من الدرجة الاولى و $\varphi_2(x, y)$ كثير حدود متجانس من الدرجة الثانية واذا فرضنا $y = xt$ فان هذه المعادلة تأخذ الشكل :

$$x^2 \varphi_2(1, t) + x \varphi_1(1, t) = 0$$

$$y = - \frac{t \varphi_1(1, t)}{\varphi_2(1, t)} \quad x = - \frac{\varphi_1(1, t)}{\varphi_2(1, t)} \quad \text{ومنه نجد :}$$

٢ - منحني الدرجة الثالثة :

إذا كان لمنحن من الدرجة الثالثة نقطة مزدوجة فان هذه النقطة حقيقية ويمكننا ان نقطع هذا المنحني بقاطع Δ متحول معادلته من الشكل $P + \lambda Q = 0$. ينتج عن تقاطع المنحني مع المستقيم معادلة تحوي λ تعين جذورها فصول تقاطع المنحنيين. اذا كانت A النقطة المزدوجة وكان a فصلها فان $F(x)$ معادلة المنحني المفروض تقبل القسمة على $(x - a)^2$ ويبقى بعد الاختصار على هذا المضروب كثير حدود من الدرجة الاولى بالنسبة لـ x يمكننا ان نستخرج منها x بدلالة λ وبذلك نتوصل الى تمثيل وسيطي للتابع المفروض .

٣ - منحني الدرجة الرابعة :

يبرهن انه اذا كان C منحنياً جبرياً وكان A نقطة مضاعفة من الدرجة p فان كل منحني جبري Γ يمر من A يقطع C في p نقطة على الأقل منطبقاً مع النقطة A وهذا يعني أن للمعادلة التي تعطينا فصول أو ترتيب تقاطع هذين المنحنيين p جذراً يساوي كل منها فصل النقطة A او ترتيبها .

لنفرض ان C منحنياً من الدرجة الرابعة يحوي ثلاث نقاط مزدوجة P, Q, R نمرر من هذه النقاط الثلاثة ونقطه رابعة متحوالة S منحنياً من الدرجة الثانية Γ ويبرهن أن معادلة منحني من الدرجة الثانية يمكن كتابتها بالشكل :

$$\lambda f(x, y) + g(x, y) = 0$$

وان حذف y بين معادلة المنحني المفروض وبين هذه المعادلة يعطينا معادلة من الدرجة الثامنة.

$$F(x) = 0$$

إن أمثال هذه المادة توابع كسرية للوسيط γ ولها صيغة جذور معروفة :
 جذران من أجل كل نقطة من النقاط P, Q, R ونقطة من أجل النقطة S فإذا ما تخلصت
 المعادلة $F(x) = 0$ من الجذور المعروفة بقي معنا معادلة من الدرجة الأولى أمثالها
 توابع كسرية لـ λ وبذلك نتوصل لحساب x بدلالة λ وتتوصل إلى تمثيل وسيطي
 للمنحني المفروض .

٤ - يبرهن بصورة عامة أن كل منحني من الدرجة n يموي نقطة مضاعفة من المرتبة
 $n - 1$ هو منحني متصل يمكن تمثيله بشكل وسيطي .

٨ - **الحلول الشاذة** : لترمز لمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالعلاقة :

$$F(x, y, y') = 0$$

يبرهن أنه ليكون لهذه المعادلة حل شاذ، لا ينتج عن الحل العام بإعطاء الثابت
 الاختياري قيمة خاصة، يبرهن أن تكون المعادلات الثلاث التالية قابلة للحل :

$$(1) \quad F(x, y, m) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial m} F(x, y, m) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + m \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

إن هذا الأمر لا يقع بشكل عام فالحلول الشاذة إذن حالات استثنائية وليس لكل معادلة
 تفاضلية حلول شاذة .

إن المنحني المعروف بالمعادلتين (١) يمثل حلاً شاذاً إذا حقق المعادلة (٢) وإلا فإنه يمثل حلاً
 هندسياً لنقاط المنحنيات التكاملية الشاذة أو حلاً هندسياً لنقاط تماس أزواج المنحنيات التكاملية.

٩ - **حالة خاصة** : المعادلة من المرتبة الأولى والدرجة الثانية :

$$y'^2 - 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0'$$

إذا كان لهذه المعادلة حل شاذ فإنه معرف بالعلاقة :

$$P^2 - Q = 0$$

ويجب فوق ذلك أن يحقق المعادلة :

$$P \left(2P \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + 2P \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

تمارين محلولة

١٩٠ - حل المعادلة التفاضلية : $y^2 y' + x y y' - 2x^2 = 0$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$(y y' + 2x)(y y' - x) = 0$$

$$y y' - x = 0 \quad \text{ويكون أما}$$

$$y y' + 2x = 0 \quad \text{أو}$$

ان الحل العام للمعادلة الأولى هو : $y^2 - x^2 = A$

أما الحل العام للمعادلة الثانية فهو : $y^2 + 2x^2 = B$

يتألف الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة من مجموعتين من المنحنيات تتعلق كل منها بثابت اختياري . المجموعة الأولى تتألف من قطوع زائدة متساوية الساقين أما المجموعة الثابتة فهي قطوع ناقصة . يمر من كل نقطة من المستوي قطع زائد وقطع ناقص يتقاطعان في هذه النقطة .

ملاحظة : إننا نقع في مثل هذه التمارين أمام مشكلة وهي أن الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى سوف يحوي أكثر من ثابت اختياري واحد . في الحقيقة ليس هناك أي مشكلة لأننا لو كتبنا حلي المعادلة المفروضة بالشكل :

$$y^2 + 2x^2 = c \quad , \quad y^2 - x^2 = c$$

لحصلنا على عدد الحلول ذاته عندما نحول c ونعطيه كل القيم الممكنة من $-\infty$ إلى $+\infty$ وهذا يقابل تماماً القيم التي يأخذها كل من الثابتين A, B من أجل هذا وخوفاً من الالتباس يؤخذ ثابت اختياري واحد

كما يكتب الحل العام للمعادلة بالشكل :

$$(y^2 - x^2 - c)(y^2 + 2x^2 - c) = 0$$

ونقول إن هذه العلاقة تمثل تابعاً أصلياً تاماً .

١٩١ - حل المعادلة التفاضلية :

$$y'^4 - (x + 2y + 1)y'^3 + (x + 2y + 2xy)y'^2 - 2xyy' = 0$$

الحل : نلاحظ بسهولة ان هذه المعادلة تتحقق من اجل $y' = 0$ ،

$y' = 1$ فاذا قسمنا طرفها الايسر على الجداء $y'(y' - 1)$ فاننا نجد
ناتج القسمة :

$$y'^2 - (x + 2y)y' + 2xy = (y' - x)(y' - 2y)$$

وتأخذ عندها المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$y'(y' - 1)(y' - x)(y' - 2y) = 0$$

إن حل هذه المعادلة يكافئ حل المعادلات الاربعة :

$$y' = 0 \quad , \quad y' = 1 \quad , \quad y' - x = 0 \quad , \quad y' - 2y = 0$$

إن حلول هذه المعادلات هي :

$$y - c = 0 \quad , \quad y - x - c = 0 \quad , \quad 2y - x^2 - c = 0 \quad , \quad y - ce^{2x} = 0$$

تمثل هذه الحلول الحل العام للمعادلة المفروضة ويكون التابع الاصلي التام

لهذه المعادلة :

$$(y - c)(y - x - c)(2y - x^2 - c)(y - ce^{2x}) = 0$$

١٩٢ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(y' = p) \quad yp + p^2 = x^2 + xy$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$(y' - x)(y' + x + y) = 0$$

إن حل هذه المعادلة يكافئ حل المعادلتين التفاضليتين :

$$y' = x \quad , \quad y' + y = -x$$

$$2y = x^2 + c \quad , \quad y = 1 - x - ce^{-x}$$

ويكون التابع الاصيلي التام :

$$(x^2 + c - 2y)(y + x - 1 + ce^{-x}) = 0$$

١٩٣ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(y'^2 - 1)x^2 y^2 + y'(x^4 - y^4) = 0$$

الحل : لترتب هذه المعادلة حسب القوي المتناقصة لـ y' :

$$(1) \quad x^2 y^2 y'^2 + y'(x^4 - y^4) - x^2 y^2 = 0$$

ومجل هذه المعادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ y' نجد :

$$y' = \frac{y^4 - x^4 \pm (x^4 + y^4)}{2x^2 y^2}$$

ونكون بعد هذا امام معادلتين تفاضليتين محمولتين بالنسبة لـ y' :

$$(2) \quad y' = \frac{y^2}{x^2} \quad (3) \quad y' = -\frac{x^2}{y^2}$$

نكتب المعادلة (٢) بالشكل التالي ونحلها :

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \quad , \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + A \quad , \quad Axy = x - y$$

إن المعادلة الاخيرة هي الحل العام للمعادلة التفاضلية (٢) وهي معادلة جملة قطوع زائدة متساوية الساقين تمر من المبدأ وتمس المنصف الاول . يقع أحد الرأسين لكل منها في 0 وتقبل جميعها المنصف الثاني محوراً لها وكل هذه القطوع متحاكية بالنسبة للمبدأ .

أما المعادلة (٣) فانها تعطينا على التوالي :

$$x^2 dx + y^2 dy = 0 \quad , \quad x^3 + y^3 = B$$

إن المعادلة الأخيرة هي الحل العام للمعادلة التفاضلية (٣) وهي معادلة منحنيات ثلاثية تقبل المنصف الاول محور تناظر لها والمنصف الثاني خطأ مقارباً لكل منها .

ير من كل نقطة من نقاط مستوي الاحداثيات قطع زائد واحد ومنحن ثلاثي واحد يتقاطعان في هذه النقطة تحت زاوية قائمة وذلك لأن جداء جذري المعادلة (١) يساوي (١ -) .

ليس لهذه المعادلة حلول شاذة لأنه لا يمكن ان يكون للمعادلة (١) جذر مضاعف . إن المنصف الأول حل خاص يوافق $A = 0$ والمنصف الثاني حل خاص آخر يقابل $B = 0$.

يتألف الحل العام للمعادلة المفروضة من مجموعتين من الحلول المجموعة الأولى تؤلف جملة قطوع زائدة تابعة لوسيط واحد والمجموعة الثانية تؤلف جملة منحنيات ثلاثية تحوي وسيطاً واحداً أيضاً .

$$x^3 + y'^2 = x^2 \quad : \text{ حل المعادلة التفاضلية } ١٩٤ -$$

الحل : لنفرض $y' = x t$ فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل التالي: $x^3 + x^2 t = x^2$

$$x = 1 - t^2 \quad : \text{ ومنه نجد } :$$

نستنتج من العلاقة $y' = x t$ ان :

$$dy = x t dx = - (1 - t^2) \cdot t \cdot 2 t dt = - 2 t^2 (1 - t^2) dt$$

$$y = - \frac{2 t^3}{3} + \frac{2 t^5}{5} + c \quad : \text{ ومنه } :$$

$$15 y = 6 t^5 - 10 t^3 + c$$

هو الحل العام للمعادلة المفروضة .

وإذا عدنا للمتحول x فاننا نجد هذا الحل بالشكل :

$$15 y = \pm 6 (1 - x)^{\frac{5}{2}} \mp 10 (1 - x)^{\frac{3}{2}} + c$$

ملاحظة يمكننا ان نتوصل إلى هذا الحل بطريقة أكثر مباشرة

فنكتب :

$$y' = \pm x \sqrt{1 - x} \quad \cdot \quad y = \pm \int x \sqrt{1 - x} dx$$

إذا كاملنا بالتجزئة فسوف نجد :

$$y = \pm \frac{2}{3} x (1-x)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (1-x)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$y = \pm \frac{2}{3} (1-x)(1-x)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{4}{15} (1-x)^{\frac{5}{2}} \mp \frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

ونجد بعد الاصلاح :

$$y = \mp \frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{2}{5} (1-x)^{\frac{5}{2}} + c$$

١٩٥ - حل المعادلة التفاضلية : $y^2 y'^2 - (2y + y')^3 = 0$

الحل : نفرض $y' = y \cdot t$ فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$y^4 t^2 - y^3 (2 + t)^3 = 0$$

$$(2) \quad y = \frac{(2+t)^3}{t^3}$$

لنأخذ تفاضل طرفي هذه العلاقة ولنذكر أن $dy = y' dx$

$$dy = y' dx = yt dx = \frac{(2+t)^2 (t-4)}{t^2} dt$$

إذا بدلنا y بقيمتها فاننا نجد :

$$dx = \frac{t-4}{t^2(t+2)} = \frac{-2}{t^2} + \frac{3}{2t} - \frac{3}{2(t+2)}$$

ونجد أخيراً :

$$(3) \quad x = \frac{2}{t} + \frac{3}{2} \log \frac{t}{t+2} + c$$

تمثل المعادلتان (٢، ٣) الحل العام للمعادلة المفروضة بمثلاً بشكل

وسيطي .

١٩٦ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad y y'^3 (1 + y'^2)^{-2} = a$$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي المتحول x لذا يمكن حلها بأن نفرض $y' = p$ فيكون :

$$(2) \quad y = \frac{a(1+p^2)^2}{p^3}$$

فاذا تمكنا من حساب x بدلالة p نكون قد توصلنا الى حل وسيطي للمعادلة المفروضة .

لنأخذ تفاضل طرفي المعادلة (2) فنجد :

$$dy = \frac{a(1+p^2)(p^2-3)}{p^4} dp$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{a(1+p^2)(p^2-3)}{p^5} dp \quad \text{فيكون :}$$

$$dx = a \left(\frac{dp}{p} - \frac{2 dp}{p^3} - \frac{3 dp}{p^5} \right)$$

$$(3) \quad x = a \left[\log |p| + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4 p^4} \right] + c$$

تمثل المعادلتان (2) . (3) الحل العام للمعادلة المفروضة .

لندرس الحاول الشاذة ولنفرض :

$$F(x, y, y') = \frac{y y'^3}{(1+y'^2)^2} - a = 0$$

ولنشكل المشتق الجزئي بالنسبة لـ y' فيكون :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y \cdot y'^2 (3 - y'^2)}{(1 + y'^2)^3}$$

ينعدم هذا المشتق من أجل

$y = 0$ - \bar{A} وهذه العلاقة لا تتحقق المعادلة المفروضة (1) فهي لا تمثل حلاً لهذه المعادلة .

ب - $y' = 0$ وهذه العلاقة لا يمكن ان تمثل حلاً للمعادلة المفروضة كما هو واضح بالبداة .

ج - $y' = \pm \sqrt{3}$: ينتج عن هذه العلاقة وعن المعادلة (١) أن التابع y يصبح ثابتاً أي ان المعادلة الناتجة عن هذه العلاقة والعلاقة (١) تمثل مستقيماً موازياً لمحور السينات وبما ان y' على هذا المستقيم يساوي الصفر أي لا يساوي $\pm \sqrt{3}$ فعنى ذلك ان هذا الحل لا يحقق المعادلة المفروضة فهو ليس حلاً لها .

نلاحظ من جهة ثانية انه من اجل $p = \pm \sqrt{3}$ ينعدم كل من المشتقين $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ فالنقطة المقابلة هي نقطة تراجع للمنحنى التكاملي المتعلق بها . ان المستقيمين اللذين يقابلان القيمتين $p = \pm \sqrt{3}$ هما الحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية للمعادلة المفروضة .

١٩٧ - حل المعادلة التفاضلية :

$$y = x y' - e^y$$

الحل : ان هذه المعادلة من نوع كليرو حلها نشق طرفيها بالنسبة لـ x بعد ان نبدل فيها y' بـ p فيكون :

$$y = x p - e^p$$

$$y' = p = p + x \frac{dp}{dx} - e^p \frac{dp}{dx}$$

$$(x - e^p) \frac{dp}{dx} = 0$$

إما ان يكون :

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad , \quad p = c \quad , \quad y = c x - e^c$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة .

أو ان يكون : $x = e^p$, $p = \log x$, $y = x (\log x - 1)$
 ان هذا الحل يحقق المعادلة المفروضة ولا ينتج عن الحل العام من اجل
 قيمة خاصة لـ c فهو حل شاذ للمعادلة المذكورة ويمكن التوصل اليه من حذف
 c بين المعادلة :

$$y = c x - e^c$$

$$0 = x - e^c \quad \text{والمعادلة المشتقة :}$$

$$198 - \text{حل المعادلة : } y = \frac{2px}{1-p^2} \quad \text{حيث نفرض : } p = y'$$

الحل : نشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ x فنجد :

$$y' = p = \frac{2p}{1-p^2} + \frac{2x(1+p^2)}{(1-p^2)^2} \frac{dp}{dx}$$

بعد اصلاح هذه العلاقة نتوصل إلى المعادلة التفاضلية :

$$\frac{2 dp}{p(1-p^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$

وبعد تكامل الطرفين نجد :

$$p^2 x = C(1-p^2)$$

اذا حذفنا p بين المعادلة المفروضة وهذه المعادلة نحصل على العلاقة :

$$y^2 = 4c(c+x)$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة .

لنشتق هذه المعادلة بالنسبة لـ c فنحصل على المعادلة :

$$8c + 4x = 0$$

ونجد بحذف c من الحل العام والمعادلة المشتقة العلاقة :

$$x^2 + y^2 = 0$$

وهي معادلة منحن وهمي ومعنى ذلك أنه ليس المعادلة المفروضة حل شاذ .

١٩٩ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad 2x = \frac{y(1-y'^2)}{y'}$$

الحل : ان هذه المعادلة محلولة بالنسبة لـ x فيمكن حلها بأن نفرض

$p = y'$ ومن ثم نشق طرفيها بالنسبة لـ y فنجد :

$$2 \frac{dx}{dy} = \frac{2}{p} = \frac{1}{p} - p - y \left(\frac{1}{p^2} + 1 \right) \frac{dp}{dy}$$

إذا رتبنا هذه المعادلة واصلحناها نجد :

$$(1 + p^2) \left(\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} \right) = 0$$

ان $1 + p^2$ لا يمكن أن يكون معدوماً من أجل قيم حقيقية لـ p

فلنقسم طرفي المعادلة على هذا المقدار :

$$\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0, \quad p y = c$$

إذا حذفنا c بين هذه المعادلة والمعادلة المفروضة (١) نجد :

$$y^2 = 2cx + c^2$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة

ملاحظة : يمكننا اعتبار المعادلة المفروضة غير محلولة بالنسبة لـ x

وإبدال y' بـ z ثم التفتيش عن تمثيل وسيطي للسطح :

$$f(x, y, z) = 2x - \frac{y(1-z^2)}{z} = 0$$

لنفرض الوسيطين الداخليين في التمثيل المطوب هما x, t وأن

$z = \text{ch } t$ فيكون :

$$(2) \quad y = \frac{-2x \text{ ch } t}{\text{sh}^2 t} \quad \text{ومنه} \quad 2x = \frac{-y \text{ sh}^2 t}{\text{ch } t}$$

ان المتحولات z, y, x يجب أن تحقق العلاقة :

$$z = y' = \text{ch } t = - \frac{2 \text{ ch } t}{\text{sh}^2 t} - 2 x \frac{\text{sh}^2 t - 2 \text{ch}^2 t}{\text{sh}^3 t} \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{\text{cht sh}^2 t + 2 \text{ch } t}{\text{sh}^2 t} = - 2 x \frac{\text{sh}^2 t - 2 \text{ch}^2 t}{\text{sh}^3 t} \frac{dt}{dx} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{- 2 (\text{sh}^2 t - 2 \text{ch}^2 t) dt}{\text{sh } t (\text{ch } t \text{sh}^2 t + 2 \text{ch } t)}$$

إذا اتخذنا في الطرف الأيمن ، متحولاً جديداً معرّفًا بالعلاقة

: $d\theta = \text{sh } t dt$ ، $\theta = \text{ch } t$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2 d\theta}{\theta(\theta^2 - 1)}$$

وباستكمال طرفي هذه المعادلة نجد :

$$(3) \quad x = \frac{c(\theta^2 - 1)}{\theta^2} = \frac{c \text{sh}^2 t}{\text{ch}^2 t}$$

لنحذف الوسيط t بين المعادلتين (٢ ، ٣) فنجد بضربها ببعضها :

$$y x = \frac{- 2 c x}{\text{ch } t}$$

$$\text{sh}^2 t = \frac{4 c^2 - y^2}{y^2} \quad , \quad \text{ch}^2 t = \frac{4 c^2}{y^2} \quad , \quad \text{ch } t = \frac{- 2 c}{y} \quad \text{ومنه} :$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (٣) فإننا نجد :

$$x = c \cdot \frac{4 c^2 - y^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{4 c^2} = \frac{4 c^2 - y^2}{4 c}$$

$$4 c x = 4 c^2 - y^2 \quad \text{أو}$$

وإذا فرضنا $- 2 c = \lambda$ فإن هذه المعادلة تأخذ الشكل :

$$y^2 = \lambda x + \lambda^2$$

وهو الشكل الذي وجدناه اعلاه من اجل الحل العام للمعادلة المفروضة .

ليس لهذه المعادلة حل ساذ لأنه ليس للمنحنيات التكاملية مغلف حقيقي .
 • • • ٢٠ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad y^3 - 3 y^2 - 9 y^4 - 12 y^2 = 0$$

حل هذه المعادلة ندرس المنحني المعرف بالمعادلة :

$$(2) \quad f(x, y) = x^3 - 3 x^2 - 9 y^4 - 12 y^2 = 0$$

التي تنتج عن المعادلة المفروضة بإبدال كل x بـ y'
 لنشكل المشتقين الجزئيين للمعادلة (١) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -36 y^3 - 24 y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3 x^2 - 6 x$$

ونلاحظ ان الاول ينعدم من اجل $x=0$ ، $x=2$ اما الثاني

فانه ينعدم من اجل $y=0$ ، $y = \pm \sqrt{\frac{-2}{3}}$ لهذا المنحني ثلاث نقاط

مزدوجة $P(0, 0)$ ، $Q(2, -\sqrt{\frac{-2}{3}})$ ، $R(2, \sqrt{\frac{-2}{3}})$ ان

هذا المنحني متصل وقابل للتمثيل وسيطياً ، فلنقطعه بقطع مخروطي يمر من

النقاط الثلاثة P, Q, R ومن النقطة اللانهائية على المحور ox بعد ان

نلاحظ ان هذا المحور مقارب للمنحني (٢) .

ان معادلة كل قطع مخروطي هي من الشكل :

$$A x^2 + B y^2 + 2 C x y + D x + E y + F = 0$$

ان $A=0$ لانه يمر من النقطة اللانهائية على ox و $F=0$

لأنه يمر من النقطة P الواقعة في المبدأ وتأخذ عندها معادلة القطع الشكل :

$$B y^2 + 2 C x y + D x + E y = 0$$

التي تحوي خمسة ثوابت يطلب تعيينها حيث يمكن اعتبار احدها اختيارياً .

لنكتب ان هذا القطع يمر من النقطة $Q(2, \sqrt{\frac{-2}{3}})$ فنجد :

$$\frac{-2}{3} B + 4 C \sqrt{\frac{-2}{3}} + 2 D + E \sqrt{\frac{-2}{3}} = 0$$

ينتج عن هذه العلاقة بمطابقة القسم الوهمي منها للصفر ثم بمطابقة القسم الحقيقي للصفر انه :

$$4C + E = 0 \quad , \quad 2D - \frac{2}{3}B = 0$$

فاذا اعتبرنا بشكل اختياري $E = 2$ ، $D = t$ نجد : $C = -\frac{1}{2}$
 $B = 3t$ وتأخذ عندها معادلة القطع الشكل التالي ، بعد ان نعود فتبدل $y' = x$

$$3ty^2 - y'y + ty' + 2y = 0$$

$$(3) \quad y' = \frac{3ty^2 + 2y}{y - t} \quad : \text{ومنه}$$

اذا حملنا هذه القيمة في المعادلة (1) فاننا نجد :

$$\frac{y^3(3ty + 2)^3}{(y - t)^3} - \frac{3y^2(3ty + 2)^2}{(y - t)^2} = y^2(9y^2 + 12)$$

$$\frac{y(3ty + 2)^3}{(y - t)^3} - \frac{3(3ty + 2)^2}{(y - t)^2} = 9y^2 + 12$$

لقد ظهر المضروب المشترك y^2 بسبب مرور المنحنيين من النقطة المزدوجة p التي ترتيبها y وسنجد المضروب المشترك $(3y^2 + 2)^2$ بسبب مرور هذين المنحنيين من النقطتين المزدوجتين R, Q .

لنكتب هذه المعادلة بالشكل :

$$y(3ty + 2)^3 - 3(3ty + 2)^2(y - t) - 6(y - t)^3 = (9y^2 + 6)(y - t)^3$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بعد اصلاح طرفها الايسر بالشكل :

$$(9t^3y^2 + 9t^2y - 2y + 3t^3 + 6t)(3y^2 + 2) = 3(3y^2 + 2)(y - t)^3$$

$$9t^3y^2 + 9t^2y - 2y + 3t^3 + 6t = 3(y - t)^3$$

ونجد بعد اصلاح الطرف الايمن :

$$-3t - 3t^3(3y^3 + 2) = 0$$

ونجد بعد الاختصار على $3y^2 + 2$ أن :

$$(4) \quad y = 3(t + t^3)$$

إذا حملنا هذه القيمة في العلاقة (٣) نجد :

$$y' = \frac{27t^3(1+t^2)^2 + 6t(1+t^2)}{2t + 3t^3}$$

ونجد بعد الاختصار :

$$(5) \quad y' = 3(1+t^2)(3t^2+1)$$

لنفاضل العلاقة (4) ونقارنها مع العلاقة (5) فنجد :

$$(1+t^2) dx = dt$$

$$t = \operatorname{tg}(x+c) \quad \text{أو} \quad x+c = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} t \quad \text{ومنه}$$

ويكون أخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة من الشكل :

$$y = 3 \operatorname{tg}(x+c) + 3 \operatorname{tg}^3(x+c)$$

١٠٢ - حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$(1) \quad y = y'^2$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة المفروضة بالشكل $y' = \pm \sqrt{y}$ أو بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y} \quad , \quad \pm \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

وباستكمال طرفي هذه المعادلة نجد :

$$(2) \quad 2y = (x-c)^2 \quad \text{أو} \quad \pm 2\sqrt{y} = x-c$$

لدراسة الحلول الشاذة للمعادلة المفروضة نكتبها بالشكل $y'^2 - y = 0$

ثم نشتقها بالنسبة لـ y' فنجد المعادلة :

$$(3) \quad y' = 0$$

وينتج عن المعادلتين (١ ، ٣) المعادلة $y = 0$ وهي تمثل حلاً يحقق

معادلات تفاضلية-٧

المعادلة (١) ولا ينتج عن المعادلة (٢) باعطاء الثابت الاختياري c قيمة خاصة فهو حل شاذ .

إن الحل العام (٢) يمثل مجموعة قطوع مكافئة محورها بوازي المحور oy وتمس جميعها المحور ox .

٢٠٢ - حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$(1) \quad 3y = 2px - 2\frac{p^2}{x}$$

الحل : لنشتق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ x فنجد :

$$3p = 2p + 2\frac{p^2}{x^2} + (2x - 4\frac{p}{x})\frac{dp}{dx}$$

$$px^2 - 2p^2 = (2x^3 - 4px)\frac{dp}{dx} \quad \text{أو}$$

$$p(x^2 - 2p) = 2x(x^2 - 2p)\frac{dp}{dx}$$

وأخيراً يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$(x^2 - 2p)(p - 2x\frac{dp}{dx}) = 0$$

لهذه المعادلة حلان : إما $x^2 - 2p = 0$ أو $p - 2x\frac{dp}{dx} = 0$

يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل :

$$p = \pm \sqrt{cx} \quad , \quad cx = p^2 \quad \text{ومنها} \quad \frac{dx}{x} = 2\frac{dp}{p}$$

إذا حملنا قيمة p هذه في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$(2) \quad (3y + 2c)^2 = 4cx^3 \quad \text{أو} \quad 3y = \pm 2c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 2c$$

إن هذه العلاقة تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة .

لدراسة الحلول الشاذة نكتب المعادلة (١) بشكل صحيح :

$$(3) \quad 3yx - 2px^2 + 2p^2 = 0$$

ثم نشتقها بالنسبة لـ p فنجد بعد حذف p بين المعادلتين :

$$x (6y - x^3) = 0$$

إن لهذه المعادلة حلان : $6y - x^3 = 0$ ، $x = 0$ يكون من أجلها للمعادلة (٣) جذران متساويان بالنسبة لـ p يحقق كل منها المعادلة (٣) إذا كتبنا العلاقة (٢) بالشكل التالي :

$$F(x, y) = (3y + 2c)^2 - 4cx^3 = 0$$

وشكلنا المشتقين الجزئيين لهذا التابع :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6(3y + 2c) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -12cx^2$$

نلاحظ أن الحل $6y - x^3 = 0$ لا يعدم هذين المشتقين فهو حل شاذ أما نقاط المنحنيات التكاملية التي يكون فيها : $x = 0$ فإنه ينعدم فيها هذان المشتقان معاً. تكون هذ النقاط المحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية .

٢٠٣ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad x^3 p^2 + x^2 y p + 1 = 0$$

ثم ادرس حلونها الشاذة .

الحل : لنحل هذه المعادلة بالنسبة لـ y ثم لنشتق المعادلة الناتجة بالنسبة لـ x :

$$y = -\frac{1}{x^2 p} - x p$$

$$p = \frac{2xp + x^2 p'}{x^2 p^2} - p - x p'$$

$$(1 - x^3 p^2) \left(2p + x \frac{dp}{dx} \right) = 0 \quad : \text{ وبعد الاصلاح}$$

$$p = \frac{\mp 1}{\sqrt{x^3}} \quad \text{أو} \quad 1 - x^3 p^2 = 0$$

وهو لا يحقق المعادلة المفروضة (1)

$$\frac{2 dx}{x} + \frac{dp}{p} = 0 \quad , \quad 2p + x \frac{dp}{dx} = 0$$

$$p x^2 = c$$

إذا حذفنا p بين هذه العلاقة وبين المعادلة المفروضة فسوف نجد الحل

العام بالشكل :

$$(2) \quad c^2 + cxy + x = 0$$

لدراسة الحلول الشاذة للمعادلة المفروضة نجري ما يلي :

أ - نكتب ان يميز المعادلة المفروضة التي هي من الدرجة الثانية بالنسبة

p ل يساوي الصفر :

$$(3) \quad x^4 y^2 - 4 x^3 = x^3 (x y^2 - 4) = 0$$

ب - نشتق المعادلة (3) بالنسبة ل c ثم نحذف c بين هذه المعادلة

والمعادلة الناتجة عن الاشتقاق :

$$c = \frac{-xy}{2} \quad , \quad 2c + xy = 0$$

$$\frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^2 y^2}{2} + x = 0$$

وبعد الاصلاح نجد : $x(x y^2 - 4) = 0$ (4)

إن العلاقة $x y^2 - 4 = 0$ تحقق المعادلة التفاضلية فهي تمثل حلاً شاذاً .

أما العلاقة $x = 0$ فهي حل خاص ينتج عن الحل العام بجعل $c = 0$

٢٠٤ - حل المعادلة التفاضلية :

$$x^2 y'^2 - 2xyy' + y^2 = x^2 y^2 - x^4$$

الحل : إذا بدلنا في هذه المعادلة y' بـ z فانها تأخذ الشكل

$$. f(x, y, z) = 0$$

لتحاول حساب المتحولات الثلاثة z, y, x بدلالة وسيطين ولنفرض

مثلا : $y = x \operatorname{ch} t$ فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$x^2 y'^2 - 2 x^2 y' \operatorname{ch} t + x^2 \operatorname{ch}^2 t = x^4 \operatorname{ch}^2 t - x^4$$

وتأخذ بعد الاختصار على x^2 والترتيب الشكل :

$$y'^2 - 2 y' \operatorname{ch} t + \operatorname{ch}^2 t - x^2 \operatorname{sh}^2 t = 0$$

لنحل هذه المعادلة ذات الدرجة الثانية بالنسبة لـ y' فنجد :

$$y' = \operatorname{ch} t \pm x \operatorname{sh} t$$

إن الوسيطين هما x, t والمعادلات الوسيطة هي :

$$x = x \quad , \quad y = x \operatorname{ch} t \quad , \quad y' = z = \operatorname{ch} t \pm x \operatorname{sh} t$$

لنشتق بالنسبة لـ x المعادلة الثانية ولنطبقها مع المعادلة الاخيرة فنجد :

$$x \operatorname{sh} t \frac{dt}{dx} + \operatorname{ch} t = \operatorname{ch} t \pm x \operatorname{sh} t$$

$$\frac{dt}{dx} = \pm 1 \quad , \quad t = c \pm x \quad \text{ومنه}$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو : $y = x \operatorname{ch} (c \pm x)$

٢٠٥ - ادرس المعادلة التفاضلية التالية وبين فيما إذا كان لها

حل شاذ :

$$(1) \quad y'^2 + 2 x y' - y = 0$$

الحل : إن الحل الشاذ لهذه المعادلة يوافق الحالة التي يكون لها جذر

مضاعف بالنسبة لـ y' ويقع هذا الامر عندما يكون :

$$(2) \quad y + x^2 = 0$$

إذا كان لهذه المعادلة حل شاذ فهو القطع المكافئ $y + x^2 = 0$ ولكي

تقبل المعادلة المفروضة هذا الحل الشاذ يجب ان تكون قيمة المشتق y' على

القطع المكافئ تساوي قيمته مستخرجة من المعادلة المفروضة .

عندما يكون $y + x^2 = 0$ يكون للمعادلة (١) جذر مضاعف هو $y' = -2x$ بينما تكون قيمة y' مستخرجة من معادلة القطع هي $y' = -2x$ وهذا ما يثبت ان العلاقة (٢) لا تمثل حلاً شاذاً للمعادلة المفروضة بل محلاً هندسياً لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية كما سنوضح ذلك فيما يلي :

إن المعادلة (١) هي معادلة لاغرانج فاذا طبقنا عليها الطريقة العامة في الحل نجد الحل العام :

$$x = \frac{c}{p^3} - \frac{2p}{3} , \quad y = \frac{2c}{p} - \frac{p^2}{3}$$

إذا شكلنا مشتقي x ، y بالنسبة للوسيط p فاننا نجد :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-2}{3p^3} (3c + p^3) , \quad \frac{dy}{dp} = \frac{-2}{3p^2} (p^3 + 3c)$$

من اجل قيم الوسيط التي تحقق المعادلة $p^3 + 3c = 0$ يكون :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dp} = 0$$

إن القيم الثلاثة للوسيط p التي تحقق المعادلة $p^3 + 3c = 0$ تقابل ثلاث نقاط تراجع من المنحني التكاملي الذي يوافق قيمة c الداخلة في هذه المعادلة . ينتج عما تقدم أن لكل منحني تكاملي ثلاث نقاط تراجع نحصل على محلها الهندسي بأن نحذف c بين المعادلة $p^3 + 3c = 0$ وبين معادلتنا منحنيات التكامل فنجد :

$$x = -p , \quad y = -p^2 , \quad y = x^2$$

وهي معادلة القطع المكافئ الذي وجدناه أعلاه .

٢٠٦ - حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2x(x + yy') + \frac{1}{m^2}(x + yy')^2 + k = 0$$

الحل : لنفرض $2z = x^2 + y^2$ فيكون $z' = x + yy'$ إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة (1) فإنها تأخذ الشكل :

$$(2) \quad 2z = 2x z' - \frac{1}{m^2} z'^2 - k$$

إن هذه المعادلة هي معادلة لاغرانج نحلها بأن نأخذ مشتق طرفيها بالنسبة لـ x :

$$2z' = 2z' + 2xz'' - \frac{2}{m^2} z' z''$$

$$z'' (2x - \frac{2}{m^2} z') = 0 \quad \text{أو}$$

لتتحقق هذه المعادلة يكفي أن يكون :

$$z'' = 0 \quad \text{أو} \quad z' = m^2 x$$

إن العلاقة الأولى لانه تحقق المعادلة المفروضة (2) فهي تمثل حلاً غيرياً نتج عن اشتقاق هذه المعادلة أما العلاقة الثانية وهي $z'' = 0$ فإنها تعطينا الحل العام للمعادلة (1) وهو :

$$z'' = 0, \quad z' = a, \quad z = ax + b$$

أو بالشكل $x^2 + y^2 = 2ax + 2b$ وهي معادلة مجموعة دوائر تابعة لوسيطين يتبع احدهما الآخر لأنه لو حملنا هذه النتائج في المعادلة (2) لوجدنا :

$$2ax + 2b = 2ax - \frac{a^2}{m^2} - k$$

يمكننا اعتبار احد الثابتين (b, a) ثابتاً اختيارياً ويكون الآخر تابعاً له معرماً بالعلاقة السابقة والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$2b = -\frac{a^2}{m^2} - k$$

تقع مراكز هذه الدوائر على محور السينات .
 الحلول الشاذة : لنشتق المعادلة (1) بالنسبة لـ y' فنجد :

$$(3) \quad -2xy + \frac{2y}{m^2}(x + yy') = 0$$

$$y' = \frac{x(m^2 - 1)}{y} \quad \text{ومنه :}$$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلة (1) فإننا نحصل على المعادلة :

$$(4) \quad (1 - m^2)x^2 + y^2 + k = 0$$

يبرهن بسهولة أن هذه العلاقة تحقق المعادلة (1) فهي إذن حل شاذ كما يبرهن بسهولة أيضاً أن الدوائر التي تمثل المنحنيات التكاملية للمعادلة (1) يمر كل منها القطع المعرف بالمعادلة (3) بنقطتين مختلفتين
 ملاحظة : يمكن اخراج y من إفادة المعادلة (3) خارج قوسين وكتابتها بالشكل التالي :

$$2y \left[-x + \frac{x + yy'}{m^2} \right] = 0$$

فهي تقبل الحل $y = 0$. إن هذا الحل لا يحقق المعادلة (1) فهو ليس بحل شاذ وليس بحل هندسي للنقاط الشاذة للمنحنيات التكاملية . يمر من كل نقاط المستقيم $y = 0$ دائرتان من الدوائر التكاملية متماستان في هذه النقطة إن ميل المماس المشترك يساوي ∞ .

٢٠٧ - حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$y'^2 - \frac{2}{(x-y)^2 - 1} y' + 1 = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة من الشكل : $y'^2 - 2P y' + Q = 0$:

لنشكل مميز هذه المعادلة ولنكتبه مساوياً للصفر :

$$P^2 - Q = \frac{1}{[(x-y)^2 - 1]^2} - 1 = 0$$

نضع هذه المعادلة بشكل صحيح فنجد :

$$1 - [(x-y)^2 - 1]^2 \equiv (x-y)^2 (y-x-\sqrt{2})(x-y-\sqrt{2}) = 0$$

يجري الطرف الايسر لهذه المعادلة المضروب $(x-y)^2$ وبما ان العلاقة

$x-y=0$ لا تحقق المعادلة المفروضة فهو ليس بحل شاذ ولا هو محلاً هندسياً

لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية .

إذا فتشنا عن حل المعادلة المفروضة فاننا نجد ان هذا الحل يتألف من

مجموعة الدوائر :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 - 1 = 0$$

تقع مراكز هذه الدوائر على المستقيم $y-x=0$ ومن الواضح ان

هذا المستقيم هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي يتماس بها كل زوج من هذه

الدوائر .

أما المستقيمان $y-x-\sqrt{2}=0$ ، $x-y-\sqrt{2}=0$ فهما

المغلقتان لمجموعة الدوائر هذه وهما يمثلان الحل الشاذ للمعادلة المفروضة .

يمكن التأكيد بسهولة من أن كلا من هذين المستقيمين يحقق المعادلة

التفاضلية المفروضة فاذا اخذنا مثلاً المعادلة الاولى $y = x + \sqrt{2}$ واخذنا

مشتقها فاننا نجد :

$$y' = 1$$

إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة المفروضة فاننا نلاحظ تحقيقها :

$$1 - \frac{2}{(x-x-\sqrt{2})^2 - 1} + 1 = 0$$

٢٠٨ - حل المعادلة التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$(1) \quad y = 2xp - yp^2$$

الحل : لنحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x ثم لنشتقها بالنسبة لـ y فنجد :

$$2x = \frac{y}{p} + yp$$

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2} \frac{dp}{dy} + p + y \frac{dp}{dy}$$

$$(p^2 - 1) \left(p + y \frac{dp}{dy} \right) = 0 \quad \text{أو}$$

$$\cdot \text{ نجد } p + y \frac{dp}{dy} = 0 \quad \text{إذا كاملنا المعادلة}$$

$$p y = c$$

لنأخذ قيمة p من هذه العلاقة ونضعها في المعادلة المفروضة فنحصل على الحل العام :

$$(2) \quad y^2 = 2cx - c^2$$

لنأخذ بميز المعادلة المفروضة باعتبارها من الدرجة الثانية بالنسبة لـ p' ولنكتب أنه يساوي الصفر فنجد :

$$. \quad y = -x \quad \text{أو} \quad y = x \quad \text{ومنه إما } x^2 - y^2 = 0$$

إن العلاقتين الأخيرتين تحققان المعادلة المفروضة ولا ينتجان عن الحل العام (٢) ناعطاء قيم خاصة للثابت الاختياري c فيها إذن حلان شاذان للمعادلة المفروضة .

يمكننا ان نتوصل إلى النتيجة ذاتها وذلك بأن نفش على مغلف المنحنيات (٢) فنحذف c بين هذه المعادلة :

$$y^2 = 2cx - c^2$$

$$c = x \quad , \quad 0 = 2x - 2c \quad \text{والمعادلة المشتقة بالنسبة لـ } c$$

$$y^2 = x^2 \quad \text{فنجد معادلة المغلف}$$

إن الحل العام مؤلف من جملة قطوع مكافئة تحوي وسيطاً . محورهما

المشترك محور السينات وبمس كل منها المستقيم $y = x$ في النقطة (c, c) والمستقيم $y = -x$ في النقطة $(c, -c)$.

٢٠٩ - حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$p^3 + p x - y = 0$$

الحل : يمكن حل هذه المعادلة باعتبارها معادلة كليو فنكتب

على التوالي :

$$y = p x + p^3$$

$$y' = p = p + x p' + 3 p^2 p'$$

$$p' (x + 3 p^2) = 0$$

إن الحل $p' = 0$ يعطينا الحل العام للمعادلة المفروضة وهو $y = cx + c^3$

أما الحل $x + 3 p^2 = 0$ أو $p = \pm \sqrt{\frac{-x}{3}}$ فإنه يعطينا الحل الشاذ وهو :

$$4 x^3 + 27 y^2 = 0$$

يمثل الحل العام مجموعة مستقيبات تمس جميعها المنحني المعرف بالعلاقة :

$$4 x^3 + 27 y^2 = 0$$

الذي هو مغلف للمستقيبات المذكورة .

٢١٠ - حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$(x^2 - 4) p^2 - 2x y p - x^2 = 0$$

الحل : لنحلها بالنسبة لـ y ومن ثم لنشتق طرفيها بالنسبة لـ x فنجد

على التوالي :

$$2 y = x p - \frac{4}{x} p - \frac{x}{p}$$

$$2 p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{4p}{x^2} - \frac{4}{x} \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2} \frac{dp}{dx}$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بعد حذف مخارجها واصلاحها بالشكل :

$$(p^2 x^2 - 4 p^2 + x^2) \left(p - x \frac{dp}{dx} \right) = 0$$

إذا اعتبرنا الحل : $p - x \frac{dp}{dx} = 0$ نجد :

$$p = c x$$

وإذا حملنا هذه القيمة في المعادلة المفروضة فسوف نجد الحل العام :

$$c^2 (x^2 - 4) - 2 c y - 1 = 0$$

لدراسة الحلول الشاذة للمعادلة المفروضة نشكل بميز هذه المعادلة ونجعله مساوياً للصفر فنجد :

$$x^2 (y^2 + x^2 - 4) = 0$$

إن العلاقة $y^2 + x^2 = 4$ تنتج عن حذف p بين المعادلة المفروضة والمعادلة الناتجة عنها بعد اشتقاقها بالنسبة لـ p فهي تمثل الحل الشاذ للمعادلة المفروضة .

أما العلاقة $x^2 = 0$ الذي يمثل محور العينات فانها لا تحقق المعادلة المفروضة فهي لا تمثل حلاً شاذاً بل محلاً هندسياً لنقاط تماس أزواج المنحنيات التكاملية غير اللامتناهية المتجاور .

يمثل الحل العام لهذه المعادلة مجموعة من القطوع المكافئة تغلفها الدائرة $x^2 + y^2 = 4$.

يتأس في كل نقطة من نقاط المستقيم $x = 0$ قطعان مكافئان من المنحنيات التكاملية وتكون قيمة p في هذه النقطة معدومة أي ان المماس المشترك يكون موازياً لمحور السينات .

تمارين غير محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من الاجوبة المرافقة :

$$y'^2 + y' (x + y) + xy = 0 - ٢١١$$

$$(2y + x^2 - c)(x + \log y - c) = 0 : \text{ج}$$

$$y'^2 + y' - 2 = 0 - ٢١٢$$

$$(y - x - c)(y + 2x - c) = 0 : \text{ج}$$

$$y'^2 + y' - 6 = 0 - ٢١٣$$

$$(y - 2x - c)(y + 3x - c) = 0 : \text{ج}$$

$$y'^2 + 2xy' - 3x^2 = 0 - ٢١٤$$

$$(2y - x^2 - c)(2y + 3x^2 - c) = 0 : \text{ج}$$

$$49(y - c)^2 = 4x^7 : \text{ج} \quad y'^2 = x^5 - ٢١٥$$

$$x + yy'^2 = y'(1 + xy) - ٢١٦$$

$$(2y - x^2 - c)(2x - y^2 - c) = 0 : \text{ج}$$

$$y'^3 - y'(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0 - ٢١٧$$

$$(2y - x^2 - c)(y - ce^x)(y + x - 1 - ce^{-x}) = 0 : \text{ج}$$

$$y'^2 - 2y' \operatorname{ch}x + 1 = 0 - ٢١٨$$

$$(y - e^x - c)(y + e^{-x} - c) = 0 : \text{ج}$$

$$xyy'^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x^2 + xy = 0 - ٢١٩$$

$$(2xy + x^2 - c)(x^2 + y^2 - c) = 0 : \text{ج}$$

$$(x^2 + x)p^2 + (x^2 + x - 2xy - y)p + y^2 - xy = 0 - ٢٢٠$$

$$[y - c(x + 1)][y + x \log cx] : \text{ج} \quad y' = q : \text{جث}$$

$$yp + p^2 = x^2 + xy - ٢٢١$$

$$(x^2 + c - 2y)(y + x - 1 + ce^{-x}) = 0 : \text{ج}$$

$$x^2 p^2 + 3xy p + 2y^2 = - 222$$

$$x^3 y^2 - cxy(x+1) + c^2 = 0 : \text{ج}$$

$$xp = \sqrt{1+p^2} - 223$$

$$y + c = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) : \text{ج}$$

$$xp^2 + 2yp - x = 0 - 224$$

$$x^2(x^2 - 3y^2)^2 - 2cxy(y^2 - 3x^2) - c^2 = 0 : \text{ج}$$

$$(xp - y)^2 = 2xy(1 + p^2) - 225$$

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = c^2 : \text{ج}$$

$$(xp - y)(xp - 2y) + x^2 = 0 - 226$$

$$x = ce^{t+\frac{1}{2}e^{-2t}}, y = 2c \operatorname{ch} t \cdot e^{t+\frac{1}{2}e^{-2t}} : \text{ج}$$

$$x^2 p^2 - 3xy p + 2y^2 = 0 - 227$$

$$(y - cx)(y - cx^2) = 0 : \text{ج}$$

حل المعادلات التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة حيث نفرض $y' = p$:

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 - 228$$

ج: الحل العام: $y^3 = 3cx + 6c^2$ ، الحل الشاذ $3x^2 + 8y^3 = 0$

$$4xp^2 - (3x - 1)^2 = 0 - 229$$

ج: الحل العام: $(y + c)^2 = x(x - 1)^2$ ؛ الحل الشاذ $x = 0$ و $3x - 1$

هو المحل الهندسي لنقاط تماس ازواج المنحنيات التكاملية . $x = 1$ هو المحل الهندسي

لنقاط المنحنيات التكاملية المزدوجة .

$$4p^2 - 9x = 0 - 230$$

ج : الحل العام: $(y + c)^2 = x^3$ ز $x = 0$ المحل الهندسي لنقاط تراجع

المنحنيات التكاملية .

$$x p^2 - 2 y p + 4 x = 0 \quad - \quad ٢٣١$$

ج : الحل العام $x^2 + c y + c^2 = 0$ و الحل الشاذ $y^2 = 4 x^2$

$$4 p^2 (x - 2) = 1 \quad - \quad ٢٣٢$$

ج : الحل العام $(y + c)^2 = x - 2$ ز الحل الشاذ $x = 2$

$$p^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{الحل العام : } y = \sin(x + c) \quad - \quad ٢٣٣$$

الحل الشاذ : $y^2 = 1$

$$p^2 + 2 x p - y = 0 \quad - \quad ٢٣٤$$

الحل العام : $(2 x^3 + 3 x y + c)^2 - 4 (x^2 + y)^3 = 0$

. الحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية . $x^2 + y = 0$

$$x p^2 - 2 y p + 1 = 0 \quad - \quad ٢٣٥$$

الحل العام : $c^2 - 12 c x y + 8 c y^3 - 12 x^2 y^2 + 16 x^3 = 0$

. الحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية . $y^2 - x = 0$

$$4 x p^2 + 4 y p - 1 = 0 \quad - \quad ٢٣٦$$

الحل العام : $c^2 + 6 c x y - 2 c y^3 - x (3 y^2 - x)^2 = 0$

. الحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية . $y^2 + x = 0$

حل المعادلات التفاضلية التالية واوجد توابعها الاصلية التامة ثم اوجد

حلولها الشاذة وارسم المنحنيات التكاملية .

$$4 x (x - 1) (x - 2) p^2 - 3 (x^2 - 6 x + 2)^2 = 0 \quad - \quad ٢٣٧$$

ج - الحل العام : $(y + c)^2 = x (x - 1) (x - 2)$

الحل الشاذ : $x (x - 1) (x - 2) = 0$ ، أما $x = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

فهو الحل الهندسي لنقاط تماس ازواج المنحنيات التكاملية .

$$4x^2 - (3x - 1)^2 = 0 \quad - \quad ٢٣٨$$

ج - الحل العام : $(y + c)^2 = x(x - 1)^2$ ، الحل الشاذ $x = 0$
 أما $x = \frac{1}{3}$ فهو المحل الهندسي لنقاط تماس أزواج المنحنيات التكاملية

و $x = 1$ هو المحل الهندسي لنقاط عقد المنحنيات التكاملية

$$y^2 - 2xp + x = 0 \quad - \quad ٢٣٩$$

ج - الحل العام : $y^2 - 2cx + c^2 = 0$

و الحل الشاذ : $(3y + x)(y - x) = 0$

$$3x^2 - 6yp + x + 2y = 0 \quad - \quad ٢٤٠$$

ج - الحل العام : $x^2 + c(x - 3y) + c^2 = 0$

و الحل الشاذ : $(3y + x)(y - x) = 0$

$$p^2 + 2px^3 - 4x^2y = 0 \quad - \quad ٢٤١$$

ج - الحل العام : $y - cx^2 - c^2 = 0$

و الحل الشاذ : $x^4 + 4y = 0$ أما $x = 0$ فهو المحل الهندسي لنقاط

تماس أزواج المنحنيات التكاملية .

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \quad - \quad ٢٤٢$$

ج - الحل العام : $y = c(x - c)^2$ و الحل الشاذ والخاص : $y = 0$

أما $27y - 4x^3 = 0$ فهو حل شاذ .