الفصل الثامن

الاستقراء في حالة عينات صغيرة

٨ـ١ مقدمة : ناقشنا في الفصل السابق القيام باستقراء حول متوسط مجتمع ومقارنة متوسطي مجتمعين ولكن في حالة عينات كبيرة الحجم إلى حدّ يمكن معه الاستفادة من نظرية النهاية المركزية واعتبار التوزيع الطبيعي المعياري كتوزيع تقريبي للمتحول :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (1)$$

وافترضنا عند القيام باستقراء حول μ أن الانحراف المعياري σ معروف أو أن حجم العينة الكبير يسمح بتقريب σ بالانحراف المعياري للعينة s دون أن يؤثر ذلك في نتائج الاستقراء . ولكن غالباً ما تضع كلفة العينة والوقت المتوفر ، بالإضافة إلى عوامل أخرى . حداً لحجم العينة بحيث يصبح الحجم الكبير المطلوب غير عملي . وفي هذه الحالة لا يمكن اللجوء إلى طرق الاستقراء الموافقة لعينات كبيرة الحجم . وسندرس في هذا الفصل طرق استقراء مناسبة لحالات يكون فيها حجم العينة صغيراً وتتعلق بمتوسط مجتمع وتشتت مجتمع ومقارنة متوسطي مجتمعين ومقارنة تشتتي مجتمعين .

وقد عرفنا تشتت العينة في الفصل الثاني بالعبارة :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (2)$$

ويشكل s^2 تقديراً منصفاً لِ σ^2 تشتت المجتمع الذي جاءت منه العينة ذلك لأن :

$$E[(n-1)S^2] = E\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = E\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)$$

$$= E\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\Big) = E\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2nE(\bar{x}^2) + nE(\bar{x}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}E(x_i^2) - nE(\bar{x}^2)$$

وذلك بالاستناد إلى خواص التوقع الرياضي المذكورة في الفقرة (٤ـ٥) .

ولكن من تعريف التشتت نعلم أن : $E(x_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$

حيث $\mu = E(x)$. وأن $E(\bar{x}^2) = \sigma_{\bar{x}}^2 + [E(\bar{x})]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. ومنه :

$$E[(n-1)S^2] = (n-1)E(S^2) = n\sigma^2 + n\mu^2 - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = (n-1)\sigma^2$$

أي أن :

$$E(S^2) = \sigma^2 \qquad (3)$$

وتشتت العينة s^2 هو إذن تقدير منصف لتشتت المجتمع الذي جاءت منه العينة .

ولكن ما هو توزيع هذا التقدير المنصف s^2 . أي إذا أخذنا على التوالي عينات متكررة من نفس المجتمع ، لها نفس الحجم n ، ثم حسبنا تشتت كل منها لنجد قيمة لِ s^2 ، وأقمنا لهذه المجموعة الكبيرة جداً من قيم s^2 مضلع تكرار نسبي فكيف سيكون شكل هذا التوزيع التكراري . وما نستطيع الجزم به هو أن مثل هذا التوزيع يبدأ بِ $s^2 = 0$ لأنه لا يمكن لأي من قيم s^2 أن تكون سالبة وأن متوسط هذا التوزيع هو σ^2 أي أنه يتمركز حول النقطة σ^2 ولكنه خلافاً لما وجدناه في توزيع $\bar{x}$ فإنه غير متناظر . وسيعتمد شكل هذا التوزيع ، على طبيعة المجتمع الذي نسحب منه العينات المتكررة ، وعلى حجم العينة n .

وإذا فرضنا الآن أن المجتمع الذي نسحب منه العينة هو مجتمع طبيعي محدد ، أي متوسطه μ وتشتته σ^2 محددان، فإن شكل التوزيع سيكون مستقلاً عن قيمة المتوسط μ ولكنه سيعتمد على قيمة σ^2 وعلى حجم العينة n .

ومن الشاق بالطبع أن نعود في كل مسألة تطبيقية إلى توزيع مختلف وفقاً لقيم

و σ^2 سواء أكان ذلك من أجل تحديد منطقة الرفض في اختبار إحصائي أو لوضع حدود لخطأ التقدير أو وضع مجال ثقة معين . ومن حسن الحظ أنه يمكن تبسيط العمل باعتماد منحن معياري لا يعتمد شكله على قيمة σ^2 هو المنحني χ^2 الذي عرفناه في الفقرة (٦-٦) . ويُبرهن في الإحصاء الرياضي أنه إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي نجهل قيمة متوسطه μ وقيمة تشتته σ^2 فإن منحني الكثافة الاحتمالية للمتحول $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ، حيث يرمز S^2 لتشتت العينة ، هو المنحني χ^2 المعرف في الفقرة (٦-٦) بـ $(n-1)$ درجة من الحرية . ونقول عادة أن $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ يتبع التوزيع χ^2 بـ $(n-1)$ درجة من الحرية ونكتب $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$. وسنستفيد من هذه النتيجة عند القيام باستقراءات حول تشتت مجتمع .

ولنعد الآن إلى مطلع الفقرة حيث ذكرنا أنه من أجل n كبيرة يكون التوزيع الاحتمالي للكمية $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ هو التوزيع الطبيعي المعياري إما تماماً (إذا كان المجتمع الذي أخذنا منه العينة هو المجتمع الطبيعي) أو بصورة تقريبية إذا كان المجتمع الذي نسحب منه العينة ليس بالمجتمع الطبيعي وذلك تطبيقاً لنظرية النهاية المركزية . ولكن في حالة n صغيرة وحيث لا يجوز لنا اللجوء إلى نظرية النهاية المركزية فمن الطبيعي وضع s محسوبة من العينة بدلاً من σ . وكون العينة صغيرة يجعلنا نشك في أن تكون s قيمة تقريبية مقبولة لـ σ . وهكذا نفقد كل أساس نظري أو منطقي يسمح لنا بالقول بأن توزيع المتحول الجديد $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ هو التوزيع الطبيعي . ومع أن متوسط s^2 هو σ^2 تماماً إلا أن احتمال كون s^2 أقل من σ^2 يزيد على النصف كما نرى من توزيع s^2 المذكور أعلاه ومن جدول التوزيع χ^2 وهذا يحملنا على الاعتقاد بأن منحني الكثافة للمتحول الجديد سيكون أكثر انتشاراً .

وعندما تزداد n فإن s^2 يقترب من σ^2 ويقترب التوزيع الجديد من التوزيع الطبيعي المعياري . ويُبرهن في الاحصاء الرياضي أنه إذا كانت

$x_1, x_2, \ldots x_n$ عينة من توزيع طبيعي متوسطة μ وتشتته σ^2 فإن توزيع المتحول :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \qquad (4)$$

هو توزيع ستيودنت أو التوزيع t بِـ (n − 1) درجة من الحرية الذي عرفناه في الفقرة (٦ ـ ٦) . وسنستخدم هذا التوزيع بصورة خاصة عند القيام باستقراءات تتعلق بمتوسط مجتمع أو مقارنة متوسطي مجتمعين في حالات يكون فيها حجم العينة صغيراً . والجدير بالذكر أن $\bar{x}$ متوسط عينة مأخوذة من مجتمع طبيعي وتشتت هذه العينة هما متحولان مستقلان .

٨ـ٢ الاستقراء الاحصائي لمتوسط مجتمع في حالة عينات صغيرة الحجم :

لاختبار الفرضية

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

ضد الفرضية البديل :

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

نستخدم إحصاء الاختبار :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

ومن أجل مستوى من الأهمية يساوي α نأخذ كمنطقة رفض المنطقة الواقعة إلى يمين $t_\alpha(n-1)$ أي قيمة التوزيع t بِـ (n − 1) درجة من الحرية التي يقع إلى يمينها α من المساحة الكلية تحت منحني الكثافة الاحتمالية لِـ t . ونحصل على هذه القيم من جدول التوزيع t ولإجراء الاختبار نحسب قيمة t بتعويض $\bar{x}$ و S من العينة و μ_0 كما تحددها الفرضية H_0 فإذا كانت $t > t_\alpha(n-1)$ نرفض الفرضية H_0 وفيما عدا ذلك نقبلها .

ولإقامة $(\alpha - 1)$ مجال ثقة حول μ نجد بطريقة مماثلة لما رأيناه في الفصل السابق أن مجال الثقة هو :

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\, S/\sqrt{n} \qquad (5)$$

ولاختبار الفرضية :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

ضد الفرضية البديل :

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

نستخدم أيضاً إحصاء الاختبار :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

وتكون منطقة الرفض ، من أجل مستوى الأهمية α ، هي المنطقة الواقعة إلى يمين $t_{\alpha/2}(n-1)$ أو إلى يسار $-t_{\alpha/2}(n-1)$. وهكذا نحسب قيمة إحصاء الاختبار t ، ونرفض الفرضية إذا وجدنا أن $t > t_{\alpha/2}$ أو $t < -t_{\alpha/2}$ ، ونقبلها فيما عدا ذلك .

مثال ٨ـ١ يزيد وزن نوع معين من الفئران بمقدار 65 غراماً خلال الأشهر الثلاثة الأولى من حياتها . وقد أطعمت 12 من هذه الفئران وفقاً لنظام تغذية معين خلال الأشهر الثلاثة الأولى وقيست الزيادة في الوزن فوجدنا :

55,62,54,58,6 5,64,60,62,59,67,62,61

هل تقدم هذه المعلومات ، عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$ ، دليلاً على أن نظام التغذية الجديد يسبب تغيراً في مقدار زيادة الوزن ؟

إذا رمزنا بـ μ لمتوسط الزيادة في الوزن خلال الأشهر الثلاثة الأولى من الحياة في مجتمع هذا النوع من الفئران ، فيصبح المطلوب اختبار الفرضية :

$$H_0 : \mu_0 = 65$$

ضد البديل :

$$H_1 = \mu_0 \neq 65$$

نحسب الآن قيمة إحصاء الاختبار t فنجد :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{(60.75 - 65)\sqrt{12}}{3.8406} = -3.83$$

ومن جدول التوزيع t نجد أن $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{.025}(11) = 2.20$ أي أن

منطقة الرفض هي $t < -2.20$ أو $t > 2.20$ وبما أن $-3.83 < -2.20$ فقيمة t واقعة ضمن منطقة الرفض وهكذا نرفض الفرضية H_0 .

مثال ٨ـ٢ قمنا بتجربة لتقييم طريقة جديدة في إنتاج الألماس . وقد ولدنا ست ألماسات بالطريقة الجديدة كان وزنها .54 ,.57 ,.48 ,.52 ,.61 ,.46 . قيراطاً . وتبين دراسة كلفة هذه الطريقة أنه يجب أن يكون متوسط وزن الألماس الناتج أكبر من 0.5 قيراطاً لكي تصبح الطريقة مريحة . فهل تقدم هذه الأوزان الستة دلالة كافية للقول بأن الطريقة مقبولة ؟

المطلوب إختبار الفرضية :

$$H_0 : \mu = .5$$

ضد البديل :

$$H_1 : \mu > .5$$

وقيمة إحصاء الإختبار هي :

$$t = \frac{.53 - .5}{.0559/\sqrt{6}} = 1.31$$

ومنطقة الرفض هي ، عند المستوى $\alpha = .05$ المنطقة $t > t_{.05}(5)$.

ونجد من جدول التوزيع t أن $t_{.05}(5) = 2.015$ أي أن قيمة t تقع ضمن منطقة القبول ولذلك فإننا لا نرفض الفرضية H_0 . أي أن المعلومات التي حصلنا عليها لا تقدم دليلاً كافياً على أن متوسط وزن الألماس الناتج يتجاوز .5 قيراطاً .

وإذا أردنا وضع مجال ثقة بأمثال $1-\alpha = .95$ حول متوسط وزن الألماس μ نجد :

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} S/\sqrt{n} = .53 \pm 2.571 \frac{(1.0559)}{\sqrt{6}}$$

أي أن التقدير المجالي لِـ μ هو من .471 إلى .589 قيراطاً وبأمثال ثقة تساوي 0.95 . وإذا أردنا تضييق هذا المجال فيجب زيادة حجم العينة .

٨ـ٣ **حدود التساهل** : وجدنا أنه يمكن وضع حدي ثقة بحيثُ يغطي المجال بين هذين الحدين وبأمثال ثقة معينة ، وسيطاً من وسطاء توزيع احتمالي معين . مثلاً المتوسط μ في التوزيع الطبيعي . وأحياناً يكون من المستحسن الحصول

على مجال يغطي ، وبأمثال ثقة معينة ، جزءاً أو نسبة من مجتمع إحصائي . وتدعى مثل هذه المجالات بمجالات التساهل . فمن الهام جداً بالنسبة لإدارة مصنع ، مثلاً ، أن تقدّر نسبة القطع المصنوعة التي ستكون أبعادها ضمن مدى معين . أو أن نقدر في مجال الطب البشري الحدود التي يمكن أن نعتبر معها قياس نسبة حمض البول في الدم طبيعياً . ويمكن كتابة مجالات التساهل على الشكل $\bar{x} \pm Ks$ على أن نحدد k بحيث يغطي هذا المجال نسبة p من المجتمع وبأمثال ثقة γ. وحدود الثقة من أجل μ هي أيضاً من الشكل $\bar{x} \pm Ks$. إلا أننا نحدد K هنا بحيث يغطي هذا المجال ، وبأمثال ثقة معينة ، متوسط المجتمع μ فقط. ومن الواضح أنه من الضروري للمجال الذي نريد له أن يغطي جزءاً كبيراً من التوزيع أن يكون أعرض من المجال الذي نريد له أن يغطي متوسط التوزيع فقط وهو نقطة بمفردها . ويقدم جدول حدود التساهل في الملحق قيم M التي تكون p من أجلها مساوية لِ .75, .90, .95, .99, .999 . وتكون γ من أجلها مساوية لِ .75, .90, .95, .99 وذلك كله من أجل العديد من القيم لحجم العينة N . وعلى سبيل المثال ، إذا كان $\bar{x} = 14.0$ ، $s = 1.5$ ، و $N = 18$ ، فيمكننا القول ، بأمثال ثقة .95 ، أن مجال التساهل $\bar{x} \pm Ks$ أي المجال (8.447 ، 19.553) سيحوي 99 بالمائة من المجتمع . وقد حُسبت قيم K في جدول حدود التساهل على أساس أن الملاحظات مسحوبة من مجتمع طبيعي .

٨ـ٤ **مقارنة متوسطي مجتمعين** : نعالج هذه المسألة بطريقة مشابهة تماماً لتلك التي ناقشناها في الفقرة (٧ـ٦) . إذ نسحب عينتين عشوائيتين حجماهما n_1 و n_2 على الترتيب من مجتمعين نفرضهما هنا طبيعيين بمتوسطين μ_1 و μ_2 ، على الترتيب ، ولهما نفس التشتت σ^2 . والمطلوب القيام باستقراءات إحصائية حول الفرق $\mu_1 - \mu_2$ بين المتوسطين تتضمن اختبار فرضيات ووضع مجالات ثقة .

ونبدأ باختبار الفرضية :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

ونستخدم كإحصاء لهذا الاختبار الكمية :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad (6)$$

ويمكن البرهان على أن التوزيع الاحتمالي لإحصاء الاختبار هذا هو التوزيع t بـ $(n_1 + n_2 - 2)$ درجة من الحرية . والتقدير s الوارد هنا هو تقدير لِـ σ ناتج عن استخدام معلومات كل من العينتين ونعرفه بالعلاقة :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x_j - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (7)$$

حيث ترمز $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ لمتوسطي العينتين على الترتيب . ونعلم أن :

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}, \quad S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}(x_j - \bar{x}_2)^2}{n_2}$$

وهكذا نجد أنه يمكن التعبير عن s^2 بدلالة S_1^2 و S_2^2 على الشكل التالي :

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (8)$$

و S^2 تقدير منصف للتشتت المشترك بين المجتمعين σ^2 . وعند مستوى الأهمية α نحدد شكل منطقة الرفض وفقاً للفرضية البديلة H_1 . فإذا كانت الفرضية البديلة من الشكل :

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

نأخذ كمنطقة للرفض قيم t التي تقع على يمين $t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$. أي نستخدم الاختبار الوحيد الذيل . أما إذا كانت الفرضية البديلة هي :

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

فنأخذ كمنطقة للرفض قيم t الأكبر من $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$ أو الأصغر من $-t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

ولإقامة $(1-\alpha)$ مجال ثقة من أجل $\mu_1-\mu_2$ نكتب :

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2}\, S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \qquad (9)$$

مثال ٨ـ٣ تحتاج عملية تجميع جهاز في منشأة صناعية إلى تدريب لمدة شهر تقريباً يتلقاه مستخدم جديد للوصول إلى كفاءة عالية . وقد اقتُرحت طريقة جديدة للتدريب . وتم القيام بتجربة لمقارنة الطريقة الجديدة بالطريقة المعتادة ، دربنا فيها مجموعتين تحوي كل منهما 9 عمال جدد مستخدمين واحدة منهما في كل من الطريقتين ، وذلك لمدة ثلاثة أسابيع . قسنا في نهايتها ، بالدقائق ، الزمن اللازم لكل عامل لتجميع الجهاز . والنتائج مسجلة في الجدول (٨ـ١) . فهل تقدم هذه المعلومات دلالة كافية على تفوق الطريقة الجديدة ؟

إذا فرضنا أن الزمن اللازم للتجميع بالطريقة القديمة يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي μ_1 وتشتت σ^2 وأن الزمن اللازم للتجميع بالطريقة الجديدة يتوزع أيضاً وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي μ_2 وتشتت σ^2 .

جدول ٨ـ١

الطريقة الجديدة	الطريقة القديمة
35	32
31	37
29	35
25	28
34	41
40	44
27	35
32	31
31	34

ونجد من العينتين أن :

$$\bar{x}_1 = 35.22,$$

$$\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2 = 195.56 \;;\quad \bar{x}_2 = 31.56 \;,\quad \sum_{j=1}^{9}(x_j-\bar{x}_2) = 160.22$$

وتقدير التشتت المشترك σ^2 هو :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{9}(x_j-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2} = \frac{195.56+160.22}{9+9-2} = 22.24 ,$$

وقيمة s هي 4.71

والمطلوب اختبار الفرضية :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

ضد البديل :

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

أي أننا نهتم فقط فيما إذا كانت الطريقة الجديدة تخفض الزمن اللازم للتجميع . وبالعودة إلى جدول التوزيع t نجد أن القيمة الحرجة لِ t من أجل $\alpha = .05$ و $n_1 + n_2 - 2 = 16$ درجة من الحرية هي 1.746 . أي أن منطقة الرفض هي المنطقة $t > 1.746$.

ونحسب الآن احصاء الاختبار :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{35.22 - 31.56}{4.71\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}} = 1.65$$

ولا تقع قيمة t ضمن منطقة الرفض . ولذلك نستنتج أنه لا توجد دلالة كافية على أن الطريقة الجديدة متفوقة على الطريقة القديمة .

مثال ٨ـ٤ أحسب التقدير المجالي لِ $(\mu_1 - \mu_2)$ في المثال السابق مستخدماً أمثال ثقة 0.95 . بالتديل في العلاقة (٩) نجد :

$$(35.22 - 31.56) \pm (2.120)(4.71)\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}$$

أو :

$$3.66 \pm 4.68$$

وهكذا نقدر أن يقع الفرق بين متوسطي زمن التجميع بين 1.02 − إلى 8.34 .

ونلاحظ أن عرض المجال كبير إلى الحد الذي يدعو إلى زيادة حجم العينة

وحساب تقدير مجالي جديد .

وقد فرضنا أن المجتمعين اللذين نسحب منهما العينتين هما مجتمعان طبيعيان ومن الضروري أن نذكر بأن الخروج المعتدل على هذا الشرط لا يؤثر بشكل جدي في توزيع إحصاء الاختبار وبالتالي في أمثال ثقة التقدير المجالي . وعلى الوجه الآخر لا بد أن تكون قيمتا تشتي المجتمعين متساويتين تقريباً لكي تكون طرق الاستقراء الاحصائي المذكورة في هذه الفقرة مشروعة .

وسنقدم في هذا الفصل طريقة لمقارنة تشتي مجتمعين .

٨ـ٥ اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين بطريقة الأزواج : يرغب مصنع في مقارنة نوعين من إطارات السيارات A و B . وللقيام بذلك أخذنا زوجاً من الإطارات ، واحداً من كل نوع ، ووزعناهما على الدولابين الخلفيين لسيارة ، وكررنا نفس العمل في خمس سيارات ، وتعمل عندئذ هذه السيارات الخمس عدداً محدداً من الأميال سجلنا بعدها درجة الاهتراء في كل إطار وفق مقاييس واحدة ومتفق عليها سلفاً . وكانت النتائج كما هو مبين في الجدول (٨ـ٧) . فهل تقدم هذه المعلومات دلالة كافية على تفوق أحد النوعين على الآخر؟

جدول ٨ـ٣

السيارة	A	B
1	10.6	10.2
2	9.8	9.4
3	12.3	11.8
4	9.7	9.1
5	8.8	8.3
	$\bar{x}_1 = 10.24$	$\bar{x}_2 = 9.76$

وعند تحليل هذه المعلومات نلاحظ أولاً أن الفرق بين متوسطي العينتين هو $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = .48$ وهو كمية صغيرة نسبياً . ويبدو للوهلة الأولى أنه توجد دلالة بسيطة جداً على وجود فرق يُذكر بين النوعين ، وسنحاول أولاً استخدام

طريقة المقارنة التي عرضناها في الفقرة السابقة .

تقدير التشتت المشترك هو :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x_j - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{6.932 + 7.052}{5 + 5 - 2} = 1.748$$

و :

$$S = 1.32$$

وقيمة إحصاء الاختبار التي نحسبها عادة لاختبار الفرضية $\mu_1 = \mu_2$ هي :

$$t = \frac{(x_1 - x_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}} = \frac{10.24 - 9.76}{1.32\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}} = .58 \quad ,$$

وهذه القيمة ليست كبيرة بما يكفي لرفض الفرضية $\mu_1 = \mu_2$

ومجال الثقة ذو الأمثال 95 . هو :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2} S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (10.24 - 9.76) \pm (2.306)(1.32)\sqrt{\frac{2}{5}}$$

أو (2.41 ,1.45 –) . ونلاحظ أن المجال عريض جداً بالمقارنة مع الفرق البسيط بين متوسطي العينتين .

ولكن نظرة فاحصة إلى المعلومات الإحصائية في الجدول (٨ـ٢) تكشف قدراً كبيراً من عدم الانسجام مع النتيجة التي توصلنا إليها أعلاه . إذ نلاحظ أن قياس الاهتراء في النوع A أكبر في السيارات الخمس منه في B . ويبين الجدول (٨ـ٣) هذه الفروق ولنرمز لها بـ $d = A - B$.

الجدول (٨ـ٣)

السيارة	d = A – B
1	.4
2	.4
3	.5
4	.6
5	.5

$\bar{d} = .48$

ولنفرض الآن أننا كنا نستخدم x عدد المرات التي يكون فيها d موجباً (أي إهتراء A أكبر من اهتراء B) كإحصاء اختبار . فعندئذ ، وتحت الفرض بأنه لا يوجد فرق حقيقي بين النوعين وسيكـون احتمال كون A اكبر من B في سيارة معينة هو $p = \frac{1}{2}$ وسيكون توزيع x عندئذ هو التوزيع الثنائي حيث $n = 5$ و $p = \frac{1}{2}$ (تحت الفرضية H_0 بأنه لا يوجد فرق بين النوعين) .

وإذا اخترنا القيم المتطرفة $x = 0$ و $x = 5$ لتكون منطقة الرفض فعندئذ تكون :

$$\alpha = P(0) + p(5) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$$

وسنرفض الفرضية H_0 باحتمال خطأ من النوع الأول $\alpha = \frac{1}{16}$. ولا شك أن هذه الطريقة ونتائجها تقدم دليلاً على وجود فرق حقيقي بين مواصفات النوعين A و B من الإطارات وان النوع B أفضل من A طالما أن إشارة d موجبة في جميع السيارات أي $x = 5$.

ويلاحظ القارىء أننا استخدمنا اختبارين إحصائيين مختلفين لاختبار نفس الفرضية . ويبدو غريباً أن الاختبار t الذي يستخدم معلومات أكثر (يستخدم القياسات نفسها) من الاختبار الثنائي يفشل في الكشف عن وجود فرق بين μ_1 و μ_2 .

وتفسير مثل هذه الغرابة ليس صعباً . فالاختبار t الذي وصفناه في الفقرة السابقة يشترط أن تكون العينتان مستقلتين عن بعضهما البعض وعشوائيتين وهذا الأمر غير محقق هنا ، وبالتالي فإن الاختبار t هذا ليس الاختبار المناسب لمسألتنا هنا . ومن الواضح أن شرط الاستقلال لم يتحقق بالطريقة التي نفذنا فيها التجربة . فالزوج من القياسات لِـ A و B في نفس السيارة لا يمكن أن يكونا مستقلين عن بعضهما . ونظرة إلى الأرقام الناتجة بتبين أنها متقاربة جداً في السيارة الواحدة ولكنها تختلف بصورة واضحة من سيارة إلى أخرى . وهذا بالطبع ينسجم مع توقعاتنا فاهتراء الإطارات يتوقف إلى حد كبير على عادات

السائق ، توازن عجلة التوجيه أو سطح الأرض . وبما أن لكل سيارة سائقاً مختلفاً فيجب أن نتوقع كون مقدار تشتت المعلومات الإحصائية الناتجة من سيارة إلى أخرى كبيراً .

ونلاحظ من التقديرات المجالية أن عرض مجالات الثقة في العينات الكبيرة والصغيرة على السواء سيتوقف على قيمة الانحراف المعياري للتقدير النقطي للوسيط المدروس . وكلما كانت هذه القيمة صغيرة كلما كان التقدير أفضل وكانت الفرصة أكبر أمام اختبار الاحصاء في رفض الفرضية الابتدائية عندما تكون في الحقيقة غير صحيحة . وادراك هذه الظاهرة هو الذي أملى استخدام التصميم الذي ذكرناه في تجربة الإطارات .

ومثل هذا التصميم يحذف تأثير التغير الناشىء من سيارة إلى سيارة ، أي التشتت الناتج عن اختلاف في السيارات ، واختلاف في الظروف التي تتعرض لها والتي لا شأن لها بمواصفات الإطار نفسه ، وبالتالي فإن مثل هذا التصميم ينتج معلومات أكثر حول الفرق بين مقاومة النوعين من الاطارات .

والتحليل المناسب هو التحليل الذي يستفيد من الفروق الخمسة الملحوظة ، أي القياسات d المذكورة في الجدول (٨ـ٣) ، لاختبار الفرضية بأن الفرق بين المتوسطين صفر ، أي الفرضية $H_0 \; \mu_1 = \mu_2$

ومتوسط القياسات d هو $\bar{d} = .48$ وانحرافها المعياري $S_d = .0837$

والمطلوب اختبار الفرضية :

$$H_0 : \mu_d = 0$$

أي أن متوسط مجتمع الفروق μ_d يساوي الصفر . وذلك ضد الفرضية :

$$H_1 : \mu_d \neq 0 .$$

واختبار الاحصاء t هو :

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{S_d / \sqrt{n}} = \frac{.48}{.0837\sqrt{5}} = 12.8 .$$

والقيم الحرجة لاختبار ثنائي الذيل من المستوى $\alpha = .05$ هي $\pm t_{.05}(4) = \pm 2.776$

ونجد أن قيمة إحصاء الاختبار t أكبر بكثير من القيم الحرجة أي أنها تقع ضمن منطقة الرفض . وهكذا نرفض الفرضية H_0 ونستنتج أن الاطارات B أكثر مقاومة من الاطارات A .

و 95% مجال ثقة لِ μ_d هو :

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2}\, S_d / \sqrt{n} = .48 \pm (2.776)\, \frac{(.0337)}{\sqrt{5}} = .48 \pm .10$$

وتقدم تجربة الاطارات مثالاً بسيطاً عن تصميم إحصائي يدعى « تصميم الزمر العشوائية » ويدعى الاختبار الإحصائي الناتج عادة « اختبار الفرق بطريقة الأزواج » . ويلاحظ القارىء أن نظام المزاوجة قد أُخذ بعين الاعتبار عند تخطيط التجربة وليس بعد الحصول على المعلومات . والمقارنة ضمن كل زوج جرت ضمن زمر متجانسة نسبياً (الزمرة هي دولابا السيارة الخلفيان) . وقد تم توزيع الاطارات ضمن كل زمرة بصورة عشوائية .

٨ـ٦ الاستقراء الاحصائي حول تشتت مجتمع : رأينا في الفقرات السابقة أن تقدير التشتت σ^2 ضروري عند القيام باستقراءات حول المتوسط . وبالإضافة لى ذلك نجد في العديد من الحالات التطبيقية أن σ^2 هو الهدف الرئيسي للتحريات التجريبية ، وهكذا فإنه يحتل مكانة أهم بكثير من متوسط المجتمع .

وكما نعلم فإن أجهزة القياسات العلمية يجب أن تقدم قياسات منصفة من جهة وبخطأ قياس صغير جداً من جهة أخرى . فقياس الارتفاع الذي يقيس الارتفاع الصحيح (في المتوسط) سوف لا تكون له أية فائدة إذا كان الانحراف المعياري لخطأ القياس كبيراً ، 5000 قدم مثلاً ، وفي الحقيقة نتمكن ، على الغالب ، من تصحيح الانحياز أو عدم الانصاف في القياس ، ولكن دقة القياس مقاسة بحجم الانحراف المعياري لخطأ القياس هو في العادة تابع لتصميم الجهاز نفسه ولا يمكن التحكم به .

والأجزاء الآلية من خط إنتاج صناعي يجب أن يقدم قطعاً مصنعة بأقل

ما يمكن من التغيرات لكي تكون نسبة القطع الناقصة الصنع صغيرة . وبصورة عامة نرغب دائماً في المحافظة على أصغر تشتت ممكن في قياسات الميزات النوعية لإنتاج صناعي وذلك لإنجاز نوع من التحكم في الطريقة الصناعية وجعل النسبة المئوية للمنتجات ذات النوعية الفقيرة أصغر ما يمكن .

وقد رأينا في الفقرة (٨ـ١) أن التوزيع الاحتمالي العشوائي $\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$ هو التوزيع χ^2 بـ $(n-1)$ درجة من الحرية . ولاختبار الفرضية :

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

نستخدم إحصاء الاختبار :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \qquad (10)$$

فإذا كان σ^2 أكبر حقاً من القيمة المفترضة σ_0^2 ، فإن قيمة إحصاء الاختبار χ^2 ستكون كبيرة ، وستقع على الغالب في الذيل الأيمن للتوزيع χ^2 . وإذا كان $\sigma^2 < \sigma_0^2$ فإن قيمة إحصاء الاختبار ستميل إلى أن تكون صغيرة وستقع على الغالب في الذيل الأيسر للتوزيع χ^2 . وكما رأينا في الاختبارات الاحصائية الأخرى يمكن استخدام الاختبار الوحيد الذيل أو الثنائي الذيل وفقاً لطبيعة الفرضية البديلة التي نختارها . وسنوضح بمثال .

مثال ٨ـ٥ يدعي صانع إسمنت أن القطع من الاسمنت المسلح المصنوعة من إنتاجه سيكون لها قوة مقاومة تتغير من قطعة إلى أخرى بانحراف معياري $\sigma = 10$. وقد أنتجت عينة من 10 قياسات متوسطاً وتشتتاً يساويان على الترتيب :

$$\bar{x} = 312$$
$$s^2 = 195.$$

فهل تقدم هذه المعلومات دلالة كافية لرفض إدعاء صانع الاسمنت ؟

المطلوب هو اختبار الفرضية :

$$H_0 : \sigma^2 = 100$$

ضد الفرضية البديل :

$$H_1 : \sigma^2 > 100$$

والفرضية البديلة تتطلب اختباراً إحصائياً وحيد الذيل فنضع كامل منطقة الرفض في الذيل الأيمن للتوزيع χ^2. والقيمة الحرجة لِ χ^2 من أجل $\alpha = .05$، $n = 10$ هي $\chi^2_{.05}(9) = 16.919$ ، وسنرفض H_0 إذا تجاوزت قيمة إحصاء الاختبار هذه القيمة . وإذا حسبنا قيمة إحصاء الاختبار نجد :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} = \frac{1755}{100} = 17.55$$

وهي تتجاوز القيمة الحرجة أي تقع ضمن منطقة الرفض . وهكذا نرفض الفرضية الابتدائية أي نرفض إدعاء صانع الاسمنت .

ويمكن البرهان على أن $(\alpha - 1)$ مجال ثقة لِـ σ^2 هو :

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\chi_u^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,S^2}{\chi_L^2} \qquad (11)$$

حيث χ_L^2 و χ_u^2 هما القيمة الدنيا والعليا لِـ χ^2 التي تحدّ مساحة $\frac{\alpha}{2}$ في الذيل الأيسر والذيل الأيمن للتوزيع χ^2 على الترتيب . أي $P(\chi^2 > \chi_u^2) = \frac{\alpha}{2}$

و $P(\chi^2 < \chi_L^2) = \frac{\alpha}{2}$

وعلى سبيل المثال لإيجاد 90% مجال ثقة من أجل σ^2 في المثال (٨ــ٤)

نحسب :

$$\chi_L^2 = \chi_{.95}^2 = 3.325$$

$$\chi_u^2 = \chi_{.05}^2 = 16.919$$

والتقدير المجالي لِـ σ^2 هو :

$$\frac{9(195)}{16.919} < \sigma^2 < \frac{9(195)}{3.325}$$

أو :

$$103.73 < \sigma^2 < 527.82$$

مثال ٨ــ٦ لدى مجرب القناعة بأن الجهاز القياس الذي يستخدمه تغيراً مقيساً بالانحراف المعياري $\sigma = 2$. وقد سجل خلال تجربة القياسات 4.1 ، 5.2 ، 10.2 . فهل تتناقض هذه القياسات مع قناعته عن الجهاز ؟ اختبر

الفرضية $H_0 : \sigma^2 = 4$ وضع 90% مجال ثقة حول σ^2

تشتت العينة هو :

$$S^2 = 10.57$$

والمطلوب اختبار الفرضية :

$$H_0 : \sigma^2 = 4$$

ضد البديل :

$$H_1 : \sigma^2 \neq 4$$

والاختبار الموافق إذن هو الاختبار الثنائي الذيل عند مستوى الأهمية $\alpha = .10$ وبوضع .05 في كل ذيل نحددمنطقة الرفض بحساب χ_u^2 و χ_L^2 حيث $P(\chi^2 > \chi_u^2) = .05$ و $P(\chi^2 < \chi_L^2) = .05$ ونجد من جدول التوزيع χ^2 أن $\chi_u^2(2) = 5.991$ و $\chi_L^2(2) = .103$ حيث يرمز ما بين القوسين إلى عدد درجات الحرية .

وقيمة إحصاء الاختبار هي :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{2(10.57)}{4} = 5.29$$

وهي تقع خارج منطقة الرفض . وهكذا نستنتج أن المعلومات الاحصائية لا تقدم دلالة كافية لرفض الفرضية H_0 .

ونعلم أن 90% مجال ثقة حول σ^2 هو :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_u^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_L^2}$$

وبالتعويض عن قيم χ_L^2 ، χ_u^2 ، S^2 نجد :

$$\frac{2(10.57)}{5.991} < \sigma^2 < \frac{2(10.57)}{.103}$$

أو :

$$3.53 \leq \sigma^2 < 205.24$$

٨ـ٧ مقارنة تشتتي مجتمعين : شعرنا بالحاجة إلى مقارنة تشتتي مجتمعين في الفقرة (٨ـ٥) . وغالباً ما نرغب في مقارنة دقة جهاز للقياس بدقة جهاز آخر ، واستقرار كل من خطين للانتاج في صناعة معينة الخ .

ومن الواضح أنه يمكن استخدام نسبة تشتتي عينتين S_1^2 / S_2^2 لمقارنة تشتتي مجتمعين σ_1^2 ، σ_2^2 ، وإذا كانت النسبة S_1^2 / S_2^2 مساوية تقريباً للواحد فسنجد القليل من الدلالة على أن σ_1^2 و σ_2^2 غير متساويين . وعلى الوجه الآخر فإن القيمة الصغيرة جداً أو الكبيرة جداً للنسبة S_1^2 / S_2^2 ستقدم دلالة على وجود فرق بين تشتتي مجتمعين .

ولكن إلى أي حدّ يجب أن تكون النسبة S_1^2 / S_2^2 كبيرة أو صغيرة لكي نقول أنه توجد دلالة كافية لرفض الفرضية :

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

وجواب هذا السؤال نجده في التوزيع الاحتمالي لِـ S_1^2 / S_2^2 .

وبالعودة إلى الفقرة (٨ـ١) نذكر أن $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ومنه يمكن كتابة $S^2 = \frac{\sigma^2 \chi^2}{n-1}$ وهكذا نجد أنه إذا كان S_1^2 و S_2^2 تشتتي عينتين عشوائيتين مستقلتين حجم الأولى n_1 والثانية n_2 ، من مجتمعين طبيعيين تشتتاهما σ_1^2 و σ_2^2 فإن :

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \; \frac{\chi_1^2 / (n_1-1)}{\chi_2^2 / (n_2-1)} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot F(n_1-1, n_2-1) \tag{12}$$

وذلك وفقاً لتعريف التوزيع F كما ذكرناه في الفقرة (٦ـ٦) . وعندما تكون الفرضية H_0 صحيحة أي $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ فإن توزيع النسبة $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ هو التوزيع $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

ونستخدم لاختبار الفرضية $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ الاحصاء :

$$F = S_1^2 / S_2^2 \tag{13}$$

وعندما تكون الفرضية البديلة .

$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

نستخدم الاختبار الوحيد الذيل . أما إذا كانت الفرضية البديلة :

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

فنستخدم الاختبار الثنائي الذيل ، وعندها سنقسّم منطقة الرفض على ذيلي التوزيع F . ولا تتوفر جداول للقيم الحرجة للذيل الأيسر . وسبب ذلك هو أنه يمكننا عملياً الاستغناء عنها . إذ يمكن ترقيم المجتمعين على أساس أن أحدهما المجتمع I والآخر المجتمع II بالشكل الذي نريده . وإذا رمزنا للمجتمع الذي يكون تشتت عينته أكبر بِ II فعندئذ $S_2^2 > S_1^2$ وسنضع عندئذ منطقة الرفض في الذيل الأيسر للتوزيع F . ويمكن تجنب ذلك بأن نرمز دائماً بِ I للمجتمع الذي يكون تشتت العينة المسحوبة منه هو التشتت الأكبر . وبعبارة أخرى نضع دائماً تشتت العينة الأكبر في الصورة عند تشكيل النسبة :

$$F = S_1^2 / S_2^2$$

ونرمز للمجتمع الموافق للتشتت المذكور في الصورة بِ I . وبما أن المساحة في الذيل الأيمن (في حالة اختبار ثنائي الذيل) هي $\alpha/2$ فإننا نضاعف قيمة هذه المساحة لنحصل على α . وهكذا إذا استخدمنا جدول التوزيع F الموافق لِ $F_{.05}$ في اختبار ثنائي الذيل فإن احتمال الخطأ من النوع الأول سيكون $\alpha = .10$. ونوضح بالمثال التالي :

مثال ٨ـ٧ وجدنا في عينتين مستقلتين حجماهما 8 و 10 أن $S_1^2 = 7.14$ و $S_2^2 = 3.21$ على الترتيب فهل تقدم هذه النتائج دلالة كافية على عدم تساوي التشتتين ؟

لنفرض أن توزيعي المجتمعين يحققان شرط كونهما طبيعيين أو أنه يمكن اعتبارهما عملياً كذلك . فالفرضية المطلوب اختبارها هي :

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ضد البديل :

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

وباستخدام جدول التوزيع F ومضاعفة مساحة الذيل نجد أن منطقة الرفض هي $F > 3.29$ حيث $\alpha = .10$. وقيمة إحصاء الاختبار هي :

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{7.14}{3.21} = 2.22$$

وهذه القيمة لا تقع ضمن منطقة الرفض ، وبالتالي فإننا لا نرفض الفرضية H_0 . أي أن هناك دلالة كافية على وجود فرق بين التشتتين .

ويمكن البرهان على أن $(1-\alpha)$ مجال ثقة من أجل نسبة تشتتي مجتمعين هو :

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F(\nu_1, \nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} F(\nu_2, \nu_1) \qquad (14)$$

حيث $F(\nu_2, \nu_1)$ هي القيمة الحرجة من جدول F الموافقة لِـ ν_1 درجة من الحرية في صورة النسبة F و ν_2 درجة من الحرية في مخرجها . وبصورة مشابهة لما رأيناه في حالة اختبار ثنائي الذيل فإن قيمة α هي ضعف القيمة الموافقة للجدول . وهكذا فإن قيم F المستخلصة من الجدولين المعروضين للتوزيع F ستوافق أمثال الثقة 0.90 و 0.98 على الترتيب .

وفي المثال ٨ــ٧ نجد أن 90% مجال ثقة من أجل النسبة σ_1^2/σ_2^2 هو :

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F(\nu_1, \nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} F(\nu_2, \nu_1)$$

وبملاحظة أن :

$$\nu_1 = n_1 - 1 = 9 \, , \qquad \nu_2 = n_2 - 1 = 7 \, .$$

$$F(\nu_1, \nu_2) = F(9, 7) = 3.68$$

و :

$$F(\nu_2, \nu_1) = F(7, 9) = 3.29$$

والتعويض في (14) نجد :

$$\frac{7.14}{3.21}\ \frac{1}{3.68} < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \frac{(7.14)(3.29)}{3.21}$$

أو :

$$60 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 7.32$$

ونلاحظ أن مجال الثقة يحوي القيمة التي تحددها الفرضية H_0 وهي 1 .

مثال ٨ـ٨ يعتمد تشتت كمية الشوائب الموجودة في عجنة كيميائية مستخدمة في طريقة معينة للصناعة على طول الفترة الزمنية التي تستغرقها الطريقة . ويستخدم مصنع خطَّي إنتاج أول وثان . وقد قام بتعديلات طفيفة في الخط الثاني آملاً في تخفيض التشتت ومتوسط كمية الشوائب في منتجاته الكيميائية . وقد أخذنا عينتين من $n_1 = 25$ و $n_2 = 25$ قياساً من عجنتين ، واحدة من كل خط ، فوجدنا النتائج التالية :

$$\bar{x}_1 = 3.2$$
$$S_1^2 = 1.04$$
$$\bar{x}_2 = 3.0$$
$$S_2^2 = .51$$

فهل تقدم هذه النتائج دلالة كافية على انخفاض التشتت في الخط الثاني ؟

اختبر الفرضية $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

لاختبار الفرضية :

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ضد البديل :

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

وذلك عند المستوى $\alpha = .05$ ، نستخدم الاختبار الوحيد الذيل . ومنطقة الرفض هي $F > F_{.05}$ حيث $F_{.05}\,(24, 24) = 1.98$ هي القيمة الحرجة كما نجدها من جدول التوزيع F الموافق لِ $\alpha = .05$.

ونلاحظ أن قيمة إحصاء الاختبار :

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.04}{.51} = 2.04$$

واقعة ضمن منطقة الرفض . وهكذا نستنتج أن الخط الثاني أقل تشتتاً من الخط

الأول ، و 90% مجال ثقة من أجل النسبة σ_2^2 / σ_1^2 هو :

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\ \frac{1}{F(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\ F(\nu_2,\nu_1)$$

أو :

$$\frac{(1.04)}{(.51)(1.98)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{(1.04)(1.98)}{.51}$$

$$1.03 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 4.04$$

تمارين

١ ـ ما هي الشروط التي يجب تحققها عند استخدام الاختبار t من أجل متوسط مجتمع ؟ لمقارنة متوسطين ؟

٢ ـ تنتج طريقة كيميائية في المتوسط 800 طن يومياً . ولاحظنا أن الانتاج اليومي في الأسبوع السابق كان ,785,805,790,793 و 802 طناً . فهل تشير هذه الأرقام إلى أن متوسط الانتاج أقل من 800 طن وبالتالي فإن هناك خطأ ما في طريقة الانتاج ؟ اختبر عند مستوى الأهمية 5% .

٣ ـ أحسب 90% مجال ثقة من أجل متوسط الانتاج في التمرين الثاني .

٤ ـ كم يجب أن يكون حجم العينة في التمرينين السابقين ليكون عرض مجال الثقة خمسة أطنان ؟

٥ ـ صممت ماكينة لبيع الشراب تعمل بإدخال قطعة عملة بحيث تلفظ في المتوسط 7 أونزة من الشراب في كل كأس . ولاختبار الماكينة سحبنا 10 كؤوس من الشراب وقسناها . فكان متوسط القياسات العشر وانحرافها المعياري هما 7.1 و 0.12 أونزة على الترتيب . فهل تقدم هذه المعلومات دلالة كافية على أن متوسط ما تلفظه الماكينة يختلف عن 7 أونزة ؟ اختبر عند المستوى 10% .

٦ ـ أحسب 90% مجال ثقة لمتوسط ما تلفظه الماكينة من الشراب في التمرين السابق .

٧ ـ أدعى صانع لأجهزة التلفزيون أن للأجهزة التي ينتجها خاصة الاستمرار لمدة ثلاث سنوات دون الحاجة إلى تصليح . ابتاعت ثلاث أسر من هذه الأجهزة ولوحظ أنه حصل فيها عطل بعد 2.5 ، 1.9 و 2.9 سنة على الترتيب .

فهل تناقض هذه النتائج إدعاء الصانع ؟ اختبر عند المستوى $\alpha = .05$ من الأهمية .

٨ ـ أحسب 90% مجال ثقة لمتوسط فترة الكفالة لأجهزة التلفزيون في التمرين السابق .

٩ ـ كم من الملاحظات نحتاج لتقدير متوسط فترة الكفالة في التمرينين السابقين صحيحة في حدود 0.2 من السنة وباحتمال يساوي 0.90 ؟

١٠ ـ سحبنا عينتين عشوائيتين تحوي كل منهما 11 قياساً من مجتمعين طبيعيين متوسطاهما μ_1 و μ_2 على الترتيب وبتشتت مشترك σ^2 . وكانت النتائج :

المجتمع II	المجتمع I
$\bar{x}_2 = 65.3$	$\bar{x}_1 = 60.4$
$S_2^2 = 44.82$	$S_1^2 = 31.4$

فهل تقدم هذه الأرقام دلالة على وجود فرق بين متوسطي المجتمعين ؟ إختبر عند مستوى الأهمية $\alpha = .10$.

١١ ـ أحسب 90% مجال ثقة من أجل الفرق بين متوسطي المجتمعين في التمرين السابق .

١٢ ـ طبقنا طريقتين لتعليم القراءة على زمرتين من تلاميذ المدارس الابتدائية اخترناهما عشوائياً . وبعد انتهاء الفترة الدراسية أقمنا اختباراً وحصلنا على قياس لمدى تقدم كل تلميذ فكانت النتائج كما يلي :

	الطريقة 1	الطريقة 2
عدد الطلاب في الزمرة	11	14
$\bar{x}$	64	69
s^2	52	71

فهل تقدم هذه الأرقام دلالة كافية على وجود فرق بين الطريقتين ؟ اختبر

عند المستوى $\alpha = .05$

١٣ ـ أنتجت تجربة في علم النفس نقارن فيها زمني الاستجابة لمنشطين وذلك عند تطبيقهما على عينة عشوائية من ستة عشر شخصاً ما يلي :

زمن الاستجابة (بالثواني)

المنشط 2	المنشط 1
4	1
2	3
3	2
3	1
1	2
2	1
3	3
3	2

فهل تقدم هذه الأرقام دلالة على وجود فرق بين متوسطي زمن الاستجابة من أجل المنشطين ؟ اختبر عند مستوى الأهمية 5%

١٤ ـ لنفرض أننا نفذنا التجربة المذكورة في التمرين السابق معتبرين الأشخاص كزمر وقمنا بمقارنة زمني الاستجابة عند كل شخص . أي أن كل شخص يخضع لكل من المنشطين بترتيب عشوائي . فحصلنا على النتائج التالية :

زمن الاستجابة (بالثواني)

المنشط 2	المنشط 1	الشخص
4	3	1
2	1	2
3	1	3
1	2	4
2	1	5
3	2	6
3	3	7
3	1	8

فهل تقدم هذه الأرقام دلالة على وجود فرق بين متوسطي زمن الاستجابة للمنشطين ؟ إختبر عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$.

١٥ ـ أحسب 90% مجال ثقة لِ $\mu_2 - \mu_1$ في التمرين ١٣ .

١٦ ـ أحسب 95% مجال ثقة لِ $\mu_2 - \mu_1$ في التمرين ١٤ .

١٧ ـ حلل المعلومات في التمرين ١٤ على أساس أن التجربة قد نفذت بطريقة غير طريقة الأزواج . واحسب 95% مجال ثقة لِ $\mu_2 - \mu_1$ ثم قارن مع ما حصلت في التمرين ١٦ . هل يبدو أن الزمر قد زادت في المعلومات المتوفرة من التجربة ؟

١٨ ـ يقدم الجدول التالي مقاومة نوعين من مادة للصرّ مقيسة بالرطل/قدم . فهل تقدم هذه النتائج دلالة على وجود فرق في متوسط المقاومة بين النوعين ؟ إختبر عند مستوى الأهمية $\alpha = .10$.

	A	B
	1.25	.89
	1.16	1.01
	1.33	.97
	1.15	.95
	1.23	.94
	1.20	1.02
	1.32	.98
	1.28	1.06
	1.21	.98
$\Sigma x =$	11.13	8.80
$\bar{x} =$	1.237	.978
$\Sigma x_i^2 =$	13.7973	8.6240

١٩ ـ هل ستزيد المعلومات المستخلصة من البيان الإحصائي في التمرين السابق باعتبار الملاحظات المتقابلة كأزواج وتحليل الفروق بينها ؟ أحسب 90%

مجال ثقة من أجل $\mu_2 - \mu_1$ في كل من طريقتي التحليل وقارن عرض المجال في كل من الطريقتين .

٢٠ ـ متى يجب استخدام طريقة الأزواج عند القيام باستقراءات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين ؟

٢١ ـ قمنا بتجربة لمقارنة كثافة كعك (كاتو) مستخدمين المخلطين A و B . وقد وضعنا ستة أقراص في ستة أوعية مستخدمين المخلط A وستاً أخرى في أوعية مستخدمين المخلط B . ونظراً لتوقع المجرب في أن تختلف درجة الحرارة من موقع إلى آخر ضمن الفرن فقد وضع المجرب في كل موقع زوجاً من الأوعية أحدها محضر باستخدام المخلط A والآخر محضر باستخدام المخلط B . والملاحظات بالنسبة للأزواج الستة كانت كما يلي :

الكثافة مقيسة بالأونزة / البوصة المكعبة

A	B
.135	.129
.102	.120
.098	.112
.141	.152
.131	.135
.144	.163

فهل تقدم هذه المعلومات دلالة على وجود فرق بين متوسطي الكثافتين عند استخدام المخلط A أو المخلط B ؟ استخدم مستوى الأهمية $\alpha = .05$.

٢٢ ـ ضع 95% مجال ثقة حول الفرق بين متوسطي الكثافتين من أجل المخلطين في التمرين ٢١ .

٢٣ ـ قارنا مقاومة نوعين من البلاستيك مصنوعين بطريقتين مختلفتين . وكانت النتائج مقيسة بألف رطل في البوصة المربعة :

البلاستيك 2	البلاستيك 1
21.2	15.3
22.4	18.7
18.3	22.3
19.3	17.6
17.1	19.1
27.7	14.8

فهل تقدم هذه الأرقام دلالة على وجود فرق بين مقاومتي النوعين من البلاستيك ؟

١٤ ـ أحسب 90% مجال ثقة من أجل الفرق بين المتوسطين $\mu_2 - \mu_1$ في التمرين السابق .

٢٥ ـ أحسب 90% مجال ثقة من أجل σ^2، تشتت المجتمع في التمرين الثاني .

٢٦ ـ يدعي منتج ماكينات لتعبئة مسحوق الصابون في صناديق من الورق المقوى ، بأن ماكينة تضع وزناً معيناً في كل صندوق باختلاف لا يزيد في مداه عن 4. أونزة من صندوق إلى آخر . وقد وجدنا أن متوسط وتشتت عينه من ثمانية صناديق سعة الواحدة ثلاثة أرطال هما 3.1 و 018. أونزة على الترتيب . اختبر الفرضية بأن تشتت مجتمع هذه العبوات هو $\sigma^2 = .01$ ضد الفرضية البديلة $\sigma^2 > .01$ استخدم مستوى من الأهمية $\alpha = .05$.

٢٧ ـ أحسب 90% مجال ثقة من أجل σ^2 في التمرين السابق .

٢٨ ـ راقبنا أسعار الاغلاق في سوقين للأسهم (البورصة) لفترة خمسة عشر يوماً . فكان المتوسط والتشتت في كل منهما كما يلي :

$\bar{x}_2 = 42.54 \qquad \bar{x}_1 = 40.33$

$S_2^2 = 2.96 \qquad S_1^2 = 1.54$

فهل تقدم هذه الأرقام دلالة على وجود فرق في تشتت مجتمعي أسعار

الإغلاق الموافقين لهاتين العينتين ؟

٢٩ ـ ضع 90% مجال ثقة من أجل نسبة تشتي المجتمعين في التمرين السابق .

٣٠ ـ جهاز دقيق مكفول على أساس أنه يقدم قراءات دقيقة في حدود وحدتين قياسيتين . أخذنا عينة من 4 قياسات لنفس الشيء المقيس فحصلنا على 353 ، 351 ، 351 ، 355 . اختبر الفرضية بأن $\sigma = .7$ ضد البديل $\sigma > .7$. استخدم مستوى الأهمية $\alpha = .05$.

٣١ ـ أحسب 90% مجال ثقة لتشتت المجتمع في التمرين السابق .

٣٢ ـ سجلنا درجة حرارة العمل في كل من فرنين لتجفيف الدهان مصنوعين وفقاً لخطين مختلفين في الانتاج وذلك لمدة عشرين يوماً (أهملنا طريقة الأزواج) . وكان متوسط وتشتت كل من العينتين الناتجتين كما يلي :

$$\bar{x}_1 = 164 \qquad \bar{x}_2 = 168$$

$$S_1^2 = 81 \qquad S_2^2 = 172$$

فهل تقدم هذه النتائج دليلاً على وجود فرق في تغيرات درجة الحرارة في كل من الفرنين ؟ اختبر الفرضية $\sigma_2^2 = \sigma_1^2$ عند المستوى من الأهمية $\alpha = .10$