الفصل الخامس

تابع التوزيع الثنائي

٥ـ١ التجربة الثنائية : يقترن أحد أهم المتحولات العشوائية المنفصلة بتجربة قذف قطعة نقود التي وصفناها في الأمثلة (٣ـ٣) ، (٣ـ٥) ، و(٤ـ١) . وبالمعنى المجرد للكلمة يُنفذ يومياً العديد من تجارب قذف قطعة النقود ذات الأهمية التطبيقية في العلوم الاجتماعية ، والفيزيائية وفي الصناعة .

في تجارب سبر الرأي العام تشبه مقابلتنا للناخب ، من عدة نواح ، قذف قطعة نقود . فجوابه « نعم » يوافق وجه النقش ، مثلاً ، وجوابه بلا أو امتناعه عن الجواب يقابل الحصول على وجه الطرّة . وهناك أمثلة مشابهة في العلوم الاجتماعية ، في الصناعة ، وفي التربية . إذ يهتم الباحث الاجتماعي بنسبة المنازل الريفية المزودة بالكهرباء . وصانع السجاير يرغب في معرفة نسبة المدخنين الذين يفضلون نوعاً معيناً من السجاير ، ويهتم الاستاذ بتقدير نسبة الطلاب الذين سينجحون في مادته . وسنحصل من كل شخص نقابله على ما يشبه نتيجة قذف قطعة نقود « غير متوازنة بصورة عامة » .

والرمي في إتجاه هدف معين يشبه قذف قطعة النقود فإما أن تكون النتيجة إصابة الهدف أو عدم إصابته . وإطلاق صاروخ إما أن يكون إطلاقاً ناجحاً أو فاشلاً . وإما أن يبرهن دواء جديد على فعاليته عند إعطائه لمريض معين أو أن يكون غير فعال . وإذا اخترنا قطعة من بضاعة مصنّعة فإما أن تكون خالية من أي عيب صناعي أو أنها تحوي عيباً صناعياً . وبالرغم من نواحي عدم

التشابه فإن مثل هذه التجارب تكشف إلى درجة مقبولة من التقريب ميزات وخواص التجربة الثنائية .

تعريف : التجربة الثنائية هي تلك التي تتصف بالخواص التالية :

(١) تتألف التجربة من عدد ، n مثلاً ، من التكرارات المتماثلة تماماً .

(٢) يُنتج كل تكرار إحدى نتيجتين فإما أن تكون النتيجة نجاحاً (أي وقوع الأمر الذي نحن بصدد دراسته) ونرمز له بـ S أو أن تكون فشلاً ونرمز له بـ F .

(٣) احتمال النجاح في تكرار معين هو p ، مثلاً ، حيث $0 \leq p \leq 1$ ويبقى هذا الاحتمال ثابتاً من تكرار إلى آخر . ويكون احتمال الفشل بالطبع هو $q = 1 - p$

(٤) التكررات مستقلة عن بعضها البعض .

(٥) نهتم بعدد النجاحات x التي نحصل عليها خلال التكرارات الـ n .

والقليل جداً من الحالات العملية ستحقق على وجه تام جميع هذه الشروط . ولكن آثار الحيدان عن هذه الشروط سيبقى بسيطاً ولا يؤثر في النتيجة النهائية طالما بقي هذا الحيدان في حدود معتدلة ، فمثلاً يبقى احتمال مقابلة ناخب مؤيد للقضية التي ندرسها ثابتاً تقريباً من شخص إلى آخر طالما أن مجتمع الناخبين كبير جداً بالمقارنة مع العينة من الناخبين الذين تجري مقابلتهم . وإذا كان 50% مثلاً من مجتمع يحوي ألف ناخب يفضلون المرشح A ، فإن احتمال الحصول على تأييد لِـ A عند أول مقابلة هو $\frac{1}{2}$. واحتمال التأييد عند المقابلة الثانية هو 499/999 أو 500/999 حسبما تكون المقابلة الأولى قد تمت مع مؤيد أو مع معارض على الترتيب . والعددان قريبان جداً من $\frac{1}{2}$ ويمكن اعتبارهما $\frac{1}{2}$ عملياً ، كما يمكن أن نستمر في مثل هذا الاعتبار في المقابلة الثالثة والرابعة حتى المقابلة الـ n طالما أن n صغيرة بالنسبة للعدد 1000 . وعلى الوجه الآخر ، إذا احتوى المجتمع على عشرة وكان خمسة منهم يفضلون A فإن احتمال الحصول على تأييد في المقابلة الأولى هو $\frac{1}{2}$ ولكنه في الثانية 4/9 أو 5/9 ، أي أن

الاحتمال p يتغير كثيراً من تكرار إلى آخر والتجربة سوف لا تكون تجربة ثنائية .

٥ـ٢ تابع التوزيع الثنائي :

لنتذكر أولاً دستور نشر ثنائية الحد كما نجده في كتب الجبر الابتدائية :

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} a^{n-r} b^r + \dots + b^r$$

ويمكن كتابة أمثال $a^{n-r} b^r$ على الشكل $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ $= C_r^n$ وبالتالي يمكن كتابة النشر على الشكل :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n \, a^{n-r} b^r . \qquad (1)$$

ولنتساءل الآن عن تابع توزيع المتحول x وهو عدد النجاحات الملحوظة في تجربة ثنائية خلال n من التكرارات . وسنبدأ أولاً بمثال يكون فيه $n = 3$. ويقدم الجدول (٥ـ١) تابع التوزيع . ونلاحظ أن كل تكرار يؤدي إلى إحدى نتيجتين S أو F وبالتالي فإن عدد نقاط العينة هو $8 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2$ وهي مبينة في العمود الثاني من الجدول . والرمز SSF مثلاً يعني الحصول على نجاح في كل من التكرارين الأول والثاني ثم الحصول على فشل في التكرار الثالث . ويمكن حساب احتمال كل نقطة بسهولة فالنقطة SSF مثلاً هي تقاطع ثلاث حوادث مستقلة واحتمالها يساوي جداء احتمالات الحوادث المستقلة الثلاث أي أن :

$$P(SSF) = P(\text{S في التكرار الأول}) \times P(\text{S في التكرار الثاني}) \times P(\text{F في التكرار الثالث}) =$$

$$= ppq \quad = p^2 q$$

وبنفس الطريقة نجد أن $p(E_3) = p(SFS) = p.q.p = p^2 q$ الخ .

ونجد في العمود الرابع قيم المتحول العشوائي x في كل نقطة عينة . ويلاحظ القارىء أن الحادثة العددية $x = 0$ تحوي نقطة العينة E_8 وتحوي الحادثة العددية $x = 1$ النقاط الثلاث E_4 ، E_6 و E_7 ، وهكذا . وقد حسبنا احتمال كل قيمة من قيم x الممكنة وهي $x = 0, 1, 2, 3$. من هذا الجدول وعرضناها في الجدول الصغير إلى اليمين . وهذا الجدول الأخير هو تابع التوزيع المطلوب عندما يكون $n = 3$. ونلاحظ أن الاحتمالات $p(x)$ هي حدود نشر ثنائية الحد $(p + q)^3$. وإذا جمعنا هذه الاحتمالات نحصل على :

جدول ٥ـ١ تابع التوزيع $p(x)$ لتجربة ثنائية $n = 3$

	نقاط العينة	$P(E_i)$	x
E_1	SSS	p^3	3
E_2	SSF	p^2q	2
E_3	SFS	p^2q	2
E_4	SFF	pq^2	1
E_5	FSS	p^2q	2
E_6	FSF	pq^2	1
E_7	FFS	pq^2	1
E_8	FFF	q^3	0

x	$p(x)$
0	q^3
1	$3pq^2$
2	$3p^2q$
3	p^3

$$\sum_{x=0}^{3} P(x) = (q+p)^3 = 1^3 = 1$$

$$\sum_{x=0}^{3} p(x) = q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = (p+q)^3 = 1^3 = 1$$

وتابع التوزيع المطلوب في حالة n تكراراً يعني إيجاد الاحتمالات الموافقة لكل قيمة ممكنة لِـ x وهي القيم $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ أي إيجاد $p(0), p(1), \ldots, p(n)$ وقياساً على المثال السابق في حالة $n = 3$ يمكننا القول بأن هذه الاحتمالات المطلوبة هي تماماً حدود نشر ثنائية الحد $(p + q)^n$. والاحتمال $p(x)$ بصورة عامة هو الحد من هذا النشر الذي يحوي p مرفوعة إلى القوة x وبالتالي يحوي q مرفوعة إلى القوة $n - x$ أي أن :

$$P(x) = C_x^n\, p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

ولبرهان ذلك يمكن طرح السؤال التالي : ما هو احتمال الحادثة B ، مثلاً ، حيث نحصل على x نجاحاً و (n − x) فشلاً . واحتمال هذه الحادثة B هو مجموع احتمالات كافة نقاط العينة التي تحويها الحادثة العددية B ، وكل نقطة عينة (وهي متوالية من n من الحروف F و S) من هذه النقاط يجب أن تحوي الحرف S عدداً من المرات يساوي x والحرف F عدداً من المرات يساوي (n − x) . وبما أن التكرارات مستقلة عن بعضها البعض فسيكون لكل من هذه النقاط نفس الاحتمال وهو جداء n من الأعداد p و q بحيث يحوي p عدداً من المرات يساوي x ويحوي q عدداً من المرات يساوي (n − x) ، أي أنه يساوي $p^x q^{n-x}$. ويبقى أن نعرف عدد مثل هذه النقاط التي تحتويها الحادثة B . ونلاحظ أن هذا العدد يساوي عدد المرات التي يمكن أن نقسم فيها n موضعاً إلى زمرتين تتضمن إحداهما x موضعاً وتتضمن الأخرى n − x موضعاً ، وتحوي مواضع الزمرة الأولى الحرف S ومواضع الزمرة الثانية الحرف F . أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن تشكيل متوالية من n من الحروف S و F بحيث تحوي x مرة الحرف S و (n − x) مرة الحرف F . ونعلم أن هذا العدد هو متوافقات n شيئاً مأخوذ x منها في وقت واحد أي C_x^n. ومنه يكون احتمال الحادثة B هو :

$$P(x) = C_x^n \, p^x q^{n-x}$$

ونلاحظ أن :

$$\sum_{x=0}^{n} P(x) = \sum_{x=0}^{n} C_x^n \, p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

وهكذا تكون عبارة تابع التوزيع الثنائي ، حيث عدد التكرارات n واحتمال النجاح p هي :

$$P(x) = C_x^n \, p^x q^{n-x} \quad , \qquad x = 0, 1, 2, \dots, n \qquad (2)$$

مثال ٥ـ١ لوحظ لفترة طويلة من الزمن أن صياداً يصيب الهدف باحتمال 0.8 . فإذا أطلق 4 طلقات على هدف فما هو احتمال :

(أ) إصابة الهدف مرتين تماماً ؟

(ب) إصابة الهدف مرتين على الأقل ؟

(جـ) إصابة الهدف 4 مرات تماماً ؟

بفرض أن التكرارات مستقلة عن بعضها وأن احتمال كل منها $p = 0.8$ ، نلاحظ أن هذه التجربة هي تجربة ثنائية فيها $n = 4$ و $p = 0.8$ ومنه :

(ا) $$P(x) = C_x^4 (.8)^x (.2)^{4-x}$$

$$p(2) = C_2^4 (.8)^2 (.2) = \frac{4!}{2!2!} (.64)(.04) = .1536.$$

(ب) $$P(2 \text{ على الأقل}) = P(2) + p(3) + p(4)$$

$$= 1 - p(0) - p(1) = 1 - C_0^4 (.8)^0 (.2)^4 - c_1^4 (.8)(.2)^3$$

$$= 1 - .0016 - .0256 = .9728.$$

(جـ) $$p(4) = C_4^4 (.8)^4 (.2)^0 = \frac{4!}{4!0!} (.8)^4 (1) = .4096.$$

لاحظ أن هذه الاحتمالات سوف لا تكون صحيحة إذا قام الرامي بملاحظة موقع الطلقة في كل مرة ذلك لأنه سيستفيد من هذه الملاحظة في الطلقة التالية وعندها سوف لا تكون التكرارات مستقلة عن بعضها ومن المتوقع أن تزداد قيمة p من محاولة إلى أخرى .

مثال ٥ـ٢ يجري تفتيش الوسقات الكبيرة من البضاعة القادمة إلى منشأة صناعية بطريقة العينة . ولنفرض أنه تم فحص عشر قطع وتُرفض الوسقة إذا لاحظنا قطعتين مرفوضتين أو أكثر . وإذا احتوت وسقة على 5% تماماً من القطع المرفوضة فما هو احتمال قبول الوسقة ؟ رفضها ؟

ليكن x عدد القطع المرفوضة من عينة من 10 قطع . واحتمال الحصول على قطعة مرفوضة هو $p = .05$. فنجد :

$$P(x) = C_x^{10} (.05)^x (.95)^{10-x}$$

P (قبول الوسقة) $= P(0) + p(1) = .914,$

p (رفض الوسقة) $= 1 - p($قبول الوسقة$) = 1 - .914 = .086.$

مثال ٥ـ٣ : اختُبر سيروم جديد لتحديد فعاليته في منع الزكام ، وقد حُقن عشرة أشخاص بهذا السيروم وزوقبوا لفترة سنة . ووُجد أن ثمانية منهم لم يُصابوا بالزكام . ولنفرض أننا نعلم بأن احتمال عدم الإصابة بالزكام خلال سنة كاملة هو 0.5 . فما هو احتمال ألا يُصاب ثمانية أو أكثر علماً أن السيروم غير فعال في زيادة مقاومة الجسم للبر د ؟

بفرض أن السيروم غير فعال نجد أن احتمال عدم الإصابة هو $p = .5$.

وتابع توزيع x هو :

$$P(x) = C_x^{10} (.5)^x (.5)^{10-x} = C_x^{10} (.5)^{10},$$

$$P(x \geqslant 8) = P(8) + p(9) + p(10)$$

$$= c_8^{10} (.5)^{10} + c_9^{10} (.5)^{10} + c_{10}^{10} (.5)^{10} = .055.$$

ونلاحظ من الأمثلة الثلاثة السابقة أن تابع التوزيع الثنائي يقدم علاقة بسيطة لحساب احتمالات حوادث عددية ، وهي قابلة للتطبيق في صف واسع من التجارب التي نواجهها في الحياة اليومية . ولكن لا بد من الحذر عند استخدام تابع التوزيع الثنائي والتأكد من أن الحالة المدروسة تحقق بصورة مقبولة كل شروط التجربة الثنائية المذكورة في الفقرة (٥ـ١) .

ويلاحظ القارىء أيضاً أن الأمثلة (٥ـ١) ، (٥ـ٢) ، (٥ـ٣) هي مسائل احتمالية أكثر منها إحصائية . فقد فرضنا أن احتمال النجاح p ، وهو الذي يحدد تركيب المجتمع المدروس ، معروف ، وكان المطلوب هو حساب احتمال الحصول على عينة محددة . وإذا عكسنا الطريقة وافترضنا اننا نملك عينة من مجتمع لا نعرفه ونريد القيام باستقراء حول قيمة p فعندئذ يقدم المثالان (٥ـ٢)و(٥ـ٣) مسائل عملية ممتازة يكون الهدف النهائي فيها هو الوصول إلى

استقراء إحصائي . وسنناقش هاتين المسألتين بتفصيل أكبر في الفقرات القادمة .

٥ـ٣ متوسط وتشتت المتحول الثنائي : وفقاً لتعريف المتوسط والتشتت كما ذكرناهما في الفصل السابق نكتب :

$$\mu = E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, P(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, C_x^n\, q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

لنفرض الآن أن $y = x - 1$، وبما أن y لا يمكن أن تكون سالبة فإن y تتحول من 0 إلى $n - 1$. وهكذا نكتب :

$$\mu = E(x) = n \cdot p \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!\,(n-1-y)!} p^y q^{(n-1)-y}$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np \, . \qquad (3)$$

وبطريقة مشابهة نحسب $E[x(x-1)]$ فنجد :

$$E[x(x-1)] = \sum_{x=0}^{n} \frac{x(x-1)\,n!}{x(x-1)(x-2)!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

وبوضع $x - 2 = y$ أي $x = y + 2$ نكتب :

$$E[x(x-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!\,(n-2-y)!} p^y q^{(n-2)-y}$$

$$= n(n-)\,p^2\,(p+q)^{n-2} = n(n-1)\,p^2$$

ولكن :

$$E[x(x-1)] = E(x^2 - x) = E(x^2) - E(x)$$

ومنه :

$$E(x^2) = E[x(x-1)] + E(x) = n(n-1)p^2 + np$$

وهكذا يكون التشتت :

$$\sigma^2 = E(x-\mu)^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

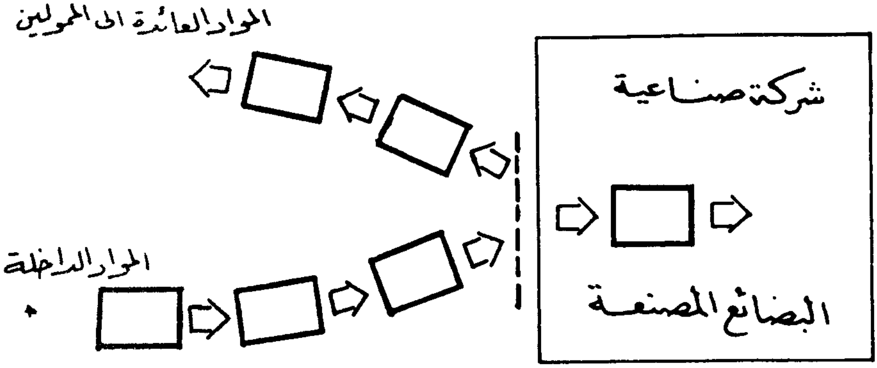
$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 =$$

$$np(1-p) = npq \qquad (4)$$

٥ـ٤ تدقيق وسقات البضاعة بطريقة العينة : يمكن اعتبار المنشأة الصناعية كطريقة تتحول فيها المادة الخام إلى مادة مصنعة ، ولكي تعمل المنشأة بكفاءة جيدة ترغب إداراتها ، حفاظاً منها على مستوى معين لجودة المصنوعات ، أن تجعل كمية المادة الخام الغير صالحة التي تدخل إلى المنشأة أصغر ما يمكن . كما تريد جعل عدد القطع المصنعة التي لا تخلو من عيب صناعي والذاهبة إلى المستهلكين أقل ما يمكن أيضاً . ولبلوغ هذا الهدف تُقيم « غربالاً » من أجل البضائع الداخلة إلى المصنع والخارجة منه ، في محاولة لمنع غير المناسب منها من العبور في كل من الاتجاهين .

ولتبسيط المناقشة لنفرض أن ما يهمنا هو « غربلة » البضاعة الواردة أي المواد الخام المؤلفة ، مثلاً ، من قطع على شكل صناديق كبيرة من مادة معينة ؟ ويصوّر الشكل (٥ـ١) عملية الغربلة هذه . فإما أن نقبل وسقة البضاعة الواصلة إلى المصنع إذا كانت نسبة غير الصالح منها نسبة مقبولة وإما أن تكون هذه النسبة عالية فنرفض البضاعة ونردها إلى المموّل . .

ويمكن إقامة « الغربال » بعدة طرق ، ومن الواضح أن أكمل هذه الطرق هو أن يتم الكشف على كامل البضاعة قطعة فأخرى . وللأسف فإن تكاليف مثل



شكل ٥ـ١ الغربلة من أجل عزل القطع غير الصالحة .

هذا الكشف قد تكون كبيرة إلى الحد الذي يجعلها غير واردة البتة من وجهة النظر الاقتصادية . هذا ناهيك عما يمكن أن يُقبل أو يُرفض خطأ من قبل المفتش خاصة بعد أن ينال منه الجهد مناله نظراً لضخامة العمل المطلوب . يُضاف إلى ذلك أنه قد تكون هذه الطريقة مرفوضة بالنظر إلى طبيعة المادة التي نكشف عليها . فإختيار صلاحية المصباح الصغير المستخدم في التصوير يؤدي إلى تلفه واختبار كل البضاعة في مثل هذه الحالة يعني أن لا يبق شيئاً لاستخدامه أو لبيعه .

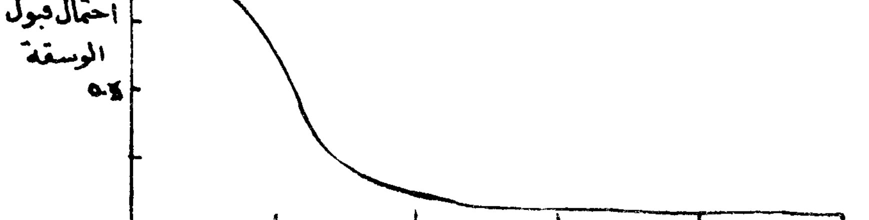
وطريقة الغربلة الثانية الأقل كلفة والتي توفر جهوداً كبيرة هي طريقة العينة الإحصائية وهي مشابهة للخطة التي ذكرناها في المثال (٥ـ٢) . وفيها نختار عينة من n قطعة من قطع الوسقة بطريقة عشوائية ونكشف عليها بدقة قطعة فأخرى لمعرفة ما تحويه العينة من قطع غير صالحة . وإذا كان عدد هذه القطع ولنرمز له بِـ x أكبر أو يساوي عدداً ، حددناه سلفاً ، a يسمى عدد القبول ، فنقرر قبول الوسقة . وفيما عدا ذلك نرفض الوسقة ونعيدها إلى المموّل . وقد كان عدد القبول في الخطة التي وضعناها في المثال (٥ـ١) هو $a = 1$.

ويلاحظ القارىء أن خطة العينة تعمل بطريقة موضوعية تماماً وتؤدي إلى

إستقراء يتعلق بمجتمع القطع التي تتألف منها الوسقة . ورفض الوسقة يعني أننا استقرأنا أن نسبة القطع الغير مقبولة p هي نسبة كبيرة ، وقبول الوسقة يعني أننا استقرأنا أن هذه النسبة صغيرة وتبقى في حدود المقبولة بالنسبة لعملية التصنيع . ويقدم قبول الوسقة مثالاً على عملية اتخاذ قرار إحصائي ليست في الحقيقة إلا طريقة للاستقراء الإحصائي .

وسوف لا تكون مناقشتنا تامة إذا أهملنا بعض النقاط المتعلقة بجودة الطريقة المستخدمة للقيام بالاستقراء . ومع أن خطة العينة التي عرضناها أعلاه هي طريقة لاتخاذ قرار إلا أنها ليست وحيدة . ويمكننا تغيير حجم العينة n ، عدد القبول a ، أو اتباع طريقة في اتخاذ القرار غير احصائية وراجعة للتقديرات الشخصية . فكيف يمكن مقارنة هذه الطرق المختلفة في اتخاذ القرار ؟ والجواب الطبيعي هو أن نختار الطريقة التي تؤدي إلى القرار الصحيح بأكبر تواتر ممكن ، أو على الوجه الآخر تؤدي بأقل نسبة من المرات إلى القرار غير الصحيح .

ويميز مهندسو الانتاج جودة خطة العينة بحساب احتمالات قبول الوسقة في حالة نسب مختلفة للقطع غير الصالحة في الوسقة . ويمثلون نتائج هذه الحسابات في شكل بياني يدعى « المنحني العملياتي المميز » لخطة العينة . ويبين الشكل (٥ـ٢) نموذجاً لمثل هذه المنحنيات . ولكي يؤدي الغربال مهمته بصورة مُرضية ، نرغب أن يكون احتمال قبول وسقات نسبة العطل فيها ضعيفة مرتفعاً وأن



شكل ٥ـ٢ نموذج لمنحني مميز عملياتي لخطة عينة .

يكون منخفضاً من أجل وسقات نسبة العطل فيها مرتفعة . ويلاحظ القارىء أن احتمال القبول سينحدر باستمرار مع ارتفاع نسبة العطل ، وهي النتيجة التي نتوقعها .

وعلى سبيل المثال إذا كان المموّل يضمن أن تحوي وسقاته نسبة من العطل أقل من 1% . وأن المصنع يمكن أن يعمل بصورة مرضية بوسقات تحوي نسبة من العطل أقل من 5% . فعندئذ يجب أن يكون احتمال قبول وسقات بنسبة من العطل أقل من 1% مرتفعاً . وما لم يكن الأمر كذلك فإن المموّل سيرفع أسعاره لتغطية نفقات إعادة وسقة ممتازة « تحوي أقل من 1% من العطل » إليه أو أنه سيُحمِّل ادارة المصنع نفقات إعادة الكشف على البضاعة . وعلى الوجه الآخر فإن احتمال قبول وسقات بنسبة من العطل تساوي 5% أو أكثر يجب أن يكون منخفضاً .

مثال ٥ـ٤ أحسب احتمال قبول وسقة عند استخدام خطة عينة فيها حجم العينة $n = 5$ وعدد القبول $a = 0$ وذلك من أجل نسب للقطع الغير صالحة تساوي $p = .1$, $p = .3$, و $p = .5$. ارسم المنحني العملياتي المميز لهذه الخطة .

لدينا

$$P(\text{القبول}) = P(0) = c_0^5\, p^0\, q^5 = q^5:$$

ومنه :

$$P(\text{القبول} / p = .1) = (.9)^5 = .590,$$

$$P(\text{القبول} / p = .3) = (.7)^5 = .168,$$

$$P(\text{القبول} / p = .5) = (.5)^5 = .031$$

ونعلم بالإضافة إلى ذلك أن احتمال القبول يجب أن يكون الواحد عندما يكون $p = 0$ وأن يكون صفراً عندما $p = 1$. وبرسم النقاط الخمسة يمكن تخطيط شكل تقريبي للمنحني العملياتي المميز وهو مبين في الشكل (٥ـ٣) .

وحساب احتمالات التوزيع الثنائي يمكن أن تصبح عملاً شاقاً من أجل n كبيرة .

ولتبسيط الحسابات نقدم في الملحق جدولا يعطي مجموع إحتمالات التوزيع الثنائي من $x = 0$ إلى $x = a$ حيث a عدد القبول . وذلك من أجل عينات بحجم n يساوي 5 ، 10 ، 15 ، 20 و 25. وسنستخدم هذا الجدول في المثال التالي :

مثال ٥ـ٥ ارسم المنحني العملياتي المميز لخطة عينة فيها $n = 15$ و $a = 1$.
سنحسب احتمال القبول من أجل $p = .1$ ، $p = .2$ ، $p = .3$ و $p = .5$. وهكذا نكتب :

$$P(\text{القبول}) = P(0) + P(1) = \sum_{x=0}^{x=a} P(x) = \sum_{x=0}^{x=a} C_x^{15} p^x q^{15-x},$$

ومنه :

$$P(\text{القبول} / p = .1) = C_0^{15}(.1)^0(.9)^{15} + C_1^{15}(.1)(.9)^{14} = .549,$$

وبصورة مشابهة :

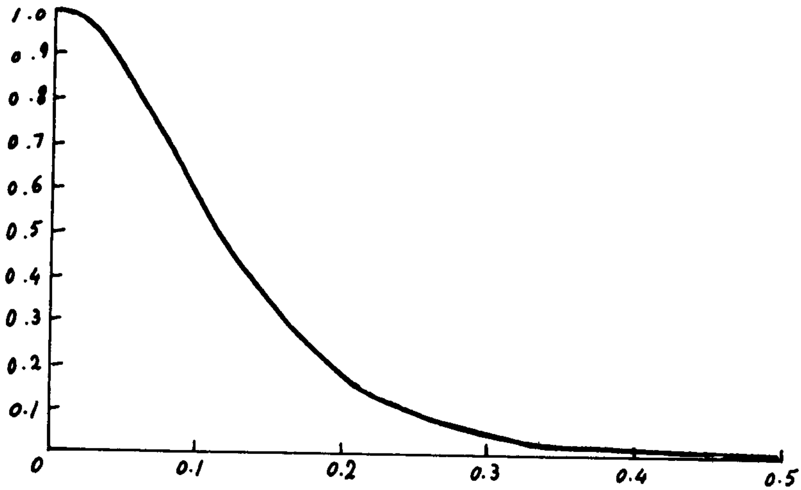
$$P(\text{القبول} / p = .2) = .167$$

$$P(\text{القبول} / p = .3) = .035$$

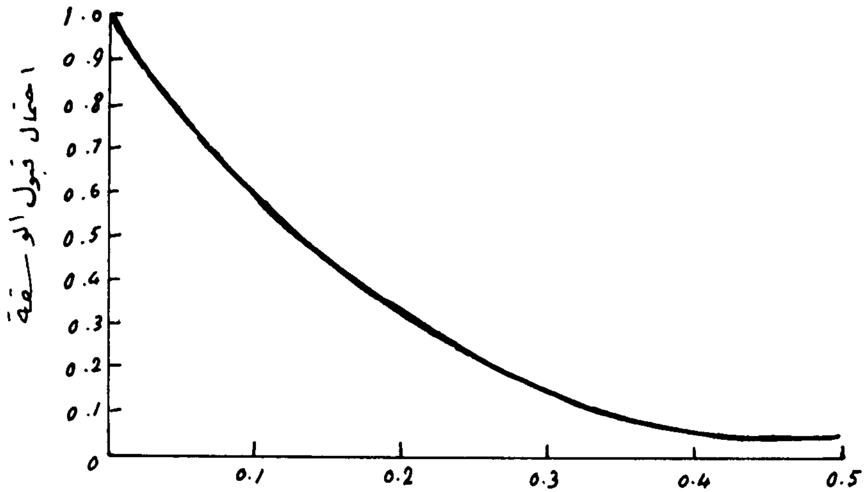
$$P(\text{القبول} / p = .5) = .000$$

والمنحني العملياتي المميز مبين في الشكل (٥ـ٤) .

وتُستخدم خطة العينة على نطاق واسع في الصناعة . ولكل خطة عينة منحن عملياتي مميز يميز الخطة عن غيرها ويقدم نوعاً من الوصف لحجم ثقوب الغربال . وسيختار مهندس الانتاج الخطة بحيث يحقق المتطلبات التي يفرضها واقعُه . فزيادة عدد القبول يزيد من احتمال القبول وبالتالي يوسع ثُقوب الغربال . كما تقدم زيادة حجم العينة قدراً أكبر من المعلومات التي يمكن أن نبني عليها قراراً وبالتالي تزيد من قدرة الطريقة المتبعة في اتخاذ القرار على التمييز . وهكذا ينحدر المنحني العملياتي المميز بسرعة مع ازدياد p عندما تكون n كبيرة .



الشكل ٥ـ٣ المنحني العملياتي المميز a = 0,n = 5



الشكل ٥ـ٤ المنحني العملياتي المميز a = 1; n = 15

٥ـ٥ اختبار فرضية : إن مسألة اللقاح ضد الزكام المعطاة في المثال (٥ـ٥) ، هي مسألة توضيحية لاختبار إحصائي لفرضية . وتتلخص المسألة في السؤال التالي : هل تقدم المعلومات التي تحويها العينة دلالة كافية على فعالية اللقاح ؟

ويحمل المنطق المستخدم في اختبار فرضية شبهاً كبيراً بالأسلوب المستخدم في قاعة محكمة . فعند محاكمة رجل متهم بالسرقة ، مثلاً ، تفترض المحكمة أن المتهم بريء حتى تثبت إدانته . ويجمع ممثل النيابة ويقدم كل الأدلة المتوفرة له في محاولة لنقض فرضية البراءة وبالتالي الحصول على إدانة المتهم وحكمه . وتصور المسألة الإحصائية اللقاح ضد الزكام كمتهم . والفرضية التي سيجري اختبارها ، وتدعى الفرضية الابتدائية ، هي كون اللقاح غير فعال . ودلالات الدعوى موجودة ضمن العينة المسحوبة من المجتمع . ويعتقد المجرب وهو يلعب دور ممثل النيابة أن اللقاح مفيد فعلاً . ويحاول تبعاً لذلك استخدام الدلالات المتوفرة في العينة لرفض الفرضية الابتدائية وبالتالي دعم قناعته بأن اللقاح هو في الحقيقة ناجح جداً ضد الزكام . وسيتعرف القارىء على هذا الأسلوب كشكل أساسي من أشكال الطريقة العلمية حيث يتوجب وضع النظريات المقترحة على محكّ الواقع .

ويبدو بديهياً أن نختار عدد من يجانبهم الزكام x كقياس لمقدار البيّنة التي تحتويها العينة . وإذا كان x كبيراً فإننا سنميل إلى رفض الفرضية الابتدائية واستنتاج أن اللقاح فعّال . وعلى الوجه الآخر سيقدم صغر x القليل من الدعم لرفض الفرضية الابتدائية . وفي الحقيقة إذا كانت الفرضية الابتدائية صحيحة واللقاح غير فعال فإن احتمال النجاة من الزكام طيلة فصل الشتاء سيكون $p = \frac{1}{2}$ وستكون القيمة المتوسطة لِـ x هي :

$$E(x) = np = 10\left(\tfrac{1}{2}\right) = 5.$$

وسوف لا يجد معظم الناس صعوبة في تكوين حكمهم الخاص في حالة $x = 10$ أو في حالة x تساوي $5, \quad 4, \quad 3, \quad 2,$ أو 1 حيث تقدم في الظاهر

دلالة كبيرة لرفض أو قبول الفرضية على الترتيب . ولكن ماذا يمكن أن يُقال في حالات أقل وضوحاً مثل $x = 7$ أو 8 أو 9 ؟ وسواء اتخذنا قراراً بطريقة ذاتية أو موضوعية فمن الواضح أننا سنختار الطريقة التي تعطي أقل احتمال لاتخاذ قرار غير صحيح .

وسيختبر الاحصائي الفرضية الابتدائية بطريقة موضوعية ولكنها مشابهة لما يمكن أن نصل إليه باللجوء الى الحس السليم . وصانع القرار ويدعى عادة « الاحصاء » يُحسب عادة من العينة وفي مسألتنا فإن هذا الاحصاء هو عدد من نجوا من الإصابة بالزكام x . وسنأخذ عندئذ في اعتبارنا كل القيم الممكنة لهذا الاحصاء وهي هنا $x = 0,1,2,...,9,10$ ، ثم نقسم هذه القيم إلى مجموعتين ندعو إحداها منطقة الرفض والأخرى منطقة القبول . وهكذا تنفِّذ التجربة ونلاحظ قيمة « صانع القرار » أو « الاحصاء » x . فإذا أخذ x قيمة من منطقة الرفض رفضنا الفرضية . وفيما عدا ذلك نقبلها . وعلى سبيل المثال يمكننا اختيار منطقة الرفض من النقاط $x = 8$ أو 9 ، أو 10 . ونعتبر القيم الباقية لِ x كمنطقة قبول . وبما أننا لاحظنا القيمة 8 في مثالنا فإننا نرفض الفرضية الابتدائية بأن اللقاح غير فعال ونستنتج أن احتمال النجاة من الزكام طيلة فصل الشتاء هي أكبر من $\frac{1}{2}$ عند استخدام اللقاح . والآن ما هو احتمال أن نرفض الفرضية الابتدائية مع أنها في الواقع صحيحة ؟ واحتمال الرفض الخاطىء للفرضية الابتدائية هو احتمال أن تأخذ x القيمة 8 ، 9 أو 10 ، علماً أن $p = \frac{1}{2}$ وهذا هو ، في الحقيقة ، الاحتمال الذي حسبناه في المثال (٥ـ٣) ووجدناه مساوياً لِ $.055$. وبما أننا قررنا رفض الفرضية الابتدائية ولاحظنا أن احتمال أن يكون هذا الرفض غير صحيح هو احتمال بسيط فإن هذا يولد لدينا ثقة غير قليلة بأننا اتخذنا القرار الصحيح .

وعند تأمل المسألة قليلاً سيلاحظ القارىء أن صانع الأدوية سيواجه نوعين من الخطأ . فمن جهة يمكن أن يرفض الفرضية الابتدائية ويستنتج خطأً أن اللقاح

فعال . والاستمرار في اختبار أكثر كلفة وأشمل أو انتاج الدفعة الأولى من اللقاح وطرحها للاستخدام سيسبب .كل منها خسارة مالية لأن الحقيقة ستكشف عن نفسها . ومن الجهة الأخرى يمكن أن يقرر عدم رفض الفرضية الابتدائية ويستنتج خطأ أن اللقاح غير فعال . وسيُنتج هذا الخطأ خسارة الفوائد الجمة التي كان سيقدمها طرح اللقاح للاستخدام على نطاق واسع .

ويدعى رفض الفرضية الابتدائية عندما تكون صحيحة بالخطأ من النوع الأول أو الخطأ من النوع I في اختبار إحصائي . ونرمز لاحتمال ارتكاب الخطأ من النوع I بِـ α . وسيزداد حجم الاحتمال α أو يتناقص مع ازدياد أو تناقص حجم منطقة الرفض . وبالقدر الذي تمثل فيه α مخاطرة الرفض الخاطىء يمكن أن نتساءل لماذا لا نختار منطقة الرفض صغيرة قدر الامكان ونقلل بذلك احتمال مثل هذه المخاطرة ؟ فمثلاً لماذا لا نختار $x = 10$ فقط كمنطقة رفض في مثالنا هنا ؟ ولكن لسوء الحظ فإن تخفيض α يزيد من احتمال ارتكاب خطأ من نوع آخر وهو احتمال عدم رفض الفرضية الابتدائية مع أنها غير صحيحة ، وأن الصحيح هو فرضية بديلة تختلف عنها . ويدعى هذا الخطأ بالخطأ من النوع الثاني أو الخطأ من النوع II في اختبار إحصائي ونرمز لاحتمال مثل هذا الخطأ بالرمز β . أي أن β هو احتمال القبول الخاطىء . ومن أجل حجم ثابت للعينة n تكون العلاقة بين α و β علاقة عكسية . فعندما تزداد واحدة منها تتناقص الأخرى . وتقدم زيادة حجم العينة معلومات أكثر يمكن أن نبني عليها قرارنا وبالتالي نخفض كلاً من α و β. ويقيس احتمالا الخطأ من النوعين I و II أي α و β مخاطرة التورط بقرار غير صحيح . ويختار المجرب وفقاً لما تمليه طبيعة الحالة التجريبية التي يدرسها حجم هذين الاحتمالين. وتبعاً لذلك يقوم باختيار حجم منطقة الرفض وحجم العينة . أما شكل منطقة الرفض أو تركيبها فإنه كما يلاحظ القارىء يشكل أمراً حاسماً بالنسبة لمجمل مسألة الاختبار الإحصائي ويتوقف عليهإلى حد كبير قوة وكفاءة الاختبار الإحصائي .

وأخيراً نلفت انتباه القارىء إلى التشابه القائم بين مسألة الكشف على بضاعة بطريقة العينة ومسألة اختبار فرضية . وهما متكافئتان نظرياً لأن كلاً منهما يحوي استقراء صِيغَ على شكل اتخاذ قرار يتعلق بقيمة الوسيط المجهول p للمجتمع الموافق لتجربة ثنائية .

٥ـ٦ توزيع بواسون : لتوزيع بواسون مجالات واسعة في التطبيق وهو يقدم بصورة خاصة نموذجاً جيداً للمعلومات الإحصائية التي تأخذ شكل التعداد حيث المتحول x هو تعداد يمثل عدد « الحوادث النادرة » الملحوظة في وحدة قياس معينة زمناً كانت أم مسافة أم مساحة أم حجماً . ونوضح بالأمثلة التالية التي نطبق فيها عادة توزيع بواسون :

١ ـ ليكن x عدد المخابرات الهاتفية المتبادلة بين الساعة 3 و $t + 3$ مثلاً. ولنفرض أننا نعلم من خبرة سابقة أن تبادل المخابرات الهاتفية يتم بمعدل 120 في الساعة بين الثانية عشر والثانية بعد الظهر .

٢ ـ ليكن x عدد باكيتات الزبدة المباعة يوم الاثنين في دكانة بقالة .

٣ ـ ليكن x عدد مرات العطل الناشىء عن الاطارات خلال أسبوع في أسطول نقل بري من الشاحنات .

٤ ـ ليكن x عدد الذرات الصادرة في الثانية عن كمية من مادة مشعة .

٥ ـ ليكن x عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة .

٦ ـ ليكن x عدد الالكترونات التي يصدرها مهبط مسخّن في فترة زمنية محددة .

٧ ـ ليكن x عدد ذرات الغاز في منطقة جزئية v من وعاء حجمه V .

٨ ـ ليكن x عدد حوادث السيارات خلال فترة زمنية محددة .

٩ ـ ليكن x عدد البكتريا الموجودة في حجم صغير من سائل معين .

وتكفي هذه الأمثلة لتوضيح مدى تنوع واتساع تطبيقات التوزيع البواسوني . ويمكن التوصل إلى عبارة التوزيع البواسوني بطريقتين سنستعرضهما فيما يلي :

١ ـ التوزيع البواسوني كنهاية (أو حالة حدية) للتوزيع الثنائي : لنقم بالتعديل التالي لطريقة كتابة التوزيع الثنائي :

$$P(x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\dots,n.$$

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)\frac{p^x(1-p)^{n-x}}{x!}$$

لنفرض أن n كبير جداً و p صغير جداً بحيث أن جداءهما np وهو المتوسط يبقى مساوياً لعدد ثابت λ . فإذا عوضنا p بِـ $\frac{\lambda}{n}$ نجد أن :

$$P(x) = \frac{n}{n}\ \frac{n-1}{n}\ \frac{n-2}{n}\ \dots\ \frac{n-x+1}{n}\ \frac{\lambda^x(1-\lambda/n)^n(1-\lambda/n)^{-x}}{x!}$$

ومن أجل n كبيرة جداً وقيمة ثابتة لِـ x صغيرة جداً بالنسبة لِـ n تكون كل من النسب $\frac{n-1}{n}$ ، $\frac{n-2}{2}$ ، . . . ، $\frac{n-x+1}{n}$ ، $(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}$ قريبة جداً من الواحد ويمكن كتابة p (x) بصورة تقريبية على الشكل :

$$P(x) = \frac{\lambda}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

حيث = تعني يساوي تقريباً . ويُبرهن في الرياضيات أنه عندما تصبح n كبيرة جداً فإن الكمية $(1+\frac{1}{n})^n$ تقترب من عدد نرمز له بِـ e حيث $e = 2.7183\dots$ ونعبر عن ذلك بقولنا أن $(1+\frac{1}{n})^n$ تنتهي إلى e عندما تنتهي n إلى اللانهاية . كما يمكن البرهان على أن $(1-\frac{\lambda}{n})^n$ تنتهي الى $e^{-\lambda}$ عندما تتزايد n بلا تناه . وهكذا فإن الشكل الحدي لعبارة p (x) عندما تنتهي n إلى اللانهايه هو :

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}. \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

وهي عبارة تابع التوزيع البوسوني . وستعطي هذه العبارة نفس الاحتمالات التي يعطيها تابع التوزيع الثنائي تقريباً وذلك شريطة أن يكون n كبيراً و np صغيراً نسبياً (نطلب عادة أن يكون($np<5$) . والقيم التجميعية لتابع توزيع بواسون أي $\sum_{x=0}^{a} P(x)$ معطاة من أجل قيم مختلفة لِ λ في الجدول الموافق في الملحق .

٢ـ١ اشتقاق تابع توزيع بواسون من مجموعة من المسلمـات : لنأخذ وحدة زمنية مثبتة T (ربما تكون ثانية ، يوم ، أو أسبوع ...) يمكن أن تقع خلالها حوادث معينة . ولنفرض أن هذه الحوادث تقع مستقلة عن بعضها البعض وأنه من أجل فترات زمنية قصيرة Δt يكون احتمال وقوع حادثة واحدة متناسباً مع طول الفترة Δt ، أي يساوي $c\frac{\Delta t}{T}$ حيث c ثابت خلال الفترة T . كما نفترض أن احتمال وقوع حادثتين أو أكثر خلال الفترة Δt صغير جداً بحيث يمكن إهماله عملياً . ويمكن بدءاً من هذه الفرضيات أن نشتق بصورة رياضية عبارة توزيع بواسون فنجد :

$$P_x(t) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (6)$$

حيث $\frac{ct}{T}=\lambda$. أي أن احتمال وقوع x حادثة قبل انقضاء الفترة t معطى بهذه العلاقة . ولو عدنا إلى مثال المخابرات الهاتفية المعطى أعلاه واعتبرنا وحدة الزمن T هي الدقيقة فإن معدل ورود المخابرات في الدقيقة هو$2=\frac{120}{60}$ وهي قيمة ثابت التناسب $\frac{c}{T}$. وهذا يكفي لكتابة عبارة تابع التوزيع البواسوني الموافق لهذه الحالة وهو :

$$P_x(t) = (2t)^x e^{-2t}/x! \qquad , \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

وهو احتمال ورود x مخابرة هاتفية خلال فترة زمنية t .

ويمكن التحقق بسهولة من أن عبارة P (x) تحقق شرطي تابع التوزيع الاحتمالي فمن الواضح أن $P(x)\geq 0$ لأن كلاً من الكميات λ^x ، $x!$ و $e^{-\lambda}$ لا يمكن أن يكون سالباً . ويبرهن في التحليل الرياضي أن :

وهكذا نجد أن :

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} . e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

ولحساب متوسط وتشتت x نكتب :

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda}$$

وبوضع $x - 1 = y$ نجد :

$$E(x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y+1}}{y!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = \lambda . 1 = \lambda . \qquad (7)$$

أي أن المتوسط يساوي λ كما نتوقع منذ البداية .

$$E[x(x-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(x-1)\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} e^{-\lambda}$$

وبوضع $x - 2 = y$ نجد :

$$E(x^2 - x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y+2}}{y!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \, 1 = \lambda^2$$

ومنه :

$$E(x^2) = \lambda^2 + E(x) = \lambda^2 + \lambda$$

أي أن :

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad (8)$$

وهكذا نجد أن التشتت يساوي المتوسط . ويمكن اعتبار هذه الخاصة كخاصة مميزة للمجتمعات التي تقبل توزيع بواسون كنموذجها الاحتمالي . وتحقق مثل هذه الخاصة في مجتمع يجعلنا نشكّ بأن أفضل نموذج احتمالي يمثله هو النموذج البواسوني .

تمارين

١ ـ اقذف قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات . ليكن x عدد أوجه النقش الملحوظة .

(أ) استخدم التوزيع الثنائي لحساب الاحتمالات الموافقة لقيم x وهي $x = 0,1,2,3$

(ب) ارسم تابع التوزيع بصورة مشابهة للشكل (٤ـ١) .

(ج) احسب متوسط x وانحرافه المعياري .

(د) أوجد النسبة من مجتمع القياسات الواقعة ضمن انحراف معياري واحد على جانبي المتوسط . أعد من أجل انحرافين معياريين . هل تتفق نتائجك مع نظرية تشيبيشيف والقاعدة التجريبية ؟

٢ ـ لنفرض أن قطعة النقود غير متوازنة إلى حد كبير وأن احتمال ظهور وجه النقش هو $p = .01$. أعد نفس الخطوات (أ) ، (ب) و(ج) من التمرين السابق . ولاحظ أن تابع التوزيع يفقد تناظره عندما لا تكون p مساوية للنصف .

٣ ـ احتمال كشف جهاز رادار لطائرة معادية هو 0.9 . إذا كان لدينا خمسة أجهزة فما هو احتمال ظهور الطائرة المعادية على أربع منها تماماً ؟ (نفرض أن هذه الأجهزة تعمل مستقلة عن بعضها البعض) . ما هو احتمال اكتشاف وجود طائرة معادية في سمائنا ؟

٤ ـ إذا علمنا أن 10% من نوع معين من أنابيب التلفيزيون ستحترق قبل أنتهاء مدة كفالتها . إذا بيع ألف أنبوب ، فما هو متوسط وتشتت x حيث x هو عدد الأنابيب التي لم تعمل حتى انتهاء مدة كفالتها ؟ ما هي الحدود التي نتوقع

أن تقع x ضمنها ؟ (استخدم نظرية تشيبيشيف) .

٥ ـ لنفرض أن المحركات الأربع لطائرة تجارية مرتبة بحيث تعمل مستقلة عن بعضها . وأن احتمال عطل أي منها والطائرة في الجو هو 01. . فما هو احتمال حدوث ما يلي عند الطيران :

(أ) ألا يقع أي عطل ؟

(ب) ألا يقع أكثر من عطل واحد ؟

٦ ـ لنفرض أن 90% من طلاب مادة الإحصاء ينجحون . ما هو احتمال فشل إثنين على الأقل من صف يحوي عشرين طالباً ؟

٧ ـ بالإشارة إلى التمرين السابق وباعتبار x عدد الفاشلين في الصف فما هو توقع x وانحرافه المعياري ؟ وضمن أية حدود نتوقع أن يقع x ؟

٨ ـ لنفرض أن واحداً من عشرة من الكتب الدراسية للمرحلة الجامعية الأولى يصيب نجاحاً باهراً . اختارت دار نشر عشرة كتب جديدة لنشرها . فما هو احتمال :

(أ) أن ينال واحد منها فقط نجاحاً باهراً ؟

(ب) على الأقل واحد ؟

(ج) على الأقل اثنين ؟

٩ ـ يتفق شار وبائع على استخدام طريقة الكشف بالعينة مستخدمين عينة حجمها $n = 5$ وعدد قبول $a = 0$. ما هو احتمال أن يقبل الشاري وسقة نسبة العطل الحقيقية فيها : (أ) $p = .1$ (ب) $p = .3$ (ج) $P = .5$

(د) $p = 0$ (هـ) $p = 1$

ارسم المنحني العملياتي المميز لهذه الخطة .

١٠ ـ أعد التمرين (٩) من أجل $n = 5$ ، $a = 1$.

١١ ـ أعد التمرين (٩) من أجل $n = 10$ ، $a = 0$.

١٢ ـ أعد التمرين (٩) من أجل $n = 10$ ، $a = 1$.

١٣ ـ ارسم المنحنيات العملياتية المميزة للخطط الأربعة في التمارين (٩) ، (١٠) ، (١١) و (١٢) على نفس الورقة ما هو تأثير زيادة عدد القبول a مع بقاء n ثابتة ؟ ما هو تأثير زيادة حجم العينة n ، عندما تبقى a ثابتة ؟

١٤ ـ يطور مصنع للمواد المنظفة نوعين جديدين A و B من مساحيق التنظيف وترغب إدارة المصنع في إخضاعهما لتقدير ربة البيت لتحديد أيهما الأفضل . وقد استُخدم النوعان في كل من خمسة عشر منزلاً . :

(أ) إذا لم يوجد في الحقيقة أي فرق في المواصفات بين النوعين فما هو احتمال أن تفضل عشر ربات بيوت أو أكثر الصنف A ؟

(ب) أن تفضل عشر ربات بيوت أياً من الصنفين A أو B ؟

١٥ ـ عرف الخطأ من النوع I في اختبار إحصائي .

١٦ ـ عرف الخطأ من النوع II في اختبار إحصائي .

١٧ ـ نقوم بتجربة لاختبار أن قطعة نقود متوازنة ، وذلك بقذف قطعة النقود أربع مرات وملاحظة عدد أوجه النقش التي تظهر . ونرفض الفرضية إذا كان هذا العدد صفراً أو أربعة .

(أ) ما هو احتمال الخطأ من النوع I في هذا الاختبار ؟

(ب) إذا كانت القطعة فعلاً غير متوازنة واحتمال ظهور وجه النقش هو 0.7 فما هو احتمال الخطأ من النوع II في هذا الاختبار ؟

١٨ ـ نتوقع أن يولّد زوج من الخنافس نسلاً بعينين سوداوين بنسبة 30% من المرات . ولاختبار هذه النظرية نلاحظ ثلاثاً من نسلها فنجد أن عيونها زرقاء . فهل تقدم هذه النتيجة دلالة كافية لنقض النظرية ؟ علّل اجابتك إحصائياً .

١٩ ـ نفذنا عدداً من تجارب علم النفس كما يلي : جذبنا فأراً إلى نهاية حاجز ينقسم بحيث يقودها إلى أحد بابين. وهدف التجربة أساساً هو تحديد ما إذا كان للفأر قدرة على تفضيل أحد الممرين . من أجل تجربة مؤلفة من 5

محاولات لوحظت النتائج التالية :

الباب الذي اختير	المحاولة
2	1
1	2
2	3
2	4
2	5
2	6

(أ) عبر عن الفرضية التي نودّ اختبارها .

(ب) ليكن x عدد المرات التي يختار فيها الفأر الباب الثاني . فما هي قيمة α في هذا الاختبار إذا احتوت منطقة الرفض $x = 0$ و $x = 6$؟

(د) ما هي قيمة β من أجل الفرضية البديلة $p = .8$ ؟

٢٠ ـ سجلنا عدد المآخذ الكهربائية التي تحوي عيباً صناعياً في كل من خطي إنتاج مختلفين A و B وذلك يومياً ولمدة عشرة أيام فحصلنا على النتائج التالية :

B	A	اليوم
201	172	1
179	165	2
159	206	3
192	184	4
177	174	5
170	142	6
182	190	7
179	169	8
169	161	9
210	200	10

ولنفرض أن لكل من الخطين نفس القدر من الإنتاج الكلي اليومي . قارن عدد القطع غير الصالحة الناتجة عن الخطين كل يوم وليكن x عدد الأيام التي

يكون فيها B متجاوزا لِ A . فهل تقدم هذه المعلومات دلالة كافية للقول بأن الخط B ينتج في المتوسط قطعاً غير صالحة أكثر من A ؟ أعرض الفرضية التي ستختبرها واستخدم x كإحصاء لهذا الاختبار .

٢١ ـ بالعودة إلى التمرين (١٤) ليكن P احتمال أن تفضل ربة البيت الصنف B على الصنف A ولنفرض أننا نرغب في اختبار الفرضية بأنه لا يوجد أي فرق ملحوظ بين الصنفين ، وبعبارة أخرى أن $p = \frac{1}{2}$. وليكن إحصاء الاختبار هو x عدد المرات التي يجري فيها تفضيل A على B .

(أ) أحسب قيمة α من أجل هذا الاختبار إذا كانت منطقة الرفض تشمل القيم 0 ، 1 ، 14 ، و 15.

(ب) إذا كانت P في الحقيقة هي 0.8 فما هي قيمة β من أجل الاختبار المعرف في (أ) ؟

(جـ) لنفرض الآن أننا كبرنا منطقة الرفض بحيث تشمل القيم 0 ، 1 ، 2 ، 13 ، 14 ، و 15. فما هي قيمة α لهذا الاختبار الجديد ؟ وهل يجب أن تكون قيمة α هنا أكبر أو أصغر من قيمتها في (أ) ؟

(د) إذا كانت $p = 0.8$ فعلاً فما هي قيمة β من أجل الاختبار المذكور في (جـ) ؟ قارن هذه القيمة مع قيمة β المحسوبة في (ب) .

٢٢ ـ يستلم مقسم الهاتف المخابرات بين الساعة العاشرة والثانية عشره بمعدل مخابرتين في الدقيقة . فما هو احتمال ألا يستلم المقسم أية مخابرة خلال فترة دقيقة ؛ أن يستلم مخابرتين خلال فترة دقيقة ؛ أن يستلم مخابرتين خلال خمس دقائق ؛ ألا يستلم أية مخابرة خلال خمس دقائق ؟

٢٣ ـ لنفرض أن مساحة صغيرة من زجاجة مجهرية لفحص الدم تحتوي من أجل شخص طبيعي على عشر كريات حمراء في المتوسط . ما هو احتمال أن تحوي زجاجة من دم شخص طبيعي في تلك المساحة الصغيرة على أقل من 6 كريات حمراء ، ألا تحوي أية كرة حمراء ؟