الفصل الثالث

الاحتمال

٣ ـ مقدمة : يرتبط الاحصاء والاحتمال ارتباطاً وثيقاً . فالاحتمال هو الأداة التي تمكن الاحصائي من استخدام المعلومات في عينة للقيام باستقراءات حول المجتمع الذي جاءت منه العينة . ونوضح هذه العلاقة بمثال بسيط .

لنأخذ قطعة زهر متوازنة لها ستة أوجه . ونقصد بتوازن قطعة الزهر أن فرصة الحصول على أي من الأوجه الستة عند قذف القطعة تبقى نفسها ، فيمكن النظر إلى قذف قطعة الزهر على أنها تجربة يمكن تكرارها تحت نفس الشروط عدداً كبيراً من المرات . مما يولّد مجتمعاً من الأرقام . ويأخذ القياس x إحدى القيم $1, 2, 3, 4, 5, 6$. لنفرض الآن أن المجتمع كبير جداً بحيث تقع كل من القيم الستة الممكنة لـ x بنفس التواتر . ولنلاحظ أننا لم نولّد المجتمع فعلاً فهو مجرد صورة ذهنية ممكنة . لنقذف الآن قطعة الزهر مرة واحدة ولنلاحظ قيمة x . فيمثل هذا القياس عينة حجمها $n = 1$ مسحوبة من المجتمع . والآن ما هو احتمال أن يكون القياس الوحيد الذي تحويه هذه العينة مساوياً لـ 2 ؟ وبمعرفة بنية المجتمع كما وصفناها أعلاه نتحقق أن لكل قيمة لـ x نفس الفرصة في الظهور أي أن احتمال أن يكون $x = 2$ هو $\frac{1}{6}$. ويوضح هذا المثال نوع المسألة المطروحة في نظرية الاحتمالات . إذ نفرض أن المجتمع معروف وينصب اهتمامنا على حساب احتمال ملاحظة عينة محددة . أما ما يحصل في المسائل الاحصائية فهو العكس تماماً ، إذ نفرض أن المجتمع غير معروف وأن العينة

معروفة ، ونرغب في القيام باستقراءات حول المجتمع . وهكذا يفعل الاحتمال من المجتمع إلى العينة بينما يفعل الاحصاء في الاتجاه المعاكس تماماً منتقلاً من العينة إلى المجتمع .

ولتوضيح كيفية استخدام الاحتمال في الاستقراء الإحصائي . دعنا ندرس المثال التالي : فلنفرض أننا تذفنا قطعة زهر $n = 10$ مرات وسجلنا في كل مرة عدد النقاط التي تظهر بعد القذف . فتمثل القياسات العشرة عينة حجمها $n = 10$ مسحوبة من المجتمع الذي كان يمكن توليده لو أردنا الاستمرار في القذف عدداً كبيراً جداً من المرات . ولنفرض أيضاً أن كل القياسات التي حصلنا عليها هي $x = 1$. ونرغب في استخدام هذه المعلومات للقيام باستقراء حول مجتمع القذفات ، وعلى وجه التحديد نرغب في استقراء ما إذا كانت قطعة الزهر متوازنة أم لا . وبعد ملاحظة 10 قذفات أنتجت كل منها النتيجة $x = 1$ ، سيتولد عندنا الشك في توازن قطعة الزهر وسنميل إلى رفض النظرية القائلة بأن مكعب الزهر هذا متوازن . ونعلل مثل هذا القول كما يلي : لو كانت القطعة متوازنة كما نفرض ، فإن ملاحظة 10 قياسات متطابقة سيكون غير محتمل بالمرّة . وبالتالي فإننا إما أن نكون أمام حادثة نادرة الوقوع أو أن تكون فرضيتنا بتوازن قطعة الزهر غير صحيحة . وبالطبع سنميل إلى التعليل الثاني . ونلاحظ هنا أن القرار الذي اتخذناه قائم على احتمال ملاحظة عينة كالتي حصلنا عليها فعلاً . وذلك تحت الفرض بأن فرضيتنا صحيحة أي تحت الفرض بأن قطعة الزهر متوازنة .

ويؤكد التوضيح السابق على أهمية الاحتمال عند القيام باستقراءات إحصائية . وفي مناقشتنا الابتدائية المبسطة لنظرية الاحتمالات سنفرض أن المجتمع معروف ونهتم بطرق حساب احتمال سحب عينات من هذا المجتمع . وافتراضنا بأن المجتمع معروف هو في الحقيقة اختيار « لنموذج » رياضي من أجل حالة فيزيائية راهنة ذلك لأنه نادراً ما تكون بنية المجتمع الفعلية معروفة في الواقع

العملي . وهكذا فإن الاحتمالي يضع نموذجاً (يحدد المجتمع) لحالة فيزيائية مستخدماً الاحتمال ، شأنه وإلى حد كبير شأن النحات الذي يضع لتمثاله نموذجاً من الجص .

٣ ـ ٢ فراغ العينة : نحصل على المعلومات الإحصائية من خلال ملاحظات تأتي عبر حوادث في الطبيعة خارج نطاق تحكّمنا أو عبر تجارب نتحكم فيها وندير ها . ولتبسيط المصطلحات نريد كلمة تنطبق على كل من طريقتي تجميع المعلومات الإحصائية وهكذا نعرف التجربة بأنها كل عملية تؤدي إلى ملاحظة (أو قياس) وليس من الضروري أن تكون الملاحظة عددية . وكنماذج من التجارب نذكر :

(١) تسجيل درجة امتحان .
(٢) قياس المعدل اليومي لهطول المطر .
(٣) مقابلة ناخب والحصول على رأيه قبل الانتخاب .
(٤) فحص مصباح كهربائي لتحديد ما إذا كان سليماً أم لا ؟
(٥) قذف قطعة نقود وملاحظة الوجه الذي سيظهر .

وعندما نعيد التجربة مرات عديدة يتولد مجتمع من القياسات . وعلى سبيل المثال ، يمكن أن نهتم بعمر أنابيب الكترونية تلفيزيونية تمَّ انتاجها في شركة خلال شهر حزيران . واختبار أنبوب واحد وقياس عمره يمثل تجربة واحدة بينما تولّد إعادة التجربة من أجل جميع الأنابيب التي أنتجتها الشركة خلال ذلك الشهر كامل المجتمع . ويمكن أن تمثل العينة نتائج زمرة صغيرة من التجارب التي نختارها من المجتمع .

لنوجه انتباهنا الآن إلى تحليل تجربة وبناء نموذج رياضيّ من أجل مجتمع . ونبدأ بملاحظة أنه يمكن لكل تجربة أن تقدم نتيجة أو أكثر ندعوها حوادث ونرمز لها بأحرف كبيرة . ولنأخذ التجربة التالية .

مثال ٣ ـ ١ تجربة : أقذف قطعة زهر ولاحظ عدد النقاط على وجهها

علوي . فبعض الحوادث التي يمكن إيرادها كنتيجة للتجربة هي :

(١) الحادثة A : ملاحظة عدد فردي .

(٢) الحادثة B : ملاحظة عدد أقل من 4 .

(٣) الحادثة E_1 : ملاحظة العدد 1 .

(٤) الحادثة E_2 : ملاحظة العدد 2 .

(٥) الحادثة E_3 : ملاحظة العدد 3 .

(٦) الحادثة E_4 : ملاحظة العدد 4 .

(٧) الحادثة E_5 : ملاحظة العدد 5 .

(٨) الحادثة E_6 : ملاحظة العدد 6 .

ولا تمثل هذه الحوادث قائمة كاملة بجميع الحوادث التي يمكن أن ترافق هذه التجربة ولكنها كافية لإيضاح نقطة . فسيلاحظ القاريء لتوه الفرق بين الحادثتين A و B من جهة والحوادث $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ من جهة أخرى . فستقع الحادثة A إذا وقعت أي من الحوادث E_1, E_3, E_5 . أي عندما نلاحظ 1، 3، أو 5 وهكذا يمكن تفكيك الحادثة A إلى مجموعة من الحوادث الأبسط . ونقصد E_1, E_3 و E_5 . وكذلك ستقع الحادثة B إذا وقعت أي من الحوادث E_1 ، E_2 و E_3 ويمكن النظر إليها كمجموعة من الحوادث الأبسط أو الأصغر . وفي المقابل نلاحظ أنه من المستحيل تفكيك الحوادث $E_1, E_2, \ldots, E_6$. وهكذا ندعو الحوادث $E_1, E_2, \ldots, E_6$ بالحوادث البسيطة وحوادث مثل A و B بالحوادث المركبة .

تعريف : تسمى الحادثة التي لا يمكن تفكيكها بالحادثة البسيطة . وسنرمز للحوادث البسيطة بالرمز E مع دليل .

وتمثل الحوادث $E_1, E_2, \ldots, E_6$ قائمة كاملة بجميع الحوادث البسيطة التي ترافق التجربة المذكورة في المثال ٣ ـ ١ السابق . وتبدو بوضوح خاصة هامة من خواص الحوادث البسيطة وهي أن تجربة تؤدي إلى واحدة وواحدة فقط

من الحوادث البسيطة . فمثلاً عند قذف قطعة زهر سنحصل حكماً على 1 2 3 4 5أو 6 . ولا يمكن أن نلاحظ بنفس الوقت أكثر من واحدة من هذه الحوادث البسيطة . وهذا يعني أن قائمة بجميع الحوادث البسبطة تمدّنا بتجزئة لجميع الحوادث الممكنة التي ترافق التجربة .

مثال ٣ ــ ٢ : التجربة هي قذف قطعة نقود . الحوادث البسيطة هي :

: الحصول على « طرّة » . E_1

: الحصول على « نقش » . E_2

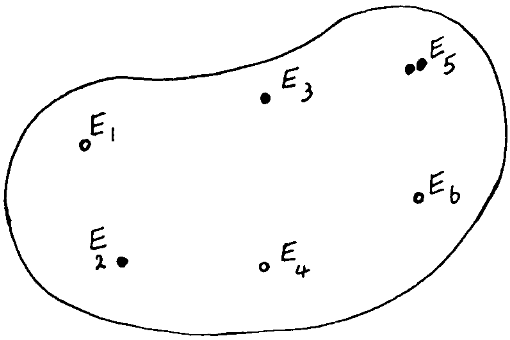
مثال ٣ ــ ٣ : التجربة هي قذف قطعتي نقود . الحوادث البسيطة هي :

القطعة الثانية	القطعة الأولى	
طرّة	طرّة	E_1 :
نقش	طرّة	E_2 :
طرّة	نقش	E_3 :
نقش	نقش	E_4 :

وسيكون مفيداً للغاية أن نستطيع إقامة نموذج للتجربة يمكن تصويره بيانياً . ونقوم بذلك بواسطة المجموعات النقطية .فنخصص لكل حادثة بسيطة نقطة تسمى « نقطة عينة » . وهكذا فإن الرمز E_i سيوافق حادثة بسيطة E_i أو نقطة العينة الموافقة لهذه الحادثة . ويدعى المصور البياني الناتج بمصور ڤين (venn)

ويمكن أن نعبر عن المثال (٣ـ١) من منظور رمزي بدلالة مصور ڤين المبين في الشكل (٣ـ١) . وتوجد في هذا المصور ست نقاط توافق الحوادث البسيطة الستة الممكنة التي أحصيناها في المثال (٣ـ١) . وكذلك نجد أن قذف قطعتي النقود في المثال (٣ـ٣) هو تجربة تحوي أربع نقاط عينة . وتدعى مجموعة كل نقاط العينة الخاصة بتجربة بفراغ العينة المتعلق بالتجربة ونزمز له بـ S . ونقول أن S هو مجموعة كافة نقاط العينة ، أي مجموعة كل النتائج التي يمكن أن يؤدي إليها تنفيذ التجربة مرة واحدة .

كيف تعبر عن الحادثة بدلالة نقاط العينة ؟ نتذكر أن الحادثة A في المثال (٣ـ١) تقع إذا وقعت أي من الحوادث البسيطة E_1 ،E_3 أو E_5 أي أننا نلاحظ A (عدد فردي) إذا لاحظنا أياً من 1، 3 أو 5 . وتقع الحادثة B (ملاحظة عدد أقل من 4) إذا وقعت E_1 E_2 أو E_3 . وهكذا إذا حددنا نقاط العينة الموافقة لحادثة . فإنها تصبح معرفة بوضوح كما لو أننا عبرنا عنها بوصف شفهي . والحادثة « ملاحظة E_1 ،E_3 أو E_5 » هي بوضوح نفس الحادثة « ملاحظة عدد فردي » .



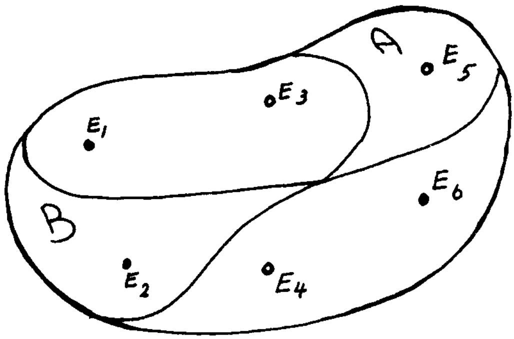
شكل (٣ـ١) مصور فين لقذف قطعة زهر

تعريف : الحادثة هي مجموعة من نقاط العينة .

لنحفظ في الذهن أن المناقشة السابقة تشير إلى تجربة بمفردها وأن القيام بتجربة سيؤدي إلى وقوع واحدة وواحدة فقط من نقاط العينة . ومن الواضح أن الحادثة تقع إذا وقعت أي من نقاط العينة التي تتضمنها الحادثة .

ويمكن تمثيل الحادثة على مصور فين بإحاطة نقاط العينة التي تتضمنها هذه الحادثة بخط مغلق . ويبين الشكل (٣ـ٢) الحادثتين A و B المعرفتين في المثال (٣ـ١) .

ونلاحظ وجود النقطتين E_1 و E_3 في كل من الحادثتين A و B وأن الحادثتين A و B تقعان معاً إذا وقعت أي من النقطتين E_1 أو E_3 .



شكل (٣ـ٢) الحادثتان A و B في تجربة قذف قطعة زهر

ونحصل على مجتمعات من الملاحظات بإعادة التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات . وستُنتج نسبة من هذا العدد الكبير جداً من التجارب E_1 ، ونسبة أخرى منها ستنتج E_2 ، إلخ . ومن وجهة النظر العملية نفكر في النسبة التي ستنتج حادثة A على أنها احتمال A . وبعبارة أخرى إذا كررنا تجربة عدداً كبيراً من المرات N ، مثلاً . ولاحظنا وقوع الحادثة A في n منها فيكون احتمال A هو :

$$P(A) = \frac{n}{N} \qquad (1)$$

ونادراً ما تكون بنية المجتمع معروفة عملياً وبالتالي فإن الاحتمالات المرغوبة للحوادث المختلفة تكون غير معروفة . ومن الناحية الرياضية نبدأ بأن نتجاهل هذه الناحية من نواحي المسألة ونعتبر أن الاحتمالات معطاة ، مما يزودنا بنموذج رياضي للمجتمع . فعلى سبيل المثال ، يمكن أن نفرض أن المجتمع الكبير من قذفات قطعة الزهر ، مثال (٣ـ١) ، سينتج :

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_6) = 1/6.$$

وهذ يكافيء الفرض بأن قطعة الزهر متوازنة تماماً . ولكن هل يوجد شيء مثل قطعة زهر متوازنة تماماً ؟ والجواب هو بالطبع لا ، ولكن قد يكون لها من التناظر ما يجعلنا نميل إلى الاعتقاد بأن احتمالات نقاط العينة قريبة جداً من 1/6

وبحيث يصبح فرضنا مشروعاً تماماً من وجهة النظر العملية ويزودنا بنموذج جيد من أجل المجتمع الذي يولده قذف قطعة الزهر .

ولوضع نموذج لمجتمع نخصص اذن لكل نقطة عينة E_i عدداً يسمى « احتمال E_i » ، ونرمز له بـ $P(E_i)$. بحيث تحقق الأعداد $P(E_i)$ الشرطين التاليين :

$$0 \leqslant P(E_i) < 1 \quad (١)$$

$$\sum_S P(E_i) = 1 \quad (٢)$$

ونلاحظ أن هذين الشرطين يجعلان النموذج الاحتمالي متفقاً في طبيعته مع تصورنا المذكور أعلاه لمفهوم الاحتمال على أنه تكرار نسبي . فالتكرار النسبي لا يمكن أن يكون أقل من صفر أو أكبر من الواحد ومجموع التكرارات النسبية لكل نقاط العينة أي لكل النتائج الممكنة هو بالطبع يساوي الواحد . والشرطان (١) و(٢) يعنيان أن الأعداد $P(E_i)$ تتصف بنفس خاصتي التكرار النسبي فالاحتمال لا يمكن أن يكون سالباً ولا أكبر من الواحد . ومجموع الاحتمالات الموافقة لكافة نقاط فراغ العينة هو الواحد . وفضلاً عن ذلك ، ومن وجهة النظر العملية ، يمكن تقدير الأعداد المجهولة $P(E_i)$ بالتواتر النسبي الملحوظ لوقوع نقاط العينة E_i عند تكرار التجربة عدداً كافياً من المرات .

ونحن الآن في موقع نستطيع منه إعطاء قاعدة بسيطة لحساب احتمال أي حادثة A .

تعريف : احتمال أي حادثة A هو مجموع احتمالات نقاط العينة الموجودة في A .

مثال (٣ـ٤) : أحسب احتمال الحادثة A في المثال (٣ـ١) .

الحادثة A هي « ملاحظة عدد فردي » وتحوي النقاط E_1, E_3 و E_5 . وبالتالي :

$$P(A) = P(E_1) + (P(E_3) + P(E_5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = \tfrac{1}{2}$$

مثال (٣ـ٥) أحسب احتمال ملاحظة طرّة واحدة عند قذف قطعتي نقود .

إذا رمزنا بـ H للطرّة وبـ T للنقش فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو :

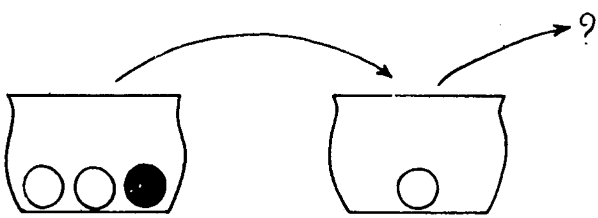
	القطعة الأولى	القطعة الثانية	P(Ei)
E_1	H	H	$\frac{1}{4}$
E_2:	H	T	$\frac{1}{4}$
E_3:	T	H	$\frac{1}{4}$
E_4:	T	T	$\frac{1}{4}$

ويبدو من المنطقي تخصيص احتمال يساوي $\frac{1}{4}$ لكل نقطة من نقاط العينة الأربعة باعتبار أن قطعتي النقود متوازنتان . وما يهمنا هو :

الحادثة A : ملاحظة H واحدة فقط . وهذه الحادثة تحوي نقطتي العينة E_2 و E_3 . وبالتالي :

$$P(A) = P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال (٣ـ٦) لتكن التجربة التالية التي تحتوي على صندوقين . الصندوق I ويحوي كرتين بلون أبيض وكرة سوداء . والصندوق II ويحوي كرة بيضاء واحدة . سحبنا كرة من الصندوق I ووضعناها في الصندوق II . وعندئذ سحبنا كرة من الصندوق II . فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء ؟ (أنظر الشكل ٣ـ٣) .



شكل (٣ـ٣) تمثيل للتجربة في المثال (٣ـ٦)

تصبح المسألة ميسورة حالما نضع قائمة تحوي كافة نقاط العينة أي حالما

نتعرف على فراغ العينة . وللسهولة نرمز للكرات البيضاء بـW_1, W_2, W_3حيث

w_1 w_2 في الصندوق I و w_3 في الصندوق II : وعندئذ نجد :

سحبنا من :

$p(E_i)$	الصندوق I	الصندوق II	
$\frac{1}{6}$	W_1	W_1	E_1:
$\frac{1}{6}$	W_3	W_1	E_2:
$\frac{1}{6}$	W_2	W_2	E_3:
$\frac{1}{6}$	W_3	W_2	E_4:
$\frac{1}{6}$	B	B	E_5:
$\frac{1}{6}$	W_3	B	E_6:

وحادثة سحب كرة بيضاء من II ولنرمز لها بـ A تقع عند وقوع أي من الحوادث البسيطة E_1, E_2, E_3, E_4 أو E_6 . ونجد ثانية أنه يبدو من المنطقي أن نفرض عدم وجود أية أفضلية لأي نقطة عينة على أي نقطة أخرى وبالتالي تخصيص احتمال $\frac{1}{6}$ لكل من نقاط العينة الستة . وهكذا نجد :

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_6) = 5/6$$

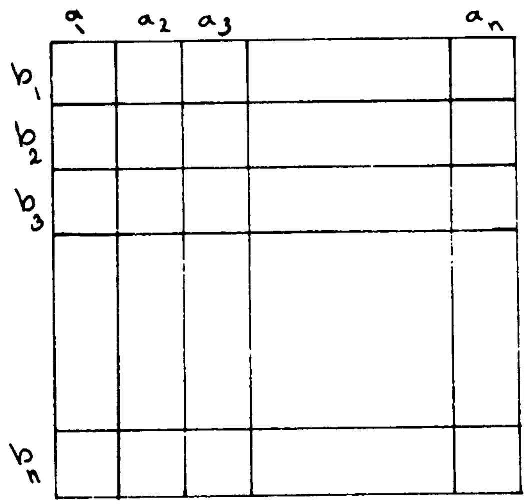
وهذه الطرق في حساب احتمال حادثة هي طرق مباشرة ومبسطة إلا أنها قد تصبح شاقة وغير عملية عندما يكون عدد نقاط العينة كبيراً . وإذا علمنا أن فراغ العينة S يمكن أن يحوي ملايين النقاط فلا مندوحة لنا من عرض بعض القواعد الرياضية المفيدة في حساب عدد نقاط العينة من جهة واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب احتمال حادثة .

٣ـ٣ قواعد مفيدة لحساب عدد نقاط فراغ عينة .

ونبدأ بعرض ثلاث قواعد تقع في دائرة ما يسمى برياضيات التوافيق وهي تبسط العدّ إلى حد كبير في حالات معينة . وأولها هي قاعدة الـ m n .

نظرية ٣ ـ ١ إذا كان لدينا m من العناصر $a_1, a_2, \dots, a_m$ و n من العناصر $b_1, b_2, \dots b_n$ فيمكن تشكيل mn من الأزواج التي تحوي عنصراً من كل مجموعة .

برهان : يمكن التحقق من صحة القاعدة بملاحظة مستطيلات الشكل (٣ـ٤) . إذ يوجد مستطيل واحد من أجل كل زوج من النوع $a_i \; b_j$. وعدد هذه المستطيلات mn .



شكل (٣ـ٤) جدول يشير إلى عدد الأزواج (a_i, b_j) .

مثال ٣ ـ ٧ : قذفنا قطعتي زهر . ما هو عدد نقاط فراغ العينة الموافق للتجربة ؟

يمكن أن تقع القطعة الأولى بإحدى ستة أشكال ، أي $m = 6$. وبصورة مشابهة يمكن أن تقع القطعة الثانيه بإحدى ستة أشكال . ويكون العدد الكلي لنقاط العينة N هو :

$$N = n.\, m = 6 \times 6 = 36.$$

مثال ٣ ـ ٨ كم نقطة عينة توجد في التجربة المذكورة في المثال ٣ ـ ٥ ؟

يمكن اختيار كرة من الصندوق I بإحدى ثلاث طرق $m = 3$. وبعد اختيار إحدى هذه الطرق ، يمكن سحب كرة من الصندوق II بإحدى طريقتين $n = 2$. ومنه يكون العدد الكلي لنقاط العينة: $N = nm = 3 \times 2 = 6$.

(١) يمكن تعميم قاعدة الـ $m \times n$ إلى أي عدد من المجموعات .

مثال ٣ ـ ٩ قذفنا ثلاث قطع نقود فما هو عدد نقاط فراغ العينة ؟

يمكن لكل قطعة أن تستقر بإحدى طريقتين . وبالتالي :

$$N = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

وكقاعدة رياضية مفيدة أخرى نذكر قاعدة التباديل . فلنفرض أن لدينا ثلاثة كتب : b_1، b_2 و b_3 . بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الكتب على رف آخذين اثنين منها في وقت واحد ؟ نحصي أولاً كل المتوافقات الممكنة من اثنين في عمود ونعيد ترتيب كل منها في العمود الثاني :

إعادة ترتيب المتوافقات	متوافقات من اثنين
b_2 b_1	b_1 b_2
b_3 b_1	b_1 b_3
b_3 b_2	b_2 b_3

وعدد التباديل الممكنة هو 6 ، ويمكن الحصول بسهولة على هذه النتيجة من قاعدة الـ mn . إذ يمكن اختيار أول الكتابين بإحدى ثلاث طرق ، $m = 3$ ، وحالما نختار الكتاب الأول يمكننا اختيار الكتاب الثاني بطريقتين $n = 2$. ومنه تكون الطرق الممكنة هي 6 طرق .

والآن بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الكتب آخذين الثلاثة في وقت واحد ؟ بتعداد الامكانيات نجد :

$b_3\ b_1\ b_2$	$b_2\ b_1\ b_3$	$b_1\ b_2\ b_3$
$b_3\ b_2\ b_1$	$b_2\ b_3\ b_1$	$b_1\ b_3\ b_2$

ومجموعها ست امكانيات . ويمكن الحصول على هذه النتيجة بالاستفادة من قاعدة الـ $m \times n$ بعد تعميمها . إذ يمكن اختيار الكتاب الأول بإحدى ثلاث طرق أي $m = 3$ ، وبعد اختيار الكتاب الأول يمكن اختيار الكتاب الثاني بإحدى طريقتين أي $n = 2$ ، ومع اختيار الكتابين الأول والثاني أي ملء الفراغين الأول والثاني على الرف فإنه لا يبق إلا كتاب واحد نملأ فيه الفراغ

الثالث حكماً . أي أن الاختيار الثالث لا يمكن أن يقع إلا بطريقة واحدة $p = 1$
ويكون عدد الطرق الممكنة كلها هو: $N = m \times n \times p = 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

تعريف : يدعى ترتيب r من الأشياء المتميزة بالمتبادلة . ونرمز لعدد الطرق الممكنة لترتيب n من الأشياء المتميزة (المختلفة) مأخوذ r منها في وقت واحد بالرمز p_r^n .

نظرية ٣ ـ ٢ : $P_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

برهان : المسألة المطروحة مكافئة لمسألة ملء r من المواضع المتوفرة مستخدمين n من الأشياء المتميزة . وبتطبيق قاعدة الـ $m \times n$ المعممة نجد أنه يمكن ملء الموضع الأول بـ n من الطرق ، أي يمكن اختيار أي من الأشياء الـ n المتوفرة لنا لملء الموضع الأول . وبعد ملء الموضع الأول بقي عندنا $(n-1)$ من الأشياء المتميزة يمكننا اختيار أي منها لملء الموضع الثاني أي أنه يمكن ملء الموضع الثاني بـ $(n-1)$ طريقة ، وبصورة مشابهة نجد أنه يوجد $(n-2)$ طريقة لملء الموضع الثالث وأخيراً يوجد $(n-r+1)$ طريقة لملء الموضع الأخير r . ومنه يكون عدد كل الطرق الممكنة هو :

$$P_r^n = n(n-2)(n-2)\ldots(n-r+1). \qquad (2)$$

وبالتعبير عنها بدلالة العاملي نجد :

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ولنتذكر أن : $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1 \quad 0! = 1$

مثال ٣ ـ ١٠ سحبنا ثلاث بطاقات يانصيب من مجموع خمسين . فإذا فرضنا أن لترتيب عملية السحب أهمية ، فما هو عدد نقاط فراغ العينة الموافق للتجربة ؟

العدد الكلي لنقاط العينة هو :

$$P_3^{50} = \frac{50!}{47!} = (50)(49)(48) = 117600 \ .$$

مثال ٣ ـ ١١ قطعة تجهيزات مؤلفة من خمسة أجزاء يمكن تجميعها بأي

ترتيب كان . قمنا باختبار لتحديد الفترة الزمنية الضرورية لكل طريقة ممكنة من طرق تجميعها . وإذا اختبرنا كل ترتيب ممكن مرة واحدة فما هو عدد الاختبارات التي يجب القيام بها ؟

العدد الكلي للاختبارات هو :

$$P_5^5 = \frac{5!}{0!} = 5! = 120$$

وفي العديد من الحالات لا يكون الترتيب هاماً ونهتم فقط بعدد المتوافقات الممكنة . فعلى سبيل المثال . بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من خمسة رجال من مجموع 20 مرشحاً ؟ ومن الواضح أن التباديل غير مناسبة لهذه الحالة . وهنا نهتم فقط بعدد متوافقات 20 شيئاً مأخوذ خمساً منها في وقت واحد . إذ لا يؤثر ترتيب الاختيار على تكوين اللجنة.

تعريف : سنرمز لعدد متوافقات n من الأشياء مأخوذ r منها في وقت واحد بالرمز C_r^n . (لاحظ أن بعض المؤلفين يفضلون الرمز $\binom{n}{r}$) .

نظرية ٣ ـ ٣ :

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

برهان : لتكن $a = C_r^n$ و b عدد الطرق التي يمكن فيها ترتيب كل متوافقة بعد اختيارها . وبما أن عدد عناصر المتوافقة r فعدد التباديل الممكنة لِـ r من الأشياء مأخوذة كلها في وقت واحد هو : $b = p_r^r = r!$. ووفقاً لقاعدة الـ $m \times n$ يكون :

$$P_r^n = C_r^n (r!)$$

أو

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (4)$$

مثال ٣ ـ ١٢ يمكن شراء أنبوب الكتروني لراديو من خمسة مموّلين فبكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة من هؤلاء الممولين ؟

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{(5)\ (4)}{2} = 10.$$

ويوضح المثال التالي استخدام هذه القواعد في حل مسألة احتمالية .

مثال ٣ـ١٣ : خمس شركات صناعية تنتج نوعاً معيناً من الأنابيب الالكترونية بنوعيات مختلفة . إذا اخترنا ثلاث شركات بطريقة عشوائية ، فما هو احتمال أن يحوي هذا الاختيار اثنين من أفضل ثلاث؟

بدون إحصاء نقاط العينة نجد ، باعتبار أن الاختيار يتم بصورة عشوائية أن لكل من نقاط العينة ، أي لكل متوافقة من ثلاث ، نفس الاحتمال . أي إذا كان هناك N نقطة في S فإن احتمال كل نقطة هو :

$$P(E_i) = \frac{1}{N},\ i = 1, 2, \dots, N.$$

ليكن n عدد النقاط التي تشمل اثنين من أفضل ثلاث فعندئذ يكون احتمال أن نختار عشوائياً فيتضمن اختيارنا اثنين من الصناع الثلاثة الأفضل هو :

$$P = \frac{n}{N}$$

والمطلوب منا استخدام القواعد السابقة لحساب n و N . وبما أن عدد الاختيارات يساوي عدد متوافقات خمسة أشياء مأخوذة ثلاثا في وقت واحد فإن :

$$N = C_3^5 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

ولتحديد n نفرض أن a هو عدد طرق اختيار اثنين من بين الثلاثة الأفضل أي :

$$a = C_2^3 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

وليكن b هو عدد الطرق التي يمكن أن نختار فيها الصانع الثالث الباقي من بين الصانعين الأكثر رداءة الباقيين أي :

$$b = C_1^2 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2$$

وعندئذ يكون $n = ab = 6$ وبالتالي الاحتمال P المطلوب هو :

$$P = \frac{6}{10}$$

ونلاحظ أن استخدام القواعد السابقة أغنانا عن تعداد نقاط العينة واحدة فواحدة .

٣ ـ ٤ الحوادث المركبة :

معظم الحوادث الهامة في الحالات العملية هي حوادث مركبة تتطلب إحصاء عدد كبير من نقاط العينة . وفي الواقع تتوفر طريقة ثانية لحساب احتمالات الحوادث تتجنب تعداد نقاط فراغ العينة وهي بالتالي أقل مشقة وأيسر منالاً . وتقوم هذه الطريقة على تصنيف الحوادث ، العلاقات بين الحوادث ، وقانونين أساسيين في الاحتمال ، مما سنناقشه فيا يلي :

تتشكل الحادثة المركبة من تركيب حادثتين أو أكثر . ويحدث التركيب بإحدى طريقتين أو من خليط منهما . ونقصد الاتحاد أو التقاطع .

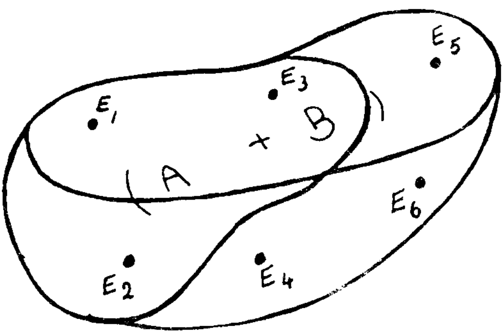
تعريف : لتكن A و B حادثتين في فراغ عينة S . فنعرف اتحاد A و B بأنه الحادثة التي تحوي كل نقاط العينة في A أو B أو كليهما . وسنرمز لاتحاد A و B بـ (AUB) .

وهذا يعني أن وقوع الحادثة AUB يعني وقوع الحادثة A أو وقوع الحادثة B أو وقوع كل من الحادثتين A و B . فمثلاً في المثال ٣ ـ ١ لدينا :

$$A: E_1, E_3, E_5$$

$$B: E_1, E_2, E_3$$

واتحاد A و B يتضمن النقاط E_1, E_2, E_3 و E_5 وهذا موضح في المصور المبين في الشكل ٣ ـ ٥ .



شكل ٣ ـ ٥ الحادثة (AUB) في المثال ٣ ـ ١

تعريف : لتكن A و B حادثتين في فراغ العينة S . فتقاطع A وB هو الحادثة المؤلفة من جميع نقاط العينة الموجودة في كل من A و B . ونرمز لتقاطع A و B بـ AB أو $A \cap B$.

ووقوع الحادثة AB يعني وقوع كل من A و B . وتبدو على مصور فين بأنها الجزء المشترك بين A و B . وتقاطع الحادثتين A و B في المثال ٣ ـ ١ هو الحادثة المؤلفة من النقطتين E_1 وE_3 . ووقوع E_1 أو E_3 يعني وقوع كل من A و B . وهذا موضح في المصور المبين في الشكل ٣ ـ ٦ .

مثال ٣ ـ ١٤ لنعد إلى التجربة المذكورة في المثال ٣ ـ ٣ حيث قذفنا قطعتي نقود ولنعرف :

الحادثة A : الحصول على H واحدة على الأقل .

الحادثة B : الحصول على T واحدة على الأقل .

والمطلوب تعريف A ، B ، AB، و AUB كمجموعة من نقاط العينة .

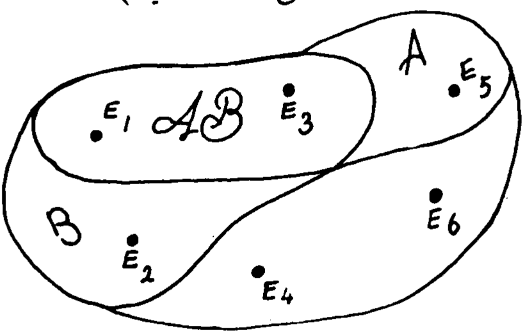
لنتذكر أن فراغ العينة لهذه التجربة هو :

E_1 : HH (طرة على القطعة الأولى وطرّة على القطعة الثانية)

E_2 : HT

E_3 : TH

E_4 : TT



شكل ٣ ـ ٦ التقاطع AB

ومنه :

الحادثة A : E_1 ,E_2 و E_3

الحادثة B : E_2 ,E_3 و E_4

الحادثةAB: E_2 و E_3

الحادثة AUB : E_1 ,E_2 ,E_3 و E_4 .

ونلاحظ أن AUB = S حيث S فراغ العينة وبالتالي فإن وقوعها مؤكد .

٣ ـ ٥ العلاقات بين الحوادث :

سنعرف ثلاث علاقات بين الحوادث هي علاقات التمام ، الاستقلال ، والتنافي .

تعريف : تمام الحادثة A هو الحادثة التي تحوي مجموعة نقاط العينة الموجودة في S وغير الموجودة في A . ونرمز لتمام A بـ $\bar{A}$.

وبما أن

$$\sum_{S} P(E_i) = 1$$

فيمكن كتابة

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

ومنه :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

وهي علاقة مفيدة للحصول على $P(A)$ عندما يكون $P(\bar{A})$ معروفاً أو يمكن حسابه بسهولة .

وغالباً ما تكون العلاقة بين حادثتين بحيث أن احتمال وقوع أحدهما يعتمد على ما إذا كانت الأخرى قد وقعت أم لا . فمثلاً لنفرض أن التجربة تتألف من ملاحظة الطقس في يوم محدد . ولتكن A حادثة « هطول المطر » و B حادثة « وجود سماء غائمة » فمن الواضح أن الحادثتين مرتبطتان . واحتمال هطول المطر أي $P(A)$ ليس نفس احتمال المطر مع علمنا المسبق بأن اليوم الذي نتنبأ عنه هو يوم غائم . ويدعى احتمال A علماً أن B قد وقعت بالاحتمال الشرطي ونرمز له بـ $P(A|B)$. ونعرف الاحتمال الشرطي لـ A علماً أن B قد وقعت والاحتمال الشرطي لـ B علماً أن A قد وقعت كما يلي :

تعريف :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

و

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (6)$$

ويتضح كون هذا التعريف منسجماً مع مفهوم التكرار النسبي للاحتمال مما يلي : فلنفرض أننا أعدنا تجربة معينة عدداً كبيراً من المرات N ، وأن الحادثة AB وقعت n_{11} مرة ؛ A وليس B أي $A\bar{B}$ وقعت n_{21} مرة ؛ B وليس A أي $B\bar{A}$ وقعت n_{12} مرة ، وليس A ولا B أي $\bar{A}\bar{B}$ وقعت n_{22} مرة . ونلاحظ أن هذا التصنيف على أساس الحادثتين A و B هو في الحقيقة تجزئة التكرارات الـ N إلى أربع مجموعات جزئية ليس بينها أي نقطة مشتركة أي $N = n_{11} + n_{21} + n_{12} + n_{22}$. ونقدم هذه النتائج في الجدول (٣-١) .

جدول (٣-١) : جدول ذو بعدين من أجل الحادثتين A و B .

	A	$\bar{A}$
B	n_{11}	n_{12}
$\bar{B}$	n_{21}	n_{22}

(5)

ومن الجدول نجد :

$$P(A) = \frac{n_{11} + n_{21}}{N} \qquad (6)$$

$$P(B) = \frac{n_{11} + n_{12}}{N}$$

$$P(A/B) = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{12}}$$

$$P(A/B) = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{21}}$$

$$P(AB) = \frac{n_{11}}{N}$$

وباستخدام هذه الاحتمالات نرى بسهولة أن :

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

مثال ٣ ـ ١٥ أحسب $P(A|B)$ في تجربة قذف قطعة الزهر المذكورة في المثال ٣ـ١ .

إذا علمنا أن B قد وقعت فعندئذ نهتم فقط بنقاط العينة E_1 ، E_2 ، و E_3 . ومن بين هذه النقاط E_1 و E_3 تحققان الحادثة A . وبما أن لكل من E_1 ، E_2 ، و E_3 نفس الاحتمال فيمكن أن نكتب :

$$P(A|B) = \frac{2}{3}$$

ويمكن الحصول على $P(A|B)$ بتطبيق العلاقة :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

ونلاحظ أن $P(A|B) = \frac{2}{3}$ بينما $P(A) = \frac{1}{2}$ ، مما يشير إلى أن A و B غير مستقلتين عن بعضهما .

تعريف : نقول أن الحادثتين A و B مستقلتان إذا كان :

$$P(A|B) = P(A)$$

أو :

$$P(B|A) = P(B)$$

وفيما عدا ذلك نقول أن الحوادث غير مستقلة عن بعضها البعض .

ونلاحظ أنه إذا كان $P(A|B) = P(A)$ ، فعندئذ سيكون $P(B|A) = P(B)$ أيضاً . وبصورة مشابهة إذا كان $P(A|B)$ و $P(A)$ غير متساويين فإن $P(B|A)$ و $P(B)$ سيكونان غير متساويين أيضاً .

ولنتذكر أن التجربة يمكن أن تنتج واحدة وواحدة فقط من الحوادث

البسيطة . ولا يمكن أن تقع حادثتان بسيطتان بنفس الوقت . ونقول أن الحادثتين A و B متنافيتان إذا كان وقوع أحدهما يستثني إمكانية وقوع الأخرى . ويمكن التعبير عن ذلك بطريقة أخرى بالقول أن تقاطعهما AB لا يحوي أي نقطة عينـة . وهذا يعني أن $P(AB) = 0$.

تعريف : نقول أن الحادثتين A و B متنافيتان إذا لم يحتو التقاطع AB أي نقطة عينة .

وتكون الحادثتان A و B منفصلتان تماماً عن بعضهما في مصور ڤين . (انظر الشكل ٣ ـ ٧) .

شكل ٣ـ٧ الحادثتان المتنافيتان .

مثال ٣ ـ ١٦ هل الحادثتان A و B في المثال ٣ ـ ١ متنافيتان ؟ هل هما متتامتان ؟

نعلم أن :

الحادثة A : E_1, E_3, E_5

الحادثة B : E_1, E_2, E_3

ومن الواضح أن AB يحوي النقطتين E_1 وE_3 وأن $P(AB)$ لا يساوي الصفر . وبالتالي فإن A و B ليستا متنافيتين . وهذا يعني أنهما لا يمكن أن تكونا متتامتين .

مثال ٣ ـ ١٧ لتكن A و B حادثتين متنافيتين حيث $P(A)$ و $P(B)$ لا يساويان الصفر . فهل A و B حادثتان مستقلتان ؟

بما أن A و B متنافيتان فإذا وقعت A فإن B لا يمكن أن تقع والعكس

بالعكس . أي أن $P(B|A) = 0$. ولكن فرضنا أن $P(B)$ أكبر من الصفر وبالتالي $P(B) \neq P(B|A)$ وبالتالي فإن الحادثتين غير مستقلتين .

٣ ـ ٦ قانونان احتماليان واستخدامهما .

قانون الجمع :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (7)$$

وإذا كانت A و B متنافيتين فعندئذ $P(AB) = 0$ وفي هذه الحالة نرمز لاتحاد الحادثتين عادة بـ $A + B$ ويصبح قانون الجمع على الشكل :

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (8)$$

ويحوي المجموع $P(A) + P(B)$ كل احتمالات نقاط العينة في A وفي B أي أنه يحوي احتمالات نقاط العينة في $A \cup B$ ولكن بتعداد مزدوج لاحتمالات النقاط المشتركة أي نقاط AB . وبطرح $P(AB)$ مرة واحدة نحصل على النتيجة الصحيحة

قانون الجداء :

$$P(AB) = P(A).\ P(B|A)$$

$$= P(B).\ P(A|B). \quad (9)$$

وإذا كانت A و B مستقلتين فإن :

$$P(AB) = P(A).\ P(B). \quad (10)$$

وقانون الجداء نتيجة مباشرة لتعريف الاحتمال الشرطي :

مثال ٣ ـ ١٨ احسب $P(AB)$ و $P(A \cup B)$ حيث A و B معرفتان في المثال ٣ ـ ١ .لنذكر أن $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ و $P(A|B) = 2/3$ وعندئذ :

$$P(AB) = P(B).\ P(A|B) = (\tfrac{1}{2})\ (2/3) = \tfrac{1}{3}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = 2/3.$$

وهي نفس النتائج التي نصل إليها باستخدام نقاط العينة .

مثال ٣ ـ ١٩ نسحب بطاقتين من ورق لعب فيه 52 بطاقة . فما هو احتمال الحصول على آس وعشرة . لنعرف الحوادث التالية :

الحادثة A : سحب آس وعشرة . وعندئذ $A = B + C$ حيث .

الحادثة B : سحب آس أولاً وعشرة ثانياً .

الحادثة C : سحب عشرة أولاً ثم آس ثانياً :

ونلاحظ أننا اخترنا B و C كحادثتين متنافيتين ويمكن التعبير عنها كتقاطع لحوادث احتمالاتها معروفة . إذ لدينا :

$$B = B_1 B_2 \quad \text{و} \quad C = C_1 C_2$$

حيث :

B_1 : الحصول على آس في السحب الأول ،

B_2 : الحصول على عشرة في السحب الثاني ،

C_1 : الحصول على عشرة في السحب الأول ،

C_2 : الحصول على آس في السحب الثاني :

وبتطبيق قانون الجداء نجد :

$$P(B) = P(B_1 B_2) = P(B_1)\, P(B_2 \mid B_1) = (4/52)\,(4/51)$$

و

$$P(C) = P(C_1 C_2) = (4/52)\,(4/51)$$

وبتطبيق قانون الجمع نجد :

$$P(A) = P(B) + P(c) = \frac{8}{663.}$$

مثال ٣ ـ ٢٠ استخدم قانوني الاحتمال لحل مسألة « الصندوقين » في المثال ٣ ـ ٦ .

لنعرف الحوادث التالية :

الحادثة A : الكرة المسحوبة من الصندوق II هي كرة بيضاء .

فعندئذ :

$$A = BUC$$

حيث :

الحادثة B : سحب كرة بيضاء من الصندوق I ثم كرة بيضاء من الصندوق II .

الحادثة C : سحب كرة سوداء من الصندوق I ثم كرة بيضاء من الصندوق II .

ونلاحظ من عبارتي B و C أنهما متنافيتان وكل منهما عبارة عن تقاطع حادثتين :

$$B = B_1 A \quad \text{و} \quad C = C_1 A$$

حيث :

الحادثة B_1 : سحب كرة بيضاء من الصندوق I .

الحادثة C_1 : سحب كرة سوداء من الصندوق I .

والآن نجد :

$$P(A) = P(BUC) = P(B) + P(C) - P(BC).$$

ولكن $P(BC) = 0$ باعتبار أن B و C متنافيتان . ومنه :

$$P(A) = P(B) + P(C) = P(B_1 A) + P(C_1 A) = P(B_1)\, P(A|B_1) +$$

$$P(C_1).\, P(A|C_1) = (\tfrac{2}{3}).\, 1 + (\tfrac{1}{3})\,(\tfrac{1}{2}) = 5/6.$$

٣ ـ ٧ المتحولات العشوائية : تكون الملاحظات التي تنتجها تجربة إما كمية أو كيفية . فمثلاً يكون الانتاج اليومي لمنشأة صناعية كمياً أي مقيساً بصورة عددية بينما تكون أوصاف الطقس مثل ممطر ، غائم ، صحو ، عبارة عن ملاحظات كيفية . ويهتم الاحصائيون بكلي النوعين من المعلومات علماً أن المعلومات الكمية هي الأكثر استخداماً .

ويمكننا رد المعلومات الكيفية إلى معلومات رقمية بتخصيص عدد لكل نتيجة نوعية بشكل متفق عليه سلفاً . فيمكن مثلاً عند مقابلة ناخب تمثيل الإجابة « نعم » بواحد والاجابة « لا » بصفر . والحوادث ذات الأهمية في تجربة هي

القيم التي سيتضمنها البيان الاحصائي الناتج عن التجربة وبالتالي فهي حوادث ذات طابع عددي . لنفرض أن المتحول المقيس في التجربة هو x . ولنتذكر أن الحادثة هي مجموعة من نقاط العينة ، في الواقع يمكن أن يوافق حادثة عددية معينة ، مثلاً $x = 2$ ، عدد من نقاط العينة ، ويوافق عدد آخر من نقاط العينة الحادثة $X = 3$ ، وهكذا حتى نغطي كل القيم الممكنة لـ x. ويدعى مثل هذا المتحول x بالمتحول العشوائي ، لأن قيمة x الملحوظة من أجل تجربة معينة هي حادثة تصادفية أو عشوائية .

ونلاحظ أن كل نقطة عينة تؤدي إلى قيمة واحدة وواحدة فقط من قيم x . مع أن عدة نقاط عينة يمكن أن تؤدي إلى نفس القيمة لـ x . فعلى سبيل المثال ، لنأخذ تجربة قذف قطعتي نقود . ولنفرض أننا نهتم بـ x= عدد أوجه الطرّة التي نحصل عليها بعد كل قذفة . فالمتحول العشوائي x يمكن أن يفترض إحدى ثلاث قيم $x = 0$ ، $x = 1$ ، أو $x = 2$. ونقاط العينة في هذه التجربة هي :

$$E_4 = TT \quad E_3 = TH \quad E_2 = HT \quad E_1 : HH$$

والحادثة العددية $x = 0$ تشمل نقطة العينة E_4 . $x = 1$ تشمل نقطتي العينة E_2 و E_3 ، وتشمل $x = 2$ نقطة العينة E_1 . ونلاحظ أنه يوافق كل نقطة عينة قيمة واحدة وواحدة فقط من قيم x ولكن العكس غير صحيح ، إذ توافق القيمة $x = 1$ نقطتا عينة E_2 و E_3 . ويمكن استخلاص نتيجتين من هذا المثال . فنلاحظ أن العلاقة بين المتحول العشوائي x ونقاط العينة تحقق تعريف التابع كما تحدده كتب التحليل الرياضي . وإذا اخترنا أي نقطة من فراغ العينة S فيوافق هذه النقطة قيمة واحدة وواحدة فقط لـ x . وهكذا نختار التعريف التالي للمتحول العشوائي :

تعريف : المتحول العشوائي هو تابع عددي معرف فوق فراغ العينة .

ونلاحظ أيضاً أن الحوادث العددية المرافقة لمتحول عشوائي x ، هي حوادث متنافية . إذ يمكن أن تُنتج تجربة واحدة قيمة واحدة وواحدة فقط لـ x .

وحتى الآن نكون قد رسمنا الملامح العامة الأساسية لنموذج احتمالي، وهو توزيع التكرار النظري لمجتمع من القياسات العددية . ونذكر أننا وصفنا المجتمعات من القياسات في الفصل السابق بتوزيعات التكرار . وقد رأينا أن المساحات تحت التوزيع التكراري فوق مجال معيّن توافق نسبة القياسات من المجتمع الواقعة ضمن هذا المجال ويمكن تصورها على أنها احتمالات . وكانت غاية هذا الفصل بناء نموذج نظري للتوزيع التكراري أو ما يسمى في نظرية الاحتمالات بالتوزيع الاحتمالي للمجتمع . وتزودنا الفقرات السابقة من هذا الفصل بالنموذج والطريقة . ولإتمام الصورة لا بد لنا من حساب الاحتمالات الموافقة لكل قيمة لـ x . وتدعى هذه الاحتمالات ممثلة على شكل جدول أو علاقة بتابع التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي x . ونلاحظ أن مجموعة كل القيم الممكنة لمتحول عشوائي x تشكل فراغ عينة جديد يولّده المتحول x من فراغ نقاط العينة الذي عرفناه في الفقرة ٣ ـ ٢ ويسمى « فراغ العينة الذي يولّده المتحول العشوائي x » . أو اختصاراً « فراغ العينة الخاص بالمتحول x » . وبما أن قيم x هي حوادث متنافية فإن مجموع احتمالاتها يجب أن يساوي الواحد أي أن تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول x هو بدوره نموذج احتمالي .

تمارين الفصل الثالث

١ ـ تتألف تجربة من قذف قطعة زهر . والمطلوب تحديد نقاط العينة في كل من الحوادث التالية :

A : الحصول على 4 .

B : الحصول على عدد زوجي .

C : الحصول على عدد أقل من 3 .

D : الحصول على كل من A و B .

E : الحصول على B أو A أو كليهما .

F : الحصول على كل من C و A .

٢ ـ بالإشارة إلى التمرين السابق أحسب احتمالات الحوادث D ، E و F بجمع احتمالات نقاط العينة .

٣ ـ قذفنا قطعتين من الزهر . ولتكن A حادثة الحصول على عدد فردي من القطعة الأولى و B حادثة الحصول على عدد أكبر من 2 من القطعة الثانية . أحسب P (A) و P (B) باستخدام نقاط العينة . أحسب احتمال وقوع كل من A و B . ثم أحسب احتمال وقوع A أو B أو كليهما .

٤ ـ نقذف قطعة زهر مرتين ما هو احتمال أن يكون مجموع العددين الملحوظين أكبر من 9 ؟

٥ ـ إذا قذفنا ثلاث قطع نقود فما هو احتمال الحصول على نقشين تماماً ؟ على الأقل نقشين ؟

٦ ـ قذفنا زوجا من الزهر فما هو احتمال الحصول على 2 ؟ على 7 ؟

٧ ـ اخترنا بزرتين من علبة تحوي سبع بذور ، اثنتان منها تنتجان زهوراً زرقاء ، ثلاث تنتج زهوراً بيضاء ، واثنتان تنتجان زهوراً حمراء . فما هو احتمال أن تنتج البزرتان زهوراً من نفس اللون ؟ (استخدم نقاط العينة في الحل) .

٨ ـ قذفنا ثلاث قطع من الزهر ، ما هو عدد نقاط العينة في فراغ العينة S ؟

٩ ـ ما هو عدد أرقام الهواتف الممكنة المؤلفة من خمس منازل عشرية إذا كانت المنزلة الأخيرة 3 أو 4 ؟

١٠ ـ برهن أن $C^n_r = C^n_{n-r}$.

١١ ـ كم عدداً من أربعة منازل عشرية يمكن تشكيلها باستخدام الأرقام 5,6,7,8,9, إذا استخدمنا كل رقم مرة واحدة ؟ إذا أمكن تكرار هذه الأرقام ؟.

١٢ ـ إذا توفر لنا عشرة لاعبي كرة سلة . فكم فريقاً من خمسة لاعبين يمكن تشكيلها إذا أمكن لكل لاعب أن يقوم بأي دور يوكل إليه ؟

١٣ ـ ما هو عدد تباديل n شيئاً اذا كانت تتألف من المجموعات الجزئية وضمن المجموعة الجزئية i $(i = 1, 2, ..., k)$ يوجد r_i من الأشياء المتماثلة ؟

١٤ ـ توجد في حقيبة 6 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء . إذا سحبناها واحدة فأخرى بدون إعادة فما هو احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية سوداء وهكذا على التناوب ؟

١٥ ـ احتمال أن يكون باب معين مقفلاً هو $\frac{1}{2}$. ومفتاح الباب هو بين 12 مفتاحاً متوفرة ضمن حزمة واحدة . إذا اختار شخص مفتاحين بصورة عشوائية فما هو احتمال أن يستطيع فتح الباب دون اللجوء إلى مفاتيح أخرى ؟

١٦ ـ دعا رجل خمساً من أصدقائه إلى عشاء . وبعد أن حدد موقعه على

الطاولة كم طريقة يمكن ترتيب بقية الجلوس ؟

١٧ ـ من حقيبة تحوي 7 كرات سوداء و 5 كرات بيضاء ، كم مجموعة من 5 كرات يمكن سحبها على أن تحوي 3 كرات سوداء وكرتين بلون أبيض ؟

١٨ ـ من 7 رجال و 4 نساء كم لجنة يمكن تشكيلها بحيث تحوي :

(أ) 3 رجال واثنين من النساء ؛

(ب) 5 أشخاص بينهم ثلاثة رجال على الأقل ؟

١٩ ـ استخدم طرق المتوافقات لحل التمرين السابع .

٢٠ ـ نقذف قطعة نقود ومكعب زهر . إذا كانت الحادثة A هي الحصول على نقش وعدد زوجي والحادثة B هي الحصول على نقش والعدد 1 ، فاحسب P (A) ، P (B) ، P (AB) و P (AUB) .

٢١ ـ بالإشارة إلى التمرين الثالث ، لتكن C حادثة الحصول على مجموع زوجي . أحسب P (C) ، P (AC) ، P (AUC), PBC) ، P (BUC) ، P (ABC) . و P (AUBUC) .

٢٢ ـ سحبنا خمس أوراق من ورق لعب عادي يحوي 52 بطاقة . ولنعرف الحادثتين A و B كما يلي :

A : كل الأوراق الخمس من نوع البستوني .

B : تتضمن البطاقات الخمس آس ، ملك ، ملكة ، شاب وعشرة كلها من نفس النوع .

(أ) عرف الحادثة AB

(ب) عرف الحادثة AUB

(ج) احسب احتمال A

(د) احسب احتمال B

(هـ) احسب P (BIA)

(و) احسب $P(AB)$

(ز) احسب $P(AUB)$

٢٣ ـ في السوق رخصة لبيع مجموعة من المعلبات التي لا عنوان عليها ويحوي هذا البيع 200 علبة من الذرة الصفراء ، 300 علبة من الشوندر ، و 500 علبة من الخوخ . فما هو احتمال أن أول مبتاعه ستحصل على علبة خضروات ؟ علبة ذرة صفراء ؟ هل هاتان الحادثتان مستقلتان ؟ متنافيتان ؟ وإذا علمنا أنها سحبت علبة خضروات فما هو احتمال أن تكون ذرة صفراء ؟

٢٤ ـ بالإشارة إلى التمرين الأول احسب $P(A|B)$ ، $P(A|C)$ و $P(B|C)$. احسب احتمالات الحوادث AB ، AC ، BC ، و AUB مستخدماً قانوني الاحتمال . هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ متنافيتان ؟ هل الحادثتان B و C مستقلتان ؟ متنافيتان ؟

٢٥ ـ بالعودة إلى التمرين الثالث احسب $P(A|B)$ و $P(B|A)$. وعندئذ أحسب $P(AB)$ و $P(AUB)$ مستخدماً قانوني الاحتمال .

٢٦ ـ تفحص كل قطعة بالنظر من قبل مفتش ثم مدقق على التتالي . وعند قدوم قطعة ناقصة الصنع فإن احتمال مرورها من المفتش هو 0.1 . ومن مثل هذه القطع يكتشف المدقق 5 من كل عشرة . فما هي نسبة القطع التي ستمر عبر المفتش والمدقق ؟

٢٧ ـ نحتفظ بسيارتي اسعاف احتياطاً للطواريء . ونظراً لتوقيت الطلب أو لامكانية وجود عطل ميكانيكي ، فإن احتمال توفر سيارة اسعاف معينة عند الحاجة إليها هو 9/10 . وتوفر أحد السيارتين مستقل عن توفر الأخرى . والمطلوب :

(أ) ما هو احتمال ألا تتوفر أي منهما ؟

(ب) إذا احتجنا لسيارة اسعاف في حالة طارئة فما هو احتمال تلبية الطلب ؟

٢٨ ـ في متاهة توجد أربعة تقاطعات وعند كل منها يمكن لفأر أن يذهب

يميناً أو يساراً أو على خط مستقيم . ما هو احتمال أن يجتاز الفأر المتاهة عند أول محاولة إذا علمنا أنه يوجد طريق واحد ممكن ؟

٢٩ ـ قدمنا لقرد أربع مجموعات من القطع كل مجموعة تحوي ثلاث قطع وهي في كل مجموعة على شكل مربع ، مستطيل ، مثلث ، دائرة على الترتيب . فإذا سحب بنجاح ثلاثاً من مجموعة واحدة ثم ثلاثاً من مجموعة ثانية ، ثلاثاً من مجموعة ثالثة ، وثلاثاً من مجموعة رابعة ، على الترتيب هل يدعو هذا للشك بأن القرد يميز بين الأشكال الهندسية ؟ ما هو احتمال مثل هذه الحادثة ؟

٣٠ ـ تريد هيئة للرقابة والتفتيش تشكيل ثلاث لجان لدراسة موضوع الأسعار في صناعة معينة . ويتوفر عندها 84 مفتشاً . فبكم طريقة يمكن تشكيل اللجان الثلاث إذا كانت ستتضمن 17 ، 19 ، و 27 مفتشاً وأنه لا يمكن لمفتش أن يشترك في أكثر من لجنة ؟

٣١ ـ حزمتان من البطاريات تحوي كل منها ستاً وفي كل منهما بطاريتان لا تعملان . إذا اخترنا بطاريتين من كل حزمة فما هو احتمال أن تكون البطاريات الأربع هذه عاملة ؟

٣٢ ـ بالإشارة إلى التمرين السابق . لنفرض أننا اخترنا بصورة عشوائية بطاريتين من الحزمة الأولى وخلطناهما مع بطاريات الحزمة الثانية . ثم أخذنا بصورة عشوائية اثنتين من البطاريات الثمانية في الحزمة الثانية . فما هو احتمال أن تكونا عاملتين ؟

٣٣ ـ كم مرة يجب أن نقذف قطعة نقود لكي يكون احتمال ملاحظة طرة واحدة على الأقل أكبر أو يساوي 0.9 ؟