الفصل السابع

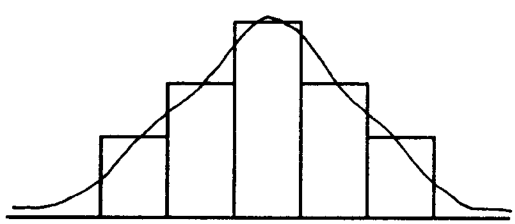
التوزيع الطبيعي Normal Distribution

إنَّ فكرة التوزيع الطبيعي مألوفه لدينا من موضوعات الفصول السابقة . ونتناول في هذا الفصل نوعًا هامًا جدًا من أنواع التوزيعات التكرارية يُعّرف بتوزيع المنحنى الطبيعي " Normal Curve " . ولا تقتصر فائدة التوزيع الطبيعي على أن أعدادًا كبيرة من التوزيعات الأمبريقية تأخذ « تقريبًا » شكل التوزيع الطبيعي ولكنها تمتد لتشمل الاستخدامات النظرية في مجال الأحصاء الاستقرائي " Inductive Statistics " . ويهدف التحليل في هذا الفصل إلى توضيح خصائص المنحنى الطبيعي كما يهدف لمساعدة القارئ للتعرف على طرق استخدام الجداول الاحصائية المبنية على توزيعات المنحنى الطبيعي . ويُعرض موضوع التوزيع الطبيعي في هذا الفصل ضمن موضوعات الاحصاء الوصفي بدلاً عن الاحصاء الاستقرائي ، وذلك لسببين أساسيين أولهما : أن المنحنى الطبيعي يمكن استخدامه لاعطاء تفسير لمفهوم الانحراف المعياري ، وثانيها : - أنه من المفيد للقارئ أن يكون ملمًا في بداية فصول هذا الكتاب بفكرة التوزيع الطبيعي قبل الدخول في موضوع الاختبارات الاحصائية التي تتطلب معرفة تامةً واستخداماتٍ عديدةً للتوزيع الطبيعي . وعليه كلما أحسن القارئ فهم موضوعات هذا الفصل ، قلت الصعوبات التي قد تواجهه مستقبلاً ، عند الحديث عن الاحصاء الاستقرائي واختبارات الفروض .

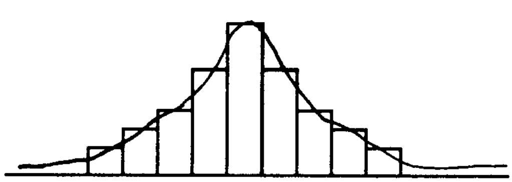
٧ -١ التوزيعات التكرارية المحدودة وغير المحدودة:-

إن التوزيعات التكرارية التي تمَّت مناقشتها حتى الآن تتعلق بمتغيرات ذات مفردات محدودة "Finite Number of Cases "، ومن الضروري أن تكون

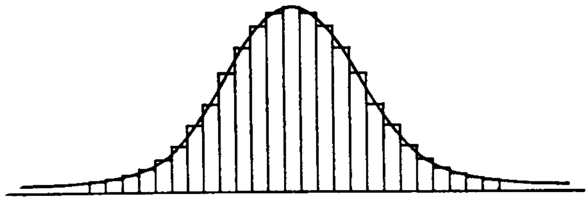
جميع التوزيعات الامبريقية من التوزيعات المحدوده ، على الرغم من أنها قد تتضمن اعدادًا كبيرة جدًا من المفردات . وغالبًا ما يكون من المفيد لعلماء الرياضيات أن يدرسوا التوزيعات التكرارية المبنيه على أعداد كبيرة جداً وغير محدوده من المفردات بدلاً من التعامل مع التوزيعات الامبريقية ذات الشكل المشرشر " Japped" كما هو الحال فى المدرج التكرارى (Histo-gram) أو المضلع التكرارى (Frequency Polygon) . ومن المحتمل فهم المنحنيات الممهدة " Smoothed Curves " والمبنيه على مفردات كبيرة وغير محدودة لصياغتها فى معادلات رياضية مبسطة نسبيًا . ويعتبر التوزيع الطبيعى أحد هذه المنحنيات . وقبل أن نبدأ فى الحديث عن هذا النوع من التوزيعات التكرارية يصبح من الضرورى معرفة الطريقة التى استخدمت فى إعداد المنحنى الممهد .



- أ -



- ب -



- جـ -

الشكل رقم (٧ - ١)

يوضح المقارنة بين المنحنيات الممهدة والمدرجات التكرارية التى لها أطوال فئات مختلفة

دعنا نبدأ بمدرج تكرارى يحتوى على خمس فئات « أنظر الشكل رقم (٧ - ١) « أ » . ولتبسيط شرح التوزيع الطبيعى نفترض أن توزيع هذه الفئات متماثل . ولقد سبق أن أوضحنا أن زيادة عدد الفئات دون تغيير المجموع الكلى للتكرارات « ن » [المفردات] ربما يجعل شكل المدرج غير منتظم ، ولنفترض أن عدد التكرارات قد ازداد هو الآخر . وفى هذه الحالة قد يكون من الممكن استخدام أعداد كبيرة من فئات صغيرة كما هو موضح فى الشكل رقم « (٧ -١) ب . ولكلٍ من هذه الفئات الصغيرة تكرارات كافية للمحافظة على انتظام شكل المدرج وإذا مازادت التكرارات مرة أخرى ، يمكن استخدام مستطيلات أكثر مع المحافظة على الشكل المنتظم للمدرج [انظر الشكل « (٧ - ١) « جـ ») . ولقد رسمت المنحنيات الممهده بتوصيل النقاط التى تتوسط الضلع الأعلى لكل مستطيل . ومن الواضح أن شكل المستطيلات يزداد فى تقاربه من المنحنيات الممهدة كلما زاد عدد المستطيلات « أى كلما قل عرض المستطيل » . دعنا نتخيل أن هنالك تزايداً مستمراً فى عدد التكرارات وبالتالى يقل طول الفئات أكثر

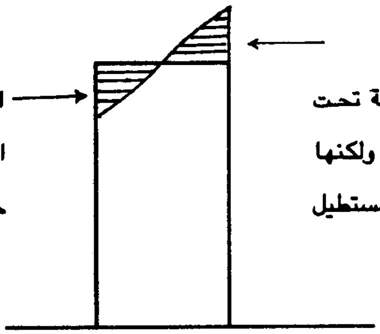
فأكثر ، حتى يبدو تماثل بين شكل المستطيلات وشكل المنحنى الممهد لدرجة لا نستطيع معها التمييز بين الشكلين . ويشار إلى المنحنى الممهد الناتج عن المستطيلات ذات القواعد المتناقصة على الدوام بأنه التوزيع التكرارى الحَدِّى * . وعلى الرغم من أننا لا نستطيع أن نتخيل وجود عدد غير محدود من المفردات « التكرارات » ؛ إلا أننا نستطيع أن ندرك مثل هذا العدد الكثير جداً من المستطيلات ، التى يقارب شكلها شكل المنحنى الممهد فى حدود الدرجة المطلوبة من الدقه . ويجب أن نذكر أن مساحة كل مستطيل تعتبر ممثلة لعدد المفردات « التكرارات » التى تقع داخل تلك الفئة. وكما أوضحنا سابقاً فى الفصل الرابع فإنه من المعتاد أن نعتبر أن مجموع مساحة المستطيلات تساوى واحداً صحيحاً . وعليه فاذا كانت نسبة التكرارات للفئة الأولى تمثل ١٠ر٠ فإن هذه النسبة نفسها تمثل المساحة الحقيقية للمستطيل الأول . ومع أننا لا نستطيع أن نتخيل أعداداً غير محدودة من التكرارات إلا أننا نستطيع إدراك وجود أعداد كبيرة من المستطيلات التى تقارب تمثيل المنحنى الممهد لدرجة معينه من الدقة . ولابد من أن نتذكر أن مساحة كل مستطيل يمكن استخدامها لتمثل نسبة التكرارات للفئة المعينة . وكما سبقت الاشارة فى الفصل الرابع فإنه من المألوف أن نعتبر مساحة جميع المستطيلات تساوى واحداً صحيحاً . فإذا كانت نسبة التكرارات فى الفئة الأولى تساوى ١٠ر٠ ، فإن هذا الرقم يمثل المساحة الحقيقية للمستطيل الأول ونلاحظ أن المساحة تحت المنحنى الممهد لأى فئة يمكن أن تقارب مساحة المستطيل المناظر لتلك الفئة . ويتضح ذلك من الشكل رقم (٧ -٢) .

---

(١) سوف يتم أيضاً نقاش فكرة «الحد» Limit فى القسم الأول من الفصل التاسع .

ولربما أمكن إعطاء الفكرة حجية أكثر بداهة بالرجوع إلى سلسلة غير محدودة مثل :

$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٣٢} + \dots$ والتى يلاحظ أنها تقترب أكثر فأكثر إلى القيمة (١ر٠) كلما أضيفت كسور جديدة دونما بلوغ لهذه القيمة الحدِّية أبداً .



الشكل رقم (٧ - ٢)

يوضح مقارنة المساحات تحت المنحنى وتحت المستطيل

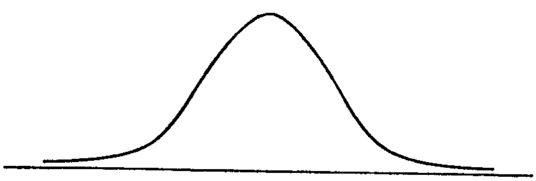
وكلما زاد عدد المستطيلات أصبحت المساحة الكلية للمستطيلات أكثر تقاربًا من المساحة تحت المنحنى الممهد . ويمكن ملاحظة ذلك من الشكل رقم « ٧ - ٢ » حيث تصبح المساحة المظلله أصغر فأصغر نسبيًا متى ما زاد عدد المستطيلات . ويمكن الحصول على المساحة تحت المنحنى الممهد بجمع مساحات المستطيلات الكثيرة « مستطيلات غير محدودة العدد . وبما أن مساحة جميع المستطيلات تساوى واحداً صحيحًا فإن المساحة تحت المنحنى الممهد هى الأخرى تساوى واحدًا صحيحًا . فالطريقة التى شرحناها هنا تماثل بالضبط الطريقة الخاصة بموضوع التفاضل والتكامل فى علوم الرياضيات

(٧ - ٢) الشكل العام للمنحنى الطبيعى : -

يعتبر المنحنى الطبيعى حالة خاصة للمنحنى الممهد المتماثل . وبما أن المنحنى الطبيعى من المنحنيات الممهدة والمتماثلة تمامًا ، والذى تنبنى توزيعاته على أعداد غير محدودة من المفردات ، يمكن أن يمثل بالتوزيعات التكرارية التى تتضمن البيانات الحقيقية . ويأخذ المنحنى الطبيعى شكل

الجرس " Bell Shaped " وله عدد من الخصائص الاحصائية الهامة ، التى سنوضح بعضها فى الفقرات التالية من هذا الفصل . وبما أن المنحنى الطبيعى متماثل وذو منوال واحد ، فان المتوسط الحسابى والوسيط والمنوال تتطابق تماماً فى قيمها .

ويوضح الشكل رقم « ٧ – ٣ » الصورة العامة للتوزيع الطبيعى .



الشكل رقم (٧ - ٣)

الشكل العام للمنحنى الطبيعى

وتعتبر المعادلة الرياضية للمنحنى الطبيعى بسيطة نسبيًا ، وخاصة للمتخصص فى علم الرياضيات . وقد لا يضطر القارئ لاستخدام المعادلة أدناه للعمليات الحسابية ، لأن كثيراً من الجداول الاحصائية قد صُممت لهذا الغرض . ويمكن استخدام المعادلة الاحصائية لتوضيح وإثبات بعض الخصائص لهذا التوزيع النظرى . وتكتب المعادلة الرياضية على النحو التالى :

$$\text{ص} = \frac{١}{\text{ع} \times \sqrt{٢\pi}} \times \text{هـ}^{-\left(\frac{(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{٢\,\text{ع}^{٢}}\right)} \qquad (٧ - ١)$$

حيث تشير قيمة (ص) إلى ارتفاع المنحنى عند أىٌ قيمة معينة « س » .

ويمـا أن « هـ » و « π » من القيم الثابته وتساوى ٢٫٧٢ و ٣٫١٤ على التوالى فإن المعادلة أعلاه تتضمن مؤشرين هما المتوسط الحسابى ($\bar{س}$) والانحراف المعيارى « ع »[١] . ويمكننا التعرف على شكل المنحنى الطبيعى بالتحديد إذا ما علمنا المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى لأى توزيع من التوزيعات التكرارية الطبيعية . وهذا يعنى وجود أعداد كثيرة من المنحنيات الطبيعية المختلفه ويعتمد شكل كل منحنى من هذه المنحنيات على قيم المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى . وعلينا أن نتذكر أن قيمة التعبير الرياضى ذى الأس السالب " Negative Exponent " يمكن أن تكتب فى صيغة مقلوبة " Reciprocal " بحيث ينزل التعبير من البسط إلى المقام ويرفع التعبير إلى أس موجب . وعليه يمكن كتابة المعادلة (٧ -١) على النحو التالى : -

$$ص = \frac{١}{ع \times \sqrt{٢\pi}} \times ٢٫٧٢^{\left(\frac{١}{\frac{٢(س - \bar{س})}{٢ع^{٢}}}\right)} \qquad (٧ - ٢)$$

حيث استبدلنا الثابت « هـ » بقيمته التقريبية (٢٫٧٢) . وإذا ما افترضنا أن الانحـراف المعيارى « ع » له قيمة ثابتة ، يمكننا حساب قيمة « س » عندما تبلغ « ص » قيمتها القصوى [Value of X for Maximum Value of Y] . ومن الواضح أن قيمة « ص » ستصل إلى حدها الأقصى ، عندما تبلغ قيمة المقام للتعبير - الموجوده بين القوسين الكبيرين فى المعادلة رقم « ٧ - ٢ » - حدّها الأدنى " Minimum Value " . وبما أن هذا

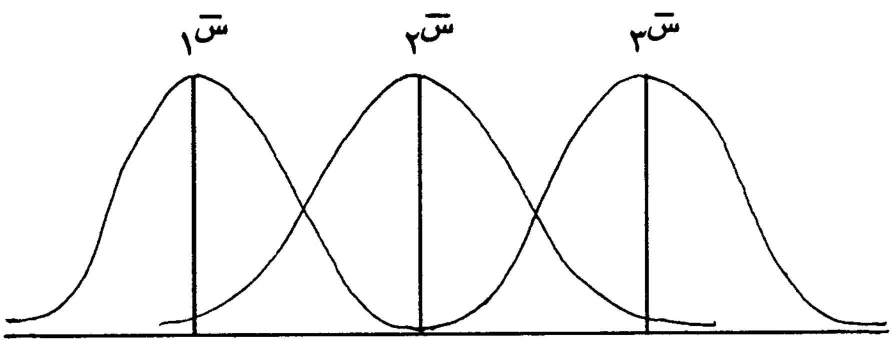
---

(١) هناك رموز أخرى للمتوسط الحسابى والانحراف المعيارى التى سنتعرض لها عند الحديث عن الاحصاء الاستقرائى. وتكتب - فى العادة - معادلة المنحنى الطبيعى بالرموز : « μ » (وتقرأ «ميو») وتشير إلى المتوسط الحسابى؛ و« σ » (وتقرأ « سيجما ») وتشير إلى الإنحراف العيارى .

المقـام ، يحتـوى علـى عـدد موجب يزيـد عن واحد صحيح ، ومرفوع لأس "Power" ، فلا يمكن أن تكون قيمته ساليه ، لأن قيمة تربيع العدد الحقيقى " Real Number " لا تقل عن صفر ٠ ولذلك فان قيمة المقام ستصل إلى حدها الأدنى عندما تكون قيمة الأس صفراً ٠ وبالتأكيد فان قيمة الأس تصبح صفـراً عندمـا تصبـح قيمـة « س » مساويـه لقيمـة المتوسـط الحسابـى « س – سَ = صفر »

وعندما تتساوى قيمة « س » ، مع قيمة المتوسط الحسابى ؛ فان قيم المنوال والمتوسط الحسابى والوسيط تتطابق وتبلغ سَ ٠ ولقد سبق أن أشرنا إلى هذه الحقيقة من قبل ، دون التعرض لاثباتها ٠ كما أننا نلاحظ أن المعادلة أعلاه تمثل منحنى متماثلاً حول المتوسط الحسابى سَ وبما أن القيمة (س – سَ) مرفوعة إلى الاس (٢) فلا يمكن أن تكون سالبة وعليه فإن إنحرافات القيم عن المتوسط الحسابى (سَ) ستنتج عنها قيم متماثلة لـ « ص » على جانبى المتوسط الحسابى ٠

إن المعادلة الخاصة بأى منحنى طبيعى معين يمكن الحصول عليها باستخدام قيم مناسبه للمتوسط الحسابى « سَ » والانحراف المعيارى « ع »٠ والشكل رقم « ٧ – ٤ » يوضح المنحنيات الطبيعية التى لها نفس الانحرافات المعيارية ولكنها تختلف فى متوسطاتها الحسابية ٠ ومن الجانب الآخر فإن المنحنيات التى لها انحرافات معيارية مختلفة ستختلف فى قممها " Peaked ness " كما هو واضح من الشكل « ٧ – ٥ » ٠ وكلما قلت قيمة الانحراف المعيارى زادت قمة المنحنى ٠



الشكل رقم (٧ - ٤)

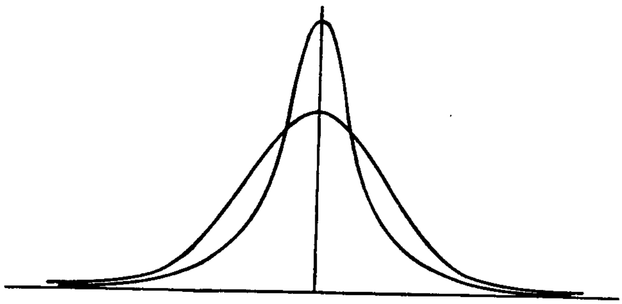
يوضح مقارنة المنحنيات الطبيعية التى لها نفس الانحرافات

المعيارية وتختلف فىمتوسطاتهاالحسابية .

وتجدر الإشارة إلى أنه ليست كل منحنيات شكل الجرس المتماثلة من فصيلة المنحنيات الطبيعية .

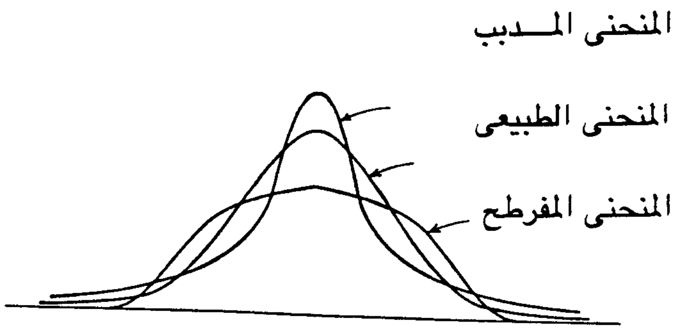
إن اختلاف قمم المنحنيات فى الشكل رقم « ٧ - ٥ » ، يعزى فقط لاختلافات الانحرافات المعيارية . ومن الملاحظ أن المنحنيات فى الشكل رقم « ٧ - ٥ » من فصائل التوزيعات الطبيعية . وبصفة عامة ، فإن المنحنيات المتماثله ذات المنوال الواحد ، إما أن تكون ذات قمم عاليه أو تفلطح كبير مقارنة بالمنحنيات الطبيعية . والشكل رقم « ٧ - ٦ » يوضح لنا عدداً لمثل هذه المنحنيات . وتُمَيَّز المنحنيات الأعلى قمماً عن المنحنيات الطبيعية بأن يطلق على الأولى صفة المنحنيات المدبَّبه " Leptokurtic " . أما المنحنيات الأكثر تفلطحاً من المنحنيات الطبيعية ، فتسمى المنحنيات المفلطحة " Platy kurtic curves " . وعلى عكس المنحنى الطبيعى ، فإن المعادلات الرياضية

للمنحنيات المدببة ، والمنحنيات المفلطحة ، تتضمن مقاييس أخرى بجانب مقاييس المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى .



الشكل رقم (٧ - ٥)

يوضح مقارنة اثنين من المنحنيات الطبيعية التى لها نفس المتوسط الحسابى وتختلف فى انحرافاتها المعيارية

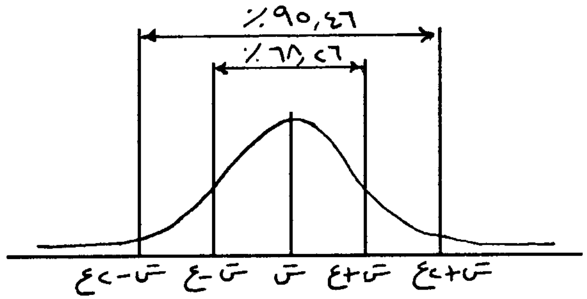


الشكل رقم (٧ - ٦)

يوضح مقارنة منحنى طبيعى بمنحنيات لها نفس الانحراف المعيارى ولكنها تختلف فى قممها

٧ - ٣ المساحات تحت المنحنى الطبيعى : -

غالبًا ما يصبح من الضرورى تحديد نسبة التكرارات « المفردات » التى تقع فى فئة معينه • ومن حسن الحظ فإن للمنحنى الطبيعى خاصية هامة تجعل عملية تحديد هذه النسبه بسيطة نسبيًا • وبغض النظر عن قيم المتوسط الحسابى ، والانحراف المعياري لأى منحنى طبيعى ، فإن هناك مساحة ثابته « نسبة التكرارات » بين المتوسط الحسابى والإحداثي السينى " ordinate " الذى يبعد مسافة « مقاسة بوحدات الانحراف المعيارى » معينة من المتوسط الحسابى • والشكل رقم « ٧ - ٧ » يساعد فى توضيح الجملة السابقة •



الشكل رقم (٧ - ٧)

المساحات تحت المنحنى الطبيعى

وإذا ما انتقلنا إلى نقطة تبعد انحرافًا معياريًا واحدًا على يمين المتوسط الحسابى ، فإننا سنجد أن نسبة المساحة التى تقع بين المتوسط الحسابى وهذه النقطة تبلغ «٣٤١٣ر٠» وبما أن المنحنى الطبيعى متماثل ، فان ضعف هذه المساحة « ٦٨٢٦ر٠ » ستكون محصورة بين الإحداثيين اللذين يبعدان انحرافًا معياريًا واحدًا على جانبى المتوسط الحسابى • وبمعنى آخر ، فإن

أكثر « بقليل جداً » من ثلث التكرارات ينحصر دائمًا بين انحراف معيارى واحد على جانبى المتوسط الحسابى ٠

وبالمثل فإن المساحة بين المتوسط الحسابى ، والإحداثى الذى يبعد إنحرافين معياريين عن المتوسط الحسابى تساوى دائمًا ٤٧٧٣ر٠ ٠ ولهذا فإن مساحة أكبر قليلاً من ٩٥٪ من جملة المساحة تحت المنحنى الطبيعي ستكون محصورة بين إحداثيين أفقيين ، يبعدان انحرافين معياريين على جانبى المتوسط الحسابى٠ وعلى الرغم من أن المنحنى الطبيعى يمتد إلى ما لا نهاية على جانبى المتوسط الحسابى ، إلا أنه من الناحية العملية ، فإن جميع التكرارات « تقريبًا » تكون محصورة بين إحداثيين أفقيين ، تبعدان ثلاثة انحرافات معياريه على جانبى المتوسط الحسابى ٠ وسنشرح فى هذا الفصل الطريقة التى يمكن أن نحدد بها المساحة التى تنحصر بين أىٍّ إحداثيين على المحور السينى ٠ فإذا انتقلنا على سبيل المثال ٩٦ر١ انحرافًا معياريًا على جانبى المتوسط الحسابى ، فإن المساحة المحصورة بين هذين الإحداثيين ستبلغ ٩٥٪ من إجمالى المساحة تحت المنحنى الطبيعى تقريبًا، كما أن ٩٩٪ من إجمالى المساحة تحت المنحنى الطبيعى ستكون محصورة بين الاحداثيين اللذين يبعـــدان ٥٨ر٢ إنحرافًا معياريًا عن المتوسـط الحسابى ٠ وبالطبع فإن المسافات أو الأبعاد عن المتوسط الحسابي لاتحتاج أن تكون دائماً من مضاعفات الانحراف المعياري تماماً .

وتعطينا هذه الخاصية للمنحنى الطبيعى تفسيراً للانحراف المعيارى ؛ وتقدم لنا تصوراً ذهنيًا للدلالة الإحصائية لهذا المقياس من مقاييس التشتت. هناك عددٌ من التوزيعات التكرارية الإمبريقية التى تشابه التوزيع الطبيعى (بخاصيته المذكورة) إلى درجة تكفى لكى تستمر هذه العلاقات بين المساحات تحت المنحنى والإنحراف المعيارى ، بصورة معقولة. وحتى فى حالة توزيعات الدخول الشهرية التى تميل إلى الالتواء فى اتجاه الدخول

العالية ، فإننا غالبًا ما نلاحظ أن ثلثى التكرارات « تقريبًا » تبعد انحرافًا معياريًا واحدًا على جانبى المتوسط الحسابى . ومع أن المنحنى الطبيعى يعطى تفسيرًا للانحراف المعياري ؛ إلا أن الخاصية المذكورة أعلاه لا يمكن استخدامها لتعريف معنى الانحراف المعيارى والجدير بالذكر أن تعريف الانحراف المعيارى يتضح من معادلته الرياضية التى سبق الإشارة إليها فى الفصل السادس . ومن الملاحظ أن الخاصية أعلاه تنطبق فقط على التوزيعات الطبيعية والتوزيعات التى تقارب التوزيعات الطبيعية .

ومن الممكن تحويل قيم لمنحنى طبيعى معين إلى درجات معيارية، فى جدول إحصائى واحد ، يُستخدم فى تحديد نسبة التكرارات (المفردات) لفئة تكرارية معينة . ونوضح ذلك بالمثال التالى : -

نفترض أن المتوسط الحسابى لمنحنى طبيعى معين يساوى ٥٠ ، وأن الإنحراف المعيارى يساوى ١٠ ، والمطلوب حساب نسبة التكرارات التى تنحصر بين الفئة (٥٠ – ٦٥) . وفى البداية نحدد كم انحرافًا معياريًا تبتعد القيمة ٦٥ عن المتوسط الحسابى (٥٠) . وللاجابة على هذا السؤال نحسب الفرق بين القيمتين ٦٥ و ٥٠ الذى يساوى ١٥ ثم نقسم هذا الفرق على قيمة الانحراف المعيارى لتصبح النتيجة ١٫٥ . وعموما فإننا نستخدم المعادلة الحسابية أدناه للحصول على تلك النتيجة : -

$$د = \left(\frac{س - \bar{س}}{ع} \right) \qquad (٧ - ٣)$$

$$\therefore د = \left(\frac{٦٥ - ٥٠}{١٠} \right) = ١٫٥ \ .$$

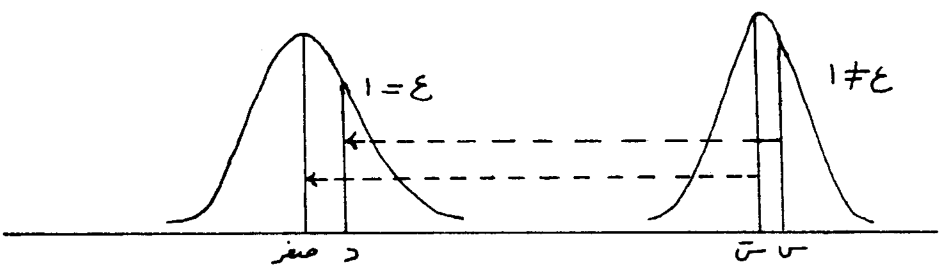
حيث تشير « س » إلى قيمة الإحداثي على المحور السينى كما تشير «د» إلى عدد الإنحرافات المعيارية لانحراف قيمة الإحداثى عن المتوسط الحسابى « د = الدرجة المعيارية » · وقبل الحديث عن كيفية استخدام القيمة العددية «د» لتحديد نسبة التكرارات التى تقع بين المتوسط الحسابى والإحداثى المناظر لقيمة «د» دعنا نقدم تفسيراً بديلاً لقيمة « د » · فى البداية نفكر فى التعبير عن ذلك بتحويل قيم المتغير « س » إلى قيم المتغير «د» بحيث يصبح توزيع المتغير « س » طبيعيًا بانحراف معيارى « ع » ومتوسط حسابى « $\bar{س}$ » ، كما يصبح توزيع المتغير الجديد « د » طبيعياً بانحراف معيارى واحد صحيح ، ومتوسط حسابى يساوى صفراً (١) · ويسمى التوزيع الأخير بالتوزيع الطبيعى المعيارى "Standardized Normal Distribution" كما تعرف «د» بالقيمة المعيارية " Standard Score " ·

والشكل رقم « ٧ – ٨ » يوضح كيفية تحويل قيم المتغير « س » إلى قيم المتغير « د » وتطرح قيمة الثابت « $\bar{س}$ » من كل قيمة من قيم المتغير « س »· ومن الملاحظ أن عملية طرح قيمة الثابت « $\bar{س}$ = ٥٠ » من قيم المتغير «س» تعنى فى الحقيقة تحريك كل قيمة من قيم المتغير «س» ٥٠ وحدة إلى اليسار · وبهذه العملية نكون قد حركنا المنحنى الطبيعى إلى موقع نقطة الأصل ١ و إلى احداثى الصفر " Origin " · وهذه العملية خاصة بقيمة البسط فى المعادلة رقم « ٧ – ٣ » ؛ ثم تقسم كل قيمة من انحرافات القيم عن وسطها الحسابى ($س_و - \bar{س}$) على الانحراف المعيارى · وبهذه الطريقة نكون قد ضغطنا المنحنى الأصلى فى حالة زيادة

---

(١) ونترك اثبات هذه الحقيقة كتمرين للقارئ ، انظر السؤال رقم (٣) فى تمرين الفصل السابع ·

قيمة الانحراف المعياري عن واحد صحيح ، أو نشرنا المنحنى الأصلى فى حالة ما تَقِلّ قيمة الانحراف المعيارى عن واحد صحيح ٠ وهذا يمكننا من أن نفكر أولاً فى تحريك الموقع الأصلى للمنحنى الطبيعى ، ثم نغير الانحراف المعيارى حتى يمكن بسط المنحنى الطبيعى فوق المنحنى الطبيعى المعيارى ٠ وفى الحقيقة فإن القسمة بقيمة الانحراف المعيارى ، تعنى أننا قد غيرنا الوحدات على المحور الأفقى بحيث تعادل المسافة التى تبلغ «١٠» وحدات على المحور الأفقى « المحور السينى » وحدة واحدة على محور الدرجات المعيارية « د » ٠



الشكل (٧ – ٨)

يوضح مقارنة المنحنى الطبيعى المعيارى بالمنحنى الطبيعي العام

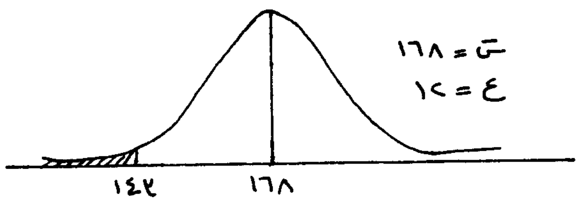
وبصرف النظر عن التفسير الذى يُعطى للدرجات المعيارية فان قيمة « د » عندما تساوى « ٥ر١ » تعنى أن الاحداثى الأفقى » يبعد ٥ر١ انحرافًا معياريًا عن المتوسط الحسابى ٠ وفى حالة المنحنى الطبيعى

المعيارى ، فان هذه القيمة تعنى أن الإحداثى الأفقى يقع على بعد ١ر٥ على المحور الأفقى للدرجات المعيارية « د » . والجداول الاحصائية التى حسبت على أساس المنحنى الطبيعى المعيارى توضح بالضبط المساحات التى تقع تحت المنحنى وتنحصر بين احداثيات أفقية محددة . ويعتبر الجدول « جـ » فى الملحق رقم « ٢ » أحد هذه الجداول الاحصائية . والقيم المعيارية « د » موضّحَةٌ أفقيًا على الجانب الهامشى الأيمن ورأسيًا فى الصف الأول للجدول « جـ » . ويتضح الرقمان الأول والثانى لقيمة الدرجة المعيارية « د » بقراءة العمود الأول « رأسيًا » . أما الرقم الثالث لقيمة الدرجة المعيارية فيتضح من الصف الأول فى الجدول (جـ) . أما الأرقام الأخرى الموضحة فى الجدول (جـ) ، فانها تشير إلى نسبة المساحة التى تنحصر بين المتوسط الحسابى « $\bar{د}$ = صفر » والإحداثى الذى يناظر قيمة الدرجة المعيارية « د » . فى المثال أعلاه نلاحظ أن ٤٣٣٢ر٠ من مساحة المنحنى تنحصر بين « $\bar{د}$» = صفر و « د » = ١ر٥ . أما إذا ما كانت قيمة الدرجة المعيارية « د » = ١ر٥٢ ، فإن المساحة المناظرة لهذه الدرجة تصبح ٤٣٥٧ر٠.

٧ – ٤ توضيحات أخرى لاستخدام الجدول الطبيعى:–

نفترض أننا نرغب فى معرفة المساحة المظللة للمنحنى الطبيعى الموضح فى الشكل رقم « ٧ – ٩ » فان قيمة الدرجة المعيارية فى هذه الحالة تصبح :–

$$د = \left(\frac{١٤٣ - ١٦٨}{١٢} \right) = \frac{- ٢٥}{١٢} = - ٢ر٠٨$$



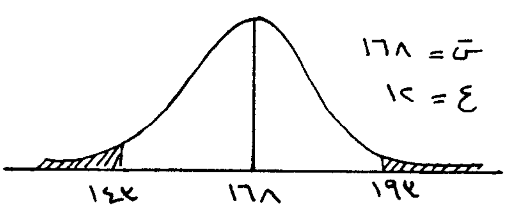
الشكل (٧ - ٩)

يوضح المنحنى الطبيعى ، حيث يمثل الجزء المظلل

مساحة الطرف الأيسر

إن القيمة السالبة للدرجة المعيارية « د » تعنى ببساطة أن المساحة المظللة تقع على يسار المتوسط الحسابى . ويمكننا أن نتجاهل إشارة الدرجة المعيارية عند استخدامنا لجدول التوزيع الطبيعي لأن المنحنى الطبيعى متماثل تماماً . ونلاحظ من الجدول « جـ » أن المساحة بين المتوسط الحسابى والدرجة المعيارية (د = ٠٨ر٢) تبلغ ٤٨١٢ر٠ . وبما أن إجمالى المساحة تحت المنحنى تساوى واحداً صحيحاً ، فإن المساحة على يسار المتوسط الحسابى يجب أن تبلغ ٥ر٠ وذلك نسبة لتماثل المنحنى الطبيعى . وللحصول على المساحة المظللة فى الشلك رقم « ٧ - ٩ » نطرح المساحة بين المتوسط الحسابى والإحداثى « د » = ٠٨ر٢ من المساحة الكلية التى تقع على يسار المتوسط الحسابى . وعليه فإن نسبة التكرارات التى تساوى أو تقل قيمتها عن ١٤٣ تبلغ (٥٠٠٠ر - ٤٨١٢ر٠) ، أى ١٨٨٠ر٠

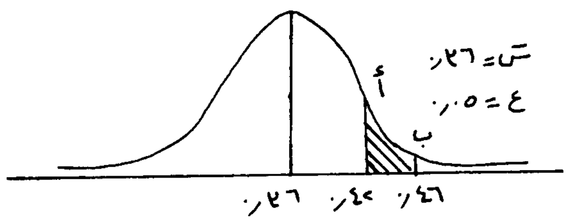
وهذا يعنى أن أقل من ٢ ٪ من التكرارات قيمها تساوى أو تقل عن ١٤٣ ٠ إن نوع المسألة الموضحة فى هذا المثال من المسائل العامة والكثيرة الاستخدام عند اختيار الفروض التى تتضمن دائمًا طرفى "Tails" التوزيع التكراري ٠ ولهذا فإننا غالبًا ما نكون راغبين فى معرفة المساحة التى تقع فى طرف واحد من طرفى المنحنى ٠ وإذا ما أردنا أن نحصل على إجمالى المساحات خارج المنطقة المحددة بـ ١٦٨ ± ٢٥ [انظر المساحات المظللة فى الشكل رقم (٧ – ١٠)] ، فإننا ببساطة ، نضاعف المساحة التى حصلنا عليها فى المثال أعلاه لأن المساحتين المظللتين تتساويان تمامًا ٠



الشكل رقم (٧ – ١٠)

المنحنى الطبيعى ، الأجزاء المظللة تمثل المساحات

عند طرفى المنحنى



الشكل رقم (٧ -١١)

المنحنى الطبيعى - الجزء المظلل يمثل

المساحة بين الاحداثيتين

ولنأخذ مثالاً آخر . دعنا نفترض أننا نريد معرفة المساحة المظللة فى الشكل رقم (٧ - ١١) ، وتحسب هذه المساحة بطرح نسبة التكرارات التى تنحصر بين المتوسط الحسابى ، والإحداثى «أ» ، من نسبة التكرارات التى تنحصر بين المتوسط الحسابى ، والإحداثى «ب» . إن الدرجات المعيارية «د» التى تناظر النقطة «ب» والنقطة «أ» تساوى ٠ر٢ و ٢ر١ على التوالى . وعليه تصبح : -

نسبة التكرارات بين المتوسط الحسابى و « ب » = ٤٧٧٣ر٠

ونسبة التكرارات بين المتوسط الحسابى و « أ » = ٣٨٤٩ر٠

∴ نسبة التكرارات بين « أ » و« ب » = ٠٩٢٤ر٠

{ أىْ : ٤٧٧٣ر٠ - ٣٨٤٩ر٠ = ٠٩٢٤ر٠ }

وعليه فإن ما يزيد قليلاً عن ٩ ٪ من التكرارات تنحصر بين القيم ٤٢ ر٠ و٤٦ر.. وتجدر الإشارة إلى أنه إذا أردنا معرفة المساحة بين الإحداثيين على طرفي المتوسط الحسابي، فإننا نحصل على النتيجة بعملية الجمع بدلاً من عملية الطرح.

وسوف نلجأ - بدءً من الفصل الحادي عشر - إلى استخدام مكثف للتوزيع الطبيعي في الإختبارات حول المتوسطات الحسابية لمختلف المجتمعات الإحصائية. ولسوف يتضح أنه، وبصرف النظر عن شكل التوزيع لأي مجتمع من هذه المجتمعات، فإن المتوسطات الحسابية لعينات بأحجام كبيرة بدرجة معقولة تؤخذ من هذه المجتمعات تأخذ دائماً شكل التوزيع الطبيعي على وجه التقريب.

تمرين الفصل السابع: -

(١) لقد سبق أن أوجدنا المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري للبيانات الخاصة بالسؤال الأول في تمرين الفصل الرابع، أجب عن الأسئلة الآتية من بيانات السؤال المذكور أعلاه:-

(أ) ما نسبه ال ٦٥ مفردة التي تقع داخل إنحراف معياري واحد على جانبي المتوسط الحسابي.

(ب) ما نسبة ال ٦٥ مفردة التي تقع داخل انحرافين معياريين على جانبي المتوسط الحسابي.

(جـ) ما نسبة ال ٦٥ مفردة التي تقع داخل ثلاثة انحرافات معيارية على جانبي المتوسط الحسابي.

إلى أي مدى تمثل هذه النتائج الإجابات التي نتوقعها إذا ما كان التوزيع طبيعياً تماماً.

أجب عن نفس الأسئلة أعلاه مستخدماً بيانات السؤال رقم (٢) من تمرين الفصل الرابع؟

قارن نتائج السؤالين أعلاه لتوضيح الإختلافات الخاصة ببيانات السؤال الأول والثاني من تمرين الفصل الرابع.

(٢) إذا كان المتوسط الحساب للتوزيع الطبيعى يساوى ٨٠ ، والانحراف المعيارى يساوى ١٢ ، أجب عن الأسئلة الآتية : –

أ – ما نسبة التكرارات (المفردات) التى تقع بين القيمتين ٨٠ و ٩٣ (الاجابة = ٣٦٠٦ر) .

ب – ما نسبة التكرارات (المفردات) التى تقع بين القيمتين (٧٠ و ١٠٥)؟

جـ – ما نسبة التكرارات التى تقل قيمها عن القيمة ٦٨ ؟

د– احسب عدد الانحرافات المعيارية اللازمة للتحرك على جانبى المتوسط الحسابى ، لتحصل على طرفين يحتوى كل منهما على : – أولاً ٢٪ من إجمالى المساحة تحت المنحنى . ثانياً ١٠٪ من إجمالى المساحة تحت المنحنى ؟

هـ – ما قيمة المفردة التى تأتى ٤٪ من المساحة تحت المنحنى بعدها (بمعنى آخر حدد موقع المُئَين رقم ٩٦ ؟

(٣) أثبت أن قيم المتوسط الحسابى ، والانحراف المعيارى للمنحنى الطبيعى المعيارى ، تساوى صفراً ، وواحداً صحيحاً على التوالى (لتسهيل عملية الحل ، أعد كتابة معادلة المنحنى الطبيعى فى صيغة القيم المعيارية ،

باستخدام المعادلة الرياضية الآتية : [$د = \frac{(س - \bar{س})}{ع}$]

(٤) عادة ما يعامل علماء النفس درجات اختبارات المقدرة والكفاءة كمتغيرات فترية . أجب عن الأسئلة أدناه مستخدماً البيانات الآتية : –

– لقد تم تحويل درجات اختبارات المقدرة والكفاءة إلى درجات معيارية .

– إن المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى للدرجات الخام (قبل تحويلها

إلى قيم معيارية) ١١٧ و ٥ر٢٨ على التوالى ٠

- نفترض أن الدرجات الخام تتوزع توزيعاً طبيعياً : -

أ - ما نسبة الدرجات الخام التى تقع بعد درجة ١٣١ ؟ وما نسبة الدرجات الخام التى تقع قبل الدرجة ٧٩ ؟

ب - ما هى الدرجات الخام التى تقابل الربيع الأول والربيع الثانى والربيع الثالث ؟