الفصل الخامس عشر
الإحصاء الغيروسيطي

١٥ ـ ١ مقدمة : فرضنا في الفصول السابقة أن للمتحولات العشوائية المدروسة توزيعاً إحتمالياً محدد الشكل . وقد انطلقنا في معظم الأحيان أن هذا التوزيع الطبيعي ، مستندين في ذلك إلى ما تقدمه نظرية النهاية المركزية من آفاق عملية واسعة النطاق . وقمنا بتقدير متوسطات وتشتتات وإختبار فرضيات إحصائية حولها . وقد برزت محاولات لإيجاد إحصاءات إختبار تسمح لنا بمقارنة التوزيعات دون معرفة شكل هذه التوزيعات . واتسع نطاق مثل هذه الدراسات حتى أصبحت تشكل اليوم جزءاً لا يمكن إغفاله من الإحصاء النظري ، له تطبيقاته المفيدة في عدد من الحقول . وبإعتبار أن المقارنة في هذه الحالات تجري بين توزيعات ، وليس بين الوسطاء التي تتضمنها المعادلات الرياضية لهذه التوزيعات ، فقد دُعي هذا النوع من الدراسات الإحصائية بالإحصاء غير الوسيطي . وربما كانت أهم تطبيقات الإحصاء الغيروسيطي وأوسعها إنتشاراً تلك المتعلقة بإختبار x^2 من أجل الإستقلال وجودة التلاؤم مما سنستعرضه في الفصل القادم . وفي هذا الفصل نعرض بعض التطبيقات الأخرى التي ذاع إستخدامها في حقول تطبيقية معينة :

١٥ ـ ٢ إختبار الإشارة : غالباً ما نرغب في التحريات التجريبية بمقارنة مادتين أو معالجتين تحت مجموعات مختلفة من الشروط التجريبية . ونحصل على أزواج من الملاحظات ، (واحدة من أجل كل مادة أو معالجة) زوج من أجل كل مجموعة من الشروط . وعلى سبيل المثال في مقارنة نوعين من

الذرة الصفراء A و B من حيث إنتاجيتها ، قد نحصل على نتائج قليلة من كل من مجموعة من التجارب التي تمت تحت شروط تجريبية متباينة . فقد تكون مثل هذه التجارب قد تمت فوق أنواع مختلفة من التربة ، مع أسمدة مختلفة ، وفي سنين مختلفة بما يترتب على ذلك من إختلافات في التأثيرات الفصلية مثل معدل هطول المطر ، درجة الحرارة ، مقدار التعرض لأشعة الشمس ، الخ ونفرض أن كلا من النوعين A و B يظهران معاً بنفس التواتر ضمن كل زمرة من زمر كل تجربة من التجارب ، بحيث تقع الملاحظات المأخوذة على مقدار الإنتاج في أزواج (رقم إنتاج من أجل كل نوع) تم الحصول عليها تحت شروط متشابهة تماماً .

ويوضح هذا المثال الظروف التي يكون إختبار الإشارة تحتها مفيداً وهي :

١ ـ توجد أزواج من الملاحظات على شيئين نريد مقارنتهما .
٢ ـ يتم الحصول على كل زوج من هذه الأزواج تحت شروط متشابهة .
٣ ـ يتم الحصول على الأزواج المختلفة تحت شروط مختلفة .

وهذا الشرط الأخير هو الذي يجعل الإختبار t غير مشروع بإعتباره يعني أن للفروق المختلفة ، مأخوذة ضمن كل زوج ، تشتتات مختلفة ، وإذا لم يكن الحال كذلك (بمعنى أنه إذا كانت الأزواج من الملاحظات متجانسة) ، فيمكن إستخدام الإختبار t ما لم توجد أسباب أخرى تمنع من ذلك ، مثل أن يكون من الواضح تماماً أن التوزيع بعيد عن كونه توزيعاً طبيعياً .

ويمكن اللجؤ إلى إختبار الإشارة حتى عندما يكون الإختبار t ممكناً ، وذلك نظراً لبساطته الشديدة . فالمطلوب هو تعداد الفروق السالبة والموجبة ، ثم العودة إلى جدول جاهز للقيم الهامة (حدود منطقة الرفض) . أي أنه يمكن إختبار الفرضية بإستخدام إختبار الإشارة دون الحاجة إلى أية حسابات .

وتجدر الإشارة إلى أن تطبيق الطريقة التي سنستعرضها في هذه الفقرة يبقى مقصوراً على حالات لا توجد فيها قيمتان متساويتان للفروق. ولا يقع مثل هذا التكرار عملياً عندما تكون القياسات دقيقة جداً، ولكن ما يسبب حدوثها هو حاجتنا، في الغالب، إلى تدوير الرقم العشري الثاني أو الأول، مثلاً، وفي هذه الحالة يجب إستثناء ما قد نحصل عليه من القيم المتكررة.

وأخيراً نفترض بأن الفروق بين الأزواج مستقلة عن بعضها البعض، أي أن نتيجة أي من الأزواج لا تتأثر مطلقاً بنتيجة أي من الأزواج الباقية.

طريقة العمل: ليكن المطلوب هو مقارنة الماديتن أو المعالجتين A و B ولنرمز بـ x و y لقيم الملاحظتين المأخوذتين على A و B. وليكن N عدد الأزواج من الملاحظات المأخوذة. فيمكن أن نكتب أزواج الملاحظات والفروق بينها على الشكل التالي:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$$

و

$$x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_N-y_N$$

ويعتمد إختبار الإشارة على إشارات هذه الفروق. وسنرمز بـ r لعدد الإشارات من النوع الأقل تكراراً، وإذا كانت قيم بعض هذه الفروق صفراً فنستغني عنها وبالتالي نخفض حجم العينة N.

وكمثال عددي نأخذ البيان الإحصائي في الجدول (١٥ ـ ١) الذي يعطي إنتاج سلالتين من الذرة الصفراء حصلنا عليه من عدة تجارب مختلفة. وفي هذا المثال، لدينا $N = 28$ و $r = 7$

والفرضية الإبتدائية التي سنختبرها هي أن لكل من هذه الفروق الثمانية والعشرين توزيعاً إحتمالياً (وليس من الضروري أن تكون هذه التوزيعات

من نفس الشكل) وسطه يساوى الصفر . (الوسط كما عرفناه في الفصول الأولى هو القيمة التي يكون إحتمال تجاوزها مساوياً النصف ، أو بعبارة أخرى يكون إحتمال أن يأخذ المتحول العشوائي قيمة أكبر من الوسط مساوياً لإحتمال أن يأخذ قيمة أصغر من الوسط وكل من الإحتمالين يساوي النصف) وستكون هذه الفرضية صحيحة ، على سبيل المثال ، عندما يكون توزيع كل فرق من هذه الفروق متناظراً حول الصفر ، هذا مع العلم بأن صفة التناظر ليست أمراً ضرورياً ، أي أن كون الفرضية صحيحة لا يعني بالضرورة أن التناظر موجود . وسنرفض هذه الفرضية الإبتدائية عندما يكون الفرق بين عدد الإشارات الموجبة وعدد الإشارات السالبة كبيراً . ولكن ما هي القيمة الحرجة التي نعتبر مثـل هذا الفرق عندها كبيراً بكفاية ، أي نعتبره فرقاً هاماً ؟ وللإجابة على هذا التساؤل نعود إلى الجدول الموافق في الملحق الذي يعطي القيم الحرجة لِـ r ، وذلك عند مستويات من الأهمية تساوي 1% ، 5% ، 10% و 25% . ونعتبر قيمة r هامة إذا كانت أقل من القيمة المبينة في الجدول أو تساويها ، وذلك عند مستوى الأهمية الذي تبنيناه .

ويعطي الجدول ٧ النسب المئوية الموافقة للتوزيع الإحتمالي لعدد الإشارات الموجبة ، وذلك تحت الشرط بأن الفرضية الإبتدائية صحيحة . وهذا التوزيع هو في الحقيقة التوزيع الثنائي مع $p = \frac{1}{2}$. وبصورة عامة لا توجد قيم لِـ r موافقة تماماً لمستويات الأهمية المعتادة ، مثل $\alpha = .05$ أو $\alpha = .01$. وعلى أي حال فإنه يمكننا إيجاد مستويات أهمية قريبة إلى أي مستوى مرغوب إذا كان حجم العينة كبيرا بكفاية . ومن أجل المثال المعطى في الجدول (١٥ ـ ١) حيث N = 28 ، نجد من الجدول ٧ الموافق في الملحق أنه يمكن القيام بإختبار وحيد الجانب للفرضية القائلة بأن المجتمع يتألف من 50% على الأقل من الإشارات الموجبة . وهذا الإختبار هو أن نرفض الفرضية إذا حصلنا على 9 إشارات موجبة أو أقل في العينة التي يقدمها البيان الإحصائي وبصورة مماثلة يمكن ، عند المستوى

$\alpha = .044$. القيام بإختبار وحيد الجانب للفرضية بأن المجتمع يتألف من 50% على الأكثر من الإشارت الموجبة وذلك برفض الفرضية إذا حصلنا من العينة على 9 إشارات سالبة أو أقل (أي أكثر من 18 إشارة موجبة). ويمكن القيام بإختبار ثنائي الجانب عند المستوى $.088 = (.044) 2 = \alpha$ ، وذلك برفض الفرضية إذا لاحظنا في العينة ما لا يزيد عن 9 إشارات موجبة أو ما لا يزيد 9 إشارات سالبة. وهذا الإختبار يحدد منطقة الرفض بانها المنطقــة الموافقة لقيم r التي لا تتجاوز 9 أي $r \leqslant 9$. وإذا استخدمنا البيان الإحصائي في الجدول (١٥ ـ ١) لإختبار الفرضية الثنائية الجانب عند المستوى $\alpha = .088$ ، فإننا سنرفض الفرضية بإعتبار أن لدينا $r = 7$ إشارات موجبة فقط .

وغالباً ما يستحيل علينا إيجاد منطقة رفض بحجم معين من أجل عينات صغيرة الحجــم . وعلى سبيـل المثال نجد من الجـدول أنه إذا رغبنـا القيام بإختبار ثنائي الجانب عند المستوى $\alpha = .10$ ، مستخدمين $N = 12$ ملاحظة ، فإن أقرب إختيار ممكن هو $.038 = (.019) 2 = \alpha$ (نرفض إذا كان $r \leqslant 2$) و $.146 = (.073) 2 = \alpha$ (نرفض إذا كان $r \leqslant 3$) . وحتى إذا كانت الفرضية بأن المجتمع يحوي 50% من الإشارات السالبة و 50% من الإشارات الموجبة هي فرضية صحيحة فإن إحتمال أن تكون كل الإشارات في عينة حجمها $N=4$ ، أو حتى في عينة حجمها $N=5$ ، من نفس النوع سيزيد عن 5% . فإحتمال كون الإشارات الأربع في عينة حجمها 4 متماثلة هو .125 ، وإحتمال كون الإشارات الخمس في عينة حجمها 5 متماثلة هو .0625 وذلك تحت الشرط بأن الفرضية صحيحة (أي $p = \frac{1}{2}$) . ولذلك فإنه لا بد من عينة تحوي على الأقل ستة أزواج حتى يكون ممكناً لِـ r أن تفترض أي قيمة تؤدي إلى رفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$.

قوة الإختبار وحجم العينة : كما رأينا في الإختبارات الإحصائية السابقة فإن قوة إختبار الإشارة أي قدرته على فرز فرضية خاطئة ورفضها تزداد مع

جدول ١٥ ـ ١ انتاج سلالتين من الذرة الصفراء

رقم التجربة	انتاج السلالة		اشارة الفرق	رقم التجربة	انتاج السلالة		اشارة الفرق
	A	B	y–x		A	B	y–x
1	47.8	46.1	+	4	40.8	41.3	–
	48.6	50.1	–		39.8	40.8	–
	47.6	48.2	–		42.2	42.0	+
	43.0	48.6	–		41.4	42.5	–
	42.1	43.4	–				
	41.0	42.9	–	5	38.9	39.1	–
					39.0	39.4	–
2	28.9	38.6	–		37.5	37.3	+
	29.0	31.1	–				
	27.4	28.0	–	6	36.8	37.5	–
	28.1	27.5	+		35.9	37.3	–
	28.0	28.7	–		33.6	34.0	–
	28.3	28.8	–				
	26.4	26.3	+	7	39.2	40.1	–
	26.8	26.1	+		39.1	42.6	–
3	33.3	32.4	+				
	30.6	31.7	–				

إزدياد حجم العينة . ويمكن إعطاء احتمالات رفض فرضية ابتدائية H_0 من أجل فرضيات بديلة H_1 تحدد قيمة ما لِـ p نسبة الإشارات الموجبة في المجتمع و $1-p$ نسبة الإشارات السالبة فيه . وحيث تحدد الفرضية الإبتدائية H_0 أن نسبة 50% من الإشارات موجبة $(p=.50)$ ونسبة 50% منها سالبة . ويقدم الجدول (١٥ ــ ٢) الحد الأدنى لحجم العينة بحيث لا يقل إحتمال رفض الفرضية H_0 عن .95 ، وذلك عندما تكون القيمة الفعلية لِـ p هي القيمة المعطاة في العمود الأيسر .

جدول ١٥ ــ ٢ الحد الأدنى الضروري لقيمة N حتى لا يقلّ إحتمال رفض الفرضية $H_0: p=.50$ عن .95 في الوقت الذي تأخذ فيه p قيماً فعلية متباينة في إنحرافها عن القيمة المفترضة ، وذلك من أجل مستويات أهمية مختلفة .

	N			
p	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=10\%$	$\alpha=25\%$
.45	1777	1297	1080	780
.40	442	327	267	193
.35	193	143	118	86
.30	106	79	67	47
.25	66	49	42	32
.20	44	35	28	21
.15	32	23	18	14
.10	24	17	13	11
.05	15	12	11	6

فعلى سبيل المثال ، يبين الجدول (١٥ ــ ٢) أنه إذا كانت الإشارات تتوزع فعلاً بنسبة 45:55 فلا بد من أخذ عينة تحوي 1080 زوجاً لكي يكون إحتمال رفض الفرضية 95 . عند المستوى $\alpha = .10$. أي أنه إذا سحبنا عينات متتالية حجم كل منها 1080 من المجتمع الذي يتصف فعلاً بأن الإشارات

فيه تتوزع بنسبة 45:55 ، فإننا نتوقع أن تؤدي 95% من هذه العينات إلى رفض الفرضية بأن الإشارات تتوزع بنسبة 50:50 (وذلك عند مستوى الأهمية $\alpha = .10$).

وبالطبع فإننا لا نحتاج إلى أي إختبار إذا كنا نعلم سلفاً أن الإشارات تتوزع بنسبة 45:55 . ولكن أهمية الجدول (١٥ ـ ٢) تنبع من الإعتبارات التالية : يهمنا عند مقارنة مادتين أن نحدد ما إذا كان لهما نفس القيمة أو أنهما مختلفتان . وقبل بدء التجربة يجب أن نقرر المدى الذي يجب ألا تنقص عنه قيمة الفرق حتى نصنف المادتتين على أنهما مختلفتان أو بعبارة أخرى ما هو مدى الفرق الذي يمكن التساهل فيه عندما نقول العبارة التالية : « المادتان لهما تقريباً نفس القيمة بحيث يمكن إعتبارهما عملياً متساويتين » . ومثل هذا القرار ، بالإضافة إلى الجدول (١٥ ـ ٢) ، يسمح لنا بتحديد حجم العينة المطلوب . وإذا كنا نهتم بكشف إنحرافات عن الفرضية الإبتدائية صغيرة بحيث يكون التوزع الفعلي للإشارات في حدود 45:55 ، فيجب أن نكون مستعدين لأخذ عينة حجمها كبير جداً (بين 780 و 1777 حسب مستوى الأهمية α) . أما إذا كان إهتمامنا (وهذا يرجع إلى طبيعة المسألة المدروسة) لا يتعدى كشف إنحرافات في حدود توزيع فعلي للإشارات 30:70 ، فإن عينة أصغر بكثير ستكون كافية (بين 47 و 106 وفقاً لمستوى الأهمية α) .

تعديلات إختبار الإشارة : إذا كانت الأزواج من الملاحظات مقاسة بنفس وحدات القياس (أي أنه يمكن مقارنتها ببعضها) ، فيمكن إستخدام إختبار الإشارة للإجابة على تساؤلات من النوع التالي :

١ ـ هل المادة A أحسن من المادة B بمقدار P بالمائة ؟

٢ ـ هل المادة A أحسن من المادة B بمقدار Q من الوحدات ؟

ويمكن إختبار السؤال الأول بزيادة قياسات B بنسبة P في المائة ومقارنة

النتائج مع قياسات A . فإذا فرضنا مثلاً أن أزواج الملاحظات هي :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)$$

وأننا نريد إختبار الفرضية بأن قياسات x المتعلقة بـ A أعلى بمقدار 5% من القياسات y المتعلقة بـ B . فعندئذ يمكن تطبيق إختبار الإشارة على إشارات الفروق التالية :

$$x_1 - 1.05y_1 \ , x_2 - 1.05y_2 \ , x_3 - 1.05y_3 \ , ..., x_N - 1.05y_N .$$

ومن أجل السؤال الثاني يمكن تطبيق إختبار الإشارة معتبرين إشارات الفروق :

$$x_1 - (y_1 + Q) , x_2 - (y_2 + Q) , x_3 - (y_3 + Q) , ..., x_N - (y_N + Q)$$

وفي كلي الحالتين ، إذا لم يكن التوزيع الناتج للإشارات (كما تشير إليه العينة) مختلفاً إختلافاً هاماً عن 50:50 ، نقول أن البيان الإحصائي يشير إلى أنه يمكن الإجابة على التساؤل بالإيجاب . ويوجد عادة مدى معين من قيم P (أو Q) التي تؤدي إلى توزيعات غير هامة (أي توزيع للإشارات غير مختلف إختلافاً هاماً عن 50:50) . فإذا حددنا مثل هذا المدى ، مستخدمين مستوى من الأهمية $\alpha = .05$. فإن مثل هذا المدى هو في الواقع 95% مجال ثقة من أجل P (أو Q) .

وإذا لم تكن وحدات القياس هي نفسها من أجل جميع أزواج الملاحظات ، فيمكن القيام بالتغييرات الضرورية في سلالم القياس بحيث تصبح مثل هذه التساؤلات ذات معنى .

وعندما تكون الملاحظات قادمة من مجتمع طبيعي ، يمكننا مقارنة فعالية إختبار الإشارة بالنسبة للإختبار t ، وذلك بإيجاد حجم العينة N_t الذي تكون

قوة الإختبار t من أجله مساوية لقوة اختبار إشارة قائم على عينة حجمها N . والنسبة $100\, N_t/N$ تدعى فعالية إختبار الإشارة (من حيث قوته) بالنسبة للإختبار t . وتتناقص فعالية إختبار الإشارة هذه مع (١) زيادة α ، (٢) زيادة حجم العينة ، و(٣) زيادة الفرق بين متوسطي المجتمعين. ويبين الجدول (١٥ ـ ٣) فعالية إختبار الإشارة عند إستخدامه في حالة مجتمعين طبيعيين بمتوسطين μ_1 و μ_2 ونفس التشتت σ^2 . والكمية δ في الجدول هي حاصل قسمة الفرق بين المتوسطين (بالقيمة المطلقة) على الإنحراف المعياري للفرق بين ملاحظتين أي : $\delta = |\mu_1 - \mu_2| / \sigma\sqrt{2}$

جدول ١٥ ـ ٣ فعالية إختبار الإشارة في حالة مجتمعين طبيعيين .

N	α	δ				
		قرب الصفر	.5	1.0	1.5	2.0
5	.0625	96	96	95	93	91
10	.0020	94	92	90	87	84
10	.0215	85	84	82	80	77
10	.1094	77	76	74	72	
20	.0118	76	75	73	70	
20	.0414	73	72	70	68	
20	.1153	70	69	67	65	
∞	α	63.7				

ونرى من هذا الجدول ، مثلاً ، أن لإختبار الإشارة المستخدم في عينة حجمها $N = 20$ عند المستوى $\alpha = .0414$ نفس قوة الإختبار t المستخدم في عينة حجمها $N_t = .70N = 14$. وإذا كان $|\mu_1 - \mu_2| / \sigma\sqrt{2}$ صغيراً و N كبيراً فإن الإختبار t لا يحتاج إلا إلى 64% تقريباً من عدد الملاحظات ليكون له نفس قوة إختبار الإشارة .

١٥ ـ ٢ **إختبار الرتب المؤشرة** (إختبار ويلكوكسن) : يعتبر إختبار

ويلكوكسن تعديلاً لإختبار الإشارة . ويُستخدم لإختبار الفرضية بأن وسط مجموعة من الملاحظات (أو وسط الفروق بين أزواج من الملاحظات) يساوي قيمة محدودة μ_o، مثلاً . ونحسب إحصاء الإختبار T كما يلي :

١ ـ نطرح μ_o من كل ملاحظة .

٢ ـ نرتب الفروق الناتجة وفقاً لقيمها المطلقة من الأصغر إلى الأكبر .

٣ ـ نضع أمام كل رتبة إشارة الفرق الموافق لهذه الرتبة .

٤ ـ نحسب T مجموع الرتب الموجبة .

ويقدم الجدول ٨ الموافق في الملحق النسب المئوية لتوزيع إحصاء الإختبار T .

ونجد في الجدول (١٥ ـ ٤) مثالاً عددياً لتوضيح إستخدام الإحصاء T من أجل اختبار الفرضية بأن وسط المجتمع المدروس هو $\mu_o = 2$. وقد اخترنا عينة عشوائية من ثماني ملاحظات من هذا المجتمع . ونرى من الجدول ٨ الموافق في الملحق أنه لكي يكون مستوى الأهمية قريب من $\alpha = .05$ ، يمكن أن نستخدم المنطقة الحرجة (أو منطقة الرفض) المحدودة بقيم لِـ T أقل من أو تساوي 4 ، وقيم لِـ T أكبر من أو تساوي 32 . ومستوى الأهمية الموافق لهذه المنطقة الحرجة يساوي تماماً $\alpha = 2\,(.027) = .054$. وبما أن $T = 30$ في مثالنا هنا فإن البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٥ ـ ٤) لا يقدم عند المستوى 054 . دلالة كافية على أن الفرضية غير صحيحة .

جدول ١٥ ـ ٤ مثال لتوضيح استخدام اختبار ويلكوكسن

x	$x-\mu_0$	رتبة $/x-\mu_0/$	الرتب المؤشرة
2.55	.55	3	3
4.62	2.62	8	8
2.93	.93	4	4
2.46	.46	2	2
1.95	−.05	1	−1
4.55	2.55	7	7
3.11	1.11	6	6
0.90	−1.10	5	−5
			30 = T

١٥ ـ ٣ **الأشواط** : في الفقرات السابقة قارنا ، فيما يتعلق بإختبار الإشارة ، العدد الكلي للفروق الموجبة بالعدد الكلي للفروق السالبة . ومن الطبيعي أن نتساءل عما إذا كانت الإشارات الموجبة مبعثرة بين الإشارات السالبة بطريقة عشوائية إلى حد ما ، وذلك عندما نكتب الملاحظات وفقاً للترتيب الزمني الذي لوحظت فيه . وإذا لاحظنا ، على سبيل المثال ، المتابعة التالية من الإشارات −,−,−,−,,−,+,+,+,+ فيمكن أن نجد فيها ما يميزها عن المتابعة −,+,−,+,−,+,−,+,−. فمع أن كلاً منهما يحوي أربع إشارات موجبة وخمس إشارات سالبة ، إلا أن جميع الإشارات الموجبة تقع إلى جانب بعضها البعض في المتابعة الأولى . وسنسمي كل مجموعة من الفروق لها نفس الإشارة وتقع إلى جانب بعضها « شوطاً » . ويمكن أن يحوي الشوط أي عدد ممكن من الإشارات ، وهكذا فإن المتابعة −,+,+,+,− تحوي ثلاثة أشواط ، اثنان يحوي كل منهما إشارة سالبة واحدة ، والشوط الباقي يحوي ثلاث إشارات موجبة . أما المتابعة −,−,−,−,−,+,+,+,+ . ففيها شوطان طول أحدهما أربعة وطول الآخر خمسة . ويمكن لمتابعة تحوي n فرقاً أن تتألف من شوط واحد (كل الإشارات موجبة أو كلها سالبة)

ويمكن أن تتألف من n شوطاً إذا كانت الإشارتان تظهران على التناوب . وسيكون من المنطقي أن نرفض الفرضية بأن ترتيب الإشارات الموجبة والسالبة هو ترتيب عشوائي ، في حال وجود عدد كبير أو عدد صغير من الأشواط .

ويمكن الإستفادة من الأشواط لإختبار ما إذا كانت عينتان عشوائيتان قادمتين من مجتمعين لهما نفس التوزيع التكراري . ومن أجل ذلك نرتب ملاحظات العينتين معاً في متتابعة واحدة ، ومن الأصغر إلى الأكبر . ثم نحصي عدد أشواط الملاحظات من كل من العينتين ، فإذا وجدنا أن هذا العدد أقل مما نتوقع حدوثه بفعل المصادفة ، فيما لو كان المجتمعان متطابقين ، فإننا نرفض عندئذ الفرضية بأن للمجتمعين نفس التوزيع .

ويمكن أن نستخدم أيضاً نظرية الأشواط لإختبار الفرضية بأن الملاحظات مسحوبة عشوائياً من مجتمع واحد . وللقيام بذلك نحسب وسط العينة المسحوبة ، ونرمز للملاحظات الأقل من الوسط بإشارة (−) ، وللملاحظات فوق الوسط بإشارة (+) ، فإذا كان عدد الأشواط الموجبة والسالبة أكبر أو أصغر مما يمكن توقعه بفعل المصادفة ، فإننا نرفض الفرضية .

ليكن N_1 عدد الوقوعات من نفس النوع (فروق من إشارة موجبة ، ملاحظات أقل من الوسط ، الخ) . و N_2 عدد الوقوعات من النوع الآخر (فروق سالبة ، ملاحظات أكبر من الوسط ، الخ .) وليكن u العدد الكلي للأشواط بين الـ $(N_1 + N_2)$ من الملاحظات . فالجدول ٩ الموافق في الملحق يعطي التوزيع لِـ u من أجل قيم لِـ N_1 و N_2 أقل من أو تساوي العشرة ، وعدد من النسب المئوية الهامة للتوزيعات ، من أجل عينات من حجم أكبر .

مثال١ : لنفرض أن طريقة صناعية تنتج قضباناً فولاذية وأننا نقيس قطر كل منها . وقد وجدنا بين القضبان الأربعين الأولى ستة عشر شوطاً ، يتجاوز الوسط أو يقل عنه . ولنختبر الفرضية بأن هذه الطريقة الصناعية تنتج قضباناً تختلف أقطارها بصورة عشوائية . ولدينا هنا حكماً $N_1 = N_2 = 20$

(بإعتبار أنه لا بد أن يكون نصف الملاحظات فوق الوسط والنصف الآخر تحت الوسط وذلك وفقاً لتعريف الوسط) . وعدد الأشواط الملحوظة $u = 16$ يقع بين $u_{.025} = 14$ و $u_{.975} = 27$ ولذلك فإنه لا توجد دلالة كافية لرفض الفرضية عند المستوى $\propto = .05$

مثال ٢ : لنفرض أننا عالجنا 10 وحدات حقلية من القمح بالسماد A ، وعشر وحدات أخرى بالسماد B ، وسجلنا الإنتاج في الجدول التالي :

A	26.3	28.6	25.4	29.2	27.6	25.6	26.4	27.7	28.2	29.0
B	28.5	30.0	28.8	25.3	28.4	26.5	27.2	29.3	26.2	27.5

وبترتيب العينتين معاً من الأصغر إلى الأكبر ، ووضع خطوط تحت ملاحظات العينة A تمييزاً لها عن ملاحظات العينة B نجد :

25.3, $\underline{25.4}$, $\underline{25.6}$, 26.2, $\underline{26.3}$, $\underline{26.4}$, 26.5, 27.2, 27.5, $\underline{27.6}$, $\underline{27.7}$,
$\underline{28.2}$, 28.4, 28.5, $\underline{28.6}$, 28.8, $\underline{29.0}$, $\underline{29.2}$, 29.3, 30.0

ويوجد 11 شوطاً توافق ، من أجل $N_1 = N_2 = 10$ ، النسبة المئوية 58.6 من توزيع u . وبما أن هذه النسبة تقع بين 2.5 و 97.5 ، فلا توجد دلالة كافية عند مستوى الأهمية 5% لرفض الفرضية بأن للمجتمعين نفس التوزيع . وبالطبع فإنه من غير المتوقع أن يهتم أي كان برفض الفرضية بأنه لا يوجد فرق بين السمادين إذا كان هناك عدد كبير من الأشواط . ويشير العدد الكبير من الأشواط في مثل هذه الحالة إلى نقص في عشوائية إختيار العينة . ولذلك يمكننا في هذا المثال إستخدام إختبار وحيد الجانب ، فنرفض الفرضية فقط إذا كانت النسبة المئوية الموافقة للقيمة الملحوظة لِـ u أقل من .05 ، أي إذا كانت قيمة u أقل أو تساوي 6 .

التقريب الطبيعي : إذا كان كل من N_1 و N_2 أكبر من 10 ، فيمكن

تقريب تابع التوزيع لِـ u بإستخدام جداول التوزيع الطبيعي حيث :

$$z = \frac{u - \mu_u + \frac{1}{2}}{\sigma_u}$$

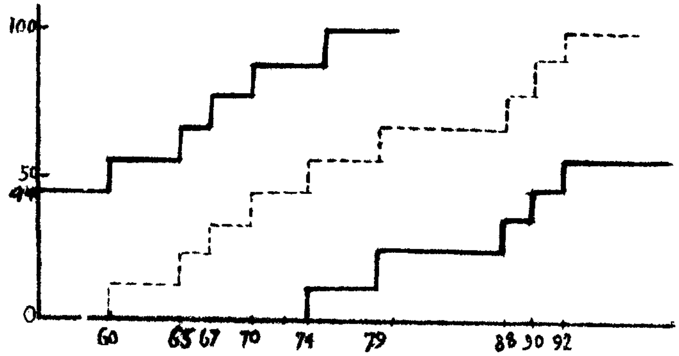
$$\mu_u = \frac{2 N_1 N_2}{N_1 + N_2} + 1, \quad \sigma_u^2 = \frac{2 N_1 N_2 (2 N_1 N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2 (N_1 + N_2 - 1)}$$

وفي المثال ٢ أعلاه لدينا $N_1 = N_2 = 10$ ، $\mu_u = 11$ ، $\sigma_u = \sqrt{4.73} = 2.17$
والقيمة الملحوظة لِـ u ، وهي 11 ، تعطي $z = .5/2.17 = .23$ ، ويوافق هذه القيمة لِـ z النسبة المئوية 59 تقريباً .

١٥ ـ ٤ **تقدير تابع توزيع** : يمكن إقامة مجال ثقة نتنبأ من خلاله بمدى قرب المضلع التكراري المتجمع لعينة من تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة . ونلخص الطريقة فيما يلي :

نرسم المضلع التكراري المتجمع لملاحظات العينة (الخط المنقط في الشكل (١٥ ـ ١)) . ثم نرسم مضلعين موازيين على مسافة $100d_\alpha$ فوق وتحت المضلع التكراري للعينة . فنحصل بذلك على شريط عرضه $200\,d_\alpha$. وهو يمثل $(1-\alpha)$ مجال ثقة للعبارة « تابع توزيع المجتمع يقع ضمن هذا الشريط » .

شكل ١٥ ـ ١



ونقرأ قيم d_α في الجدول الموافق في الملحق . ونجد حجم العينة على يسار الجدول وخمسة مستويات من الثقة في أعلى الجدول . وعلى سبيل المثال ، إذا كان $N = 50$ ورغبنا في أن نكون واثقين ، بإحتمال يساوي .90 ، أن الشريط يغطي تابع التوزيع الموافق للمجتمع ، فعندئذ نجد من الجدول أن $d_{.90} = .17$. أي أن عرض الشريط هو $.34 = 2(.17)$.

والجدول المذكـور هو في الواقع جدول للنسب المئوية للتوزيع الإحتمالي لأكبر إنحراف للمضلع التكراري المتجمع للعينة عن تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة . وهكذا نقول أنه في 90 بالمائة من العينات التي حجمها $N = 50$ سيكون أعظم إنحراف للمضلع التكراري المتجمع للعينة عن تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة هو 0.17

مثال : لنفرض أن ملاحظات عينة حجمها $N = 9$ هي :

88, 92, 65, 74, 67, 79, 90, 70, 60

فنجد من الجدول أن $100\, d_\alpha = 44$ من أجل $.95 = \alpha - 1$ و $N = 9$ (بين $N = 5$ و $N = 10$) . ويبين الشكل (١٥ ـ ١) مضلع العينة بخط منقط أما شريط الثقة فهو خط مستمر يبعد فوق وتحت الخط المنقط بمقدار 0.44 . ولدينا %95 ثقة أن تابع توزيع المجتمع يقع ضمن هذا الشريط .

تحديد حجم العينة : ويمكن إستخدام الجدول أيضاً لتحديد حجم العينة الضروري كي نحرز %95 من الثقة بأن تابع توزيع المجتمع يقع ضمن شريط معين . فلنفرض ، على سبيل المثال ، أن أمثال الثقة التي نرغبها هي 95 . ، وأن عرض الشريط هو .05 ، فعندئذ يكون $d_\alpha = .05/2$. ولكن d_α كما نجدها من الجدول هي $1.36/\sqrt{N}$ ، ومنه نكتب :

$$(1.36/\sqrt{N}) = .025$$

أو

$$N = \left(\frac{1.36}{.025}\right)^2 = (54.4)^2 = 2960$$

ومن أجل أمثال ثقة تساوي 99. ، يجب أن يكون حجم العينة :

$$N = \left(\frac{1.63}{.025}\right)^2 = 4251$$

وبصورة مماثلة ، إذا كان أمثال الثقة 99. ، وعرض الشريط 02. (أي أن يحيد المضلع التكراري المتجمع للعينةعن تابع توزيع المجتمع الذي سحبنا منه العينة بما لا يزيد عن 01.) فعندئذ يكون حجم العينة المطلوب هو :

$$N = \left(\frac{1.63}{.01}\right)^2 = 26569.$$

ويمكن إستخدام الطريقة المذكورة أعلاه كاختبار لجودة التلاؤم . فإذا وقع منحني تابع التوزيع المفروض بكامله ضمن 95% شريط ثقة نقوم برسمه من أجل العينة المسحوبة ، فإننا نقبل الفرضية بأن المنحني المفروض يمثل تابع التوزيع الموافق للمجتمع ، وذلك عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$. وأما إذا خرج المنحني المفروض عن حدود الشريط في نقطة أو أكثر فإننا نرفض الفرضية .

١٥ ـ ٥ إختبار مجموع الرتب : قمنا في المثال ٢ من الفقرة (١٥ ـ ٣) بتعداد الأشواط بعد ترتيب 20 ملاحظة ، 10 من كل من مجتمعين . ويمكننا إستخدام إحصاء آخر هو مجموع الرتب T' لمقارنة العينتين ، وللقيام بذلك نرتب ملاحظات العينتين وفقاً لحجمها من الأصغر إلى الأكبر ، ويقابل كل ملاحظة رقم هو مرتبتها فالرقم 1 من أجل الملاحظة الأصغر ، والرقم 2 من أجل الملاحظة التي تليها ، وهكذا . وعندئذ يكون الإحصاء T' هو مجموع الرتب الموافقة لملاحظات العينة ذات الحجم الأصغر من بين العينتين المدروستين ، أي العينة التي عدد ملاحظاتها أقل . وإذا كانت العينتان من نفس الحجم يمكن إختيار أي منهما . ونلاحظ أنه إذا كان T' مجموع N_1 رتبة ، في حالة عينتين

حجماهما N_1 و N_2 $(N_1 \leq N_2)$ ، فإن قيمة T' محصورة حكماً بين $1+2+...+N_1 = N_1(N_1+1)/2$ و $N_1(2N_2+N_1+1)/2$.

ويقدم الجدول ١٠ بعض النسب المئوية لتوزيع الإحصاء T' تحت الفرض بأن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع الإحتمالي. ونرفض الفرضية بأن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع إذا كانت قيمة T' كبيرة بصورة هامة، أو صغيرة بصورة هامة.

وعلى سبيل المثال إذا كان $N_1 = N_2 = 10$. فنرى من الجدول ١٠ أن إحتمال كون T' أصغر من أو يساوي 79 هو .026 ، وأن إحتمال كون T' أكبر من أو يساوي 134 هو 0.026 . وهكذا تشكل قيم T' التي تحقق $T' \leq 79$ أو $T' \geq 134$ منطقة رفض للفرضية عند مستوى الأهمية 5.2% وفي المثال ٢ من الفقرة (١٥ ـ ٣) كانت رتب العينة A هي 2,3,4,5,6,10 ,11,12,15,17,18 ومنه نجد أن $T' = 99$ ؛ وبما أن هذه القيمة تقع خارج منطقة الرفض ($T' \nleq 79$ أو $T' \ngeq 134$) ، فإننا نقبل، عند المستوى 5.2 ، الفرضية بأن للمجتمعين اللذين سحبنا منهما العينتين A و B نفس التوزيع الإحتمالي.

التقريب الطبيعي: إذا كان كل من N_1 و N_2 أكبر من عشرة، فيمكن أن نقول، بصورة تقريبية، أن توزيع الإحصاء T' هو التوزيع الطبيعي بمتوسط.

$$\mu_{T'} = \frac{N_1(N_1+N_2+1)}{2} \qquad \sigma_{T'}^2 = \frac{N_1 N_2 (N_1+N_2+1)}{12}$$

ونستخدم عامل التصحيح من أجل الإنقطاع وهو $\frac{1}{2}$ عند حساب قيمة المتحول المعياري الموافق لِـ T_o' ، فنكتب $z = (T_o' - \mu_{T_o'} + \frac{1}{2}) / \sigma_{T_o'}$.
ونعود بقيمة z هذه إلى جدول التوزيع الطبيعي وفي المثال المذكور أعلاه حيث $N_1 = N_2 = 10$ نجد $\mu_{T'} = 105$ و $\sigma_{T'} = \sqrt{175} = 13.2$ ، و T_o' أي القيمة الملحوظة لِـ T' هي $T_o' = 99$ ، ومنه $Z = -5.5/13.2 = -.42$. وبمقارنتها مع حدود منطقة الرفض عند المستوى $\alpha = .05$ ، وهي $Z_{.025} = -1.96$ و $Z_{.975} = 1.96$ ، نرى أنها تقع خارج منطقة الرفض. وبالتالي فإنه لا توجد دلالة كافية لرفض الفرضية بأن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع .
وبما أن توزيع T' معروف بدقة من أجل $N_1 = N_2 = 10$ ، فيمكن مقارنة التقريب الطبيعي بالقيمة الناتجة من جدول التوزيع الدقيق لِـ T' . ونجد من هذا الجدول أن إحتمال كون T' أصغر أو يساوي 99 هو .342 ، بينما نقرأ من الجدول الطبيعي أن الإحتمال الموافق لِـ $Z = -.42$ هو 0.337 . أو إذا جربنا قيمة أخرى افتراضية ولتكن $T_o' = 79$ ، مثلاً ، فإن قيمة Z الموافقة هي : $Z = \frac{79 - 105 + \frac{1}{2}}{13.2} = 1.93$ ، ويقابلها إحتمال 027 . بالمقارنة مع الإحتمال محسوباً دون اللجوء إلى التقريب الطبيعي وهو 0.026 .

ويتطلب إختبار مجموع الرتب حوالي 5% زيادة من الملاحظات عما يتطلبه الإختبار t . من أجل مقارنة متوسطي مجتمعين طبيعيين، وذلك لكي يكون للاختبارين نفس القوة . ونلاحظ بالطبع أنه يمكن تطبيق إختبار مجموع الرتب سواء كان المجتمعان طبيعيين أم لا .

إختبار مجموع الرتب من أجل عدة عينات : يمكن إستخدام الرتب لإختبار الفرضية بأن k من العينات أحجامها على الترتيب $n_1, n_2, \ldots, n_k$ مسحوبة من k من المجتمعات التي لها نفس التوزيع الإحتمالي . وللقيام بذلك نرتب جملة الملاحظات الموجودة في جميع العينات المدروسة وعددها $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$

وفقاً لحجمها أي من الأصغر إلى الأكبر . ثم نضع أمام كل ملاحظة رقماً يمثل رتبتها ، وذلك كما رأينا في حالة عينتين . وليكن R_i مجموع الرتب الموافقة لملاحظات العينة i ، $(i = 1, \ldots, k)$. ولنحسب الإحصاء :

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

وإذا كانت الفرضية صحيحة ، وقيم $n_1 n_2, \ldots, n_k$ غير صغيرة ، فيمكننا القول بأن الإحصاء H يتوزع تقريباً وفق التوزيع χ^2 بـ $(k-1)$ درجة من الحرية . وعملياً إذا كانت جميع قيم n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ أكبر من 5 فإن النسب المئوية 95 و 99 في الجدول تكون دقيقة إلى حدّ مرض عملياً . ونرفض الفرضية عند المستوى α إذا كانت قيمة الإحصاء H أكبر من $\chi^2_{1-\alpha}$ $(k-1)$. أما القيم المكررة ، في حال وجودها ، فنعالجها بنفس الطريقة المذكورة سابقاً .

تمارين

١ ـ في صناعة (جير) السيارة حصلنا على البيان الإحصائي التالي ، الذي يعطي عدد القطع النا قصة الصنع من الإنتاج اليومي البالغ 100 قطعة . فهل عدد الأشواط فوق وتحت الوسط هام عند المستوى 5% ؟

22	25	15	26	31	22	17	26
23	20	28	32	43	18	16	36
21	16	29	26	18	24	28	42
17	14	26	33	26	24	32	36
38	26	25	30	21	16	18	34

٢ ـ إستخدم إختبار الإشارة لتحليل البيان الإحصائي التالي ، الذي يعطي ما تكسبه عشر أزواج من الفئران ، تلقى نصفها البروتين من فستق نيء ، بينما تلقى النصف الآخر البروتين من فستق محمّص . والمطلوب إختبار ما إذا كان لتحميص الفستق أي أثر على محتوياته من البروتين . قارن النتائج مع تلك التي تحصل عليها من إستخدام الإختبار t وأوضح الفرق بين الطريقتين .

نيء	61	60	56	63	56	63	59	56	44	61
محمص	55	54	47	59	51	61	57	54	62	52

٣ ـ وجدنا ترتيب النباتات الصحيحة والمريضة في صف من نباتات الفراولة على الشكل التالي :

HHDHHHHHDHDDDHHHHHHHHHH

فهل يلقي هذا الترتيب شكاً على كون النباتات المريضة مبعثرة بصورة عشوائية بين النباتات الصحيحة ؟

٤ ـ يدعي خبير في تذوّق الشاي أنه قادر على التمييز بين نوعين من الشاي من خلال تذوقه لكأس مصنوع من كل منهما . وفي تجربة تحوي 20 محاولة

إستطاع ، في أربعة عشر منها ، أن يميز بصـورة صحيحة بين النوعين ، وكان ذلك وفقاً للترتيب التالي :

+ + − − + + + + + + + − − − + + + + + + −

حيث ترمز + للحكم الصحيح . حلل هذه النتائج بإستخدام إختبار الإشارة ، وأيضاً بإستخدام الأشواط .

٥ ـ حلل البيان الإحصائي في التمرين (٢) بإستخدام إختبار الرتب المؤشرة .

٦ ـ قسمنا 20 من العجول ، عشوائياً ، إلى اربع حظائر متماثلة في كل منها خمسة عجول . وقدمنا في كل حظيرة نظام تغذية مختلف ، ولفترة محددة ، ثم قسنا زيادة وزن كل عجل فحصلنا على الجدول التالي :

الطعام D	الطعام C	الطعام B	الطعام A
195	210	163	133
184	233	148	144
199	220	152	135
187	226	146	149
193	229	157	143

والمطلوب تحليل هذا البيان الإحصائي مستخدماً الإحصاء H .

٧ ـ نريد إختبار نوعين من الدهان ، والنوع I أرخص من النوع II ، فيتألف الإختبار من إعطاء علامات لكل من النوعين ، بعد تعريضهما لشروط طقس معينة ، ولفترة ستة أشهر . وكانت نتائج خمس عينات من كل من النوعين كما يلي :

84	80	92	87	85	النوع I
88	84	90	89	89	النوع II

والمطلوب تحليل هذه النتائج مستخدما إختبار مجموع الرتب ثم الإختبار t .