الفصل السادس

المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى (٥)

تغيير المتحولات ـ تطبيقات هندسية ـ المسارات القائمة والمائلة

١ ـ **تغيير المتحولات** : إذا كنا أمام معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى ولاحظنا أنها لاتدخل تحت أي شكل من الأشكال التي أوردناها سابقاً سواء اعتبرنا x متحولاً و y تابعاً أو العكس ، فاننا ندرس فيما إذا كان من الممكن تحويلها إلى شكل من الأشكال المعروفة بواسطة تغيير المتحول أو التابع أو كليهما وبصورة خاصة استعمال الاحداثيات القطبية بدلاً عن الاحداثيات القائمة .

٢ ـ **تطبيقات هندسية** : لقد بدأنا في الفصول السابقة من معادلة تفاضلية واستخرجنا حلها وعينا مجموعة المنحنيات التابعة لوسيط والتي تحقق هذه المعادلة ثم درسنا بعد ذلك خواص هذه المنحنيات . يمكننا الآن أن نبدأ العمل بشكل معاكس فنعطي خاصة هندسية ونفتش عن المنحنيات التي تتمتع بهذه الخاصة . نعبر عن الخاصة بمعادلة تفاضلية ثم نحل هذه المعادلة ونجد جملة المنحنيات التي تتمتع بالخاصة المذكورة .

٣ ـ **المسارات القائمة** : آ ـ لتكن جملة المنحنيات التابعة لوسيط والمعطاة بالمعادلة:

$$f(x, y, c) = o \tag{1}$$

نسمي كل منحن يقطع جميع هذه المنحنيات تحت زاوية قائمة بالمسار القائم .

إن ميل مماس المنحنيات المعرفة بالمعادلة (١) يعطى بالعلاقة :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'}{f_y'}$$

وينتج عما تقدم أنه تتحقق العلاقة التالية ، في كل نقطة من نقاط المسار القائم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_y'}{f_x'} \tag{2}$$

إذا حذفنا الثابت c بين المعادلتين (١) ، (٢) فاننا نحصل على معادلة تفاضلية من الشكل:

$$\varphi (x , y , y') = o$$

منحنياتها التكاملية متعامدة مع المنحنيات المعرفة بالمعادلة (١) .

ب – إذا امكن حل المعادلة (١) بالنسبة لـ c وكتابتها بالشكل :

$$g (x , y) = c$$

فان المعادلة التفاضلية للمنحنيات تنتج عن اشتقاق المعادلة السابقة بالنسبة لـ x أي هي :

$$g_x' + y' \cdot g_y' = o$$

حـ – لنفرض أن المعادلة التي تعطي جملة المنحنيات كانت قطبية من الشكل :

$$f (\omega , \varrho , c) = o \qquad (3)$$

حيث ω ، ϱ هما الاحداثيان القطبيان .

لنفرض V الزاوية التي يصنعها مماس منحن من المنحنيات في نقطة M منه ، مع نصف القطر الشعاعي OM ، فانه يكون :

$$tg\ V = - \frac{\varrho f'_\varrho}{f'_\omega}$$

وإذا رمزنا بـ V_1 للزاوية التي يصنعها مماس المسار القائم في M مع نصف القطر الشعاعي فانه يجب ان يكون $V_1 = V \pm \frac{\pi}{2}$ ويكون :

$$tg\ V_1 = tg\ (V \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \frac{1}{tg\ V} = \frac{\pm f'_\omega}{\varrho f'_\varrho}$$

ويكون إذن من أجل كل نقطة من نقاط المسار القائم :

$$\frac{\varrho\, d_\omega}{d\varrho} = \frac{\pm f'_\omega}{\varrho f'_\varrho} \qquad (4)$$

إذا حذفنا الثابت c بين المعادلتين (٣ ، ٤) فاننا نحصل على معادلة تفاضلية من الشكل.

$$\varphi(\omega , \varrho , \frac{d\varrho}{d\omega}) = o$$

منحنياتها التكاملية متعامدة مع المنحنيات المعرفة بالمعادلة (٣) .

د ــ إذا امكن حل المعادلة (٣) بالنسبة لـ c وكتابتها بالشكل :

$$g(\omega, \varrho) = c$$

فان المعادلة التفاضلية للمنحنيات تنتج من اشتقاق هذه المعادلة بالنسبة لـ ω :

$$g'_\omega + \varrho' g'_\varrho = 0$$

٤ ــ المسارات المائلة : لتكن جملة المنحنيات المعرفة بالمعادلة التفاضلية :

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (5)$$

ولنفتش عن المعادلة التفاضلية للمنحنيات التي تصنع مع منحنيات المعادلة (٥) زاوية ثابتة ω . نسمي هذه المنحنيات بالمسارات المائلة بـ ω .

لنرمز بـ ψ للزاوية التي يصنعها مماس منحن من المنحنيات التكاملية للمعادلة (٥) مع المحور ox و بـ ψ_1 للزاوية التي يصنعها مماس مسار مائل بـ ω مع محور السينات ايضاً . إن ψ ، ψ_1 تحققان العلاقة $\psi = \psi_1 \pm \omega$ ويكون :

$$y' = \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\psi_1 \pm \operatorname{tg}\omega}{1 \mp \operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\omega} = \frac{\operatorname{tg}\psi_1 + m}{1 - m\operatorname{tg}\psi_1}$$

حيث فرضنا $m = \pm\operatorname{tg}\omega$. إن معادلة المسارات المائلة بـ ω لمنحنيات المعادلة (٥) هي :

$$f\left(x, y, \frac{y' + m}{1 - m y'}\right) = 0$$

ب ــ إذا كانت المنحنيات معرفة بمعادلة تفاضلية قطبية من الشكل :

$$f(\varrho, \Theta, \varrho') = 0$$

فانه من المعروف أن الزاوية V بين المماس ونصف القطر الشعاعي تعطى بالعلاقة :

$$\operatorname{tg} V = \varrho \frac{d\Theta}{d\varrho}$$

إذا رمزنا بـ V_1 للزاوية الكائنة بين مماس المسار المائل بـ ω ونصف القطر الشعاعي في النقطة المفروضة فانه يكون : $V = V_1 \pm \omega$

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} V_1 \pm \operatorname{tg}\omega}{1 \mp \operatorname{tg} V_1 \operatorname{tg}\omega} = \frac{r\frac{d\Theta}{dr} + m}{1 - m\frac{d\Theta}{dr}} = \frac{r\,d\Theta + m\,dr}{dr - m r\,d\Theta}$$

حيث فرضنا $m = \pm \operatorname{tg} \omega$.

تنتج المعادلة التفاضلية للمسار المائل بـ ω عن المعادلة الأصلية بأن نبدل فيها rdv بـ $rd\Theta + mdr$ و dr بـ $dr - mrd\Theta$.

تمارين محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية بعد أن تعين نوعها :

٢٤٣ - $$x y y' - y^2 + x^3 = 0 \qquad (1)$$

الحل : لحل هذه المعادلة نغير التابع حسب العلاقة $z = y^2$ ، $\frac{1}{2} z' = y y'$ ، فتأخذ المعادلة الشكل الخطي :

$$\frac{x}{2} z' - z + x^3 = 0 \qquad (2)$$

نحلها حسب المراحل التالية :

$$x z' = 2 z \quad , \quad \frac{dz}{z} = \frac{2\, dx}{x} \quad , \quad z = c\, x^2$$

نحول الثابت الاختياري فنجد :

$$\frac{1}{2} c' x^3 + x^3 = 0 \quad , \quad c' = -2 \quad , \quad c = -2x + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة (٢) :

$$z = -2 x^3 + \lambda x^2$$

والحل العام لـ (١) $\quad y^2 = -2 x^3 + \lambda x^2$

٢٤٤ - $$(x\, dy - y\, dx)(x\, dx + y\, dy) = c^2\, dx\, dy$$

الحل : نلاحظ ان هذه المعادلة لا تتغير عندما نحول فيها x بـ $-x$ أو y بـ $-y$ ومعنى ذلك ان المنحنيات التكاملية متناظرة بالنسبة لمحوري

الاحداثيات . إن تغيير المتحولين حسب العلاقتين :

$$x^2 = u \quad , \quad y^2 = v \quad , \quad dx = \frac{1}{2}\,\frac{du}{x} \quad , \quad dy = \frac{1}{2}\,\frac{dv}{y}$$

تجعل هذه المعادلة من نوع معادلة كليرو أي :

$$\left(\frac{x\,dv}{2\,y} - \frac{y\,du}{2\,x}\right)\left(\frac{du}{2} + \frac{dv}{2}\right) = \frac{c^2\,du \cdot dv}{4\,x\,y}$$

لنضرب طرفي هذه العلاقة بـ $4\,x\,y$ فنجد :

$$(x^2\,dv - y^2\,du)(du + dv) = c^2\,du\,.\,dv$$

$$(u\,dv - v\,du)(du + dv) = c^2\,du \cdot dv$$

لنقسم طرفي هذه المعادلة على du^2 فنحصل على :

$$(u\,v' - v)(1 + v') = c^2\,v'$$

وبعد الاصلاح والترتيب نجد :

$$v - v'(u - v - c^2) = u\,v'^2$$

وهي معادلة كليرو حيث اتخذنا v تابعاً و u متحولاً إذا اتممنا حل هذه المعادلة حسب الطرق المعروفة وعدنا إلى المتحولين الاصليين فاننا نجد الحل العام للمعادلة المفروضة بالشكل :

$$y^2(1 + a) = a\,x^2(1 + a) - a\,c^2$$

٢٤٥ -

$$x\,y' + y = \frac{a^2}{x^2\,y^2} \qquad (1)$$

الحل : يمكن حل هذه المعادلة باعتبارها معادلة بيرنوني كما يمكن اتخاذ تابع جديد معرف بالعلاقة :

$$u = x\,y \quad , \quad u' = x\,y' + y$$

لننقل هذه القيم إلى المعادلة (١) فتأخذ الشكل :

$$u' = \frac{a^2}{u^2} \quad , \quad dx = \frac{u^2\,du}{a^2} \quad , \quad x = \frac{u^3}{3\,a^2} + c$$

واذا عدنا إلى التابع الاول فاننا نجد الحل العام بالشكل :

$$x^3 y^3 - 3 a^2 x + c = o$$

٢٤٦ - حل المعادلة التالية واوجد المحل الهندسي لنقاط تماس المنحنيات التكاملية مع المماسات ذات الميل الواحد المساوي لـ m .

$$y' (2 x^2 y + x) = 3 y - 2 x y^2 \qquad (1)$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$2 x y (x y' + y) = 3 y - x y' \qquad (2)$$

لنفرض $x y = t$ ، $x y' + y = t'$ وتأخذ عندها المعادلة(٢) الشكل :

$$(2 t + 1) t' = 4 \frac{t}{x}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل : $\frac{dx}{x} = \frac{2 t + 1}{4 t}$

ومنه : $\log \left| \frac{x}{c} \right| = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \log | t | = \frac{t}{2} + \log \sqrt[4]{t}$

$$x = c \sqrt[4]{t}\, e^{\frac{1}{2} t}$$

$$y = \frac{t}{x} = \sqrt[4]{t^3} : c\, e^{\frac{1}{2} t}$$

إن هاتين المعادلتين تمثلان الحل العام للمعادلة المفروضة .

نتوصل بسهولة لايجاد معادلة المحل الهندسي المطلوب وذلك بأن نستبدل y' بـ m في المعادلة المفروضة فنجد :

$$m (2 x^2 y + x) = 3 y - 2 x y^2$$

٢٤٧ - حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = \frac{a - b}{a + b} \, \frac{x - y y'}{x + y y'} \qquad (1)$$

الحل : إن هذه المعادلة لا تنطبق على نوع من الانواع التي رأيناها لذا نجري عليها تغيير المتحولين المعرفين بالعلاقتين :

$$x^2 + y^2 = u \quad , \quad x^2 - y^2 = v$$

ونجد : $2(x + yy') = u' \quad , \quad 2(x - yy') = v'$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (١) المفروضة فاننا نحصل على المعادلة :

$$\frac{u+v}{2a} + \frac{u-v}{2b} = \frac{a-b}{a+b}\frac{v'}{u'} = \frac{a-b}{a+b}\frac{dv}{du}$$

تأخذ هذه المعادلة بعد اختصارها وترتيبها الشكل التالي :

$$\frac{u}{2}\frac{a+b}{ab} + \frac{v}{2}\frac{b-a}{ab} = \frac{a-b}{a+b}\frac{dv}{du}$$

إنها معادلة خطية من المرتبة الاولى يمكن تبسيط شكلها بأن نفرض .

$$(a+b)u = U \quad , \quad (b-a)v = V$$

فتأخذ الشكل : $\dfrac{dV}{dU} + \dfrac{V}{2ab} + \dfrac{U}{2ab} = o$

تحل هذه المعادلة بالطرق المعروفة فنجد حلها العام :

$$V = -U + 2ab + c\,e^{-U:2ab}$$

وإذا عدنا إلى المتحولين الاصليين فان نجد الحل العام للمعادلة المفروضة بالشكل :

$$bx^2 + ay^2 = ab + \lambda\, e^{-(a+b)(x^2+y^2):2ab}$$

٢٤٨ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \qquad (xy+1)dx + 2x^2(2xy-1)dy = o$$

الحل : لحل هذه المعادلة نغير التابع حسب العلاقة :

$$dy = \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2} \qquad y = \frac{z}{x} \quad , \quad z = xy$$

فتأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$(z+1)\,dx + 2x^2(2z-1)\frac{x\,dz - z\,dx}{x^2} = o$$

$$(z+1)\,dx + 2(2z-1)(x\,dz - z\,dx) = o$$

$$[(z+1) - 2z(2z-1)]\,dx + 2x(2z-1)\,dz = o$$

$$(4z^2 - 3z - 1)\,dx - 2x(2z-1)\,dz = o \qquad (2)$$

وهي معادلة ذات متحولات متفرقة يمكن كتابتها بالشكل :

$$\frac{dx}{x} = \frac{(4z-2)\,dz}{4z^2 - 3z - 1}$$

إذا كاملنا طرفي هذه المعادلة فاننا نجد الحل العام للمعادلة (٢) وهو :

$$(4z+1)^3(z-1)^2 = c\,x^5$$

وإذا عدنا إلى التابع y فاننا نجد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$(4xy+1)^3(xy-1)^2 = c\,x^5$$

٢٤٩ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x\,y' - y = 2x\,\frac{y^2 - x^2}{x^4 - 1}$$

الحل : نعتبر تابعاً جديداً z معرفاً بالعلاقة $y = xz$ فيكون

$$y' = z + x\,z'$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فانها تأخذ الاشكال التالية :

$$x\,z + x^2 z' - x\,z = 2x \cdot \frac{x^2 z^2 - x^2}{x^4 - 1}$$

$$x^2 z' = \frac{2x^3(z^2 - 1)}{x^4 - 1}$$

$$\frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{2x\,dx}{x^4 - 1}$$

ونجد بعد استكمال طرفي هذه المعادلة العلاقة :

$$\frac{z-1}{z+1} = c\,\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

واذا عدنا إلى التابـع y فاننا نجد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = x\,\frac{x^2+c}{c\,x^2+1}$$

٢٥٠ – $(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)+(x^2+y^2-2x+2y)$
$(y\,dx-x\,dy)=0$

الحل : لحل هذه المعادلة يمكننا اتخاذ الاحداثيات القطبية بدلاً عن القائمة وذلك حسب العلاقات التالية :

$$x = \varrho\cos\Theta \quad , \quad y = \varrho\sin\Theta \quad , \quad \varrho^2 = x^2+y^2$$

$$x\,dx+y\,dy = \varrho\,d\varrho \quad , \quad x\,dy-y\,dx = \varrho^2\,d\Theta$$

فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$\varrho^3\,d\varrho + (\varrho^2 - 2\varrho\cos\Theta + 2\varrho\sin\Theta)\,.\,\varrho^2\,d\Theta = 0$$

$$d\varrho + (\varrho - 2\cos\Theta + 2\sin\Theta)\,d\Theta = 0$$

وهي معادلة خطية بالنسبة لـ ϱ يمكن كتابتها بالشكل :

$$\varrho' + \varrho = 2\cos\Theta + 2\sin\Theta$$

حلها العام : $\varrho = c\,e^{\Theta} + 2\sin\Theta$

وهو الحل العام للمعـادلة المفروض ويمكن كتابته بعـــد العودة إلى الاحداثيات القائمة بالشكل :

$$\sqrt{x^2+y^2} = c\,e^{\operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x}} - 2\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

٢٥١ – $y(xy+1)\,dx + x(1+xy+x^2y^2)\,dy = 0$

الحل : من أجل كل معادلة يمكن كتابتها بالشكل :

$$y\, f(x\,y)\, dx + x\, g(x\,y)\, dy = 0$$

نجري تغيير التابع المعرف بالعلاقات

$$dy = \frac{x dz - z\, dx}{x^2} \quad , \quad y = \frac{z}{x} \quad , \quad z = x\, y$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فانها تأخذ الشكل :

$$\frac{z}{x}(z+1)\, dx + \frac{x(1+z+z^2)(x\, dz - z\, dx)}{x^2} = 0$$

$$z(z+1)\, dx + (1+z+z^2)(x\, dz - z\, dx) = 0$$

$$x(1+z+z^2)\, dz = [\, z(1+z+z^2) - z(z+1)\,]\, dx$$

$$x(1+z+z^2)\, dz = z^3\, dx$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{dz}{z^2} + \frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{x}$$

وبعد أخذ تكامل الطرفين نجد :

$$\log z - \frac{1}{z} - \frac{1}{2\, z^2} = \log x + c$$

او

$$2\, z^2 \log \frac{z}{x} - 2\, z - 1 = c\, z^2$$

واذا عدنا إلى التابع y فاننا نجد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$2\, x^2 y^2 \log y - 2\, x\, y - 1 = c\, x^2 y^2$$

٢٥٢ - حل المعادلة التفاضلية التالية بعد اجراء تغيير في التابع :

$$y' = (y - 4\, x)^2$$

يمكننا ان نتخذ تابعاً جديداً معرفاً بالعلاقة : $z = (y - 4\, x)$ ،

$y' = z' + 4$ فتأخذ بعد ذلك المعادلة التفاضلية المفروضة الشكل التالي :

$$z' + 4 = z^2 \quad , \quad \frac{dz}{z^2 - 4} = dx$$

وهي ذات متحولات متفرقة نجد بعد حلها والعودة إلى التابع y ، الحل العام للمعادلة المفروضة وهو :

$$\frac{y-4x+2}{y-4x-2}=c\,e^{-4x}$$

٢٥٣ – $x^2(x\,dx+y\,dy)+y(x\,dy-y\,dx)=o$

الحل : يمكننا تغيير المتحولات بأن نستعمل الاحداثيات القطبية بدلاً عن الاحداثيات القائمة فنصل إلى المعادلة :

$$d\varrho+\frac{\sin\Theta\,d\Theta}{\cos^2\Theta}=o$$

وبعد التكامل نجد :
$$\varrho+\frac{1}{\cos\Theta}=c$$

وإذا عدنا إلى الاحداثيات القائمة نجد الحل العام للمعادلة المفروضة بالشكل :

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x+1}{x}\right)=c \quad \text{أو} \quad (x^2+y^2)(x+1)^2=c^2x^2$$

٢٥٤ – أوجد منحنياً مستوياً بحيث يكون مجموع مربعي بعدي نقطتين ثابتتين عن مماسات هذا المنحني يساوي مقداراً ثابتاً .

الحل : لنتخذ أحد محوري الإحداثيات وليكن o x المستقيم الواصل بين النقطتين p,p′ و o y المستقيم القائم على pp′ في منتصفه وليكن (a , – a) فصلي هاتين النقطتين .

إن معادلة المماس المار من النقطة M (x,y) هي :

$$Y=y'X+y-xy'$$

لنكتب إن مجموع مربعي بعدي كل من النقطين p′,p يساوي مقداراً ثابتاً نرمز له بـ $2k^2$:

$$\frac{(ay'+y-xy')^2+(-ay'+y-xy')^2}{1+y'^2}=2k^2$$

نصلح هذه المعادلة ونرتبها حسب القوى المتناقصة لـ y فنجد :

$$y^2 - 2\,x\,y'\,y + (a^2 + x^2 - k^2)\,y'^2 - k^2 = o$$

لنحلها بالنسبة لـ y فنجد معادلة كليرو :

$$y = x\,y' \pm \sqrt{(k^2 - a^2)\,y'^2 + k^2}$$

بعد حل هذه المعادلة بالطرق المعروفة نتوصل إلى حلها العام :

$$y = c\,y \pm \sqrt{(k^2 - a^2)\,c^2 + k^2}$$

إن هذه المعادلة تمثل مجموعـة مستقيمات تتمتع بالخاصـة الواردة في نص المسألة فهي جملة مماسات المنحني المفروض . إن مغلف هـــذه المستقيمات يعطى بالمعادلة :

$$\frac{x^2}{k^2 - a^2} + \frac{y^2}{k^2} - 1 = o$$

وهي تمثل قطوعاً مخروطية محرقاها المشتركان هما النقطتان P,P′

٢٥٥ – ليكن $y = f(x)$ معادلة منحن محمول على محورين متعامدين وليكن N,T نقطتي تقاطع المماس والناظم في نقطة ما M من المنحني مع المحور ox.

١ – ما هي المعادلة التفاضليـة التي يجب ان يحققها $y = f(x)$ لتتحقق العلاقة : $\overline{OT}\,.\,\overline{ON} = c^2$ من أجل جميع نقط المنحني ; c تمثل طولاً معروفاً .

٢ – كامل المعادلة التفاضلية التي حصلت عليها في المطلوب الأول وذلك بالإستفادة من تغيير المتحولين المعرف بالعلاقتين $y^2 = v\,,\,x^2 = u$.

٣ – يمر من النقطة $P\left(x = c\,,\,y = \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ منحنيان تكامليان . اوجد معادلتي هذين المنحنيين . وبرهن أن أحدهما قطع ناقص والثاني قطع زائد .

٤ – يقسم القطع الزائد القطع الناقص إلى ثلاثة اجزاء احسب سطح كل من هذه الاقسام الثلاثة .

الحل : إن معادلتي المماس والناظم في النقطة $M(x, y)$ هما :

$$Y_1 - y = y'(X_1 - x)$$

$$(Y_2 - y)\,y' = -(X_2 - x)$$

إن النقطة T هي نقطة من المماس ترتيبها يساوي الصفر فيكون فصلها :

$$X_1 = OT = x - \frac{y}{y'}$$

أما النقطة N فهي نقطة واقعة على الناظم وترتيبها يساوي الصفر فيكون فصلها :

$$X_1 = ON = y\,y' + x$$

ويكون لدينا العلاقة :

$$\overline{OT} \cdot \overline{ON} = \left(x - \frac{y}{y'}\right)(y\,y' + x) = c^2$$

ونجد بعد الاصلاح المعادلة التفاضلية :

$$x\,y\,y'^2 + (x^2 - y^2 - c^2)\,y' - x\,y = o$$

يمكن كتابة هذه المعادلةبالشكل التالي ،بعد ضربها بـ y وتقسيمها على x :

$$x^2\left(\frac{y\,dy}{x\,dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - c^2)\frac{y\,dy}{x\,dx} - y^2 = o \qquad (١)$$

٢ – إذا اجرينا تغيير المتحولات المعرف في نص المسألة فان هذه المعادلة تأخذ الشكل :

$$u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (u - v - c^2)\frac{dv}{du} - v = o$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بشكل معادلة كليرو :

$$v = u\,v' - \frac{c^2\,v'}{1 + v'}$$

وإذا حلت بالطرق المعروفة اعطت الحل العام :

$$v = A\,u - \frac{c^2 A}{1 + A}$$

حيث A ثابت اختياري .

إذا عدنا إلى المتحولين x , y فاننا نجد بعد ان نفرض $\lambda = \frac{c^2}{1 + A}$:

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1 \qquad (2)$$

وهي تمثل مجموعة قطوع مخروطية .

٣ – إذا بدلنا في المعادلة (٢) x و y بقيمتيها المفروضتين فاننا نجد المعادلة :

$$\frac{c^2}{\lambda} + \frac{c^2}{2\,(\lambda - c^2)} = 1$$

إن هذه المعادلة تأخذ بعد الاصلاح الشكل التالي :

$$2\,\lambda^2 - 5\,c^2\,\lambda + 2\,c^4 = 0$$

ولها جذران مختلفان هما :

$$\lambda_1 = 2\,c^2 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\,c^2$$

إذا حملنا القيمة الاولى في المعـادلة (٢) فاننا نحصل على معـادلة القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{2\,c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

أما إذا حملنا القيمة الثانية في المعادلة المذكورة فاننا نجد معـادلة القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}\,c^2} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}\,c^2} = 1$$

٤ – نلاحظ بسهولة ان القطع الزائد يقسم القطع الناقص الى ثلاثة اجزاء

اثنان منها متساويان واذا رمزنا بحسب الترتيب بـ S_3 , S_2 , S_1 لمساحات هذه الاجزاء الثلاثة فاننا نجد :

$$S_1 = S_3 = \frac{c^2}{2}\left[\frac{\pi \sqrt{2}}{2} - \log (1 + \sqrt{2}) \right]$$

$$S_2 = c^2 \left[\frac{\pi \sqrt{2}}{2} + \log (1 + \sqrt{2}) \right]$$

٢٥٦ – أوجد المسارات القائمة للمنحنيات المسماة بالسيسوئيد القائمة Cissoïdes المعرفة بالمعادلة : $y^2 = \frac{x^2}{c - x}$ وذلك عندما نحول c .

الحل : لنشكل أولاً المعادلة التفاضلية لهذه المنحنيات بعد ان نكتب المعادلة المفروضة بالشكل :

$$(x^2 + y^2) x - c\ y^2 = 0 \qquad (1)$$

لنشتق هذه المعادلة بالنسبة لـ x فنجد :

$$3 x^2 + y^2 + 2 x yy' - 2 c yy' = 0 \qquad (2)$$

لنحذف c بين المعادلتين (١,٢) فنحصل على المعادلة :

$$y (3 x^2 + y^2) - 2 x^3 y' = 0 \qquad (3)$$

يمكننا أن نصل إلى هذه المعادلة نفسها بأن نحل المعادلة المفروضة بالنسبة c فنجد :

$$\frac{(x^2 + y^2) x}{y^2} = c$$

ثم نشتق هذه المعادلة بالنسبة لـ x فنجد :

$$\frac{[y^2 (3 x^2 + 2 y^2 + 2 x y y'] - 2 (x^2 + y^2) x y y'}{y^4} = 0$$

إذا ضربنا طرفي هذه المعادلة بـ y^3 فاننا نجد من جديد المعادلة (٣)

إذا بدلنا في المعادلة (٣) y' بـ $\frac{-1}{y'}$، فاننا نحصل على معادلة المسارات المتعامدة المطلوبة بالشكل :

$$y y' (3 x^2 + y^2) + 2 x^3 = o$$

إن هذه المعادلة متجانسة يمكن حلها بسهولة وحلها العام هو :

$$(x^2 + y^2)^2 - c (2 x^2 + y^2) = o$$

وهذه المعادلة هي التي تمثل المسارات المتعامدة المطلوبة .

ملاحظة : يمكننا أيضاً ان نستعمل الاحداثيات القطبية فنبدل في المعادلة المفروضة المتحولين x , y حسب العلاقات التالية :

$$x = \varrho \cos \omega \quad , \quad y = \varrho \sin \omega$$

فنحصل على المعادلة التالية :

$$\varrho \cos \omega - c \sin^2 \omega = o \tag{4}$$

لنشتق هذه المعادلة بالنسبة لـ ω فنجد :

$$\varrho' \cos \omega - \varrho \sin \omega - 2 c \sin \omega \cos \omega = o \tag{5}$$

ثم لنحذف c بين المعادلتين (٤ ، ٥) فنجد :

$$\varrho' \sin \omega \cos \omega - \varrho (\sin^2 \omega + 2 \cos^2 \omega) = o \tag{6}$$

يمكننا ان نتوصل إلى هذه المعادلة نفسها بأن نحل المعادلة (٤) بالنسبة لـ c ونشتقها بالنسبة لـ ω .

لنبدل الآن في المعادلة (٥) ϱ' بـ $-\frac{\varrho^2}{\varrho'}$ فنتوصل الى المعادلة التفاضلية للمسارات القائمة .

$$\varrho' (\sin^2 \omega + 2 \cos^2 \omega) + \varrho \sin \omega \cos \omega = o$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \frac{\sin \omega \cos \omega \, d\omega}{\sin^2 \omega + 2 \cos^2 \omega}$$

$$\frac{2\,d\varrho}{\varrho} = \frac{d\cos^2\omega}{1+\cos^2\omega}$$

ونجد أخيراً الحل العام للمعادلة التفاضلية (٦) :

$$\varrho^2 = c\,(1+\cos^2\omega)$$

٢٥٧ – أوجد المسارات القائمة لجملة المنحنيات المعرفة بالمعـــادلة $a\,y^2 = x^3$ حيث نعتبر a وسيطاً متحولاً .

الحل : نفتش اولا عن المعادلة التفاضلية التي تحققها جملة المنحنيات المفروضة فنشتق المعادلة المفروضة بالنسبة لـ x ثم نحذف الثابت الاختياري بين هـاتين المعادلتين فنجد على التوالي :

$$a\,y^2 = x^3$$

$$2\,a\,y\,y' = 3\,x^2$$

$$\frac{2}{y}\cdot y' = \frac{3}{x}$$

وهي المعادلةالتفاضليةالتي تقبل المنحنيات المفروضة منحنيات تكاملية لها .

لايجاد معادلة المسارات القائمة نبدل في هذه المعادلة y' بـ $-\frac{1}{y'}$ فنجد :

$$-\frac{2}{y}\,\frac{dx}{dy} = \frac{3}{x}$$

او

$$2\,x\,dx + 3\,y\,dy = o$$

ونجدبعداخذ تكامل طرفي هذهالمعادلة المعادلةالعامةللمسارات القائمة المطلوبة .

$$2\,x^2 + 3\,y^2 = c$$

٢٥٨ – اوجد المسارات التي تقطع الحلزونات $\varrho = a\,\Theta$ تحت زاوية ثابتة α . حيث نفرض a وسيطاً متحولا .

الحل : نحذف الثابت الاختياري a بين المعادلة المفروضة والمعـــادلة المشتقة بالنسبة لـ Θ فنجد على التوالي :

$$\varrho = a\,\Theta \quad , \quad d\varrho = a\,d\Theta \quad , \quad \varrho \frac{d\Theta}{d\varrho} = \Theta$$

إن من المعروف ان $\varrho \dfrac{d\Theta}{d\varrho} = \operatorname{tg} V$ حيث V الزاوية الكائنة بين المماس ونصف القطر الشعاعي .

فاذا رمزنا بـ V' للزاوية المقابلة في المسارات المطلوبة فانه يكون لدينا :

$$V' - V = \pm \alpha$$

$$\operatorname{tg} V' = \frac{\operatorname{tg} V \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \pm \operatorname{tg} V . \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\Theta + K}{1 - K\Theta}$$

حيث فرضنا $K = \pm \operatorname{tg} \alpha$

إن المعادلة التفاضلية للمسارات المائلة بـ α على المنحنيات المفروضة هي :

$$\varrho \frac{d\Theta}{d\varrho} = \frac{\Theta + K}{1 - K\Theta}$$

إن هذه المعادلة ذات متحولات متفرقة يمكن كتابتها بالشكل :

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1 - K\,\Theta}{\Theta + K}\, dK$$

ونجد بعد استكمال طرفي هذه المعادلة العلاقة :

$$\log \varrho = (1 + K^2) \log (\Theta + K) - K\Theta + \log c$$

او

$$\varrho = c\,(\Theta + K)^{1 + K^2} . e^{-K\Theta}$$

وهي معادلة المسارات المائلة بـ α على المنحنيات $\varrho = a\,\Theta$.

تمارين غير محلولة

حل المعـــادلات التالية بعد اجراء تغيير في المتحولات وتأكد من الاجوبة الموافقة :

٢٥٩ - $(y - x y^2) dx - (x + x^2 y) dy = o$

ج : $x = c . y e^{xy}$

٢٦٠ - $(1 - x y + x^2 y^2) dx + (x^3 y - x^2) dy = o$

ج : $\log x = x y - \frac{1}{2} x^2 y^2 + c$

٢٦١ - $tg^2 (x + y) dx \quad dy = o$

ج : $2 (x - y) = c + \sin 2 (x + y)$

٢٦٢ - $y (2 + 2 x^2 \sqrt{y}) dx + x (x^2 \sqrt{y} + 2) dy = o$

ج : $x y (x^2 \sqrt{y} + 3) = c$

٢٦٣ - $(2 x^2 + 3 y^2 - 7) x \, dx - (3 x^2 + 2 y^2 - 8) y \, dy = o$

ج : $(x^2 - y^2 - 1)^5 = c (x^2 + y^2 - 3)$

٢٦٤ - $y' + 1 = 4 e^{-y} \sin x$

ج : $e^y = 2 (\sin x - \cos x) + c e^{-x}$

٢٦٥ - $\sin y \, y' = \cos x (2 \cos y - \sin^2 x)$

ج : $\cos y = \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{4} + c e^{-2 \sin x}$

٢٦٦ - $\sin y . y' = \cos y (1 - x \cos y)$

ج : $\frac{1}{\cos y} = x + 1 + c e^x$

٢٦٧ - $(4 \varrho^2 s - 6) d\varrho + \varrho^3 ds = o$ ج : $s = \frac{3}{\varrho^2} + \frac{c}{\varrho^4}$

٢٦٨ – $x \sin \Theta \, d\Theta + (x^3 - 2 x^2 \cos \Theta + \cos \Theta) \, dx = o$

ج : $2 \cos \Theta = x + c \, x \, e^{-x^2}$

٢٦٩ – $y' = (x - y)^2 + 1$ ج : $y = x - \dfrac{1}{x + c}$

٢٧٠ – $y' = \sin (x - y)$

ج : $x + c = \cot g \left(\dfrac{y - x}{2} - \dfrac{\pi}{4} \right)$

٢٧١ – $y' = (a x + by + c)^2$

ج : $a x + by + c = \sqrt{\frac{a}{b}} \, tg (c + x \sqrt{ab})$

٢٧٢ – $(x + y)^2 \, y' = a^2$ ج : $x + y = a \, tg \left(c + \dfrac{y}{a} \right)$

٢٧٣ – $x^2 (y' + y^2) = a (x y - 1)$

ج : $x y (1 - c \, x^{a-2}) = a - c \, x^{a-1}$

٢٧٤ – $x y^2 (x y' + y) = a^2$ ج : $2 x^3 y^3 = 3 a^2 x^2 + c$

٢٧٥ – $(x^2 y^2 + 1) \, y \, dx + (x^2 y^2 - 1) \, x \, dy = o$

ج : $x^2 e^{x^2 y^2} = c \, y^2$

٢٧٦ – اوجد مجموعـــة المنحنيات التي يكون من اجلها تفاضل مربعي بعدي نقطتين ثابتتين عن مماسانها مساوياً لمقدار ثابت .

ج – إن المنحني قطع مكافىء محرقه منتصف البعد بين النقطتين الثابتتين .

٢ – اوجد منحنياً بحيث يكون جداء بعدي نقطتين ثابتتين عن مماساته مساوياً مقداراً ثابتاً .

ج : نميز بين حالتين حسبما تكون النقطتان واقعتان في جهة واحـدة من المماس أو في جهتين مختلفتين منه فنجد من أجل الحالة الاولى قطوعاً ناقصة ومن أجل الحالة الثانية قطوعاً زائدة .

أوجد المسارات القائمة للمنحنيات المعرفة بالمعادلات التالية وتأكد من الاجوبة المرافقة :

٢٧٧ - $x^2 + y^2 - 2cy + a^2 = 0$ ج : $x^2 + y^2 - 2cx - a^2 = 0$

٢٧٨ - $y^2 + 3x^2 - 2cx = 0$ ج : $y^3 = c(y^2 - x^2)$

٢٧٩ - $x^2 - y^2 - 2cx + a^2 = 0$ ج : $y(3x^2 + y^2 - 3a^2) = c$

٢٨٠ - $3x^2 + y^2 + 3a^2 - 2cx = 0$ ج : $x^2 - y^2 - a^2 + cy^2 = 0$

٢٨١ - $ax^2 + aky^2 + 2cx - 1 = 0$

ج : $x^2 = c\,y^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{a} - \frac{ky^2}{2k-1}$

٢٨٢ - $(x^2 + y^2)^2 = cxy$ ج : $(x^2 + y^2)^2 = c(x^2 - y^2)$

٢٨٣ - $y^2 - 2cx = 0$ ج : $2x^2 + y^2 = c$

٢٨٤ - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c} - 1 = 0$ ج : $y^2 = c - x^2 + a^2 \log x^2$

٢٨٥ - $y = cx^4$ ج : $x^2 + ny^2 = c$

٢٨٦ - $\varrho^n = C \cos n\omega$ ج : $\varrho^n = C \sin n\omega$

٢٨٧ - $\varrho^2 = a^2 \log \frac{\operatorname{tg} \omega}{c}$ ج : $\varrho^2 = \frac{a^2}{c - \cos 2\omega}$

٢٨٨ - $\varrho = \frac{p}{1 + c\cos\omega}$ ج : $\varrho \sin\omega = c\,e^{\frac{\varrho}{p}}$

٢٨٩ - $\varrho = c\,e^{\frac{2\omega^3}{3\pi} - \omega^2}$ ج : $\varrho^2 = c\,\frac{\omega}{\pi - \omega}$