الفصل الثالث عشر

التجارب العامليّة

١٣ ـ ١ مقدمة وإصطلاحات : عرضنا في الفصلين الحادي عشر والثاني عشر الخطوات الحسابية المناسبة التي تتضمنها طريقة تحليل التشتت في عدد من التصاميم . وينبغي أن يكون القاريء قد أكتسب الآن خبرة معينة في مجال حساب مجاميع المربعات العائدة إلى مصادر التغير المختلفة ، ودرجات الحرية الموافقة لكل من هذه المجاميع . إلا أنه توجد حالات لا يكون مثل هذا الحساب ومثل هذا التقسيم لدرجات الحرية واضحاً وسهلاً . وسنناقش في هذا الفصل حالات من هذا النوع .

ولإيضاح ما نقصده بكلمة « العوامل » نذكر بعض الأمثلة . فغالباً ما يواجه الباحث حالات يجري فيها تصنيف المعلومات الإحصائية (تصنيفاً مستقلاً عن الزمر ، الصفوف ، الأعمدة ، أو التكرارات) وفقاً لعاملين أو أكثر . وبصورة عامة يحصل ذلك في سياق تصنيف أكثر تفصيلاً للمعالجات . ونشير عادة للبيان الإحصائي الذي يحوي عاملين أو أكثر بالبيان الإحصائي العاملي أو إختصاراً « العاملي » . فعلى سبيل المثال ، يمكن في تجارب على الحيوانات ، تصنيفها وفقاً للسلالة ، الجنس ، الأب ، نظام التغذية ، الخ . وفي التجارب الحقلية يمكن أن يتضمن السماد عدة تراكيب مختلفة من النتروجين والفوسفور . وفي دراسات علم الإجتماع وعلم النفس نميز الأشخاص عادة وفقاً للعمر ، الجنس ، التربية ، الخ . ويمدّنا الإقتصاد المنزلي بأمثلة

عديدة عن تصنيفات عاملية للمعالجات ؛ فعلى سبيل المثال ، تكون المعالجات المختلفة ، في تجارب تتعلق بالغسل المنزلي ، عبارة عن تراكيب مختلفة للعوامل الخمسة التالية : (i) الفترة الزمنية للغسيل ، (ii) نوع الماء (يسر أو عسر) ، (iii) درجة حرارة الماء ، (iv) نوع ماكينة الغسيل ، و (v) نوع المنظف المستخدم . ويمكن العثور على أمثلة مشابهة في كل حقل من حقول البحث .

ولكي نسهل على القارىء متابعة محتويات الفصل سنشير بالتفصيل للرموز المستخدمة من أجل العوامل المختلفة . والرموز المتبناة للعوامل في مؤلفات الإحصاء هي ، بصورة عامة ، الأحرف اللاتينية الصغيرة . فمثلاً يمكن أن نرمز للعوامل الخمسة في تجربة الغسيل المذكورة أعلاه كما يلي :

m = نوع ماكينة الغسيل .

a = نوع المنظف .

b = نوع الماء .

c = درجة الماء .

d = طول فترة الغسل .

ويهتم الباحث ، كما نعلم ، بالنتائج المترتبة على تغيرات في واحد أو أكثر من هذه العوامل . فقد يوجد نوعان من ماكينات الغسيل ، نوعان من المنظفات ، نوعان من الماء ، درجتا حرارة مختلفتين ، وفترتان ممكنتان لعملية الغسل . وتعـرف هذه القيم أو التصنيفات المختلفة للعوامل بمستويات العوامل . فلكل عامل من العوامل الخمسة في تجربة الغسيل مستويان . وفي إحدى تجارب علم الحركة يمكن أن تكون العوامل هي : (i) المسافة ، (ii) الوزن ، (iii) زوج من العمال . ويمكن أن تتناول التجربة ثلاث مستويات من المسافة(d_1, d_2, d_3) وعشر مستويات من الأوزان $(w_1, w_2, \ldots, w_{10})$ وأربع أزواج من العمال نرمز لها بِـ (o_1, o_2, o_3, o_4) . ولدينا هنا ثلاثة عوامل الأول بثلاثة مستويات

والثاني بعشرة مستويات والثالث بأربعة مستويات . وعندما نقول أربعة مستويات من أزواج العمال لا نقصد أكثر من أربعة أزواج مختلفة من العمال . ولذلك يجب ألا يحاول القارىء ان يفهم من كلمة مستوى أكثر مما تجيزه طبيعة العامل المدروس .

ونحب أن نلفت إنتباه القارىء إلى الإختيار غير الموفق لتعابير أصبحت مألوفة في بعض الكتب الإحصائية كأن نقول « التصميم العاملي » ، بينما التعبير الأدق في حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية ، مثلاً ، هو القول « تصميم الزمرة التامة العشوائية بترتيبات عاملية للمعالجات » . وإستخدام كلمة « عاملي » تشير حقيقة إلى كيفية تشكيل المعالجات في تصميم معين وليس إلى التصميم الأساسي نفسه . وبعض الكتّاب يشيرون إلى هذه الحقيقة بالقول « بتجارب عاملية » وليس تصاميم عاملية . وهو التعبير الذي إستخدمناه في هذا الكتاب .

وبالعودة إلى تجربة الحركة المذكورة أعلاه نرى أنه توجد 120 معالجة أو ، كما نعبر عنه عادة ، « تركيب معالجة » يجب أخذها بعين الإعتبار . ونشكل هذه التراكيب بأن نأخذ بعين الإعتبار المستويات العشرة للوزن ، المستويات الثلاثة للمسافة ، والمستويات الأربعة لأزواج العمال ، فنحصل على $10 \times 3 \times 4 = 120$ تركيباً ممكناً . أما في تجربة الغسل المنزلي فيوجد خمسة عوامل ولكل عامل مستويان وبالتالي لدينا $2^5 = 32$ تركيب معالجة .

وكمثال آخر لنفرض أننا نرغب في دراسة إستجابة محصول نوع معين من الحبوب لمعدّلين مختلفين في البذر ، عمقين مختلفين في الزرع ، وثلاثة مستويات في تطبيق سماد معين . فهذه التجربة تحوي $2 \times 2 \times 3 = 12$ تركيب معالجة نرمز لها على الشكل :

$$\begin{array}{cccc} a_1\, b_1\, c_1 & a_1\, b_2\, c_1 & a_2\, b_1\, c_1 & a_2\, b_2\, c_1 \\ a_1\, b_1\, c_2 & a_1\, b_2\, c_2 & a_2\, b_1\, c_2 & a_2\, b_2\, c_2 \\ a_1\, b_1\, c_3 & a_1\, b_2\, c_3 & a_2\, b_1\, c_3 & a_2\, b_2\, c_3 \end{array}$$

حيث يرمز a للعامل الأول وهو معدل البذر ، b للعامل الثاني وهو عمق

الزراعة ؛ و c للعامل الثالث وهو مستوى تطبيق السماد ؛ أما الدليل تحت كل رمز فيشير إلى المستوى المستخدم لهذا العامل . وهكذا يرمز تركيب المعالجة $a_i b_j c_k$ إلى أننا نستخدم العامل a عند المستوى i ، والعامل b عند المستوى j ، والعامل c عند المستوى k $(i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3,)$ والطريقة الرمزية المختصرة المستخدمة عادة للدلالة على تراكيب المعالجة هو أن نكتفي بكتابة الدليل الرقمي الذي يشيرإلى مستوى العامل بينما يشيرترتيب ورود الدليل إلى العامل بعد أن نكون قد رتبنا العوامل كعامل أول ثم ثان ثم ثالث الخ . فإذا أعتبرنا ترتيب العوامل وفقاً لورود ذكرها في المثال السابق فيمكن التعبير عن تراكيب المعالجة الإثنتي عشرة على الشكل :

111	121	211	221
112	122	212	222
113	123	213	223

ونشير عادة إلى مثل هذه التجربة بأنها تجربة $3 \times 2 \times 2$ عاملي دون الإشارة إلى التصميم الأساسي المستخدم . وبصورة مماثلة نقول أن تجربة الحركة هي $4 \times 10 \times 3$ عاملي ونفهم من ذلك أنها تجربة تحوي ثلاثة عوامل للأول منها ثلاثة مستويات وللثاني عشرة مستويات وللثالث أربعة مستويات . أما تجربة الغسل المنزلي فهي 2^5 عاملي وهذا يعني أنها تحوي خمسة عوامل وكل منها يقع في مستويين .

ونؤكد ثانية بأنه يمكن فرض ترتيب عاملي للمعالجات على أي تصميم معين فتوضع تراكيب المعالجة في إطارالتصميم التام العشوائية أو تصميم الزمرة التامة العشوائية أو تصميم المربع اللاتيني . وسنقتصر في هذا الفصل على دراسة تجارب عاملية توضع في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية . وفي هذه الحالة نشير عادة للزمر على أنها تكرارات .

١٣ ـ ٢ مثال يحوي عاملين : ليكن البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ١) .

والخطوة الأولى في الحسابات هي إعتبار المعلومات الإحصائية ناتجة عن تصميم الزمرة التامة العشوائية بإثنتي عشرة معالجة . وعندئذ نحسب ، كما رأينا في الفصل الثاني عشر ، مجاميع المربعات التالية :

جدول ١٣ ـ ١ بيان إحصائي افتراضي لتوضيح حساب مجاميع المربعات في تجربة عاملية 3×4 مخططة وفق تصميم الزمرة التامة العشوائية .

التكرارات	a_1			a_2			a_3			a_4			مجموع التكرار
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	
1	128	34	16	152	40	118	76	102	132	180	220	60	1258
2	42	134	18	128	88	80	158	96	60	90	220	48	1162
3	136	172	46	216	76	93	168	162	68	150	156	160	1603
مجموع المعالجة	306	340	80	496	204	291	402	360	260	420	596	268	

مجموع المربعات الكلي $= SS = (128)^2 + \ldots + (160)^2 - \frac{(4023)^2}{36}$

$$= 114818.8$$

مجموع مربعات التكرارات $= SSR = \frac{(1258)^2 + (1162)^2 + (1603)^2}{12}$

$$- \frac{(4023)^2}{36} = 8964.5$$

مجموع مربعات المعالجات $= SST = \frac{(306)^2 + \ldots + (268)^2}{3} - \frac{(4023)^2}{36}$

$$= 67160.8$$

مجموع مربعات الخطأ $= SSE = 114818.8 - 8964.5 - 67160.8 = 38693.5$

إلا أننا نعلم عن المعالجات أكثر مما تقدمه لنا هذه الحسابات . فالمعالجات في هذه الحالة هي كل التراكيب الممكنة بين المستويات الأربعة للعامل a والمستويات الثلاثة للعامل b . وهكذا يبدو ملحّاً أن نقسم مجموع مربعات المعالجات بما يتفق وهذه المعلومات الإضافية . ولذلك نحسب :

SSA = مجموع المربعات الموافق للمستويات المختلفة لـ a

$$= \frac{(726)^2 + (991)^2 + (1022)^2 + (1284)^2}{9} - \frac{(4023)^2}{36} = 17351.7$$

SSB = مجموع المربعات الموافق للمستويات المختلفة لـ b

$$= \frac{(1624)^2 + (1500)^2 + (899)^2}{12} - \frac{(4023)^2}{36} = 25061.2$$

ولكن عندما نجمع هذه المجاميع نجد 42412.9 ، وهو أقل بـ 24747.9 من مجموع مربعات المعالجات . فكيف نعلل هذا الفرق ؟ وإلى أي مصدر من مصادر التغير ننسبه ؟ والجواب هو أننا ننسب هذا الفرق إلى التفاعل بين العاملين a و b ونرمز له بالرمز SS (AB) . (سنعرف التفاعل بين عاملين في حينه) .

وكما رأينا في تصميم الزمرة التامة العشوائية فإن درجات الحرية الموافقة للتكرارات (أي الزمر) ، المعالجات ، والخطأ التجريبي هي ، على الترتيب ، 2 ، 11 ،و 22 . ونقسم درجات الحرية الموافقة للمعالجات بما يتفق و SSA ، SSB ،و SS (AB) أي 3 ، 2 ، 6 ، على الترتيب . وقد حصلنا على درجات الحرية الموافقة لعامل بطرح واحد من عدد المستويات الموافقة لهذا العامل . وعدد درجات الحرية للتفاعل بين عاملين هو جداء عددي درجات الحرية الموافقين لهذين العاملين . وهكذا نجد في مثالنا أن للعامل a أربعة مستويات وبالتالي يكون عدد درجات الحرية الموافق لِـ SSA هو 3 ، وبصورة مماثلة فإن عدد درجات الحرية الموافق لِـ SSB هو 2 ، ويكون إذن عدد درجات الحرية الموافق لِـ SS (AB) هو $6 = 2 \times 3$. ونكتب تحليل التشتت كما في الجدول (١٣ ــ ٢) .

جدول ١٣ ـ ٢ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ١)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
التكرارات	2	8964.5	4482.25
المعالجات	11	67160.8	6105.53
A	3	17351.7	5783.90
B	2	25061.2	12530.60
AB	6	24747.9	4124.65
الخطأ التجريبي	22	38693.5	1758.79
المجموع	35	114818.8	

١٣ ـ ٣ مفهوم التفاعل : ذكرنا في الفقرة السابقة التفاعل بين عاملين ، وسنقدم الآن تفسيراً لهذا المصطلح من خلال المثال التالي : فلنفرض أن العاملين a و b هما نوعان من السماد ، نيتروجين وفوسفور ، وأن لكل منهما مستويان إثنان (المستوى الأول هو معدّل 50 رطلاً إنكليزياً في الفدان والمستوى الثاني هو معدل 100 رطلاً انكليزياً في الفدان) ولنرمز لهذه الحالة كما يلي :

a_1 = النيتروجين بمعدل 50 رطلاً إنكليزياً في الفدان .

a_2 = النيتروجين بمعدل 100 رطلاً إنكليزياً في الفدان .

b_1 = فوسفور بمعدل 50 رطلاً إنكليزياً في الفدان .

b_2 = فوسفور بمعدل 100 رطلاً إنكليزياً في الفدان .

ويمكن تصوير الواقع الحقلي للتجربة على الشكل :

$a_1\ b_1$	$a_2\ b_1$
$a_1\ b_2$	$a_2\ b_2$

ولنفرض أن الإنتاج كان واحداً من الأشكال الثلاثة التالية :

I	a_1	a_2
b_1	63	67
b_2	69	73

II	a_1	a_2
b_1	63	67
b_2	69	78

III	a_1	a_2
b_1	63	67
b_2	69	70

فنلاحظ في الحالة I أنه إذا زدنا معدل تطبيق العامل a من a_1 إلى a_2 بينما العامل b مطبق على المستوى b_1 يزداد الإنتاج بمقدار 4 وحدات . وبصورة مشابهة إذا زدنا معدل تطبيق العامل a من a_1 إلى a_2 بينما العامل b مطبق على المستوى b_2 فإن الإنتاج يزداد أيضاً بمقدار 4 وحدات ،أي أن ما سببه الإنتقال بالعامل a من المستوى a_1 إلى a_2 من زيادة في الإنتاج لم يتأثر بكون العامل b مطبقاً وفق المستوى b_1 أو المستوى b_2 . ونقول في هذه الحالة أنه لا يوجد تفاعل بين العاملين a و b . وفي الحالة II نجد وضعاً مختلفاً ، فعندما زدنا معدل تطبيق العامل a من المستوى a_1 إلى المستوى a_2 إزداد

الإنتاج بمقدار 9 في حضور المستوى b_2 للعامل b ، بينما إزداد فقط بمقدار 4 في حضور المستوى b_1 . ونقول في هذه الحالة أنه يوجد تفاعل بين a و b بمقدار $9-4=5$. وبصورة مماثلة نجد ، في الحالة III أنه يوجد تفاعل بين العاملين بمقدار $1-4=-3$. والتفاعل السلبي يعني أن إنتاجية أحد العاملين تنخفض مع إرتفاع مستويات تطبيق العامل الآخر .
وبعد هذا المثال التوضيحي نورد التعريف التالي للتفاعل :

التفاعل بين عاملين هو فشل مستويات أحد العاملين في الإحتفاظ بنفس النسبة من التأثير عبر مستويات العامل الآخر .

وهكذا فإن وجود التفاعل بين عاملين يؤدي ، عند **تطبيقهما** معاً ، إلى تأثيرات إضافية (سلبية أو إيجابية) لا تعود إلى أي منهما بمفرده .

وكمثال آخر لنفرض أن لكل من العاملين a و b ثلاثة مستويات مختلفة ولنفرض أن النتائج كانت كمايلي :

IV	a_1	a_2	a_3
b_1	10	13	16
b_2	13	16	19
b_3	16	19	22

V	a_1	a_2	a_3
b_1	22	10	14
b_2	25	13	17
b_3	30	18	22

VI	a_1	a_2	a_3
b_1	10	12	11
b_2	14	17	21
b_3	19	25	35

وإذا تأملنا الفروق في الإنتاج عند تغير مستويات b وذلك من أجل كل مستوى من مستويات a (ويمكن بصورة مشابهة تأمل الفروق في الإنتاج عند تغير مستويات a وذلك من أجل كل مستوى من مستويات b) فنجد في الحالة IV أن إتجاهات ومقادير هذه الفروق تبقى نفسها من أجل كل من مستويات a ، ولذلك فإن الحالة IV تمثل حالة عدم وجود تفاعل . وفي الحالة V نجد أيضاً ثبات الإتجاهات والمقادير (زيادة 3 من b_1 إلى b_2 وزيادة

5 من b_2 إلى b_3 من أجل كل من مستويات a ولذلك فهي تمثل أيضاً حالة عدم وجود تفاعل . وفي الحالة VI نلاحظ وضعاً مختلفاً فمقادير الزيادة عند الإنتقال من b_1 إلى b_2 هي 4 عند المستوي a_1 ،و 5 عند المستوى a_2 ،و 10 عند المستوى a_3 . وكذلك الأمر بالنسبة للتغير في الإنتاج عند الإنتقال من b_2 إلى b_3 ، فهي زيادة 5 عند المستوى a_1 ، وزيادة 8 عند المستوى a_2 ، وزيادة 14 عند المستوى a_3 ، وهذا يشير إلى وجود تفاعل بين العاملين a و b .

١٣ ـ ٤ الشروط التي نفترض تحققها عند تحليل التجارب العاملية وإختبار الفرضيات : في حالة تجربة تحوي عاملين ، ويجري تنفيذها وفق تصميم الزمرة التامة العشوائية ، ننطلق عادة من النموذج :

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, r \\ j = 1, 2, \ldots, a \\ k = 1, 2, \ldots, b \end{array} \qquad (1)$$

حيث :

$= \mu$ التأثير الرئيسي ،

$= \rho_i$ تأثير التكرار i ،

$= \alpha_j$ تأثير المستوى j من مستويات العامل a ،

$= \beta_k$ تأثير المستوى k من مستويات العامل b ،

$= (\alpha\beta)_{jk}$ تأثير تفاعل المستوى j من العامل a مع المستوى k من العامل b ،

$= \varepsilon_{ijk}$ الخطأ العشوائي الموافق للوحدة التجريبية من التكرار i الخاضعة لتركيب المعالجة (jk) ،

وحيث :

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i = \sum_{j=1}^{a} \alpha_j = \sum_{k=1}^{b} \beta_k = \sum_{j=1}^{a} (\alpha\beta)_{jk} = \sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk} = 0 \qquad (2)$$

والمتحولات العشوائية ε_{ijk} مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي

بمتوسط يساوي الصفر ونفس التشتت σ^2. ويجب ألا يسبب إستخدام الحرف a للدلالة على عدد مستويات العامل a ، والحرف b للدلالة على عدد مستويات العامل b ، أي تشويش. وسيكون المعنى المقصود واضحاً دائماً عند إستخدام الرمز. وتحت هذه الفروض يمكننا البرهان على أن توقع متوسط المربعات هو كما يبين الجدول (١٣ ـ ٣). ونلخص الحسابات الضرورية للوصول إلى مجاميع المربعات المذكورة في هذا الجدول بالمعادلات التالية :

(3) $$SS = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}^2 - \frac{T^2}{rab}$$ = مجموع المربعات الكلي.

(4) $$SSR = \frac{\sum_{i=1}^{r} R_i^2}{ab} - \frac{T^2}{rab}$$ = مجموع مربعات التكرارات

(5) $$SSC = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} T_{jk}^2}{r} - \frac{T^2}{rab}$$ = مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول a × b .

(6) $$SSE = SS - SSR - SSC$$ = مجموع مربعات الخطأ.

(7) $$SSA = \frac{\sum_{j=1}^{a} A_j^2}{rb} - \frac{T^2}{rab}$$ = مجموع المربعات الموافق للعامل a

(8) $$SSB = \frac{\sum_{k=1}^{b} B_k^2}{ra} - \frac{T^2}{rab}$$ = مجموع المربعات الموافق للعامل b

(9) $$SS(AB) = SSC - SSA - SSB$$ = مجموع المربعات الموافق للتفاعل بين a و b .

حيث :

T = المجموع الكلي للملاحظات.

R_i = مجموع الملاحظات ضمن التكرار i ،

T_{jk} = الرقم الموجود في الخلية (jk) من الجدول $a \times b$ وهو مجموع الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a والمستوى k من العامل b .

A_j = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a .

B_k = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى k من العامل b .

ويمكن إستخدام تحليل التشتت في الجدول (١٣ ـ ٣) لإختبار الفرضيات الثلاث التالية :

H_0 : لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية للمستويات المختلفة للعامل a أي

$$H_0 : \alpha_j = 0; \; j = 1, \ldots, a \tag{10}$$

H_1 : لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية للمستويات المختلفة للعامل b أي :

$$H_1 : \beta_k = 0; \; k = 1, \ldots, b \tag{11}$$

H_2 : لا يوجد تفاعل بين العاملين a و b أي :

$$H_2 : (\alpha\beta)_{jk} = 0; \; j = 1, \ldots, a; \; k = 1, \ldots, b$$

ولاختبار هذه الفرضيات نحسب على التتالي :

$$F = \frac{SSA/(a-1)}{SSE/(r-1)\,(ab-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التاثير A}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} \tag{12}$$

$$F = \frac{SSB/(b-1)}{SSE/(r-1)\,(ab-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التأثير B}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} \tag{13}$$

جدول ١٣ ـ ٣ تحليل التشتت لتجربة عاملية تحوي عاملين ومنفذة وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية .

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	SSR/(r–1)	$\sigma^2 + \frac{ab}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات :			
A	a–1	SSA/(a–1)	$\sigma^2 + \frac{rb}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	b–1	SSB/(b–1)	$\sigma^2 + \frac{ra}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$
AB	(a–1) (b–1)	SS(AB)/(a–1) (b–1)	$\sigma^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (ab–1)	SSE/(r–1) (ab–1)	σ^2
المجموع	rab–1		

$$F = \frac{SS(AB)/a-1)\,(b-1)}{SSE/(r-1)\,(ab-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التفاعل AB}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} \qquad (14)$$

ودرجات الحرية الموافقة لكل من هذه النسب واضحة من الجدول (١٣ ـ ٣) ، أو من المعادلات (12) ، (13) و (14) .

١٣ ـ ٥ **تجربة تحوي عاملين** : ولمساعدة القارىء في فهم النقاط الأساسية التي يشملها تحليل تجربة عاملية سندرس الآن تجربة زراعية تتعلق بفول الصويا . وتتألف المعالجات الثمانية في التجربة من تراكيب المعالجة الناتجة عن أربعة أنواع من الأسمدة ، وتاريخين مختلفين للزرع . والتصميم المستخدم هو تصميم الزمرة التامة العشوائية بأربع زمر (تكرارات) . والبيان الإحصائي موجود في الجدول (١٣ ـ ٤) . وبالقيام بالحسابات كما أجملناها في الفقرة السابقة نصل إلى تحليل التشتت المبين في الجدول (١٣ ـ ٥) .

جدول ١٣ ـ ٤ إنتاج فول الصويا بالبوشل من أجل كل فدان من الأرض

تاريخ الزرع	السماد	التكرارات 1	2	3	4
مبكر	لاسماد	28.6	36.8	32.7	32.6
	Aero	29.1	29.2	30.6	29.1
	Na	28.4	27.4	26.0	29.3
	K	29.2	28.2	27.7	32.0
متأخر	لاسماد	30.3	32.3	31.6	30.9
	Aero	32.7	30.8	31.0	33.8
	Na	30.3	32.7	33.0	33.9
	K	32.7	31.7	31.8	29.4

جدول ١٣ ـ ٥ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول ١٣ ـ٤

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	3	7.31	2.44	$\sigma^2 + \frac{8}{3}\sum_{i=1}^{4} \rho_i^2$
تاريخ الزرع	1	32.00	32.00	$\sigma^2 + 16\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^2$
الأسمدة	3	16.40	5.47	$\sigma^2 + \frac{8}{3}\sum_{k=1}^{4} \beta_k^2$
الأسمدة x تاريخ الزرع	3	38.40	12.80	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} (\alpha\beta)_{jk}^2$
الخطأ التجريبي	21	66.43	3.16	σ^2
المجموع	31	160.54		

ولإختبار الفرضية بأنه لا يوجد فرق بين تاثيري تاريخي الزرع على إنتاج فول الصويا نحسب $F = 32.00/3.16 = 10.12$ بـ $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 21$ درجة من الحرية. وبما أن $F > F_{.05}(1, 21)$ فإننا نرفض الفرضية عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$. وإذا ألقينا نظرة على المتوسطات المناسبة نجد أن الزراعة المتأخرة أفضل.

ولإختبار الفرضية بعدم وجود فرق بين تأثيرات الأسمدة الأربعة نقارن $F = 5.47/3.16 = 1.73$ مع $F_{.05}(3, 21) = 3.07$ ، فنجد أننا لا نستطيع رفض الفرضية. وبما أن السبب الأساسي لإستخدام التجربة العاملية هو أن تمكن المجرب من تقصي وجود تفاعل بين العاملين وهما السماد وتاريخ الزرع ، فإننا نرغب في إختبار الفرضية بعدم وجود تفاعل بين العاملين ، ومن أجل ذلك نقارن $F = 12.80/3.16 = 4.05$ ، مع $F_{.05}(3, 21) = 3.07$ ونرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$. وبالتالي فإنه ينبغي أن تختلف التوصيات المتعلقة بالأسمدة في الزراعة المبكرة عنها في الزراعة المتأخرة.

١٣ ـ ٦ حسابات تجربة عاملية تحوي ثلاثة عوامل : ليس صعباً تعميم الطرق الحسابية المبينة في الفقرة (١٣ ـ ٤) والمتعلقة بعاملين إلى حالة ثلاثة عوامل. فالنموذج (١) يصبح في هذه الحالة :

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \gamma_\ell + (\alpha\gamma)_{j\ell} + (\beta\gamma)_{k\ell} + (\alpha\beta\gamma)_{jk\ell} + \varepsilon_{ijk\ell}$$

$$i = 1, \dots, r \; ; \; k = 1, \dots, b \qquad (15)$$
$$j = 1, \dots, a \; ; \; l = 1, \dots, c$$

حيث تعاريف الحدود المختلفة مشابهة لتلك المعطاة في الفقرة (١٣ ـ ٤). وعند تحليل بيان إحصائي مما يمكن تمثيله بالنموذج (15) ، يكون تحليل التشتت كما هو مبين في الجدول (١٣ ـ ٦). ونلخص فيما يلي الحسابات الضرورية للوصول إلى المقادير المذكورة في الجدول (١٣ ـ ٦) :

$$SS = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{c} Y_{ijk\ell}^{2} - \frac{T^{2}}{rabc} \tag{16}$$

$$SSR = \frac{1}{abc}\sum_{i=1}^{r} R_i^{2} - \frac{T^{2}}{rabc} \tag{17}$$

(18) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول a × b × c

$$= SS(abc) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{c} T_{jk\ell}^{2} - \frac{T^{2}}{rabc}$$

(19) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول a × b

$$= SS(ab) = \frac{1}{rc}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} T_{jk}^{2} - \frac{T^{2}}{rabc}$$

(20) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول a × c .

$$SS(ac) = \frac{1}{rb}\sum_{j=1}^{a}\sum_{\ell=1}^{c} T_{j\ell}^{2} - \frac{T^{2}}{rabc}$$

(21) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول b × c

$$SS(bc) = \frac{1}{ra}\sum_{k=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{c} T_{k\ell}^{2} - \frac{T^{2}}{rabc}$$

$$SSA = \frac{1}{rbc}\sum_{j=1}^{a} A_j^{2} - \frac{T^{2}}{rabc} \tag{22}$$

$$SSB = \frac{1}{rac} \sum_{k=1}^{b} B_k^2 - \frac{T^2}{rabc} \tag{23}$$

$$SSC = \frac{1}{rab} \sum_{l=1}^{c} C_l^2 - \frac{T^2}{rabc} \tag{24}$$

$$SS(AB) = SS(ab) - SSA - SSB \tag{25}$$

$$SS(AC) = SS(ac) - SSA - SSC \tag{26}$$

$$SS(BC) = SS(bc) - SSB - SSC \tag{27}$$

$$SS(ABC) = SS(abc) - SSA - SSB - SSC - SS(AB) - SS(AC) - SS(BC) \tag{28}$$

$$SSE = SS - SSR - SS(abc) \tag{29}$$

حيث :

$T =$ مجموع كل الملاحظات .

$R_i =$ مجموع الملاحظات في التكرار i .

$T_{jkl} =$ المجموع الموجود في الخلية jkl من الجدول $a \times b \times c$ ، وهو مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a ، المستوى k من العامل b ، والمستوى l من العامل c .

$T_{jk} =$ المجموع الموجود في الخلية jk من الجدول $a \times b$ ،وهو مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a ، والمستوى k من العامل b

$T_{jl} =$ المجموع الموجود في الخلية jl من الجدول $a \times c$ ، وهو مجموع

كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a ، والمستوى l من العامل c .

T_{kl} = المجموع الموجود في الخلية kl من الجدول $b \times c$ ، وهو مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى k من العامل b ، والمستوى l من العامل c .

A_j = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a .

B_k = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى K من العامل b .

C_l = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى l من العامل c.

ويمكن بسهولة صياغة الفرضيات التي يمكن إختبارها بالإستفادة من عمود توقع متوسط المربعات المبين في الجدول (١٣ ــ ٦) . ونختبر جميع التأثيرات والتفاعلات بالمقارنة مع متوسط مجموع مربعات الخطأ التجريبي .

جدول ١٣ ـ ٦

تحليل التشتت من أجل تجربة عاملية بثلاث عوامل منفذة وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r−1	SSR/(r−1)	$\sigma^2 + \frac{abc}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات :			
A	a−1	SSA/(a−1)	$\sigma^2 + \frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	b−1	SSB/(b−1)	$\sigma^2 + \frac{rac}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$
C	c−1	SSC/(c−1)	$\sigma^2 + \frac{rab}{c-1}\sum_{l=1}^{c}\gamma_l^2$
AB	(a−1) b−1)	SS(AB)/(a-1)(b-1)	$\sigma^2 + \frac{rc}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$
AC	(a−1) (c−1)	SS(AC)/(a−1)(c−1)	$\sigma^2 + \frac{rb}{(a-1)(c-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{l=1}^{c}(\alpha\gamma)_{jl}^2$
BC	(b−1) (c−1)	SS(BC)/(b-1)(c−1)	$\sigma^2 + \frac{ra}{(b-1)(c-1)}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(\beta\gamma)_{kl}^2$
ABC	(a−1) (b−1) (c−1)	SS(ABC)/(a−1) (b−1) (c−1)	$\sigma^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)(c-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(\alpha\beta\gamma)_{jkl}^2$
الخطأ التجريبي	(r−1) (abc−1)	SSE/(r−1) (abc−1)	σ^2
المجموع الكلي	rabc−1		

١٣ ـ ٧ بيان إحصائي لتوضيح حسابات تجربة عاملية بثلاثة عوامل منفذة في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية .

التكرار		a_1				a_2				a_3			
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4
	c_1	3	10	9	8	24	8	9	3	2	8	9	8
1	c_2	4	12	3	8	22	7	16	2	2	2	7	2
	c_3	5	10	5	8	23	9	17	3	2	8	6	3
	c_1	2	10	9	8	29	16	11	3	2	7	5	3
2	c_2	7	10	5	8	28	18	10	6	6	6	5	9
	c_3	9	10	27	8	28	16	11	7	8	9	8	15
	c_1	8	10	2	8	27	16	15	8	2	15	7	14
3	c_2	7	9	2	7	27	15	12	7	7	16	1	13
	c_3	15	7	6	15	30	14	12	5	11	18	3	8
	c_1	1	6	8	14	14	13	8	5	9	30	9	2
4	c_2	14	5	7	15	34	11	9	5	13	11	8	3
	c_3	8	6	4	18	16	12	13	15	17	8	7	16
	c_1	7	8	9	6	18	10	2	16	14	7	6	11
5	c_2	7	9	8	2	19	9	12	12	13	6	6	12
	c_3	7	17	3	10	17	10	20	9	9	8	6	17
	c_1	8	1	10	12	3	8	8	4	11	2	2	9
6	c_2	7	6	12	3	3	15	8	4	12	3	2	10
	c_3	3	2	10	5	3	7	8	6	11	7	3	14

جدول ١٣ ـ ٨ الجدول $a \times b \times c$ المشكّل من البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ٧)

	a_1				a_2				a_3			
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	29	45	47	56	115	71	53	39	40	69	38	47
c_2	46	51	37	43	113	75	67	36	53	44	29	49
c_3	47	52	55	64	117	68	81	45	58	58	33	73

ولتوضيح العلاقات الحسابية المذكورة أعلاه نأخذ البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ٧) وقد تمّ تعديل سلّم القياس لسهولة الحسابات . والخطوة الأولى هي تشكيل الجدول الفرعي الذي يسمى بالجدول $a \times b \times c$ وذلك بالجمع فوق التكرارات . ثم تشكيل الجداول $a \times b$ ، $a \times c$ و $b \times c$ وهي معطاة على الترتيب في الجدول (١٣ ـ ٨) ، ثم (١٣ ـ ٩) ، (١٣ ـ ١٠) ، و(١٣ ـ ١١) . وتنبغي ملاحظة أنه يمكن تشكيل كل من الجداول الفرعية $a \times b$ ، $a \times c$ و، $b \times c$ ، بالإستفادة من الجدول $a \times b \times c$ وذلك بالجمع فوق العامل الذي نريد الإستغناء عنه .

جدول ١٣ ـ ٩ الجدول الفرعي $a \times b$

	a_1	a_2	a_3
b_1	122	365	151
b_2	148	214	171
b_3	139	201	100
b_4	163	120	169

جدول ١٣ ـ ١٠ الجدول الفرعي a × c

	a_1	a_2	a_3
c_1	177	278	194
c_2	177	311	175
c_3	218	311	222

جدول ١٣ ـ ١١ الجدول الفرعي b × c

	b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	184	185	138	142
c_2	232	170	133	128
c_3	222	178	169	182

وبتطبيق المعادلات بين (16) و (29) نجد مجاميع المربعات التالية :

$$SS = 8277.14$$
$$SSR = 575.75$$
$$SS(abc) = 3283.27$$
$$SS(ab) = 2913.27$$
$$SS(ac) = 1065.32$$
$$SS(bc) = 670.83$$
$$SSA = 941.79$$
$$SSB = 463.79$$
$$SSC = 84.93$$
$$SS(AB) = 1507.69$$
$$SS(AC) = 38.60$$
$$SS(BC) = 122.11$$
$$SS(ABC) = 124.36$$
$$SSE = 4418.42$$

ويبين الجدول (١٣ ـ ١٢) تحليل التشتت . وبما أن أرقام البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ٧) افتراضية فلن نحاول إعطاء أية تفسيرات للتأثيرات المختلفة .

جدول ١٣ ـ ١٢ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ٧) .

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	5	575.75	115.15	$\sigma^2 + \frac{36}{5}\sum_{i=1}^{6} \rho_i^2$
المعالجات A	2	941.79	470.90	$\sigma^2 + 36\sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2$
B	3	436.79	154.60	$\sigma^2 + 18\sum_{k=1}^{4} \beta_k^2$
C	2	84.93	42.46	$\sigma^2 + 36\sum_{\ell=1}^{3} \gamma_\ell^2$
AB	6	1507.69	251.28	$\sigma^2 + 3\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} (\alpha\beta)_{jk}^2$
AC	4	38.60	9.65	$\sigma^2 + 6\sum_{j=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} (\alpha\gamma)_{j\ell}^2$
BC	6	122.11	20.35	$\sigma^2 + 3\sum_{k=1}^{4}\sum_{\ell=1}^{3} (\beta\gamma)_{k\ell}^2$
ABC	12	124.36	10.36	$\sigma^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}\sum_{\ell=1}^{3} (\alpha\beta\gamma)_{jk\ell}^2$
الخطأ التجريبي	175	4418.42	252.48	σ^2
المجموع الكلي	215	8277.14		

١٣ ـ ٧ الطرق العامة للحسابات في تجربة عاملية بأربعة عوامل أو أكثر :

يمكن بسهولة تعميم الطرق الحسابية لتجربة عاملية بثلاثة عوامل إلى حالة تجربة عاملية بأربعة عوامل أو أكثر فنحسب أولاً مجموع المربعات الكلي ومجموع مربعات التكرارات . وبعدها نشكل على الترتيب الجدول a × b × c × d وهو الجدول الناتج عن البيان الإحصائي بعد الجمع فوق التكرارات ، ثم نشكل جميع الجداول ذات الثلاثة أبعاد وهي الجدول a × b × c ، a × b × d ، a × c × d ، b × c × d . ثم الجـداول ذات البعديـن . وبدءاً مـن هذه الجداول ذات البعدين ، وبعد حساب مجاميع مربعات التأثيرات الرئيسية أي SSA ، SSB ، SSC . SSD نحسب بعملية طرح مجموع المربعات الموافق لكل من التفاعلات بين عاملين SS(AB) الخ . وبعدها ننتقل إلى الجداول ذات الثلاثة أبعاد ، فنحسب منها مجاميع المربعات لكل من التفاعلات بين ثلاثة عوامل . وأخيراً ، وباستخدام الجدوم ذي الأربعة أبعاد a × b × c × d ، نحسب مجموع المربعات الموافق للتفـاعل بين العوامل الأربعة أي SS(ABCD) . أما مجموع مربعات الخطأ فنحسبه كالمعتاد بطرح مجموع مربعات التكرارات ومجموع مربعات المعالجات من مجموع المربعات الكلي ، أو بعبارة مكافئة نطرح مجموع مربعات التكرارات ومجموع المربعات الكلي للجدول a × b × c × d أي SS(abcd) من مجموع المربعات الكلي للتجربة .

والتعـميم إلى حالة أكثر من أربعة عوامل واضح . فمن أجل N عامل بصورة عامة ، نحسب مجموع المربعات الكلي ومجموع مربعات التكرارات ثم نشكل الجداول ذات الـ N بُعداً ،ءكل الجداول الممكنة من ذات الـ (N−1) بُعداً . كل الجداول الممكنة من ذات الـ (N−2) بُعداً ، وهكذا ... حتى نصل إلى كل الجداول الممكنة . ذات البعدين . وبعدها نحسب على التوالي مجاميع مربعات التأثيرات الرئيسية ، مجاميع مربعات كل من التفاعلات بين عاملين ، ... ، مجاميع مربعات كل من التفاعلات بين (N−1) من العوامل ، حتى نصل

إلى مجموع المربعات الموافق للتفاعل بين N عاملاً . ثم نحسب أخيراً مجموع مربعات الخطأ بالطرح . ولا توجد صعوبة في معرفة عدد درجات الحرية الموافق لكل من التفاعلات . إذ نصل إلى عدد درجات الحرية الموافق لتفاعل بين عدد من العوامل ، بضرب أعداد درجات الحرية الموافقة لكل من هذه العوامل ، أي درجات الحرية الموافقة للتأثيرات الرئيسية الداخلة في تركيب ذلك التفاعل .

وعندما يكون لدينا n من العوامل ، ولكل منها p من المستويات ، فإننا نشير إلى مثل هذه التجربة على أنها تجربة عاملية p^n . والحالتان المهمتان هما الحالتان الموافقتان لـ $p = 2$ و $p = 3$. ويمكن للقارىء العودة إلى كتابنا المترجم (تصميم وتحليل التجارب) للوقوف على الطرق الحسابية لمثل هذه الحالات العامة .

١٣ ــ ٨ نموذج مركبات التشتت (النموذج II) والنموذج المختلط : نفرض في نموذج مركبات التشتت أن مستويات جميع العوامل هي متحولات عشوائية ، وفي النموذج المختلط تكون مستويات بعض العوامل مثبتة ، بينما المستويات الباقية متحولات عشوائية ، وفي الحقيقة ، فإننا نستخدم النموذج I على الدوام تقريباً ، فيما خلا بعض حقول البحث ، حيث يجد الباحث نفسه وهو يتعامل مع مستويات حصل عليها بصورة عشوائية . وفي مثل هذه الحالات فقط نضطر إلى أن ناخذ في إعتبارنا نموذج مركبات التشتت أو النموذج المختلط .

$$Y_{ijkl} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \gamma_l + (\alpha\gamma)_{jl} + (\beta\gamma)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{jkl} + \varepsilon_{ijkl} \qquad (30)$$

$$i = 1, \ldots, r \qquad j = 1, \ldots, a$$
$$k = 1, \ldots, b \qquad l = 1, \ldots, c$$

وهو يمثل تجربة عاملية بثلاثة عوامل منفذة وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية . ويحتوي كل تكرار (أو زمرة) على abc من الوحدات التجريبية . ونفرض

أن مستويات العوامل الثلاثة كلها مستقلة عن بعضها ، وتتبع التوزيع الطبيعي ، كما نفترض أن التفاعلات بين المستويات المختلفة هي أيضاً مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي . وبعبارة أخرى نفترض أن جميع حدود النموذج في (30) بدءاً من α_i وحتى ε_{ijkl} مستقلة عن بعضها ، وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتتات هي ، على الترتيب

$$\sigma_\alpha^2 , \sigma_\beta^2 , \sigma_{\alpha\beta}^2 , \sigma_\gamma^2 , \sigma_{\alpha\gamma}^2 , \sigma_{\beta\gamma}^2 , \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 , \sigma^2$$

ولا تختلف الإجراءات الحسابية مطلقاً عما وجدناه سابقاً . والفرق الوحيد في تحليل التشتت الناتج هو في العمود الموافق لتوقع متوسط المربعات ، ولهذا الخلاف ، بالطبع ، إنعكاسه على إختبار الفرضيات . ويبين الجدول (١٣ ـ ١٣) تحليل التشتت في هذه الحالة .

ونلاحظ أن توقع متوسط مربعات التفاعل ABC هي تقريباً نفس ما نجده في الجدول (١٣ ـ ٦) والفرق الوحيد هو أن $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$ حلت محل :

$$\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} \sum_{l=1}^{c} (\alpha\beta\gamma)_{jkl}^2 \qquad (31)$$

وعندما نتأمل أياً من التفاعلات بين عاملين ، AB مثلاً ، نجد أن التغير الذي طرأ على توقع متوسط المربعات أكثر تعقيداً . وبدلاً من $\frac{nc}{(a-1)(b-1)} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk}^2$ في الجدول (١٣ ـ ٦) ، نجد مركبتين للتشتت تحوي كل منهما الدليل $\alpha\beta$ وبصورة عامة يلاحظ القارىء أن المركبات الموجودة في توقع متوسط المربعات هي تلك التي يحوي دليلها جميع الأحرف التي تحدد التأثير أو التفاعل المعنيّ . وإذا نظرنا ، مثلاً ، إلى التأثير C نرى أن مركبات التشتت التي يحوي دليلها الحرف γ كلها موجودة . وليس صعباً الحصول على أمثال مركبات التشتت المختلفة فهي ، بكل بساطة ، جداء الأعداد الصحيحة ، التي تحدد على التوالي عدد

جدول ١٣ ـ ١٣ تحليل التشتت لتجربة عاملية بثلاثة عوامل في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، النموذج II .

مصدر التغير		درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	A	r–1	SSR/(r–1)	$\sigma^2 + abc\sum_{i=1}^{r} \rho_i^2/(r-1)$
المعالجات	A	a–1	SSA/(a–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + rbc\sigma^2_{\alpha}$
	B	b–1	SSB/(b–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rac\sigma^2_{\beta}$
	C	c–1	SSC/(c–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rab\sigma^2_{\gamma}$
	AB	(a–1) (b–1)	SS(AB)/(a–1) (b–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta}$
	AC	(a–1) (c–1)	SS(AC)/(a–1) (c–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma}$
	BC	(b–1) (c–1)	SS(BC)/(b–1) (c–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + ra\sigma^2_{\beta\gamma}$
	ABC	(a–1) (b–1) (c–1)	SS(ABC)/(a–1) (b–1) (c–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
الخطأ التجريبي		(r–1) (abc–1)	SSE/(r–1) (abc–1)	
المجموع		rabc–1		σ^2

التكرارات وعدد مستويات كل العوامل غير الممثلة في دليل المركبة المعنية . فمثلاً ، لتحديد أمثال $\sigma_{\beta\gamma}^2$ نلاحظ أن α غير موجودة في دليل هذه المركبة ، وأن عدد مستويات العامل الموافق لـ α هو a ، وبالتالي فإن أمثال هذه المركبة هي ra ، وكمثال آخر لنأخذ أمثال σ_{α}^2 ففي دليل هذه المركبة لا يوجد β ولا γ ، وعدد مستويات العاملين الموافقين لـ β و γ على الترتيب هما b و c ، وهكذا تكون أمثال σ_{α}^2 هي r bc.

كيف نختبر الآن الفرضيات المختلفة التي يمكن صياغتها ؟ وسنجيب على هذا التساؤل بإختصار شديد بإعتبار أنه لا جديد فيها ، ولدى تأمل عمود توقع متوسط المربعات في الجدول (١٣ ـ ١٣) يتضح لنا أنه يمكن إختبار فرضيات مثل : $H_1: \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 = 0$، $H_2: \sigma_{\beta\gamma}^2 = 0$، $H_3: \sigma_{\alpha\gamma}^2 = 0$، $H_4: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ بتشكيل النسب :

$$F = \frac{SS(ABC)/(a-1)(b-1)(c-1)}{SSE/(r-1)(abc-1)}, \tag{32}$$

$$F = \frac{SS(BC)/(b-1)(c-1)}{SS(ABC)/(a-1)(b-1)(c-1)}, \tag{33}$$

$$F = \frac{SS(AC)/(a-1)(c-1)}{SS(ABC)/(a-1)(b-1)(c-1)}, \tag{34}$$

و

$$F = \frac{SS(AB)/(a-1)(b-1)}{SS(ABC)/(a-1)(b-1)(c-1)}, \tag{35}$$

على الترتيب .

ولكن لا يتوفر لنا أي إختبار دقيق لأي من الفرضيات $H_6: \sigma_{\beta}^2 = 0$ ، $H_5: \sigma_{\gamma}^2 = 0$ أو $H_7: \sigma_{\alpha}^2 = 0$. ويمكن أن نلجأ إلى إختبارات تقريبية . فلإختبار $H_7: \sigma_{\alpha}^2 = 0$ ، مثلاً ، يمكن حساب النسبة F التقريبية التالية :

$$F = \frac{MSA}{MS(AB) + MS(AC) - MS(ABC)}$$

$$= \frac{\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + rbc\sigma^2_{\alpha}}{(\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta}) + (\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma}) - (\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma})}$$

بدرجات من الحرية $\nu_1 = a - 1$ و $\nu_2 = \hat{\nu}$ حيث ترمز MSA إلى متوسط مربعات A الخ . وحيث

$$\hat{\nu} = \frac{(MS(AB) + MS(AC) - MS(ABC))^2}{\frac{(MSAB)^2}{(a-1)(b-1)} + \frac{(MS(AC))^2}{(a-1)c-1)} + \frac{(-MS(ABC))^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}} \qquad (37)$$

ويمكن اختبار الفرضيتين H_5 و H_6 بطرق مشابهة .

النموذج المختلط : ولا يضاح حالة النموذج المختلط سنعتبر تجربة عاملية بعاملين ، منفذة في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية ، وحيث تحوي كل زمرة ab من الوحدات التجريبية . ونمثل هذه التجربة بالنموذج :

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, r \\ j = 1, \ldots, a \\ k = 1, \ldots, b \end{array}$$

حيث :

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i = \sum_{j=1}^{a} \alpha_j = \sum_{j=1}^{a} (\alpha\beta)_{jk} = 0$$

والمقادير β_k مستقلة فيما بينها ، وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2_β ، وكذلك المقادير ε_{ijk} مستقلة فيما بينها ، وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2. ونلاحظ أننا

لم نفرض $\sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk} = 0$ ، ذلك لأننا نفرض أن مستويات العامل a مثبتة ، بينما مستويات العامل b عشوائية . ونقدم في الجدول (١٣ ـ ١٤) تحليل التشتت الموافق لهذه الحالة . ولإختبار الفرضية بعدم وجود تفاعل بين العاملين ، أي الفرضية $H_1: \sigma^2_{\alpha\beta} = 0$ ، نحسب النسبة :

$$F = \frac{SS(AB)/(a-1)(b-1)}{SSE/(r-1)(ab-1)} \tag{39}$$

$$= \frac{\text{متوسط مربعات التفاعل}}{\text{متوسط مربعات الخطأ}}$$

وهي مطابقة للنسبة المقابلة في حالتي النموذج I والنموذج II .

أما الفرضيتان $H_2: \alpha_j = 0$ ، $(j = 1, ..., a)$ و $H_3: \sigma^2_\beta = 0$ فأولهما تتعلق بمجتمع منته من المستويات (a من المستويات) بينما تتعلق الثانية بمجتمع لا نهائي من المستويات (وهي مستويات العامل b) . ففي الفرضية H_2 نهتم بإختبار عدم وجود فروق فعلية بين تأثيرات مستويات معينة للعامل a هي المستويات الداخلة في التجربة . ومن الواضح أن الفروق الملحوظة بين تأثيرات المستويات المختلفة للعامل a ستتأثر بدورها بالمستويات العشوائية للعامل b . وهذا يعني أنه لا بد لأي إختبار يتعلق بمستويات a من أن يأخذ بعين الإعتبار التفاعل a × b . وكما هو متوقع ، نختبر إذن الفرضية H_2 بحساب النسبة :

$$F = \frac{SSA/(a-1)}{SS(AB)/(a-1)(b-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التأثير } A}{\text{متوسط مربعات التفاعل}} \tag{40}$$

وكما نلاحظ من توقع متوسط المربعات في الجدول (١٣ ـ ١٤) فإنه يمكن اختبار الفرضية $H_3: \sigma^2_\beta = 0$ بإستخدام النسبة :

جدول ١٣ ـ ١٤ تحليل التشتت من أجل تجربة عاملية بعاملين وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية . النموذج المختلط

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	SSR/(r–1)	$\sigma^2 + \frac{ab}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات A	a–1	SSA/(a–1)	$\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + \frac{rb}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	b–1	SSB/(b–1)	$\sigma^2 + ra\,\sigma_{\beta}^2$
AB	(a–1) (b–1)	SS(AB)/(a–1) (b–1)	$\sigma^2 + r\,\sigma_{\alpha\beta}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (ab–1)	SSE/(r–1) (ab–1)	σ^2
المجموع	rab–1		

$$F = \frac{SSB/(b-1)}{SSE/(r-1)(ab-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التأثير B}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} \qquad (41)$$

ونلاحظ أن توقع متوسط المربعات الموافق للعامل الذي تكون مستوياته مثبتة يحوي مركبة تفاعل، بينما لا يحوي توقع متوسط المربعات الموافق للعامل الذي تكون مستوياته عينة عشوائية من مجتمع من المستويات أي مركبة تفاعل.

ونختتم مناقشتنا للنموذج المختلط بدراسة تجربة عاملية بثلاثة عوامل (والتعميم ممكن بسهولة إلى حالة أربعة عوامل أو أكثر) ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية، حيث تحوي كل زمرة abc من الوحدات التجريبية، والنموذج الذي يمثل تجربة كهذه هو:

$$\begin{aligned} Y_{ijk\ell} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \gamma_\ell \qquad & i = 1, \ldots, r \quad (42) \\ + (\alpha\gamma)_{j\ell} + (\beta\gamma)_{k\ell} + (\alpha\beta\gamma)_{jk\ell} + \varepsilon_{ijk\ell} \qquad & j = 1, \ldots, a \\ & k = 1, \ldots, b \\ & l = 1, \ldots, c \end{aligned}$$

حيث ρ_i أعداد ثابتة تحقق الشرط

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i = 0$$

والمتحولات $\varepsilon_{ijk\ell}$ هي متحولات عشوائية مستقلة تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2. وفيما يتعلق بالحدود الباقية في المعادلة (42) فإن تعريفها يتوقف على ما إذا كانت مستويات العوامل الموافقة مثبتة أو عشوائية. وسندرس حالتين: (i) مستويات كل من a و b مثبتة ومستويات c عشوائية، و (ii) مستويات a مثبتة ومستويات كل من b و c عشوائية.

لنفرض أن مستويات كل من a و b مثبتة ومستويات c عشوائية. فكل إختبار يتعلق بمستويات a، مستويات b، أو أي تفاعل يحوي كلاً من a و b، يجب أن يأخذ بعين الإعتبار حقيقة أننا استخدمنا في التجربة عينة عشوائية فقط من المستويات الممكنة لِـ c. ونجد في هذه الحالة تحليل التشتت المبين في الجدول (١٣ ـ ٥)، وإختبار الفرضيات واضح من توقع متوسط المربعات.

أما في الحالة (ii) حيث مستويات a فقط مثبتة، ومستويات كل من b و c عشوائية، فإننا نجد تحليل التشتت المبين في الجدول (١٣ ـ ١٦).

جدول ١٣ ـ ١٥ تحليل تشتت مبسط لتجربة عاملية بثلاثة عوامل ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية :

النموذج المختلط حيث مستويات العاملين a و b مثبتة ومستويات العامل c عشوائية.

مصدر التغير	توقع متوسط المربعات
التكرارات	$\sigma^2 + \frac{abc}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات :	
A	$\sigma^2 + rb\,\sigma^2_{\alpha\gamma} + \frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	$\sigma^2 + ra\,\sigma^2_{\beta\gamma} + \frac{rac}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$

C	$\sigma^2 + ra\,\sigma_\gamma^2$
AB	$\sigma^2 + r\,\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + \frac{rc}{(a-1)(b-1)} \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk}^2$
AC	$\sigma^2 + rb\,\sigma_{\alpha\gamma}^2$
BC	$\sigma^2 + ra\,\sigma_{\beta\gamma}^2$
ABC	$\sigma^2 + r\,\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
الخطأ التجريبي	σ^2

جدول ١٣ ـ ١٦ تحليل تشتت مبسط لتجربة عاملية بثلاثة عوامل ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية .

النموذج المختلط حيث مستويات العامل a مثبتة ومستويات العاملين b و c عشوائية .

مصدر التغير	توقع متوسط المربعات
المتكرارات	$\sigma^2 + \frac{abc}{r-1} \sum_{i=1}^{r} \rho_i^2$
المعالجات :	

$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + \frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$	A
$\sigma^2 + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rab\sigma^2_{\gamma}$	B
$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta}$	AB
$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma}$	AC
$\sigma^2 + ra\sigma^2_{\beta\gamma}$	BC
$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$	ABC
σ^2	الخطأ التجريبي

١٣ ـ ٩ التجارب العاملية في حالة أكثر من ملاحظة واحدة من كل وحدة تجريبية : في حال إستخدام تصميم الزمرة التامة العشوائية نجد نفس النوع من تحليل التشتت الذي استعرضناه في الفقرة (١٢ ـ ٧) ، ويقع الفرق الوحيد في تقسيم مجموع مربعات المعالجات . وهكذا فإننا سوف لا نعط مثالاً عددياً وإنما سنكتفي بجدول عام لتحليل التشتت . ونبدأ في هذه الحالة من النموذج التالي الموافق لحالة عاملين :

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} + \eta_{ijkl} \qquad (43)$$

$i = 1, \ldots, r \; , \; j = 1, \ldots, a$

$k = 1, \ldots, b \; , \; l = 1, \ldots, n,$

حيث :

$$\sum_{i=1}^{r}\rho_i = \sum_{j=1}^{a}\alpha_j = \sum_{k=1}^{b}\beta_k = \sum_{j=1}^{a}(\alpha\beta)_{jk} = \sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk} = 0 \qquad (44)$$

والمتحولات ε_{rjk} مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ^2 أما المتحولات η_{rjkl} فمستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي σ_η^2 . وتحليل التشتت معطى في الجدول (١٣ ـ ١٧) .

جدول ١٣ ـ ١٧ تحليل التشتت العام لتجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية وبـ n ملاحظة من كل وحدة تجريبية .

مصدر التغير	درجات الحرية	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + \frac{nab}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات : A	a–1	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + \frac{rnb}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	b–1	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + \frac{rna}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$
AB	(a–1) (b–1)	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + \frac{rn}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (ab–1)	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2$
خطأ العينة	rab (n–1)	σ_η^2
المجموع	rabn–1	

ويمكن تعميم الفكرة بحيث تضم مراحل جديدة ، إذ لو فرضنا مثلاً أن الملاحظات المتعددة من كل وحدة تجريبية هي إنتاج عينة عشوائية من وحدات أصغر اكتفينا بها بدلاً من حساب إنتاج الوحدة التجريبية بكاملها ،

وأننا قررنا أخذ عدة قياسات من كل من الوحدات الصغيرة هذه بدلاً من قياس واحد . ففي هذه الحالة يصبح النموذج (43) على الشكل :

$$Y_{ijklm} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} + \eta_{ijkl} + \delta_{ijklm} \quad (45)$$

$$i = 1, \ldots, r \;,\; j = 1, \ldots, a$$

$$k = 1, \ldots, b \;;\; l = 1, \ldots, n$$

$$m = 1, \ldots, d$$

حيث نعرف جميع الحدود كما في المعادلة (43) ، والمتحولات δ_{ijklm} هي متحولات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ_δ^2 . ويصبح تحليل التشتت كما يبين الجدول (١٣ ـ ١٨) . ويمكن تصميم هذه النتائج بحيث تشمل 3 عوامل أو أكثر .

١٣ ـ ١٠ **تحليل منحنيات الإستجابة في التجارب العاملية** : غالباً ما يكون من المستحسن دراسة منحني الإستجابة الذي يلخص تأثيرات المستويات المختلفة لعامل على الخاصة المدروسة . وفي حالة التجارب العاملية يمكن دراسة منحنيات الإستجابة الموافقة لمستويات عاملين أو أكثر من عوامل التجربة . وإذا تضمنت التجربة عاملين a و b ، على سبيل المثال ، فيمكننا تقسيم مجموعي المربعات SSA و SSB إلى أجزاء نرمز لها بِـ A_L ، A_Q ، ... ، B_L ، B_Q ، ... ، على الترتيب . أي يمكننا الحصول على مجموع مربعات المركبات الخطية والتربيعية الخ . الموافقة لكل من العاملين a و b . ومن الممكن أيضاً تقسيم مجموع مربعات التفاعل SS(AB) إلى مركبات نرمز لها بِـ A_LB_L ، A_LB_Q ، A_QB_L ، A_QB_Q ، ... وفي حال وجود عامل ثالث C نضيف أيضاً المركبات C_L ،

C_Q ، A_LC_L ، A_QC_L ، B_LC_Q ، $A_LB_LC_L$ ، $A_LB_LC_Q$ ، الخ . وبالطبع فإن عدد المركبات هذه يتوقف على عدد مستويات العوامل المختلفة في التجربة ، وسنقدم الآن مثالين عدديين يوضحان طرق حساب هذه المركبات .

لناخذ أولاً تجربة بعاملين أحدهما a بأربعة مستويات هي a_1, a_2, a_3, a_4 والآخر b بثلاثة مستويات هي b_1, b_2, b_3 . ولنفرض أنها نُفذت وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية الذي يحوي زمرتين. والبيان الإحصائي معطى في الجدول (١٣ ـ ١٩) وهو بيان إفتراضي. ولإيضاح الطرق الحسابية سنحاول الحصول على 11 من مجاميع المربعات (يوافق كل منها درجة واحدة من الحرية) هي : A_L ، A_Q ، A_C ، B_L ، B_Q ، A_LB_L ، A_LB_Q ، A_QB_L ، A_QB_Q ، A_CB_L ، و A_CB_Q. وعملياً نحسب بعض هذه المركبات فقط ، ويتوقف

جدول ١٣ ــ ١٨ تحليل التشتت لتجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية ، بعينة تحوي n وحدة صغرى من كل وحدة تجريبية و d قياساً في كل من الوحدات الصغرى .

مصدر التغير	درجات الحرية	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2 + dn\sigma^2 + \frac{dnab}{r-1}\sum_{i=1}^{r} \rho_i^2$
المعالجات :		
A	a–1	$\sigma_\delta^2 + d\sigma^2 + dn\sigma^2 + \frac{rdnb}{a-1}\sum_{j=1}^{a} \alpha_j^2$
B	b–1	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2 + dn\sigma^2 + \frac{rdna}{b-1}\sum_{k=1}^{b} \beta_k^2$
AB	(a–1) (b–1)	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2 + dn\sigma^2 + \frac{rdn}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (ab–1)	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2 + dn\sigma^2$
خطأ العينة	rab (n–1)	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2$
القياسات المتكررة	rabn (d–1)	σ_δ^2
المجموع	rabnd–1	

عدد ونوع المركبات المطلوب حسابها على ظروف المسألة المدروسة . ونفترض ضمناً أن مستويات كل من العوامل تختلف عن بعضها بمقادير متساوية .

جدول ١٣ ـ ١٩ بيان توضيحي لحساب المركبات الخطية ، التربيعية ، ... للتأثيرات في تجربة عاملية بعاملين . موضوعة في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية .

التكرارات		a_1	a_2	a_3	a_4
	b_1	7	8	9	7
1	b_2	5	6	11	10
	b_3	4	6	10	12
	b_1	7	9	9	8
2	b_2	6	6	10	11
	b_3	6	7	10	12

والجدول $a \times b$ الضروري لحساب مجاميع المربعات المعتادة في جدول تحليل التشتت معطى في الجدول (١٣ ـ ٢٠) . وكل رقم في هذا الجدول هو مجموع ملاحظتين (r = عدد التكرارات = 2) . وبإستخدام أمثال كثيرات الحدود من الجدول (١٢ ـ ١٤) أو من الجدول الموافق في الملحق نجد أن :

جدول ١٣ ـ ٢٠ الجدول المشكل من البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ١٩)

	a_1	a_2	a_3	a_4	المجموع
b_1	14	17	18	15	64
b_2	11	12	21	21	65
b_3	10	13	20	24	67
المجموع	35	42	59	60	196

$$AL = \frac{[(-3)(35) + (-1)(42) + (1)(59) + (3)(60)]^2}{(2)(3)[(-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2]} = 70.35$$

$$A_Q = \frac{[(1)(35) + (-1)(42) + (-1)(59) + (1)(60)]^2}{(2)(3)[(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2]} = 1.50$$

$$A_C = \frac{[(-1)(35) + (3)(42) + (-3)(59) + (1)(60)]^2}{(2)(3)[(-1)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + (1)^2]} = 5.63$$

$$B_L = \frac{[(-1)(64) + (0)(65) + (1)(67)]^2}{(2)(4)[(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2]} = .56$$

$$B_Q = \frac{[(1)(64) + (-2)(65) + (1)(67)]^2}{(2)(4)[(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2]} = .02$$

ونلاحظ أن المخرج هو (i) في كل من A_L ، A_Q ، A_C يساوي (rb) × (مجموع مربعات أمثال كثيرة الحدود) و (ii) في كل من B_L ، B_Q يساوي (ra) × (مجموع مربعات أمثال كثيرة الحدود) .

ولإيضاح طريقة حساب مركبات مجموع مربعات التفاعل SS(AB) ، نأخذ كمثال المركبة A_QB_L . نحسب أولاً مجموع جداءات أمثال كثيرة الحدود الموافقة لِـ a بالمجاميع الموجودة في خلايا الجدول a × b ، وذلك من أجل كل مستوى من مستويات العامل b فنحصل بذلك على ثلاثة مجاميع موافقة لِـ b_1 ، b_2 ، b_3 على الترتيب . وبعدها نطبق أمثال كثيرة الحدود الموافقة لِـ b على هذه المجاميع الثلاثة ، فنحصل على مجموع أخير نربعه ونقسمه على جداء مجموع مربعات أمثال كثيرة الحدود الموافقة لِـ a في مجموع مربعات أمثال كثيرة الحدود الموافقة لِـ b ، وهي الأمثال التي استخدمناها لتوّنا في الحسابات (في مثالنا هنا نجد أن الأمثال الموافقة لِـ a تربيعية والأمثال الموافقة لِـ b خطية .) هذا بالإضافة إلى تقسيمها على r (عدد التكرارات) بإعتبار أن كل مجموع في خلية من خلايا الجدول a × b هو مجموع r من الملاحظات . والقيمة

الناتجـة هي عندئذ مجموع المربعات الموافق للمركبـة A_QB_L من مركبات SS(AB) . وفي مثالنا العددي نجد :

من أجل b_1 : $(1)(14) + (-1)(17) + (-1)(18) + (1)(15) = -6$

من أجل b_2 : $(1)(11) + (-1)(12) + (-1)(21) + (1)(21) = -1$

من أجل b_3 : $(1)(10) + (-1)(13) + (-1)(20) + (1)(24) = 1$

ومنه :

$$A_QB_L = \frac{[(-1)(-6) + (0)(-1) + (1)(1)]^2}{2[(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2][(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2]} = 3.06$$

ويمكن بطريقة مماثلة تماماً حساب بقية المركبات المبينة في الجدول (١٣ ـ ٢١) .

جدول ١٣ ـ ٢١ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول ١٣ـ١٩

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
التكرارات	1	1.50	1.50
المعالجات :			
A_L	1	70.53	70.53
A_Q	1	1.50	1.50
A_C	1	5.63	5.63
B_L	1	.56	.56
B_Q	1	.02	.02
$A_L\ B_L$	1	25.31	25.31
$A_L\ B_Q$	1	2.60	2.60
$A_Q\ B_L$	1	3.06	3.06
$A_Q\ B_Q$	1	.20	.20
$A_C\ B_L$	1	.32	.32
$A_C\ B_Q$	1	2.60	2.60
الخطأ التجريبي	11	3.50	.32
المجموع	23	117.33	

وسوف لا نقوم بمثل هذه التفصيلات في المثال الثاني المعطى في الجدول (١٣ – ٢٢) بل سنحسب فقط المركبات A_L ، $A_Q B_L$ ، و$A_Q B_C C_L$. وسيجد القارىء أنه من الضروري تشكيل الجدولين $a \times b$ و $a \times b \times c$ من أجل هذه الحسابات .

$$A_L = \frac{[(-1)(747) + (0)(1404) + (1)(925)]^2}{(2)(4)(6)[(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2]} = 330.04$$

$$A_Q B_L = \frac{[(1)(325) + (-2)(432) + (1)(-659)]^2}{(2)(6)[(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2][(-3)^2 + (1)^2 + (3)^2]} = 996.67$$

$$A_Q B_C C_L = \frac{(-4232)^2}{D} = 1066.06$$

حيث

$$D = 2[(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2][(-1)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + (1)^2][(-5)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (5)^2]$$

والمخارج هي (i) من أجل A_L تساوي : $(rbc) \times$ (مجموع مربعات الأمثال) ، (ii) من أجل $A_Q B_L$ تساوي : $(rc) \times$ (جداء مجموعي مربعات الأمثال) ، (iii) من أجل $A_Q B_C C_L$ تساوي : (r) (جداء مجاميع مربعات الأمثال) . أما الصور من أجل A_L و$A_Q B_L$ فقد حسبناها بطريقة مماثلة تماماً لما وجدناه في المقادير المشابهة في المثال السابق . وبتعميم المبدأ المتبع في حساب المركبة $A_Q B_L$ نحسب $A_Q B_C C_L$. ويمكن توضيح هذا التعميم كما يلي : نطبق الأمثال الموافقة لـ C_L على الأعداد الموافقة للعامل c في الجدول $a \times b \times c$ ، وذلك من أجل كل مستوى من مستويات b ضمن كل مستوى من مستويات a . ونحصل بذلك على أربع مجاميع جداءات ، واحدة من أجل كل من مستويات b ؛ وذلك ضمن كل مستوى من مستويات a . وبعدها نستخدم الأمثال الموافقة لـ B_C ، ونطبقها على المجاميع التي حصلنا عليها في الخطوة السابقة ، ويعطينا هذا نوعاً من « المجموع $B_C C_L$» من أجل

كل مستوى من مستويات a. وأخيراً نستخدم الأمثال الموافقة لِـ A_Q مطبقة على هذه المجاميع لنحصل على الصورة في عبارة $A_Q B_C C_L$،.

جدول ١٣ ـ ٢٢ بيان إحصائي افتراضي لتوضيح حسابات مجاميع مربعات معينة في تجربة عاملية بثلاثة عوامل منفذة في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية.

التكرارات		a_1				a_2				a_3			
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4
1	C_1	7	7	9	7	15	36	60	15	24	29	17	19
	C_2	23	18	25	15	13	35	61	18	30	26	11	8
	C_3	9	18	24	23	12	43	62	14	31	24	15	23
	C_4	7	13	25	36	11	12	63	26	32	15	12	5
	C_5	6	8	20	7	15	46	18	28	15	32	13	6
	C_6	10	12	30	11	10	42	27	12	17	29	8	7
2	C_1	7	6	11	7	15	35	60	20	25	30	20	20
	C_2	20	19	25	16	13	30	64	20	30	25	15	10
	C_3	9	22	26	24	13	40	66	15	32	25	15	22
	C_4	8	15	26	30	13	10	66	25	34	15	15	4
	C_5	8	10	20	8	17	40	20	30	18	35	15	5
	C_6	9	12	28	11	8	45	30	15	19	30	10	8

تمارين

١ ـ حلّل وفسر البيان الإحصائي التالي المتعلق بإنتاج البطاطا الحلوة عند تطبيق تراكيب مختلفة من السماد ($n = N$، $p = P_2 0_5$، $k = K_2 0$)؛ وحيث يشير الرقم 312، مثلاً إلى أن العامل الأول n في مستواه الثالث، والعامل الثاني p في مستواه الأول، والعامل الثالث k في مستواه الثاني:

					التكرار الأول						التكرار الثاني
npk	الانتاج	npk	الانتاج	npk	الانتاج	npk	الانتاج	npk	الانتاج	npk	الانتاج
133	45	211	39	333	70	212	83	211	56	133	65
111	34	313	62	311	40	221	52	321	49	112	48
221	42	222	65	212	45	322	65	333	92	311	56
323	69	233	92	132	53	313	101	122	75	332	79
213	58	123	56	121	54	111	50	312	86	213	95
331	51	332	91	223	69	331	61	232	74	222	81
232	72	131	73	322	85	132	89	223	109	231	84
122	56	112	55	113	60	123	90	113	68	323	103
312	82	321	75	231	78	233	122	131	98	121	64
المجموع	509		608		554		713		707		675
المجموع الكلي					1671						2095

٢ ـ يرش مزارع أوراق التفاح بتركيزات مختلفة من مركبات النيتروجين ، ثم يحدد كمية النيتروجين (بالملغ في الديسميتر المربع) الباقية على الأوراق مباشرة بعد الرش ولنرمز لهذا الزمن بـ t_0 ثم بعد زمنين متتاليين t_1 و t_2 والهدف من التجربة هو معرفة معدل امتصاص الورق للنيتروجين ، ويوجد تكراران لكل معالجة ، والرقم الأول في كل خلية من خلايا الجدول ترمز لنتيجة التكرار الأول .

الزمن	مستويات النيتروجين		
	n_1	n_2	n_3
t_0	2.29	6.50	8.75
	2.24	5.94	9.52
t_1	0.46	3.03	2.49
	0.19	1.00	2.04
	0	0.75	1.40
t_2	0.26	1.16	1.81

والمطلوب تحليل التشتت مع تقسيم مجموع مربعات المعالجات إلى المركبات :

$$N_L, N_Q, T_L, T_Q, N_L T_Q, N_L T_L N_Q T_L, N_Q T_Q$$

٣ ـ اختبرنا خمس سلالات من نوع معين من الحبوب وأربعة أسمدة . واخترنا بصورة عشوائية 3 وحدات جزئية مربعة من كل وحدة تجريبية وسجلنا إنتاجها كما يلي :

الأسمدة	أنواع الحبوب 1	2	3	4	5
1	57 46 28	26 38 20	39 39 43	23 36 18	48 35 48
2	67 72 66	44 68 64	57 61 61	74 47 69	61 60 75
3	95 90 89	92 89 99	91 82 98	98 85 85	78 89 95
4	92 88 99	96 95 99	98 93 98	90 90 98	99 98 99

أ ـ أكتب جدول تحليل التشتت .

ب ـ بالإستناد إلى نموذج مناسب أكتب توقع متوسط المربعات بما يتفق مع الشروط التالية : (i) السلالات الخمس والأسمدة الأربعة هي عينات عشوائية ؛ (ii) السلالات والأسمدة مجموعات مقصودة لذاتها ؛ (iii) السلالات عينة عشوائية والأسمدة مجموعة معطاة .

جـ ـ إختبر الفرضية بأن متوسطات السلالات متساوية . وفرضية تساوي متوسطات الأسمدة .

د ـ أكتب جدولاً يحوي المتوسطات وانحرافاتها المعيارية .

هـ ـ ماذا تستخلص من نتائج هذه التجربة .

٤ ـ يبين الجدول التالي مخطط تجربة عاملية 2^3 مع النتائج .

التكرار 4				التكرار 3				التكرار 2				التكرار 1			
abc	66	(1)	11	a	28	ac	31	ab	36	bc	31	(1)	7	b	24
a	31	bc	29	c	24	b	19	(1)	19	ac	36	abc	39	ac	31
c	21	ac	33	ab	35	(1)	13	abc	41	b	30	a	30	c	21
b	25	ab	43	ac	26	abc	36	c	30	a	33	bc	27	ab	39

ومجموع المربعات الكلي 3605.97 . والمطلوب إتمام تحليل التشتت ، حساب مجموع مربعات المعالجات من أجل كل من تأثيرات المعالجات بمفردها .

٥ ـ حلّل وفسّر البيان الإحصائي التالي حيث المحصول هو الشوفان ؛ والإنتاج مقاس بالبوشل في الفدان .

المعالجة	التكرار 1	التكرار 2	التكرار 3	مجموع المعالجة
$n_1\,p_1\,k_1$	32.2	33.9	34.6	100.7
$n_2\,p_1\,k_1$	37.4	40.9	38.9	117.2
$n_1\,p_2\,k_1$	30.6	39.4	33.8	103.8
$n_2\,p_2\,k_1$	52.4	48.0	43.9	144.3
$n_1\,p_1\,k_2$	29.9	34.5	36.5	100.9
$n_2\,p_1\,k_2$	42.3	29.9	34.1	106.2
$n_1\,p_2\,k_2$	31.8	32.5	34.2	98.5
$n_2\,p_2\,k_2$	46.6	49.5	46.7	142.8
المجموع	303.1	308.6	302.7	914.4