

## الفصل السابع

### معادلات المراتب العليا - خفض المرتبة

#### ١ - المعادلة من المرتبة $n$ :

هي معادلة تحوي المتحول والتابع ومشتقاته المتتالية حتى المرتبة  $n$ . إن عدد المعادلات ذات المراتب العليا التي يمكن حلها قليل جداً ومنورد بعضاً منها كالمعادلة :

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

التي يمكن حلها بواسطة  $n$  عملية تكامل متتالية وفصل إلى ناتج من الشكل :

$$y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx + \frac{c_0 (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_1 (x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_{n-1}$$

حيث  $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  ثابتاً اختيارياً .

#### ٢ - المعادلة لا تحوي إلا المشتق من المرتبة $n$ وغير محولة بالنسبة لهذا المشتق :

$$(2) \quad f\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

إذا كانت هذه المعادلة ممكنة الحل بالنسبة للمشتق  $\frac{d^n y}{dx^n}$  فإنها تعود إلى الحالة السابقة

وقد يحدث ان يكون مثل هذا العمل مستحيلاً من الوجهة العملية فنعمد إلى تمثيل  $x$  و  $\frac{d^n y}{dx^n}$  بشكل وبسيط وبدساتير من الشكل :

$$x = g(t); \frac{d^n y}{d x^n} = h(t)$$

ونجد على التوالي :

$$d^n y = h(t) d x^n$$

$$y^{(n-1)} = \int h(t) g'(t) dt + c_1$$

$$y^{(p-1)} = \int y^{(p)} g'(t) dt$$

حق نصل إلى التابع  $y$  بعد  $n$  عملية تكامل متتالية .

٣ - إذا كانت المعادلة (٢) معلولة بالنسبة ل  $x$  فيمكننا ان نعتبر ان  $h(t) = t$  ونكون

امام التكامل :

$$y^{(n-1)} = \int_{t_0}^t g'(t) t dt$$

بعد تطبيق طريقة التكامل بالتجزئة نصل الى التكامل :

$$\int_{t_0}^t g(t) dt$$

### ٣ - حالات خفض المرتبة :

يمكن خفض مرتبة المعادلات التفاضلية ذات المراتب العليا واعادتها الى معادلات من

مراتب اذني في حالات نذكر فيما يلي أهمها :

أ - المعادلة التفاضلية لا تحوي التابع المجهول ، فهي من الشكل :

$$f\left(x, \frac{d^k y}{d x^k}, \frac{d^{k+1} y}{d x^{k+1}}, \dots, \frac{d^n y}{d x^n}\right) = 0$$

نعيد هذه المعادلة الى معادلة من المرتبة  $n - k$  وذلك بأن نأخذ تابياً جديداً معرفاً بالعلاقة

.  $z = y^{(k)}$  فإذا تمكنا من حل المعادلة الناتجة فاننا نحصل على  $y$  بواسطة تكاملات عددها  $k$  .

ب - المعادلة التفاضلية لا تحوي المتحول : فهي من الشكل :

$$f[y, y', \dots, y^{(n)}] = 0$$

يمكن خفض مرتبتها بأخذ  $y$  متحولاً جديداً و  $x$  تابعاً و اجراء الحسابات بالشكل التالي:  
 إن المعادلة الناتجة عن هذا التحويل سوف لن تحوي  $x$  بل  $\frac{dx}{dy}$  . وإذا اخذنا  $\frac{dx}{dy}$  تابعاً جديداً  
 فان المعادلة المفروضة تنقلب الى معادلة من المرتبة  $n - 1$  . يمكن اجراء هذين التحويلين  
 معاً وذلك بأن تأخذ  $y' = p$  كتابع مجهول وتتخذ  $y$  متحولاً :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( p \frac{dp}{dx} \right) = \frac{d}{dy} \left( p \frac{dp}{dy} \right) p = p \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}$$

وهكذا نلاحظ بصورة عامة ان المشتق من المرتبة  $r$  وهو  $\frac{d^r y}{dx^r}$  يمكن حسابه بدلالة  $y$

والمشتقات المتتالية الأولى لـ  $y$  والتي عددها  $r - 1$  ونحصل بالنتيجة على معادلة من المرتبة  
 $n - 1$  .

ح - المعادلة متجانسة بالنسبة لـ  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  :

إذا كانت  $m$  هي درجة التجانس فانه يمكن كتابة المعادلة المفروضة :

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^n f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0 \quad \text{بالشكل}$$

وإذا كان  $y_1$  حلاً حاصلًا للمعادلة المفروضة فان  $y_1$  هو حل مها كانت قيمة  $\lambda$   
 تخفض مرتبه هذه المعادلة بواحد إذا اتخذنا تابعاً جديداً  $z$  معرفاً بالعلاقة :

$$y = e^{\int z dx}$$

ونجد على التوالي :

$$y' = z e^{\int z dx} \quad y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx}, \dots$$

وهكذا ...

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة حصلنا على معادلة أخفض بمرتبة واحدة من المعادلة المفروضة.

د - المعادلة متجانسة بالنسبة لـ  $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny$  .

إذا وقع هذا الأمر في معادلة تفاضلية فإنها لا تتغير عندما نبدل فيها  $x$  بـ  $cx$  و  $y$  بـ  $cy$  حيث  $c$  ثابت كفي .

إذا أجرينا تغيير المتحولات المرف بالملاقتين :

$$z = \frac{y}{x} \quad , \quad t = \log x$$

حيث نعتبر  $t$  متحولاً مستقلاً و  $z$  تابعاً له فاننا نصل الى معادلة تفاضلية لا تحوي  $t$  ويمكن عندها خفض مرتبتها .

### تمارين محلولة

٢٨٠ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad (y^{(3)})^2 - 3 y'' y^{(4)} = 0$$

الحل : يلاحظ ان هذه المعادلة لا تحوي  $y$  ولا  $y'$  واخفض المشتقات التي تحويها مرتبة هي الثانية لذا نفرض  $u = y''$  فتأخذ عندها المعادلة الشكل التالي :

$$(2) \quad 5 u'^2 - 3 u u'' = 0$$

إن هذه المعادلة لا تحوي المتحول  $x$  لذا نتخذ  $u$  متحولاً سديداً فنفرض  $p = u'$  وتأخذ المعادلة الشكل :

$$p^2 - 3 u p \frac{dp}{du} = 0$$

$$u'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{du} \cdot \frac{du}{dx} = p \frac{dp}{dx} \quad : \quad \text{بعد ان نلاحظ ان}$$

إن لهذه المعادلة حلان إما  $p = 0$  ،  $u' = 0$  ،  $u = c$  وهو حل لا يوافق المعادلة المفروضة إلا اذا اخذنا  $c = 0$

$$5 p \quad u \frac{dp}{du} = 0 \quad : \quad \text{وإما ان يكون}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{du}{5u} \quad , \quad p = \alpha u^{\frac{1}{5}} \quad \text{او}$$

إذا عدنا الى متحولات المعادلة (٢) فاننا نجد

$$u' = \frac{du}{dx} = \alpha u^{\frac{3}{2}} \quad , \quad dx = \frac{1}{\alpha} u^{-\frac{2}{3}} du$$

$$x = -\frac{3}{2} \frac{1}{\alpha} u^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad u = b(x+a)^{-\frac{3}{2}}$$

وإذا عدنا إلى متحولات المعادلة (١) نجد :

$$u = y'' = b(x+a)^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad y' = -2b(x+a)^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$y = -4b(x+a)^{\frac{1}{2}} + cx + d$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة .

٢٨١ - حل المعادلة التفاضلية :

$$x^2 y'' = y'^2 - 2xy' + 2x^2$$

الحل : ان هذه المعادلة لا تحوي التابع  $y$  فلنغير التابع ولنعتبر  $y' = p$  تابعاً جديداً فتأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$(1) \quad x^2 p' = p^2 - 2xp + 2x^2$$

إن هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية ونحلها بأن نفرض :

$$p = vx \quad , \quad p' = v'x + v$$

فتأخذ عندها الشكل التالي :

$$x^2 (v'x + v) = v^2 x^2 - 2x^2 v + 2x^2$$

$$xv' = v^2 - 3v + 2$$

وهي معادلة بيرنولي حلها العام هو :

$$cx = \frac{v-2}{v-1} \quad \text{او} \quad v = \frac{cx-2}{cx-1}$$

ونستنتج :

$$dy = vx dx = \frac{x(cx-2)}{cx-1} dx = x - \frac{1}{c} \left[ 1 + \frac{1}{cx-1} \right] dx$$

ونجد أخيراً الحل العام لهذه المعادلة :

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{x}{c} - \frac{1}{c^2} \log |c x - 1| + c_1$$

٢٨٢ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad 2 x^2 y' y'' - x y'' + y' = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي التابع  $y$  لذا نفرض  $y' = p$  فتأخذ

المعادلة (١) الشكل :

$$2 x^2 p p' - x p' + p = 0$$

$$(2 p - \frac{1}{x}) dp + \frac{p}{x^2} dx = 0$$

إن هذه المعادلة تامة نحلها بطريقة المعتادة فنجد :

$$\frac{p}{x} + c = 0$$

$$(2) \quad x = \frac{p}{p^2 + c}$$

أما التابع  $y$  فإنه يعطى بالتكامل :

إذا كاملنا بالتجزئة فاننا نجد :

$$y = \int p dx = px - \int x dp = px - \int \frac{p dp}{p^2 + c}$$

$$(3) \quad y = \frac{p^2}{p^2 + c} - \frac{1}{2} \log (p^2 + c) + c_1$$

إن العلاقتين (٢ ، ٣) تمثلان الحل الوسيطى للمعادلة المفروضة .

$$y^{(3)} \sin^4 x = \sin 2x \quad : \text{ حل المعادلة } - 282$$

$$y^{(3)} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \quad : \text{ الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل}$$

بعد أن اختصرنا على  $\sin x$  باعتبار أن هذا التابع لا يطابق الصفر .  
 نحل هذه المعادلة حسب المراحل التالية :

$$y'' = \int \frac{2 \cos x \, dx}{\sin^3 x} = c_1 - \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y' = c_1 x - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = c_1 x + c_2 + \cotg x$$

$$y = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + \log \sin x$$

٢٨٣ - حل المعادلة :  $y(y-1)y'' + y'^2 = 0$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي المتحول  $x$  فلنأخذ متحولاً جديداً هو

التابع نفسه وتابعاً جديداً هو  $p = y'$  فيكون

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

وبذلك تأخذ المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$y(y-1)p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$$

اما أن يكون  $y' = p = 0$  أي  $y = c$

أو أن يكون  $y(y-1) \frac{dp}{dy} + p = 0$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dy}{y(y-1)} = 0$$

إن الحل العام لهذه المعادلة هو  $cp = \frac{y}{y-1}$  ونجد بعد ذلك :

$$x = \int \frac{dy}{p} = c \int \frac{y-1}{y} dy = c y - \log |y| + c_1$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة .

$$2y'' - y'^2 + 4 = 0 \quad : \text{ حل المعادلة } - 284$$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي المتحول  $x$  لذا نفرض  $\frac{dy}{dx} = p$

فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :  $\frac{d^2y}{dx^2} = p'$

$$2 \frac{dp}{dx} = p^2 - 4 \quad , \quad \frac{2 dp}{p^2 - 4} = dx$$

$$c_1 e^{2x} = \frac{p-2}{p+2} \quad , \quad p = \frac{2(1 + c_1 e^{2x})}{1 - c_1 e^{2x}} \quad \text{ومنه}$$

$$y = 2x - 2 \log(1 - c_1 e^{2x}) + c_2 \quad : \text{ ونجد بعد ذلك}$$

- 285 حل المعادلة التفاضلية :

$$y^{(4)} \cdot y^{(3)} = 1$$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي التابع  $y$  ولا المشتقين  $y'$  ,  $y''$  لذا

نفرض  $q = y^{(3)}$  فتأخذ المعادلة الشكل :

$$q \frac{dq}{dx} = 1$$

$$q^2 = 2x + c_1 \quad \text{ومنه}$$

$$q = y^{(3)} = \pm (2x + c_1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ويكون}$$

$$y'' = \pm \frac{1}{3} (2x + c_1)^{\frac{3}{2}} + c_2$$

$$y' = \pm \frac{1}{15} (2x + c_1)^{\frac{5}{2}} + c_2 x + c_3$$

$$y = \pm \frac{1}{105} (2x + c_1)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

- 286 حل المعادلة التفاضلية :

$$(y^{(3)})^2 + x y^{(3)} + y'' = 0$$

الحل : نفرض  $q = y''$  فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$(q')^2 + x q' - q = 0$$

$$q = x q' + q'^2 \quad \text{او}$$

وهي معادلة كليرو . اذا طبقنا القواعد المعروفة لحلها نجد :

$$q = c x + c^2$$

$$y'' = q = c x + c^2 \quad \text{ومنه}$$

$$y' = \frac{1}{2} c x^2 + c^2 x + c_1$$

$$y = \frac{c}{6} x^3 + \frac{1}{2} c^2 x + c_1 x + c_2$$

٢٨٧ - حل المعادلة التفاضلية :

$$y'' = y'^3 + y'$$

الحل : نفرض  $p = y'$  فيكون  $y'' = p'$  وتأخذ المعادلة

الشكل :

$$p' = p^3 + p \quad , \quad dx = \frac{dp}{p(p^2 + 1)}$$

$$(1) \quad e^x = \frac{c p}{\sqrt{p^2 + 1}} \quad \text{ومنه}$$

$$dy = p dx = \frac{dp}{p^2 + 1} \quad \text{واستناداً الى العلاقة :}$$

$$y + c_1 = \text{Arc tg } p \quad \text{نجد :}$$

$$(2) \quad p = \text{tg} ( y + c_1 ) \quad \text{او}$$

ويمكننا ان نحذف  $p$  بين المعادلتين (١) ، (٢) فنجد الحل العام

للمعادلة بشكل ديكراتي او نكتب :

$$p = \frac{dy}{dx} = \text{tg} ( y + c_1 )$$

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}(y + c_1)} \quad , \quad x + \lambda = \log \sin (y + c_1)$$

$$y = c_1 + \arcsin c_2 e^x \quad : \quad \text{ونجد أخيراً}$$

٢٨٨ - حل المعادلة التفاضلية :

$$x y y'' - x y'^2 + y y' = 0$$

الحل : ان هذه المعادلة متجانسة بالنسبة لـ  $y, y', y''$  فلنكتبها بالشكل التالي :

$$x \frac{y''}{y} - x \left( \frac{y'}{y} \right)^2 + \frac{y'}{y} = 0$$

ولنفرض  $y' = u y$  ،  $y'' = y (u' + u^2)$  وتأخذ المعادلة الشكل :

$$x (u' + u^2) - x u^2 + u = 0 \quad , \quad x u' + u = 0$$

وهي معادلة ذات متحولات متفرقة حلها :

$$x u = c \quad , \quad x y' = c y$$

وبحل المعادلة الثانية نجد :

$$y = c_1 x^c$$

٢٨٩ - حل المعادلة التفاضلية :

$$x y'' (x^2 y'' + 2 x y' + 2 y) + 2 y y' = 0$$

ان هذه المعادلة متجانسة بالنسبة لـ  $x$  و  $dx$  فلو بدلنا المتحول  $x$  بـ  $t$

حسب العلاقة  $x = e^t$  لوجدنا :

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{1}{x^2} \frac{d y}{d t} \quad , \quad \frac{d y}{d x} = \frac{d y}{d t} \cdot \frac{d t}{d x} = e^{-t} \frac{d y}{d t} = \frac{1}{x} \frac{d y}{d t}$$

اذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فانها تأخذ الشكل :

$$\left( \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{1}{x} \frac{d y}{d t} \right) \left( \frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{d y}{d t} + 2 \frac{d y}{d t} + 2 y \right) + \frac{2 y}{x} \frac{d y}{d t} = 0$$

تأخذ هذه المعادلة بعد الاختصار وبعد ان نغرض :

$$\frac{dy}{dt} = v \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

الشكل التالي :

$$(v \frac{dv}{dy} - v)(v \frac{dv}{dy} + v + 2y) + 2yv = 0$$

$$(\frac{dv}{dy})^2 + 2y \frac{dv}{dy} - v = 0 \quad \text{ومنه :}$$

إذا اتخذنا في هذه المعادلة تابعاً جديداً هو  $z = v^2$  فانها تأخذ الشكل :

$$z = y z' + \frac{1}{4} z'^2$$

وهي معادلة ريكارتي حلها العام :

$$z = c y + \frac{1}{4} c^2$$

$$v^2 = c y + \frac{1}{4} c^2 \quad \text{أو}$$

بما أن  $v = x \frac{dy}{dx}$  فان هذه المعادلة تأخذ الشكل :

$$\frac{dx}{x} = \pm \frac{dy}{\sqrt{c y + \frac{1}{4} c^2}}$$

$$c \log c_1 = \pm 2 \sqrt{c y + \frac{1}{4} c^2}$$

وبعد الاصلاح نجد :

$$(1) \quad x^3 y'' + (x y' - y)^2 = 0 \quad \text{حل المعادلة التفاضلية :}$$

إن هذه المعادلة متجانسة بالنسبة لـ  $y, x$  تجانساً من الدرجة الثانية ،  
حلها نقسم طرفيها على  $x^2$  فتأخذ الشكل :

$$(2) \quad x y'' + (y' - \frac{y}{x})^2 = 0$$

نفرض :  $v = x \frac{du}{dx}$  ،  $u = \frac{y}{x}$  فيكون

$$y' = u + x u' = u + v$$

$$x y'' = x \left( 1 + \frac{dv}{du} \right) \frac{du}{dx} = v + v \frac{dv}{du}$$

لنحمل هذه القيم في المعادلة (2) فنحصل على المعادلة :

$$v + v \frac{dv}{du} + (u + v - u)^2 = 0$$

$$v + v \frac{dv}{du} + v^2 = 0 \quad \text{أو}$$

وبعد ان نختصر على  $v$  ونفرض  $v \neq 0$  نجد :

$$\frac{dv}{du} + v + 1 = 0$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الاولى حلها العام :

$$e^u (1 + v) = c$$

اذا عدنا الى ما فرضناه اعلاه فاننا نجد :

$$e^u \left( 1 + x \frac{du}{dx} \right) = c \quad , \quad \frac{d}{dx} (x e^u) = c$$

$$x e^u = c x + c_1 \quad \text{ويكون أخيراً}$$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو :

$$x e^{\frac{y}{x}} = c x + c_1$$

## تمارين غير محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من صحة الاجوبة المرافقة :

$$y = \frac{1}{6} x^3 + A x + B - \sin x \quad : \text{ج} \quad y'' = x + \sin x \quad - \quad ٢٩١$$

$$y = \frac{x^3}{120} + A x^3 + B x^2 + c x + D \quad : \text{ج} \quad y^{(4)} = x \quad - \quad ٢٩٢$$

$$y = c_1 x^1 + c_2 x + c_3 \quad : \text{ج} \quad x y^{(3)} - 2 y'' = 0 \quad - \quad ٢٩٣$$

$$A y = \text{tg} ( A x + B ) \quad : \text{ج} \quad y y'' = 2 (y')^2 - 2 y' \quad - \quad ٢٩٤$$

$$\log y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad : \text{ج} \quad y y'' - y'^2 = y^2 \log y \quad - \quad ٢٩٥$$

$$y^2 = c_1 \text{sh} ( \sqrt{2} x + c_2 ) \quad : \text{ج} \quad y y'' + y'^2 = y^2 \quad - \quad ٢٩٦$$

$$e^y = \frac{2 A c e^{A x}}{1 - c^2 e^{2 A x}} \quad : \text{ج} \quad y'' = e^{2y} \quad - \quad ٢٩٧$$

$$y = \log \cos ( x - c_1 ) + c_2 \quad : \text{ج} \quad y'' + y'^2 + 1 = 0 \quad - \quad ٢٩٨$$

$$( 1 + x^2 ) y'' + 2 x y' = 2 x^{-3} \quad - \quad ٢٩٩$$

$$y = c_1 + c_2 \text{Arc tg } x + \frac{1}{x} \quad : \text{ج}$$

$$x y'' - y' = \frac{-2}{x} - \log x \quad - \quad ٣٠٠$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 + ( x + 1 ) \log x \quad : \text{ج}$$

$$y^{(3)} + y'' = x^2 \quad - \quad ٣٠١$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3 + \frac{x^2 ( x^2 - 4 x + 12 )}{12} \quad : \text{ج}$$

$$x = c_1 + c_2 y + y \log y \quad : \text{ج} \quad y y'' + y'^3 = 0 \quad - \quad ٣٠٢$$

$$y^2 = 2 x^2 + c_1 x + c_2 \quad : \text{ج} \quad y y'' + y'^2 = 2 \quad - \quad ٣٠٣$$

$$y y'' = y'^2 ( 1 - y' \cos y + y y' \sin y ) - 3. \xi$$

$$x = c_1 + c_2 \log y + \sin y : \zeta$$

$$\pm \sqrt{A(y+1)^2 - 1} = Ax + B : \zeta \quad y'' = \frac{1}{(y+1)^3} - 3.5$$

$$4 y'' = \frac{1}{\sqrt{y}} - 3.6$$

$$3 x = 4 ( \sqrt{y} - 2 A ) \sqrt{A + \sqrt{y}} + B : \zeta$$

$$( 1 + x^2 ) y'' + y'^2 + 1 = 0 - 3.7$$

$$y = ( 1 + c_1^2 ) \log ( x + c_1 ) - c_1 x + c_2 = \zeta$$

$$y = ( c_1 x - c_1^2 ) e^{\frac{x}{c_1} + 1} + c_2 : \zeta \quad x y'' = y' \log \frac{y'}{x} - 3.8$$

$$12 y = ( x - c_1 )^3 + c_2 : \zeta \quad y''^2 = y' - 3.9$$

$$y = c_1 e^{\frac{x}{a}} + c_2 x + c_3 : \zeta \quad a y^{(3)} = y'' - 3.10$$

$$y^{(3)} + y''^2 = 0 - 3.11$$

$$y = ( x + c ) \log ( x + c ) + c_1 x + c_2 : \zeta$$

$$y = c_1 x ( x - c_1 ) + c_2 : \zeta \quad 4 y' + y''^2 = 4 x y'' - 3.12$$

$$( x - c_1 )^2 + ( y - c_2 )^2 = 1 : \zeta \quad y'' = ( 1 + y'^2 )^{\frac{3}{2}} - 3.13$$

$$x = c_1 y^2 + c_2 y + c_3 : \zeta \quad y' y^{(3)} - 3 y''^2 = 0 - 3.14$$

$$1 + y'^2 + x y' y'' = a y'' \sqrt{1 + y'^2} - 3.15$$

$$x = a \sin \varphi + c \cos \varphi : \zeta$$

$$y = c_1 - a \cos \varphi + c_2 \sin \varphi - c_2 \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$x - c_1 = a \log \sin \frac{y - c_2}{a} : \zeta \quad y'( 1 + y'^2 ) = a y'' - 3.16$$

$$3 y = ( c_1 - 2 x )^{\frac{3}{2}} + c_2 x + c_3 : \zeta \quad y^{(3)} = y''^3 - 3.17$$

$$y^{(3)} (1 + y'^2) - 2 y' y''^2 = 0 \quad - 318$$

$$x^2 + y^2 + c x + c_1 y + c_2 = 0 \quad : \text{ج}$$

$$2 x = 2 (\sqrt{y} - 2 c_1) \sqrt{\sqrt{y} + c_1} + c_2 : \text{ج} \quad y y''^2 = 1 \quad - 319$$

$$y'' = a e^y \quad - 320$$

$$x + c_2 = \frac{1}{c_1} \log \frac{\sqrt{c_1^2 + a e^y} - c_1}{\sqrt{c_1^2 + a e^y} + c_1} \quad : \text{ج}$$

$$3 y'' = y^{-\frac{1}{2}} \quad - 321$$

$$c_2^2 (x - c_1) = (c_2 y^{\frac{1}{2}} + 2) \sqrt{c_2 y^{\frac{1}{2}} - 1} \quad : \text{ج}$$

$$2 (2 a - y) y'' = 1 + y'^2 \quad - 322$$

$$y = 2 a - c_1 \sin^2 t \quad , \quad 2 x = c_2 + c_1 (2 t - \sin 2 t) \quad : \text{ج}$$

$$(x - c_1)^2 = 4 c (y - c) \quad : \text{ج} \quad 1 + y'^2 = 2 y y'' \quad - 323$$

$$y'' - y^3 y'' = 1 \quad - 324$$

$$2 c_2 y^2 = 2 c_1 c_2 + c_2^2 e^{2x} + (c_1^2 - 1) e^{-2x} \quad : \text{ج}$$

$$y (c_2 + x) = c_1 + x \quad : \text{ج} \quad 2 y'^2 = y y'' \quad - 325$$

$$y'' (1 + y y') = y' (1 + y'^2) \quad - 326$$

$$x = c_2 + c_2 \log (y+u) + \log (y - c_1 u) \quad , \quad u^2 = y^2 + 1 - c_1^2 \quad : \text{ج}$$

$$y = c_1 e^{cx} \quad : \text{ج} \quad y y'' = y'^2 \quad - 327$$

$$2 y y'' + y'^2 + y'^4 = 0 \quad - 328$$

$$2 (c_1 y - 1)^{\frac{3}{2}} = 2 c_1 x + c_2 \quad : \text{ج}$$

$$y \cos^2 (x + c_1) + c_2 \quad : \text{ج} \quad 2 y y'' - 3 y'^2 = 4 y^2 \quad - 329$$

حل المعادلات التفاضلية التالية مستفيداً من إحدى تغييرات المتحولين

المعرفة بالعلاقات :

$$y - x y' = u \quad , \quad y y' = u \quad , \quad y \pm x = u$$

$$y y'' + y'^2 = \frac{y y'}{\sqrt{1+x^2}} \quad - \quad 330.$$

$$y^2 = c_1 + c_2 (x t + \log t) : t = x + \sqrt{1+x^2} \quad : \quad \zeta$$

$$y''^2 - 2 x y'' + x^2 = y^2 \quad - \quad 331$$

$$y - c_1 e^x - e^{-x} + x (y - c_1 \cos x - c_2 \sin x - x) = 0 \quad : \quad \zeta$$

$$x^4 y'' + (x y' - y)^3 = 0 \quad - \quad 332$$

$$y = x (c_1 - \text{Arc sin } \frac{c_2}{x}) \quad : \quad \zeta$$

$$y = x \log \frac{c_2 x}{1 + c_1 x} \quad : \quad \zeta \quad x^3 y'' = (y - x y')^2 \quad - \quad 333$$

$$x^2 y y'' - 2 x^2 y'^2 + x y y' + y^2 = 0 \quad - \quad 334$$

$$y (c_2 + x^2) = c_1 x \quad : \quad \zeta$$

$$y = c_1 x e^{\frac{c_2}{x}} \quad : \quad \zeta \quad x^2 y y'' (y - x y')^2 \quad - \quad 335$$

$$x^2 (y y'' - y'^2) + x y y' = y \sqrt{x^2 y'^2 + y^2} \quad - \quad 336$$

$$2 \log c_1 y = \frac{c_2}{x} + \frac{x}{c_2} \quad : \quad \zeta$$

$$y = c_1 \sqrt{x^2 + c_2} \quad : \quad \zeta \quad x y y'' + x y'^2 - y y' = 0 \quad - \quad 337$$