

مقاييس التشتت

(٤ - ١) مقدمة

سبق أن تحدثنا عن طرق تلخيص البيانات الإحصائية وعرضها بصورها المختلفة. وتناولنا بعد ذلك طريقة حساب مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)، لإيجاد قيم عددية محددة تصف هذه البيانات بأشكالها المختلفة، ولكن هذه المقاييس تكون غير كافية، وذلك لأنها لا توضح مقدار التفاوت بين مفردات المشاهدات للظاهرة محل الدراسة، كما يتضح من المثال التالي.

مثال (١)

عند دراسة الأجر اليومي لمجموعتين من العمال الزراعيين بالريال في منطقتين مختلفتين كل منهما يتكون من عشرة عمال كانت البيانات كما يلي:

المجموعة الأولى: ٤٣، ٤٠، ٤٠، ٤٥، ٤٤، ٤٢، ٤١، ٤٢، ٤٦، ٤٧

المجموعة الثانية: ٣٠، ٣٥، ٤٢، ٤٨، ٣٩، ٥٠، ٦٠، ٤٢، ٣١، ٦١

بحساب الوسط الحسابي للعينة الأولى نجده يساوي ٤٣ ريالاً، كما وجدنا أن الوسط الحسابي للعينة الثانية يساوي ٤٣ ريالاً أيضاً. نلاحظ من ذلك أن الوسطين الحسابيين لكل من العينتين متساويان، ولكن قيم الأجور للمجموعة الأولى متقاربة ومحصورة بين ٤٠، ٤٧ ريالاً، أو يمكن القول: إن أجور العمال في المجموعة الأولى متقاربة أو متجانسة. أما في العينة الثانية فإن قيم الأجور تكون محصورة بين ٣٠، ٦١ ريالاً، أي أنها متفاوتة وغير متجانسة أي متباعدة بخلاف المجموعة الأولى رغم تساويهما في الوسط

الحسابي في المثال السابق . نلاحظ أن مثل هذه الخصائص لمقاييس النزعة المركزية يجعلها غير كافية لوصف البيانات من حيث تشتت المفردات للمجموعة بعضها عن بعض . كدعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس أخرى عددية لقياس مقدار هذا التفاوت بين المفردات . وهذه المقاييس هي ما تسمى مقاييس التشتت، وسوف نتعرض في هذا الفصل إلى دراسة كيفية حساب بعض خصائص أهم مقاييس التشتت، وعلى الأخص المدى ونصف المدى الربيعي، والانحراف المتوسط، والتباين والانحراف المعياري، ومعامل الاختلاف . كذلك سنتناول بعض المقاييس الأخرى التي لها علاقة بمقاييس التشتت مثل مقاييس الالتواء، ومقاييس التفلطح في آخر هذا الفصل . وسنحاول تبسيط عرضنا باستخدام الأمثلة لكل مقياس على حدة .

(٤ - ٢) المدى

يعرف المدى للبيانات غير المبوبة بأنه الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة لعينة من البيانات أو هو الفرق بين القراءة العظمى والقراءة الصغرى أي أن

$$\text{المدى} = \text{أكبر قراءة} - \text{أصغر قراءة}$$

(١)

مثال (٢) :

أوجد المدى للأجور اليومية بالريال لعينة من العمال مكونة من عشرة عمال في إحدى المؤسسات وكانت : ٦٥ ، ٥٥ ، ٧٧ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩٩ ، ٨٠ ، ٦٠ ، ٨٨ ، ٧٠

نلاحظ أن أقل أجر يومي = ٥٥ ريالاً

وأن أكبر أجر يومي = ٩٩ ريالاً

فيكون المدى = ٩٩ - ٥٥ = ٤٤ ريالاً

أما في حالة البيانات المبوبة فيوجد أكثر من تعريف للمدى نذكر منها التعريفين

التاليين :

التعريف الأول :

المدى عبارة عن الفرق بين مركز الفئة العليا ومركز الفئة الدنيا أي أن

المدى = مركز الفئة العليا - مركز الفئة الدنيا (٢)

التعريف الثاني:

المدى عبارة عن الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا والحد الأدنى للفئة الدنيا.

أي أن

المدى = الحد الأعلى للفئة العليا - الحد الأدنى للفئة الدنيا ... (٣)

مثال (٣):

أوجد المدى للأجر اليومي لعينة مكونة من ٥٠ عاملاً، وهي مبينة بالجدول

التالي:

جدول التوزيع التكراري للأجور اليومية لمجموعة من العمال

فئات الأجور	٢٩-٢٥	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	٤٤-٤٠	٤٩-٤٥	٥٤-٥٠
عدد العمال	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

نلاحظ من الجدول التكراري السابق أن

مركز الفئة الدنيا = ٢٧، ومركز الفئة العليا = ٥٢ ريالاً

الحد الأعلى للفئة العليا = ٥٤,٥، والحد الأدنى للفئة الدنيا = ٢٤,٥ ريالاً

المدى باستخدام التعريف الأول = ٥٢ - ٢٧ = ٢٥ ريالاً

المدى باستخدام التعريف الثاني = ٥٤,٥ - ٢٤,٥ = ٣٠ ريالاً

(٤ - ٢ - ١) مزايا المدى

(١) يعطي فكرة سريعة عن طبيعة البيانات الإحصائية.

(٢) مقياس سهل الحساب ويستخدم عادة في مراقبة جودة الإنتاج والأحوال الجوية.

(٤ - ٢ - ٢) عيوب المدى

- (١) يعتمد فقد على القراءتين المتطرفتين وأحيانا تكون قيم هاتين القراءتين شاذة لذلك فإن المدى مقياس تقريبي لا يعتمد عليه.
- (٢) يصعب حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة، أو في حالة البيانات الوصفية.

(٤ - ٣) نصف المدى الربيعي

لاحظنا مما سبق أن من أهم خصائص المدى غير المرغوب فيها تأثيره بالقيم الشاذة. لذا فمن الواجب إيجاد مقياس أو مقياس أخرى تستبعد هذه القيم الشاذة من الطرفين، ومن أهم هذه المقاييس نصف المدى الربيعي، ويمكن حسابه بترتيب البيانات تصاعديا، وتقسيم البيانات إلى أربعة أقسام يستبعد منها ربع القيم الصغرى من ناحية، وكذلك ربع القيم الكبرى من الناحية الأخرى.

بعد ذلك فإننا نسمي القيمة (النقطة) التي تكون دونها ربع القراءات الربع الأدنى ويرمز لها بالرمز r_1 . أما القيمة (النقطة) التي تحدد ثلاثة أرباع القراءات فتسمى الربع الأعلى، ويرمز لها بالرمز r_3 والفرق بينهما هو ما يسمى المدى الربيعي. أما نصف المدى بين الربع الثالث والربع الأول فيسمى نصف المدى الربيعي، ويرمز له بالرمز (ر) أي أن:

$$(٤) \dots\dots\dots r = \frac{r_3 - r_1}{2}$$

ويعتبر نصف المدى الربيعي مقياسا يستبعد القيم المتطرفة من الجانبين الأعلى والأدنى.

ويلاحظ أن القيمة (النقطة) التي تكون دونها نصف القراءات (وتسمى بالربع الثاني) وهي القراءة التي تقسم البيانات إلى نصفين ويرمز له بالرمز r_2 وسبقت الإشارة إليها في الفصل السابق على أنها الوسيط عند دراسة مقاييس النزعة المركزية.

وسوف نتناول طريقة حساب نصف المدى الربيعي في حالة البيانات غير المبوبة، والبيانات المبوبة كالتالي.

(٤ - ٣ - ١) نصف المدى الربيعي في حالة البيانات غير المبوبة

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات n ، s_1 ، s_2 ،، s_n فإنه لإيجاد نصف المدى الربيعي لها نتبع الخطوات التالية:

- ١ - نرتب البيانات، وليكن عددها «ن» ترتيباً تصاعدياً مثلاً.
- ٢ - نوجد رتبة الربيع الأدنى r_1 (أو الأول) وهي $\frac{n}{4}$ في حالة ما إذا كانت n تقبل القسمة على ٤ وبذلك تكون قيمة r_1 هي القراءة التي رتبها $\frac{n}{4}$. أما إذا كانت «ن» لا تقبل القسمة على ٤ فتكون قيمة الربيع الأدنى r_1 هي متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسري $\frac{n}{4}$.
- ٣ - نحسب الربيع الأعلى (أو الثالث) r_3 وهي القراءة التي رتبها $\frac{3n}{4}$ في حالة كون n تقبل القسمة على ٤. أما فيما عدا ذلك فقيمة الربيع الأعلى هي متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسري $\frac{3n}{4}$ أي إذا كانت n لا تقبل القسمة على ٤.
- ٤ - نحسب نصف المدى الربيعي R بتطبيق العلاقة (٤) ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٤)

أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار عينة مكونة من ٨ موظفين في أحد الأقسام الإدارية بجامعة الملك سعود، حيث كانت البيانات هي:

٣٥، ٢١، ٢٠، ٢٧، ٢٥، ٣٠، ٤٥، ٤٠

نرتب البيانات تصاعدياً كالتالي:

٤٥، ٤٠، (٣٥)، ٣٠، ٢٧، ٢٥، (٢١)، ٢٠

$$n = 8, \text{ رتبة } r_1 = \frac{8}{4} = 2$$

أي أن الربيع الأدنى هو القراءة الثانية من جهة اليمين وهي:

$$r_1 = 21 \text{ سنة}$$

رتبة الربع الأعلى $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \times 28 = 21$ أي أن p هو الحد السادس من جهة اليمين، وقيمتها هي:

$$p = 35 \text{ سنة}$$

أما نصف المدى الربيعي فيكون:

$$r = \frac{p - p'}{2} = \frac{35 - 21}{2} = 7 \text{ سنوات}$$

مثال (٥)

أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار مفردات العينة المكونة من ١٠ موظفين حيث إن البيانات كالتالي:

$$22, 22, 27, 30, 30, 35, 39, 41, 45, 45$$

الحل

ترتب البيانات تصاعديا فتكون:

$$20, (22), (22), 27, 30, 32, (35), (39), 41, 45$$

$$n = 10, \text{ ورتبة } p = \frac{n}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$\text{وبذلك تكون قيمة الربع الأدنى } p = \frac{22 + 22}{2} = 22 \text{ سنة}$$

$$\text{ورتبة } p' = \frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \times 10 = 7,5$$

أي قيمة الربع الأعلى هي متوسط الحدين السابع والثامن، أي قيمة الربع

الأعلى p' هي:

$$p' = \frac{39 + 35}{2} = 37 \text{ سنة}$$

وعليه فإن قيمة نصف المدى الربيعي ر هي :

$$ر = \frac{٣ - ١}{٢} = \frac{٣٧ - ٢٢}{٢} = ٧,٥ \text{ سنة}$$

(٤ - ٣ - ٢) نصف المدى الربيعي في حالة البيانات المبوبة

وتحسب «ر» في هذه الحالة بطريقتين، أولهما حسابية أما الطريقة الثانية فيبانية :

أولاً : نصف المدى الربيعي حسابياً :

يتم حساب كل من الربيع الأدنى (ر_١) والربيع الأعلى (ر_٢) من البيانات المبوبة بعد تكوين الجدول المتجمع الصاعد. وبطريقة مشابهة تماماً لحساب الوسيط في الفصل السابق مع استبدال $\frac{ن}{٢}$ بالقيمة $\frac{ن}{٤}$ في حالة حساب الربيع الأدنى (ر_١)، أو استبداله بالرتبة $\frac{ن}{٣}$ في حالة حساب الربيع الأعلى (ر_٢). وعليه فإنه يمكن كتابة قيم ر_١، ر_٢ بالعلاقتين التاليتين :

$$ر_١ = ١ + \frac{\frac{ن}{٤} - ك_١}{ك_١ - ك_٢}$$

حيث ١ = بداية فئة الربيع الأدنى .

ك_١ = التكرار المتجمع الصاعد السابق لتكرار ر_١ .

ك_٢ = التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لتكرار ر_١ .

ل = طول الفئة للربيع الأدنى .

$$ر_٢ = \bar{١} + \frac{\bar{٣} - \bar{ك}_١}{\bar{ك}_١ - \bar{ك}_٢}$$

حيث إن $\bar{١}$ = بداية فئة الربيع الأعلى .

$\bar{ك}_١$ = التكرار المتجمع الصاعد السابق لتكرار ر_٢ .

$\bar{ك}_٢$ = التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لتكرار ر_٢ .

$\bar{ل}$ = طول الفئة للربيع الأعلى .

وسوف نوضح طريقة الحساب من المثال التالي .

مثال (٦)

أوجد نصف المدى الربيعي ر للأجور اليومية بالريال للعمال حسب البيانات المعطاة في مثال (٣) من الفصل الثاني.

نكون أولاً الجدول المتجمع الصاعد كما يلي:

الجدول المتجمع الصاعد للأجور اليومية لمجموعة من العمال

التكرار المتجمع الصاعد	الفئات
صفر ٥ ك _١	أقل من ٢٤,٥ أقل من ٢٩,٥ ١
١٣ ك _٢ ٢٣ ٣٦ ك _٣	أقل من ٣٤,٥ أقل من ٣٩,٥ أقل من ٤٤,٥ ١
٤٤ ك _٤ ٥٠	أقل من ٤٩,٥ أقل من ٥٤,٥

$$\text{نوجد رتبة الربيع الأدنى } \frac{50}{4} = \frac{N}{4} = 12,5$$

ونضع خطأً أفقياً بين التكرارين الصاعدين ٥, ١٣ الواقعة بينها القيمة ١٢,٥ كما هو موضح بالجدول، فيكون من الجدول السابق

$$٥ = ١, \quad ١٣ = ٢, \quad ٥ = ٣, \quad ٢٩,٥ = ٤$$

أي أن

$$٥ \times \frac{٥ - 12,5}{٥ - 13} + 29,5 = ٤ \times \frac{١ - \frac{N}{4}}{٢ - ٣} + 1 = R$$

$$٣٤,١٩ = ٤,٦٩ + 29,٥٠ = ٥ \times \frac{(٧,٥٠)}{٨} + 29,٥ =$$

كذلك نجد أن :

$$رتبة الربيع الأعلى ر = \frac{ن٣}{٤} = \frac{٥٠ \times ٣}{٤} = \frac{١٥٠}{٤} = ٣٧,٥$$

وبذلك نضع خطأً أفقياً بين التكرارين الصاعدين ٣٦ ، ٤٤ اللذين تقع بينهما القيمة ٣٧,٥ كما هو موضح بالجدول السابق فتكون :

$$ر = \bar{آ} + \frac{\frac{ن٣}{٤} - ك}{ك_١ - ك_٢}$$

$$٥ \times \frac{٣٦ - ٣٧,٥}{٣٦ - ٤٤} + ٤٤,٥ =$$

$$٤٥,٤٤ = \text{ريالا}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي } ر = \frac{ر - ر}{٢}$$

$$= \frac{٣٤,١٩ - ٤٥,٤٤}{٢}$$

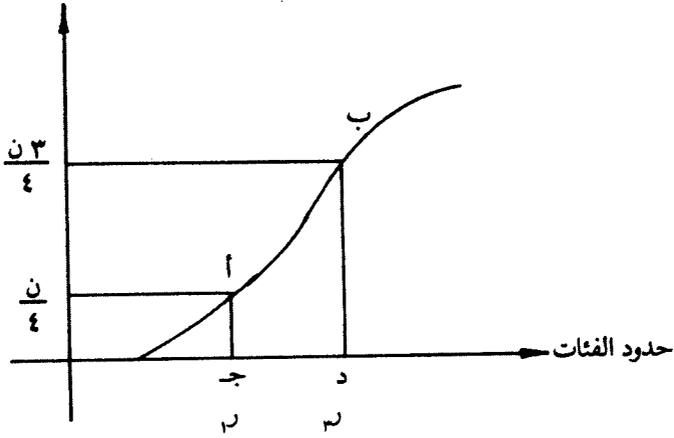
$$= ٥,٦٣ \text{ ريالات}$$

ولحساب قيمة نصف المدى الربيعي (ر) بالطريقة البيانية نرسم المنحنى المتجمع الصاعد من الجدول المتجمع الصاعد السابق. ثم نحدد على محور التكرارات المتجمعة كلا من القيمتين $\frac{ن}{٤}$ ، $\frac{ن٣}{٤}$ ، ومنها نرسم مستقيمين أفقيين متوازيين لمحور الفئات فيقابلان المنحنى الصاعد في النقطتين أ ، ب على الترتيب، نسقط عمودين رأسيين على محور الفئات فيقابلانه في النقطتين ج ، د وهما قيمة كل من الربيع الأدنى ر ، والربيع الأعلى ر على الترتيب. ونطبق العلاقة (٤) ، لنحصل على قيمة نصف المدى الربيعي (ر) ، كما هو موضح بالشكل (٤ - ١) .

مثال (٧) :

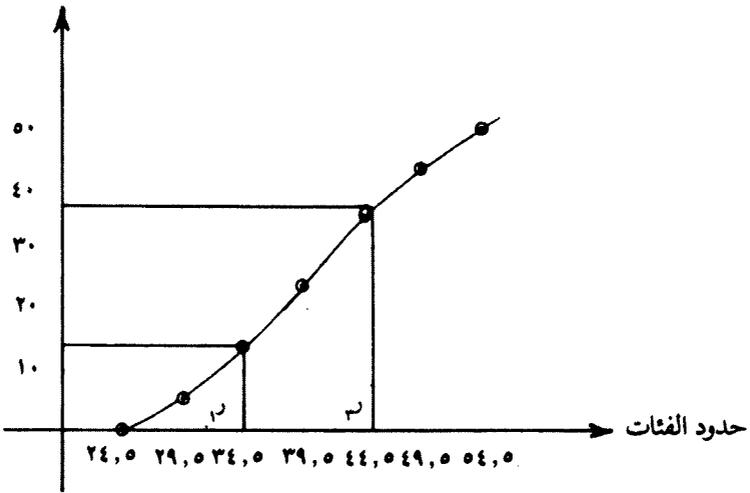
أوجد نصف المدى الربيعي بيانيا للأجور اليومية للعمال في مثال (٣) السابق. من الجدول المتجمع الصاعد في مثال (٦) نرسم المنحنى المتجمع الصاعد كما في شكل (٤-٢) .

التكرار المتجمع الصاعد



شكل (٤ - ١) : تحديد الربعين الأول والثالث بيانياً

التكرار المتجمع الصاعد



شكل (٤ - ٢) : تحديد الربعين الأول والثالث لأجور العمال بيانياً

نلاحظ من الرسم أن:

(ر) هي قيمة ج من الرسم = ٣٤,٥ تقريبا

(س) هي قيمة د من الرسم = ٤٥,٥ تقريبا

ومن ذلك نجد أن نصف المدى الربيعي ر = $\frac{\text{قراءة (د)} - \text{قراءة (ج)}}{٢}$

$$\frac{٣٤,٥ - ٤٥,٥}{٢} =$$

$$= ٥,٥ \text{ ريالا}$$

(٤ - ٣ - ٣) مزايا نصف المدى الربيعي

- ١ - لا يتأثر بالقيم الشاذة المتطرفة.
- ٢ - يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

(٤ - ٣ - ٤) عيوب نصف المدى الربيعي

- ١ - لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.
- ٢ - لا يسهل التعامل معه في التحليل الإحصائي.

(٤ - ٤) الانحراف المتوسط

قبل تعريف الانحراف المتوسط، وتوضيح كيفية حسابه نحتاج إلى استخدام مفهوم القيمة المطلقة لأي رقم هي قيمته العددية بإشارة موجبة فقط أي أن القيمة المطلقة للعدد - ٥ هي ٥ وتكتب على الصورة $|٥ - ٥| = ٥$ وعموما القيمة المطلقة للقراءة - س هي $|س - س| = س$.

وكذلك المقدار س - ص فإن قيمته المطلقة هي $|س - ص|$ وهكذا.
والآن نستطيع تعريف الانحراف المتوسط في حالة البيانات المبوبة وغير المبوبة.

(٤ - ٤ - ١) الانحراف المتوسط للبيانات غير المبوبة

يعرّف الانحراف المتوسط في حالة البيانات غير المبوبة بأنه مجموع الانحرافات المطلقة للقراءات عن وسطها الحسابي مقسوما على عددها. والانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات يحدد مدى تباعد (أو تشتت) مختلف القراءات عن متوسطها باستبعاد الإشارة السالبة كل مرة. مع ملاحظة أن مجموع انحرافات (تباعد) جميع القراءات عن متوسطها يساوي صفرًا. ولتكن لدينا القراءات

$$س_١ ، س_٢ ، \dots ، س_٧$$

ذات متوسط حسابي $\bar{س}$

فإن انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي $\bar{س}$ هي :

$$(س_١ - \bar{س}) ، (س_٢ - \bar{س}) ، \dots ، (س_٧ - \bar{س})$$

وتكون الانحرافات المطلقة هي القيم المطلقة لانحرافات القراءات أي أن :

$$|س_١ - \bar{س}| ، |س_٢ - \bar{س}| ، \dots ، |س_٧ - \bar{س}|$$

وعلى ذلك يكون الانحراف المتوسط الذي يعرّف كذلك على أنه الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة، وبالتالي فإن :

$$\frac{|س_١ - \bar{س}| + |س_٢ - \bar{س}| + \dots + |س_٧ - \bar{س}|}{٧} = \text{الانحراف المتوسط}$$

$$(٧) \dots \dots \dots \frac{\text{مجموع } |س - \bar{س}|}{٧} =$$

مثال (٨) :

أوجد الانحراف المتوسط لأعمار عينة مكونة من ٨ موظفين في مثال (٤).

نحسب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع } س}{٧}$$

أي أن:

$$\bar{س} = \frac{٤٠ + ٤٥ + ٣٠ + ٢٥ + ٢٧ + ٢٠ + ٢١ + ٣٥}{٨}$$

$$= \frac{٢٤٣}{٨} = ٣٠,٣٧٥ \text{ ريالاً}$$

ومن ذلك يكون:

الانحراف المتوسط

$$= \frac{(|٣٠,٣٧٥ - ٣٥| + \dots + |٣٠,٣٧٥ - ٤٥| + |٣٠,٣٧٥ - ٤٠|)}{٨}$$

$$= \frac{(٤,٦٢٥ + ٩,٣٧٥ + ١٠,٣٧٥ + ٣,٣٧٥ + ٥,٣٧٥ + ٠,٣٧٥ + ١٤,٦٢٥ + ٩,٦٢٥)}{٨}$$

$$= \frac{٥٧,٧٥٠}{٨} = ٧,٢١٨٧٥ \text{ ريالاً}$$

(٤ - ٤ - ٢) الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة

إذا كانت لدينا التكرارات

ك_١، ك_٢،، ك_م لمجموعة عددها م من الفئات التي مراكزها على الترتيب هي:

س_١، س_٢،، س_م

فإنه يمكن تعريف الانحراف المتوسط كالتالي:

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{ك_١ |س_١ - \bar{س}| + ك_٢ |س_٢ - \bar{س}| + \dots + ك_م |س_م - \bar{س}|}{ك_١ + ك_٢ + \dots + ك_م}$$

$$= \frac{\text{مجم ك |س - \bar{س}|}}{\text{مجم ك}}$$

$$= \frac{\text{مجم ك |س - \bar{س}|}{ن} \quad \text{(أ)}$$

حيث إن ن = مجم ك.

مثال (٩):

احسب الانحراف المتوسط لأجور العمال في مثال (٣) السابق.

الحل

ولإيجاد ذلك يجب أن نكوّن الجدول التالي وذلك لتبسيط الحسابات.

جدول التوزيع التكراري للأجور لمجموعة من العمال

الفئات	مراكز الفئات س	ك	ك س	س - س	س - س	ك س - س
٢٩ - ٢٥	٢٧	٥	١٣٥	١٢,٩ -	١٢,٩	٦٤,٥
٣٤ - ٣٠	٣٢	٨	٢٥٦	٧,٩ -	٧,٩	٦٣,٢
٣٩ - ٣٥	٣٧	١٠	٣٧٠	٢,٩ -	٢,٩	٢٩,٠٠
٤٤ - ٤٠	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٢,١	٢٧,٣
٤٩ - ٤٥	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٧,١	٥٦,٨
٥٤ - ٥٠	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٢,١	٧٢,٦
المجموع		٥٠	١٩٩٥			٣١٣,٤

وبذلك يكون الوسط الحسابي هو:

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع ك س}}{ن} = \frac{١٩٩٥}{٥٠} = ٣٩,٩٠ \text{ ريالاً}$$

$$\therefore \text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجموع ك | س - س |}}{ن} = \frac{٣١٣,٤}{٥٠} = ٦,٢٧ \text{ ريالاً}$$

(٤ - ٤ - ٣) مميزات الانحراف المتوسط

١ - يأخذ جميع القيم في الاعتبار.

(٤ - ٤ - ٤) عيوب الانحراف المتوسط

- ١ - مقياس صعب الحساب وخاصة عندما يكون المتوسط عددًا كسريًا.
- ٢ - يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

(٥ - ٤) التباين والانحراف المعياري

يعتبر التباين والانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت المستخدمة في كثير من المسائل الإحصائية. يعرف التباين لمجموعة من القراءات عددها «ن» مثلاً بأنه متوسط مربعات انحرافات تلك القراءات عن وسطها الحسابي، ويرمز له بالرمز (σ^2) وتقرأ (تباين) أي إنه إذا كانت لدينا القراءات من مجتمع

$$س_١، س_٢، \dots، س_n$$

فإن الوسط الحسابي $\bar{س}$ يكون

$$\bar{س} = \frac{\text{مجم } س}{n}$$

ومربع الانحرافات عن $\bar{س}$ هي:

$$(س_١ - \bar{س})^2، (س_٢ - \bar{س})^2، \dots، (س_n - \bar{س})^2$$

وبذلك يكون التباين (σ^2) كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} [(س_١ - \bar{س})^2 + (س_٢ - \bar{س})^2 + \dots + (س_n - \bar{س})^2]$$

$$= \frac{1}{n} \text{مجم } (س - \bar{س})^2$$

وتتلخص فكرة حسابه في حساب الانحرافات عن أحد مقاييس الموضع، ويستعمل الوسط الحسابي وحده لهذا الغرض. ومركزه بين مقاييس التشتت كمركز الوسط الحسابي بين مقاييس النزعة المركزية. أما الجذر التربيعي للتباين فهو ما يسمى الانحراف المعياري، ويرمز له بالرمز (σ) ، ويعتبر الانحراف المعياري من أهم وأدق وأفضل مقاييس التشتت، وذلك لسهولة حسابه، وسهولة التعامل معه في التحليل الإحصائي. ومن المعلوم عند دراسة أي ظاهرة من الظواهر في الحياة العملية أن المشاهدات تكون مأخوذة بالعينة، وهنا يفضل حساب التباين من العلاقة التالية:

$$(٩) \dots\dots\dots \sigma^2 = \frac{1}{1-n} \sum (s - \bar{s})^2$$

حيث إن «ن» عدد مفردات العينة. . ومن الجذر التربيعي للتباين نحصل على الانحراف المعياري أي أن

$$(١٠) \dots\dots\dots \sigma = \sqrt{\frac{1}{(1-n)} \sum (s - \bar{s})^2}$$

والجذر التربيعي يعطينا قياساً للتشتت بنفس وحدات المتغير س. وسوف نتناول طريقة حساب التباين والانحراف المعياري في كل من البيانات غير المبوبة، والبيانات المبوبة كالتالي.

(٤ - ٥ - ١) التباين والانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة

إذا كانت لدينا القراءات التالية س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ، س_ن فإن التباين يعطي بالعلاقة (٩) والانحراف المعياري بالعلاقة (١٠)، وسوف نوضح طريقة الحساب في المثال التالي.

مثال (١٠)

أوجد التباين والانحراف المعياري لأعمار عينة من الموظفين بياناتها في مثال (٤) السابق كالتالي:

٤٠ ، ٤٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٣٥

نكوّن الجدول التالي:

س	(س - \bar{s})	(س - \bar{s}) ^٢
٤٠	٩,٦٣	٩٢,٥٤
٤٥	١٤,٦٣	٢١٣,٧٤
٣٠	٠,٣٨-	٠,١٤
٢٥	٥,٣٨-	٢٨,٩٤

س	(س - $\bar{س}$)	(س - $\bar{س}$) ^٢
٢٧	٣,٣٨-	١١,٤٣
٢٠	١٠,٣٨-	١٠٧,٧٤
٢١	٩,٣٨-	٨٧,٩٨
٣٥	٤,٦٣	٢١,٣٤
٢٤٣		٥٦٣,٨٤

ومن ذلك يكون الوسط الحسابي:

$$\bar{س} = \frac{١}{ن} \text{ مـج س} = \frac{٢٤٣}{٨} = ٣٠,٣٨ \text{ سنة}$$

$$\sigma^2 = \frac{١}{١-ن} \text{ مـج (س - } \bar{س}\text{)}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{١}{٧} (٥٦٣,٨٤) = ٨٠,٥٥$$

والإنحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{٨٠,٥٥} = ٨,٩٨ \text{ سنة}$$

نلاحظ عند حساب التباين والإنحراف المعياري باستخدام العلاقتين (٩) و (١٠) السابقتين أنه لا بد من حساب الوسط الحسابي $\bar{س}$ وطرحه من جميع القيم. ومن المعلوم أن الوسط قد يكون عددًا كسريًا مما يزيد من صعوبة الحسابات والتعرض للأخطاء. مما دعت الحاجة إلى إيجاد صيغ أخرى مستنتجة منها تكون أبسط في الحساب كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{١}{١-ن} \left(\text{مـج س}^2 - \frac{(\text{مـج س})^2}{ن} \right) \dots \dots \dots (١١)$$

$$\sqrt{\frac{1}{(1-n)} \left(\text{مجم } s^2 - \frac{(\text{مجم } s)^2}{n} \right)} = \sigma$$

لإثبات العلاقة (١١) من العلاقة (٩) كالتالي:

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{1-n} \text{مجم } (s - \bar{s})^2$$

$$= \frac{1}{1-n} \text{مجم } (s^2 - 2s\bar{s} + \bar{s}^2)$$

$$= \frac{1}{1-n} (\text{مجم } s^2 - 2\bar{s} \text{مجم } s + n\bar{s}^2)$$

$$= \frac{1}{1-n} (\text{مجم } s^2 - 2\bar{s} \text{مجم } s + n\bar{s}^2)$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{1-n} (\text{مجم } s^2 - \frac{(\text{مجم } s)^2}{n})$$

ويكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال (١١)

حل مثال (١٠) السابق باستخدام العلاقة (١١)

نكوّن جدول الحل التالي:

س	س ^٢
٤٠	١٦٠٠
٤٥	٢٠٢٥
٣٠	٩٠٠
٢٥	٦٢٥
٢٧	٧٢٩

س	س ^٢
٢٠	٤٠٠
٢١	٤٤١
٣٥	١٢٢٥
٢٤٣	٧٩٤٥

وبذلك يكون التباين:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} (\text{مج س}^2 - \frac{(\text{مج س})^2}{n})$$

وبالتعويض يكون لدينا

$$\sigma^2 = \frac{1}{7} \left(\frac{59049}{8} - 7945 \right)$$

$$= \frac{563,88}{7} = 80,55$$

والانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{80,55} = 8,98 \text{ سنة}$$

وهي نفس النتيجة في مثال (١٠) السابق. ونستنتج أن هذه الطريقة أسهل في الحساب من الحساب باستخدام العلاقة (٩) السابقة في مثال (١٠). وفي بعض الأحيان قد تكون قيم المتغير «س» للظاهرة محل الدراسة كبيرة، وبذلك تكون مربعات القيم كبيرة جداً مما يجعل الحساب بالعلاقة (١١) صعباً إلى حد ما. مما جعلنا نفكر في تبسيط القيم قبل الحساب، وذلك باستخدام الخاصية المهمة التي يتميز بها كل من التباين والانحراف المعياري، وهي إذا طرحنا أو جمعنا مقداراً ثابت (أ) من جميع القيم فإن التباين والانحراف المعياري لا يتأثر بالقيم نفسها، وإنما يتأثر بمقدار التفاوت بين القراءات، أي مقدار التقارب أو التباعد للقيم عن بعضها ونوضح ذلك كما يلي:

نفرض أنه لدينا القراءات :

س_١ ، س_٢ ، ، س_ن

فإذا طرحنا مقداراً ثابتاً ١ من جميع القراءات السابقة فنحصل على الانحرافات التالية :

ح_١ ، ح_٢ ، ، ح_ن

حيث إن ح = س - ١ ، وبذلك يكون التباين :

$$\sigma^2 = \frac{1}{1-n} (\text{مج ح}^2 - \frac{(\text{مج ح})^2}{n}) \quad (١٢)$$

والانحراف المعياري يكون :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

وبذلك يكون الحل في مثال (١١) بتطبيق العلاقة (١٢) كالتالي :

نختار مقداراً ثابتاً ١ = ٣٠ (قيمة متوسطة بين القراءات) ونكوّن جدول الحل التالي

س	ح = س - ٣٠	ح ^٢
٤٠	١٠	١٠٠
٤٥	١٥	٢٢٥
٣٠	٠	٠
٢٥	٥-	٢٥
٢٧	٣-	٩
٢٠	١٠-	١٠٠
٢١	٩-	٨١
٣٥	٥	٢٥
المجموع	٣	٥٦٥

ومن الجدول نجد :

$$\sigma^2 \therefore \frac{1}{1-n} (\text{مج ح}^2 - \frac{(\text{مج ح})^2}{n})$$

$$\sigma^2 \therefore \frac{1}{7} (565 - \frac{9}{8})$$

$$80,55 = \frac{563,87}{7} = (1,13 - 565) \frac{1}{7} =$$

$$\sqrt{\sigma^2} \sqrt{7} = \sigma$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{80,55} = 8,98 \text{ سنة}$$

وهي النتائج السابقة نفسها. ونلاحظ صغر القيم في الحسابات التي حصلنا عليها بهذه الطريقة.

(٤ - ٥ - ٢) التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة:

إذا كان لدينا التكرارات

ك_١، ك_٢، ك_٣،، ك_م

لفئات عددها م ومراكزها هي

س_١، س_٢،، س_م على الترتيب

فإن التباين والانحراف المعياري يعطى كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{1}{1-n} \text{مج ك} (س - \bar{س})^2 \dots \dots \dots (13)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(1-n)} \text{مج ك} (س - \bar{س})^2}$$

ويمكن كتابة الصيغة المبسطة (١١) والصيغة المختصرة (١٢) باستخدام وسط فرضي أ، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة في حالة البيانات غير المبوبة كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{1}{1-n} (\text{مج ك س}^2 - \frac{(\text{مج ك س})^2}{n}) \dots \dots \dots (14)$$

و

$$(١٥) \dots\dots\dots \left(\frac{\text{مجم ك ح}^2}{ن} - \frac{\text{مجم ك ح}^2}{١-ن} \right) = \sigma^2$$

وقد وجد عمليا أنه لسهولة الحسابات يفضل أن يكون الوسط الفرضي أ مساوياً مركز الفئة التي يناظرها أكبر تكرار.

مثال (١٢)

احسب التباين والانحراف المعياري في مثال (٣)، وذلك باستخدام العلاقات (١٣)، (١٤)، (١٥) على الترتيب.

الحل

لحساب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٣) نكون جدول

الحل كالتالي:

الفئات	س	م	ك س	س - س	(س - س)	ك (س - س)
٢٩-٢٥	٢٧	٥	١٣٥	١٢,٩-	١٦٦,٤١	٨٣٢,٠٥
٣٤-٣٠	٣٢	٨	٢٥٦	٧,٩-	٦٢,٤١	٤٩٩,٢٨
٣٩-٣٥	٣٧	١٠	٣٧٠	٢,٩-	٨,٤١	٨٤,١٠
٤٤-٤٠	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	٥٧,٣٣
٤٩-٤٥	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٤٠٣,٢٨
٥٤-٥٠	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٨٧٨,٤٦
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٢٧٥٤,٥٠

ومن ذلك يكون الوسط الحسابي هو:

$$\bar{s} = \frac{1}{n} \text{ مـج كـس}$$

$$= \frac{1}{50} (1990)$$

$$= 39,90 \text{ ريالاً}$$

أما التباين فهو

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \text{ مـج كـ (س - } \bar{s} \text{)}^2$$

$$= \frac{1}{49} (2704,00)$$

$$= 56,21$$

أما الانحراف المعياري فيكون

$$\sigma = \sqrt{56,21}$$

$$= 7,50 \text{ ريالاً}$$

ولحساب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٤) نكوّن الجدول

التالي:

الفئات	س	س ^٢	ك	كس	كس ^٢
٢٩-٢٥	٢٧	٧٢٩	٥	١٣٥	٣٦٤٥
٣٤-٣٠	٣٢	١٠٢٤	٨	٢٥٦	٨١٩٢
٣٩-٣٥	٣٧	١٣٦٩	١٠	٣٧٠	١٣٦٩٠
٤٤-٤٠	٤٢	١٧٦٤	١٣	٥٤٦	٢٢٩٣٢
٤٩-٤٥	٤٧	٢٢٠٩	٨	٣٧٦	١٧٦٧٢
٥٤-٥٠	٥٢	٢٧٠٤	٦	٣١٢	١٦٢٢٤
المجموع	-	-	٥٠	١٩٩٥	٨٢٣٥٥

$$\left(\frac{(\text{مجم ك س})^2}{\text{ن}} - \text{مجم ك س}^2 \right) \frac{1}{1-\text{ن}} = \sigma^2$$

$$\left(\frac{3980025}{50} - 82355 \right) \frac{1}{49} =$$

$$56,21 =$$

ومن ذلك يكون:

$$7,50 \text{ ريال} = \sqrt{56,21} = \sigma$$

ولحساب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٥) نكوّن جدول

الحل التالي بعد اختيار $a = 42$ لتناظرها لأكبر تكرار

كح ^٢	كح	ح ^٢	ح = س - ٤٢	ك	س	الفئات
١١٢٥	٧٥-	٢٢٥	١٥-	٥	٢٧	٢٩-٢٥
٨٠٠	٨٠-	١٠٠	١٠-	٨	٣٢	٣٤-٣٠
٢٥٠	٥٠-	٢٥	٥-	١٠	٣٧	٣٩-٣٥
٠	٠	٠	٠	١٣	٤٢	٤٤-٤٠
٢٠٠	٤٠	٢٥	٥	٨	٤٧	٤٩-٤٥
٦٠٠	٦٠	١٠٠	١٠	٦	٥٢	٥٤-٥٠
٢٩٧٥	١٠٥-	-	-	٥٠	-	المجموع

$$\left(\frac{(\text{مجم كح})^2}{\text{ن}} - \text{مجم كح}^2 \right) \frac{1}{1-\text{ن}} = \sigma^2$$

$$\left(\frac{(105)^2}{50} - 2975 \right) \frac{1}{49} =$$

$$56,21 = (220,5 - 2975) \frac{1}{49} =$$

أما الانحراف المعياري فيكون:

$$\sigma = \sqrt{56,21} = 7,50 \text{ ريال}$$

ونلاحظ أن قيمة التباين والانحراف المعياري المحسوبة بالطرق الثلاث السابقة لا تتغير.

(٤ - ٥ - ٣) مميزات الانحراف المعياري

- ١ - يأخذ جميع القيم في الاعتبار، ويعتبر من أدق مقاييس التشتت.
- ٢ - يدخل في معظم التحليل الإحصائية لسهولة التعامل معه رياضياً.

(٤ - ٥ - ٤) عيوب الانحراف المعياري

- ١ - يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).
- ٢ - يصعب حسابه في البيانات الوصفية، والبيانات الكمية ذات الجداول التكرارية المفتوحة.

(٤ - ٦) مقاييس التشتت النسبية

سبق لنا دراسة المدى ونصف المدى الربيعي، والانحراف المتوسط والانحراف المعياري، وجميعها مقاييس للتشتت. لها وحدات حسب طبيعة الظاهرة محل الدراسة. ولذلك فإنها تصلح للمقارنة بين الظواهر التي لها نفس الوحدات، مثل مقارنة تشتت أطوال مجموعة من جنود البحرية مع تشتت أطوال مجموعة من جنود الطيران، أو مقارنة تشتت أوزان مجموعة من طلاب جامعة الملك سعود مع تشتت أوزان مجموعة من طلاب جامعة الملك عبدالعزيز وهكذا. أما إذا رغبتنا في المقارنة بين ظاهرتين لكل منهما وحدات تختلف عن الأخرى مثل مقارنة تشتت أطوال مجموعة من الطلاب مع تشتت أوزانهم فإن المقاييس السابقة للتشتت لا تصلح للمقارنة، وذلك لاختلاف الوحدات، لأن التشتت للأطوال يقاس بالسنتيمتر، والأوزان تقاس بالكيلوجرام مثلاً. لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقياس نسبي لا يعتمد على الوحدات، ويسمى هذا المقياس معامل الاختلاف، ويعرف كالتالي:

$$(١٦) \dots\dots\dots \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} = \text{معامل الاختلاف النسبي}$$

$$(١٧) \dots\dots ١٠٠ \times \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} = \text{أو معامل الاختلاف المئوي}$$

أما في حالة كون جداول التوزيعات التكرارية مفتوحة فإنه للتغلب على ذلك يعرف معامل الاختلاف النسبي أو المئوي باستخدام الربيعات كالتالي:

$$(١٨) \dots \frac{\text{الربيع الأعلى (م) - الربيع الأدنى (م)}}{\text{الربيع الأعلى (م) + الربيع الأدنى (م)}} = \text{معامل الاختلاف النسبي}$$

$$(١٩) \dots\dots ١٠٠ \times \frac{م - م}{م + م} = \text{معامل الاختلاف المئوي}$$

مثال (١٣)

احسب معامل الاختلاف لأجور العمال في مثال (٣) السابق

أولاً: باستخدام معامل الاختلاف النسبي المعروف بالعلاقة (١٦) والعلاقة (١٧).

ثانياً: باستخدام معامل الاختلاف المعطى بالعلاقة (١٨) والعلاقة (١٩).

الحل

سبق حساب كل من $\bar{س} = ٣٩,٩٠$ ريال والانحراف المعياري $= ٧,٥٠$

ريال.

وبذلك يكون:

$$٠,١٨٨ = \frac{٧,٥٠}{٣٩,٩٠} = \text{معامل الاختلاف النسبي}$$

$$\%١٨,٨٠ = ١٠٠ \times \frac{٧,٥٠}{٣٩,٩٠} = \text{معامل الاختلاف المئوي}$$

سبق حساب $م = ٤٥,٤٤$ ، $م = ٣٥,٤٤$

وبذلك يكون:

$$\begin{aligned} \text{معامل الاختلاف النسبي} &= \frac{p - \bar{p}}{p + \bar{p}} \\ &= \frac{35,44 - 45,44}{35,44 + 45,44} \\ &= 0,124 \end{aligned}$$

∴ معامل الاختلاف المثوي = $100 \times 0,124 = 12,4\%$

ويلاحظ أنه يوجد اختلاف بين قيمتي معامل الاختلاف باستخدام العلاقة (١٦) والعلاقة (١٨) وذلك لاختلاف الأساس الرياضي في كل من التعريفين السابقين ويفضل التعريف الأول إذا كانت جداول التوزيعات التكرارية غير مفتوحة وذلك لدقته.

(٤ - ٧) العزوم والالتواء والتفلطح

(٤ - ٧ - ١) العزوم

يعرف العزم الرائي إذا كانت لدينا مجموعة من القراءات s_1, s_2, \dots, s_n بالعلاقة الآتية:

$$\text{العزم الرائي} = \frac{\sum s_i^r}{n} \quad (20) \dots\dots\dots$$

ويسمى هذا العزم بالعزم الرائي حول نقطة الأصل، أو العزم الرائي غير المركزي وإذا كانت $r = 1$ فإنه يسمى العزم الأول حول نقطة الأصل، وهو يساوي الوسط الحسابي \bar{s} .

أي أن

$$\text{العزم الأول حول نقطة الأصل} = \frac{\sum s_i}{n} = \bar{s}$$

ويعرف العزم الرائي حول الوسط الحسابي بالعزم الرائي المركزي كالتالي:

$$\text{العزم الرائي المركزي} = \frac{\sum (s_i - \bar{s})^r}{n} \quad (21) \dots\dots\dots$$

وفي هذه الحالة عندما $r = 1$

فإن العزم الأول المركزي = صفراً

وعندما $r = 2$

$$\text{فإن العزم الثاني المركزي} = \frac{\text{مجم (س - \bar{س})}^2}{\text{ن}}$$

وهذا يساوي التباين

وعندما $r = 3$

$$\text{فإن العزم الثالث المركزي} = \frac{\text{مجم (س - \bar{س})}^3}{\text{ن}}$$

عندما $r = 4$

$$\text{فإن العزم الرابع المركزي} = \frac{\text{مجم (س - \bar{س})}^4}{\text{ن}}$$

وهكذا

وبالمثل في حالة البيانات المبوبة فإن العلاقتين (٢٠)، (٢١) يمكن كتابتهما كالتالي :

$$\text{العزم الرائي حول نقطة الأصل} = \frac{\text{مجم ك س}^r}{\text{مجم ك}} = \frac{\text{مجم ك س}^r}{\text{ن}} \dots (٢٢)$$

حيث $\text{ن} = \text{مجم ك}$ وذلك عندما يكون لدينا مراكز فئات $\text{س}_1, \text{س}_2, \dots, \text{س}_m$ لها تكرارات $\text{ك}_1, \text{ك}_2, \dots, \text{ك}_m$ ويكون أيضاً

$$\text{العزم الرائي المركزي} = \frac{\text{مجم ك (س - \bar{س})}^r}{\text{ن}} \dots (٢٣)$$

ونلاحظ أن العزم الأول حول نقطة الأصل بوضع $r = 1$ في (٢٢) ويكون هو الوسط الحسابي، وأن العزم الأول المركزي $r = 1$ في (٢٣) يساوي صفراً، وأن العزم الثاني المركزي $r = 2$ في (٢٣) يساوي التباين، وبطريقة مماثلة لها في البيانات غير المبوبة يمكن حساب العزوم الأخرى.

(١٤) مثال

احسب العزم الأول والعزم الثاني حول نقطة الأصل، وكذلك كلا من العزم الأول المركزي والعزم الثاني المركزي لمجموعة البيانات:

١٠، ٨، ٧، ٥، ٤، ٢

لسهولة الحل نكوّن الجدول التالي:

س	س ^٢	س - س̄	(س - س̄) ^٢
٢	٤	-٤	١٦
٤	١٦	-٢	٤
٥	٢٥	-١	١
٧	٤٩	١	١
٨	٦٤	٢	٤
١٠	١٠٠	٤	١٦
٣٦	٢٥٨		٤٢

نحسب س̄ وهو العزم الأول حول نقطة الأصل من القانون $\bar{s} = \frac{\text{مجم س}}{n}$

$$\text{أي أن } \bar{s} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\frac{\text{مجم س}^2}{n} = \text{العزم الثاني غير المركزي}$$

$$43 = \frac{258}{6} =$$

$$\frac{\text{مجم (س - س̄)}}{n} = \text{العزم الأول المركزي} = \text{صفرًا}$$

$$\frac{\text{مجم (س - س̄)}^2}{n} = \text{العزم الثاني المركزي}$$

$$7 = \frac{42}{6} =$$

أما البيانات المبوبة فسوف نرى كيفية حساب العزوم في مثال (١٥).

(٤ - ٧ - ٢) الالتواء

لقد سبق أن أوضحنا أشكال المنحنيات للتوزيعات التكرارية المختلفة، وذكرنا منها ما هو متماثل وما هو غير متماثل، وذلك بشكل بياني، من الملاحظ أن الأشكال البيانية عادة تكون تقريبية، ولا تعطي قيمة محددة.

ولقد سبق أن ذكرنا في مقاييس النزعة المركزية إذا كانت المنحنيات متماثلة أن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تكون متطابقة، أي متساوية في القيمة، وفي حالة عدم التماثل فإنها قد تكون ملتوية ناحية اليمين، فيكون الوسط الحسابي أكبرها، يليه الوسيط، ثم المنوال. وإما ملتوية ناحية اليسار فيكون الوسط الحسابي أصغرها، يليه الوسيط، ثم المنوال.

وكل ما سبق يكون غير كافٍ لقياس الالتواء مما دعت الحاجة لإيجاد مقياس للالتواء يفيد في المقارنات ودراسة طبيعة التوزيعات المختلفة. ويحدد لنا هذا المقياس مدى بعد شكل منحنى التكرار عن التماثل حول أحد مقاييس الموضع المختلفة. وتحدد قيمته عادة بمعامل الالتواء الذي يحسب بعدة طرق، كما سنرى فيما يلي، تختلف قيمها باختلاف اختيار مقياس الموضع.

مقياس الالتواء لبيرسون (Pearson)

يعرف معامل بيرسون للالتواء كالتالي:

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}} \quad (٢٤)$$

أو

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{٣(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}} \quad (٢٥)$$

ومعامل بيرسون للالتواء يعطي نتائج مقبولة عندما يكون الالتواء بسيطاً، ويفشل عندما تكون المنحنيات شديدة الالتواء، أو في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

مقياس الالتواء لباولي Bowely

ويعرف معامل الالتواء لباولي كالآتي :

$$\text{معامل الالتواء لباولي} = \frac{(\text{الربيع الأعلى} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى})}{(\text{الربيع الأعلى} - \text{الوسيط}) + (\text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى})}$$

(٢٦)

وهذه العلاقة تفيد في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة والمغلقة .

مقياس الالتواء بطريقة العزوم

ويعرف معامل الالتواء كالتالي :

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^3} \quad \text{(٢٧)}$$

ونوضح العلاقات الثلاث السابقة لحساب معامل الالتواء بالمثال التالي :

مثال (١٥)

أوجد معامل الالتواء لبيرسون ولباولي وباستخدام طريقة العزوم، وذلك في حالة أجور العمال في مثال (٣) السابق .

الحل

لقد سبق أن حسبنا في الأمثلة (٣)، (٩)، (١٢) في الفصل الثالث وكان الوسط الحسابي = ٣٩,٩٠ ريالاً، الوسيط = ٢٧,٤٠ ريالاً، المنوال = ٤١,٣٨ ريالاً وفي مثال (١٢) السابق الانحراف المعياري = ٧,٥ ريالاً .

وعليه فإن

$$\begin{aligned} \text{معامل الالتواء لبيرسون} &= \frac{\text{الوسط الحسابي - المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}} \\ &= \frac{41,38 - 39,9}{7,5} = 0,197 \end{aligned}$$

أي أن الالتواء سالب فيكون جهة اليسار ومقداره صغير لقرب المقدار -0,197 من الصفر.

أو باستخدام العلاقة (٢٥) يكون

$$\begin{aligned} \text{معامل الالتواء لبيرسون} &= \frac{3(\text{الوسط الحسابي - الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}} \\ &= \frac{3(40,27 - 39,90)}{7,5} = 0,148 \end{aligned}$$

باستخدام العلاقة (٢٦) يكون

$$\begin{aligned} \text{معامل الالتواء لباولي} &= \frac{(p_1 - p_2) - (p_2 - p_3)}{(p_1 - p_2) + (p_2 - p_3)} \\ &= \frac{(35,44 - 40,27) - (40,27 - 45,44)}{(35,44 - 40,27) + (40,27 - 45,44)} \\ &= \frac{0,34}{10,00} = \frac{4,83 - 5,17}{4,83 + 5,17} \\ &= 0,034 \end{aligned}$$

باستخدام العلاقة (٢٧) يكون

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^3}$$

ولحساب ذلك نكوّن جدول الحل التالي:

الفئات	س	ك	كس	س - س̄	(س - س̄)²	ك (س - س̄)²	ك (س - س̄)³
٢٩-٢٥	٢٧	٥	١٣٥	١٢,٩-	١٦٦,٤١	٨٣٢,٠٥	١٠٧٣٣,٤٥-
٣٤-٣٠	٣٢	٨	٢٥٦	٧,٩-	٦٢,٤١	٤٩٩,٢٨	٣٩٤٤,٣١-
٣٩-٣٥	٣٧	١٠	٣٧٠	٢,٩-	٨,٤١	٨٤,١٠	٢٤٣,٨٩-
٤٤-٤٠	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	٥٧,٣٣	١٢٠,٣٩
٤٩-٤٥	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٤٠٣,٢٨	٢٨٦٣,٢٩
٥٤-٥٠	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٨٧٨,٤٦	١٠٦٢٩,٣٧
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٢٧٥٤,٥٠	١٣٠٨,٦-

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع كس}}{\text{ن}} = \frac{١٩٩٥}{٥٠} = ٣٩,٩٠ \text{ ريالاً}$$

$$\text{التباين} = \frac{\text{مجموع ك (س - س̄)²}}{\text{ن - ١}} = \frac{٢٧٥٤,٥٠}{٤٩} = ٥٦,٢١$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{٥٦,٢١} = ٧,٥ \text{ ريالاً}$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{\text{مجموع ك (س - س̄)³}}{\text{ن}} = \frac{١٣٠٨,٦-}{٥٠}$$

$$= ٢٦,١٧-$$

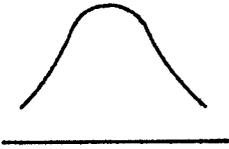
$$\text{معامل الالتواء} = \frac{٢٦,١٧-}{\frac{٢٦,١٧-}{(٧,٥)³}} = \frac{٢٦,١٧-}{٤٢١,٨٨}$$

$$= ٠,٠٦٢-$$

ويلاحظ من حساب معامل الالتواء بالطرق الثلاث السابقة أن الالتواء سالب، أي جهة اليسار وأنه التواء بسيط، وذلك لقرب قيمته من الصفر.

(٤-٧-٣) التفلطح

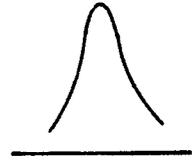
سبق لنا دراسة طرق عرض التوزيعات التكرارية بيانياً، ورسم المنحنيات التكرارية لها، ومعرفة المنحنيات المتماثلة وغير المتماثلة (أي المتلوية) وقياس معامل الالتواء لها. والآن سوف نتناول كيفية مقدار التفلطح لهذه المنحنيات التكرارية، وطريقة قياسه بالنسبة للمنحنى المتماثل الذي يسمى المنحنى الطبيعي، التفلطح يقيس مقدار التدبب لقمة هذه المنحنيات ارتفاعاً أو انخفاضاً بالنسبة لقمة التوزيع الطبيعي الذي يسمى متوسط التفلطح. فيما يلي بعض أشكال توضح من خلالها أنواع التفلطح المختلفة.



شكل (ج) متوسط التفلطح



شكل (ب) مفطح



شكل (أ) مدبب

شكل (٤-٣): بعض أشكال التفلطح

ونلاحظ ما يلي :

- شكل (أ) : له قمة عالية نسبياً ويسمى منحنى مدبب.
 شكل (ب) : له قمة مسطحة ويسمى منحنى مفطح.
 شكل (ج) : له قمة ليست مدببة ولا مفطحة ويسمى منحنى متوسط التفلطح (أو المنحنى الطبيعي) ومعامل تفلطحه يساوي ثلاثة.
 ولقياس معامل التفلطح تستخدم إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى

معامل التفلطح بدلالة العزوم وهو يساوي خارج قسمة العزم الرابع المركزي على الانحراف المعياري مرفوعاً للقوى ٤ أي أن :

$$\text{معامل التفلطح العزمي} = \frac{\text{العزم الرابع المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^4} \quad \dots \dots \dots (٢٨)$$

الطريقة الثانية

معامل التفلطح باستخدام الربيعات والمئينات ويعرف كالتالي:

$$\text{معامل التفلطح} = \frac{r_3 - r_1}{(r_2 - r_0)^2} \dots \dots \dots (29)$$

حيث إن:

$$r_3 = \text{الربيع الأعلى}$$

$$r_1 = \text{الربيع الأدنى}$$

$$r_2 = \text{المئين التسعين}$$

$$r_0 = \text{المئين العاشر}$$

ونوضح كلا من الطريقتين بالمثال التالي.

مثال (١٦)

احسب معامل التفلطح باستخدام الطريقتين السابقتين لأجور العمال في مثال

(٣) السابق.

بطريقة العزوم نكوّن جدول الحل التالي:

الفئات	س	ك	ك س	س - س	(س - س) ^٢	(س - س) ^٣	ك (س - س) ^٤
٢٩ - ٢٥	٢٧	٥	١٣٥	١٢,٩ -	١٦٦,٤١	٢٧٦٩٢,٢٩	١٣٨٤٦١,٤٥
٣٤ - ٣٠	٣٢	٨	٢٥٦	٧,٩ -	٦٢,٤١	٣٨٩٥,٠١	٣١١٦٠,٠٨
٣٩ - ٣٥	٣٧	١٠	٣٧٠	٢,٩ -	٨,٤١	٧٠,٧٣	٧٠٧,٢٠
٤٤ - ٤٠	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	١٩,٤٥	٢٥٢,٨٥
٤٩ - ٤٥	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٢٥٤١,١٧	٢٠٠٣٢٩,٣٦
٥٤ - ٥٠	٥٣	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٢١٤٣٥,٨٩	١٢٨٦١٥,٣٤
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٥٥٦٥٤,٥٣	٣١٩٥٢٦,٣٨

سبق حساب $\bar{س} = ٣٩,٩٠$ ، والانحراف المعياري نحر = $٧,٥٠$

ومن الجدول يكون العزم الرابع المركزي = $\frac{\text{مجمك (س - \bar{س})}}{ن}$

$$٦٣٩٠,٥٣ = \frac{٣١٩٥٢٦,٣٨}{٥٠} =$$

$$\frac{٦٣٩٠,٥٣}{٣١٦٤,٠٦} = \frac{\text{العزم الرابع المركزي}}{\text{(الانحراف المعياري)}} = \text{معامل التفلطح}$$

$$= ٢,٠٢ \text{ أي أن المنحنى مفلطح}$$

بطريقة الربيعات والمئينات:

سبق أن حسبنا الربيع الأعلى والأدنى $ر_٤$ ، $ر_١$ في مثال (٦) السابق فكانت

$$ر_٤ = ٤٥,٤٤ \text{ ، } ر_١ = ٣٥,٤٤$$

ولحساب $ر_١٠$ ، $ر_١٠٠$ نعيد كتابة الجدول المتجمع الصاعد كالتالي:

الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤,٥	صفر
أقل من ٢٩,٥	٥
أقل من ٣٤,٥	١٣
أقل من ٣٩,٥	٢٣
أقل من ٤٤,٥	٣٦
أقل من ٤٩,٥	٤٤ ك
أقل من ٥٤,٥	٥٠ ك

$$\text{رتبة } ر_١٠٠ = \frac{ن \times ١٠}{١٠٠}$$

$$٥ = \frac{٥٠ \times ١٠}{١٠٠} =$$

تكون م.١٠ = ٢٩,٥ ريالاً (من الجدول مباشرة)

$$\frac{ن \times ٩٠}{١٠٠} = \text{رتبة م.٩٠}$$

$$٤٥ = \frac{٥٠ \times ٩٠}{١٠٠} =$$

نضع خطاً أفقياً بين التكرارين المتجمعين ٤٤، ٥٠، ونحسب قيمة م.٩٠ من العلاقة الآتية:

$$\therefore \text{م.٩٠} = ١ + \frac{٩٠ - \frac{ن}{١٠٠} \cdot ك}{\frac{ك}{١} - \frac{ك}{٣}} \times ل$$

حيث إن ١ = ٤٩,٥، $\frac{ك}{١} = ٤٤$ ، $\frac{ك}{٣} = ٥٠$ ، ل = ٥

$$\therefore \text{م.٩٠} = ٤٩,٥ + \frac{٤٤ - ٤٥}{٤٤ - ٥٠} \times ٥$$

$$٥٠,٣٣ = \frac{٥}{٦} + ٤٩,٥ =$$

$$\text{معامل التفلطح} = \frac{٣ - \frac{٣}{١٠٠}}{(\frac{٣}{١٠٠} - \frac{٣}{١٠٠})^2}$$

$$٢٥,٢٥ \text{ أي المنحنى مفلطح} = \frac{٣٥,٤٤ - ٤٥,٤٤}{(٢٩,٥ - ٥٠,٣٢)^2}$$

(٤ - ٨) تمارين

١ - فيما يلي أعمار مجموعة من طلاب جامعة الملك سعود

٢٠، ٢٢، ٢٥، ٢١، ١٩، ٢٠، ٢٦، ٢٧، ٢٠، ٢١

(١) احسب المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري لأعمار الطلاب.

(ب) أوجد المقاييس المطلوب حسابها في الفقرة السابقة (أ) بعد أربع سنوات على نفس الأشخاص بفرض بقائهم على قيد الحياة .
 ٢ - عند دراسة تصنيف مقادير مشتريات الطلاب في إحدى محلات (مراكز) بيع الأدوات الكتابية بإحدى الكليات لعينة من الطلاب مكونة من ١٠٠ طالب كانت كالتالي :

جدول التوزيع التكراري لمشتريات الطلاب

المبيعات لأقرب ريال	٢-١	٤-٣	٦-٥	٨-٧	١٠-٩
عدد الطلاب	٢٠	٤٠	٢٥	١٠	٥

أوجد المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المعياري للمبيعات .
 ٣ - عند دراسة استهلاك مجموعة مكونة من ٨٠ سيارة من سيارات جامعة الملك سعود لكل جالون من البنزين كانت كالتالي :

جدول التوزيع التكراري لإستهلاك البنزين

لمجموعة من سيارات جامعة الملك سعود

عدد السيارات	عدد الأميال لكل جالون
٨	١٧-١٦
٢٢	١٩-١٨
٣٠	٢١-٢٠
١٢	٢٣-٢٢
٨	٢٥-٢٤
٨٠	المجموع

احسب الانحراف المعياري لعدد الأميال لكل جالون .
٤ - البيانات التالية تمثل الأجر اليومي لعينة مكونة من ١٠٠ عامل من عمال عاديين في إحدى المؤسسات الصناعية :

جدول التوزيع التكراري للأجر اليومي لمجموعة من العمال

عدد العمال	الأجر اليومي بالريال
١٤	أقل من ٣٥
٢٧	٣٧-٣٥
٣٠	٤٠-٣٨
٢٠	٤٣-٤١
٩	أكبر من ٤٣
١٠٠	المجموع

احسب تشتت الأجور باستخدام مقياس مناسب .
٥ - الجدول التالي يمثل درجات عينتين من طلاب قسم الاجتماع في كلية الآداب
جدول التوزيع التكراري للدرجات لعتين من طلاب قسم الاجتماع

فئات الدرجات	٤٩-٤٠	٥٩-٥٠	٦٩-٦٠	٧٩-٧٠	٨٩-٨٠	٩٩-٩٠
درجات المجموعة الأولى	٥	٩	١٤	١٢	١٠	-
درجات المجموعة الثانية	٤	١٢	١٦	١١	٥	٢

أي المجموعتين أكثر تشتتاً؟
٦ - فيما يلي أعمار عينتين من طلاب الصف الثاني في مدرستين مختلفتين مقربة لأقرب سنة

المدرسة الأولى: ٦، ٧، ٦، ٧، ٧، ٧، ٧، ٧، ٨، ٨، ٧، ٦، ٧

المدرسة الثانية: ٧، ٨، ٨، ٨، ٩، ٩، ١٠، ٩، ٦، ٦، ٨، ٧، ٨

أوجد في أي المدرستين تكون أعمار الطلاب أكثر تشتتاً.
٧ - الجدول التالي يمثل توزيع ١٠٠ أسرة حسب عدد الأفراد

جدول التوزيع التكراري لأعداد أفراد مجموعة من الأسر

عدد الأفراد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
عدد الأسر	٣	٥	١٤	٢٢	٢٥	١٦	٩	٦	١٠٠

احسب الانحراف المعياري لعدد أفراد الأسر.
٨ - الجدول التالي يبين عدد المواليد المتوًى خلال سنة في إحدى المدن طبقاً لعمر الأم.

جدول التوزيع التكراري لأعمار الأمهات حسب أعداد المواليد المتوًى

عمر الأم	٢٤-٢٠	٢٩-٢٥	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	٤٤-٤٠
عدد المواليد	٦	١٠	١٢	٨	٤٠

أوجد الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف.

٩ - الجدول التالي يبين توزيع عدد الشقق حسب الإيجار السنوي في أحد الأحياء بمدينة ما.

جدول التوزيع التكراري لإيجارات مجموعة من الشقق

الإيجار بآلاف الريالات	٨-٦	١١-٩	١٤-١٢	١٧-١٥	٢٠-١٨	٢٣-٢١
عدد الشقق	٤	١١	١٥	٢٤	١٠	٦

احسب الانحراف المعياري لإيجار الشقق.
١٠ - الجدول التالي يمثل توزيع الإنفاق الشهري لعدد من الأسر غير السعودية في إحدى المدن.

جدول التوزيع التكراري للإنفاق الشهري لمجموعة من الأسر

٢٥-٢٣	٢٢-٢٠	١٩-١٧	١٦-١٤	١٣-١١	١٠-٨	الإنفاق بمئات الريالات
٧	١٠	٢٥	١٧	١٨	٣	عدد الأسر

احسب المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط والمعياري ومعامل الاختلاف للإنفاق.

- ١١- في دراسة عن أطوال وأوزان مجموعة من الطلاب كانت النتائج كما يلي:
 الأطوال : مج س = ٣٤٠٠ ، مج س^٢ = ٥٧٨٤٨٠
 والجدول التكراري للأوزان هو:

٨٤-٨٠	٧٩-٧٥	٧٤-٧٠	٦٩-٦٥	٦٤-٦٠	فئات الوزن
١	٤	٩	٤	٢	التكرار

قارن بين تشتت الأطوال والأوزان.

- ١٢- بإضافة ٤ إلى كل رقم في مجموعة البيانات:

٦ ، ٧ ، ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦

نحصل على مجموعة البيانات التالية:

١٠ ، ١١ ، ٦ ، ٩ ، ٨ ، ١٠

أ) بين أن للمجموعتين نفس الانحراف المعياري ووسطين مختلفين مع بيان العلاقة بين الوسطين؟

ب) بضرب المجموعة الأولى في ٢ ثم إضافة ٤ نحصل على مجموعة البيانات التالية:

١٦ ، ١٨ ، ٨ ، ١٤ ، ١٢ ، ١٦

ما هي العلاقة بين الانحرافات المعيارية والأوساط لمجموعتي البيانات الأولى والأخيرة.

١٣- في دراسة عن أحد النباتات التي لها نفس العمر كانت أطوالها كما في الجدول التالي:

جدول التوزيع التكراري لأطوال مجموعة النباتات لها نفس العمر

فئات الطول	٢٤-٢٠	٢٩-٢٥	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	٤٤-٤٠
التكرار	١٤	٥٢	٥٠	٣٦	٨

- (أ) احسب الالتواء لهذه النباتات باستخدام ثلاثة مقياس .
 (ب) قارن بين النتائج من حيث وصفها للتوزيع .
 (ج) اذكر مزايا وعيوب كل مقياس ثم احسب مقياسا لتفليطح هذا التوزيع .