الفصل السابع

السلاسل الزمنية

(٧ ـ ١) مقدمـــة

من الملاحظ أن كثيرًا من الظواهر ذات علاقة بالزمن، وتسجل مشاهداتها على فترات زمنية محددة، وغالبًا ما تكون هذه الفترات الزمنية متساوية. قد تكون الفترات المقيدة: سنوية، أو نصف سنوية، أو ربع سنوية، أو شهرية، أو أسبوعية، أو يومية، أو كل ساعة. . . الخ. والأمثلة على ذلك كثيرة، الصادرات والواردات على مدار عدد من السنوات، أرقام التعداد للسكان التي تجري كل عشر سنوات في معظم الدول، الإنتاج السنوي للبترول في دول الأويك على مدار عدة سنوات، أو أسعار الصادرات أو العائدات البترولية لدولة ما، استهلاك الكهرباء على مدار عدة شهور (قد يكون فصلًا في الشتاء مثلًا) مجموع المبيعات الشهرية لإحدى المؤسسات التجارية، درجات الحرارة المعلن عنها يوميا بواسطة مصلحة الأرصاد الجوية في مدينة أو منطقة ما وهكذا. وعادة ما تسمى القراءات لقيم الظواهر السابقة أو غيرها من الظواهر المرتبطة بالزمن السلاسل الزمنية.

(٧ ـ ١ ـ ١) تعريف السلسلة الزمنية

هي مجموعة من القراءات أخذت لقيم ظاهرة ما في فترات زمنية محددة وعادة ما تكون فترات زمنية متساوية (سنة ـ شهر ـ يوم ـ ساعة. . .) ورياضيا يمكن أن نرمز لقيم الظاهرة «ص» محل الدراسة أي السلسلة الزمنية بالقيم $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، . . . ، $ص_{ن}$
حيث إن هذه القيم مأخوذة عند الأزمنة التالية على الترتيب

$$ر_{١} ، ر_{٢} ، . . . . ، ر_{ن}$$

أي أن المتغير «ص» لقيم الظاهرة محل الدراسة دالة في الزمن ر ويعبر عن ذلك رياضيا بالعلاقة التالية:

ص = د (ر)

حيث إنَّ ر المتغير المستقل، ص المتغير التابع. ومن الأغراض الأساسية لدراسة السلاسل الزمنية لظاهرة ما هو تقدير قيمة هذه الظاهرة في المستقبل استنادا إلى دراسة التطور التاريخي لها. وكذلك تحديد وفصل العوامل المؤثرة على السلسة الزمنية لهذه الظاهرة، ونأخذ المثال التالي لتوضيح قيم السلسلة الزمنية.

مثال (١)

الجدول التالي يمثل كمية الواردات عن طريق البر للمملكة العربية السعودية في الفترة من سنة ١٩٧٨م إلى سنة ١٩٨٣م بالكيلوجرام.

جدول (٧ ـ ١): كميات الواردات بالبر للمملكة العربية السعودية في الأعوام من ١٩٧٨ وحتى ١٩٨٣م

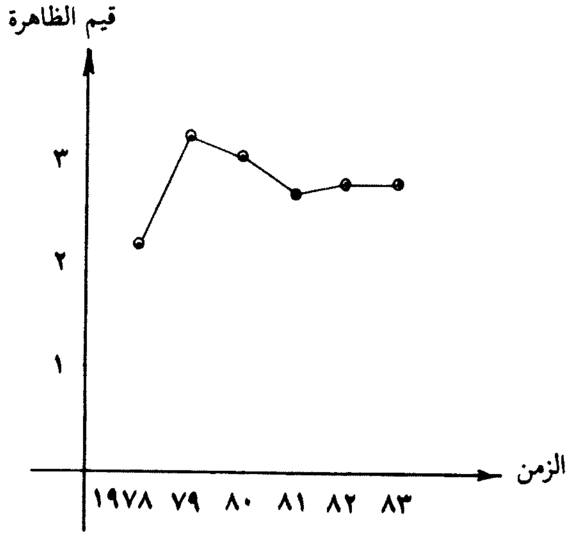
السنة (ر)	١٩٧٨م	١٩٧٩م	١٩٨٠م	١٩٨١م	١٩٨٢م	١٩٨٣م
الكمية بملايين الكجم (ص)	٢,١٨٢	٣,٢٠٧	٣,٠٧٨	٢,٦٣٤	٢,٦٧٦	٢,٧٤٩

المصدر:

التجارة الخارجية ـ مصلحة الإحصاءات العامة ـ وزارة المالية والاقتصاد الوطني.

(٧ ـ ١ ـ ٢) التمثيل البياني للسلسلة الزمنية

تمثل السلسلة الزمنية بحيث تكون قيم الزمن (ن) على المحور الأفقي، وقيم الظاهرة (ص) محل الدراسة على المحور الرأسي، وبعد تحديد أو رسم النقاط نصلها بمنحنى باليد فنحصل على ما يسمى المنحنى التاريخي للظاهرة، كما هو موضح بالشكل التالي:



شكل (٧ ـ ١): السلسلة الزمنية لكمية الواردات للمملكة العربية السعودية بالبر

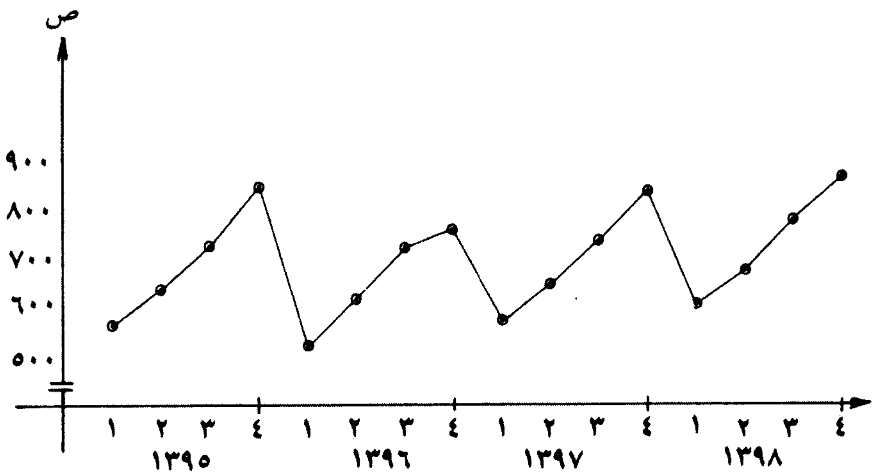
مثـــال (٢)

الجدول التالي يوضح مبيعات إحدى المؤسسات التجارية بآلاف الريالات خلال السنوات من ١٣٩٥هـ إلى ١٣٩٨هـ في فترات زمنية ربع سنوية كالتالي:

جدول (٧ ـ ٢): قيمة المبيعات الربع سنوية لإحدى المؤسسات في أربعة أعوام

السنوات	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع	المجمـوع
١٣٩٥	٥٦٢	٥٢٤	٥٧١	٦٠٣	٢٢٦٠
١٣٩٦	٦٣٣	٦٠٨	٦٤٥	٦٧٣	٢٥٥٩
١٣٩٧	٧١٨	٧١٥	٧٣٠	٧٧٠	٢٩٣٣
١٣٩٨	٨٢٦	٧٥٥	٨٣١	٨٦٢	٣٢٧٤

من الجدول السابق يكون المنحنى التاريخي لظاهرة المبيعات (ص) كالتالي:



شكل (٧ ـ ٢): السلسلة الزمنية ربع السنوية لمبيعات إحدى المؤسسات

ملاحظـة:

عند تدريج المحور الرأسي بدأ بالرقم ٥٠٠ حتى تتضح التغيرات التي تطرأ على الظاهرة في المنحنى التاريخي السابق.

(٧ ـ ٢) مركبات السلسلة الزمنية

يمكن ملاحظة أن السلاسل الزمنية عرضة للتأثر بكل أو بعض المركبات التالية (وذلك من دراسة عدد كبير من السلاسل الزمنية) وهي:

ا) مركبة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

ب) مركبة التغيرات الموسمية للسلسلة الزمنية.

جـ) مركبة التغيرات الدورية للسلسلة الزمنية.

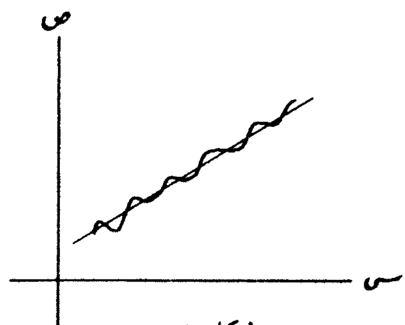
د) مركبة التغيرات العرضية (الفجائية) للسلسلة الزمنية.

وسوف نتناول بالشرح والتفصيل كل مركبة على حدة.

(٧ ـ ٢ ـ ١) مركبة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

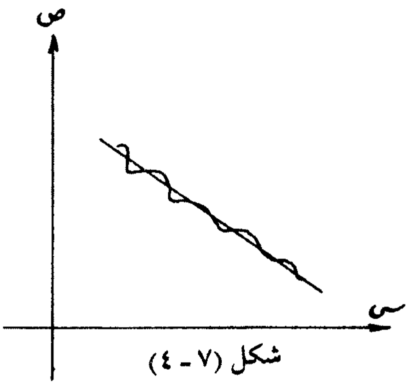
والمقصود بالاتجاه العام هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة الزمنية لظاهرة ما تكون هي محل الدراسة، وذلك خلال فترة طويلة من الزمن. فيمكن تحديد الحركة العامة

للسلسلة الزمنية سواءا كانت لنمو مستمر مثل عدد السكان في بلد ما، عدد الطلاب في جامعة الملك سعود... أو انكماش أو نقص مستمر مثل عدد الأميين في دولة ما، نسبة البطالة في قطر ما أو تعاقب في حركة السلسلة من نمو في فترة زمنية وانكماش في فترة أخرى... يأخذ الاتجاه العام للسلسلة بعض الأشكال التالية



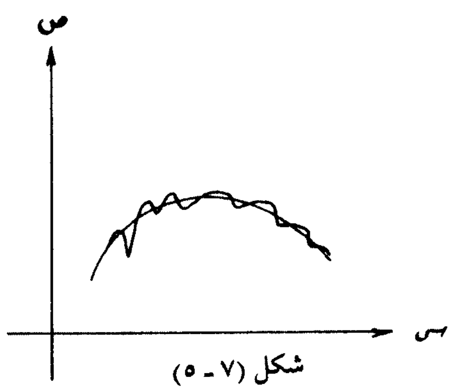
شكل (٧ ـ ٣)

الاتجاه العام في نمو مستمر



شكل (٧ ـ ٤)

الاتجاه العام في انكماش مستمر



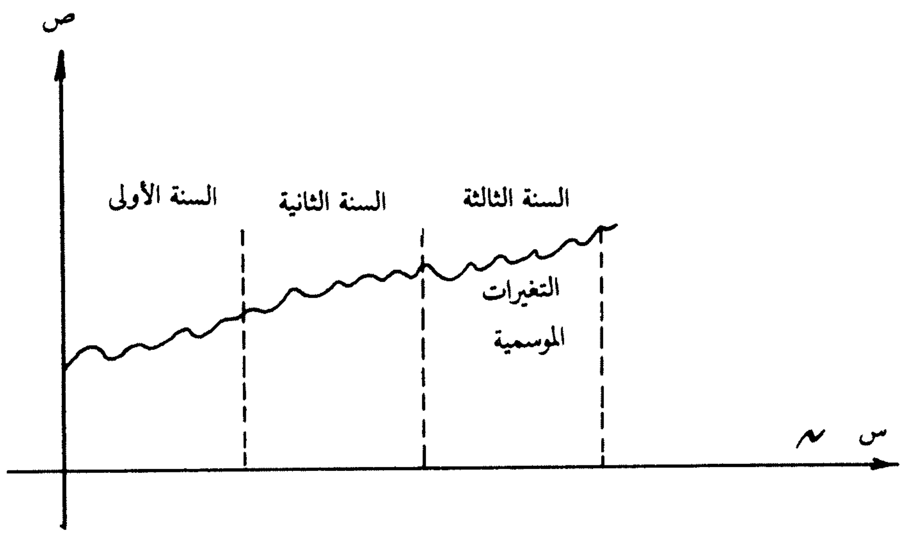
شكل (٧ ـ ٥)

الاتجاه العام في نمو وانكماش

(٧ ـ ٢ ـ ٢) مركبة التغيرات الموسمية للسلسلة الزمنية

التغيرات الموسمية تحدث للظاهرة محل الدراسة في أوضاع متماثلة لحركة السلسلة الزمنية وذلك خلال فترات متقابلة لعدة سنوات متتالية (الفترات الزمنية قد تكون ربع سنوية أو شهرية أو... وذلك حسب طبيعة الظاهرة محل الدراسة). والأمثلة على

ذلك كثيرة، منها على سبيل المثال مبيعات المشروبات الغازية تزداد في الصيف وتقل في الشتاء من كل عام، وكذلك زيادة المبيعات في موسم الحج من كل عام، وزيادة حركة المواصلات في فترتي الصباح والظهيرة من كل يوم بإحدى المدن وهكذا. . . وتوضح بالشكل التالي.

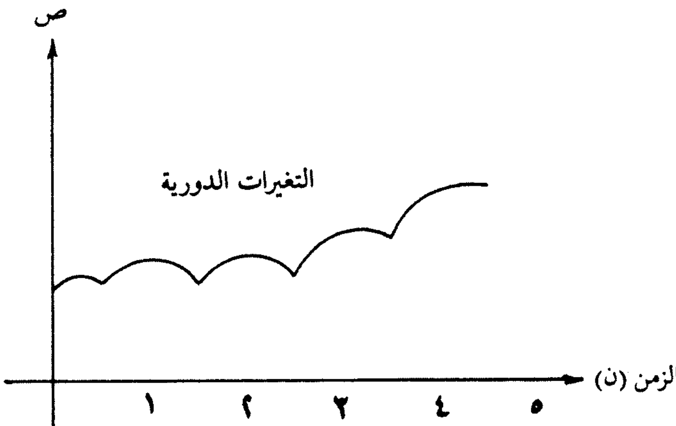


شكل (٧ ـ ٦): التغيرات الموسمية في السلسلة الزمنية

الشكل السابق يوضح الذبذبات داخل كل سنة وهي عبارة عن التغيرات الناتجة من مركبة التغيرات الموسمية للسلسلة الزمنية.

(٧ ـ ٢ ـ ٣) مركبة التغيرات الدورية للسلسلة الزمنية

وهي تغيرات تحدث للسلسلة الزمنية على فترات طويلة المدى وعادة ما تكون أكثر من سنة، وقد تكون أولاً على فترات زمنية متساوية. ومن الأمثلة المهمة للتغيرات الدورية ما يسمى دورات الأعمال في النظام الرأسمالي، التي تمثل فترات الرخاء الاقتصادي، وفترات الركود الاقتصادي، وفترات الكساد، ثم الانفراج من الأزمة الاقتصادية. . . ويمكن تمثيل التغيرات الدورية بيانيا كما يلي:



شكل (٧ ـ ٧) التغيرات الدورية في السلسلة الزمنية

نلاحظ أن الـذبـذبات في المنحنى على فترات أطول من سنة وتمثل التغيرات الدورية في السلسة الزمنية.

(٧ ـ ٢ ـ ٤) مركبة التغيرات العرضية (الفجائية) للسلسلة الزمنية

وهي تلك التغـيرات التي تحدث نتيجـة حدوث تغيرات فجائية مثل الزلازل والفياضانات والحروب التي تؤثر تأثيرا كبيرا على المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية. ولا يمكن التنبؤ عادة بهذه المتغيرات العرضية، لأنها لا تستمر طويلا مقارنة بطول السلسلة الـزمنية، ويطلق عليها أحيانا التغيرات قصيرة المدى... ويمكن توضيح التغيرات العرضية (الفجائية) في المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية بالشكل البياني التالي:

شكل (٧ ـ ٨): التغيرات الفجائية في السلسلة الزمنية

(٧ ـ ٣) تحليل السلاسل الزمنية

الغـرض من تحليل السلسلة الزمنية هو التعرف على مركبات السلسلة الزمنية (الاتجاه العام ـ التغيرات الموسمية ـ التغيرات الدورية ـ التغيرات الفجائية) منفصلة عن بعضها.

ويستخدم الإحصائيون عادة نموذجين للسلاسل الزمنية، هما نموذج حاصل الضرب، ونموذج حاصل الجمع للسلسلة الزمنية. وذلك بدلالة المركبات التي تؤثر فيها. فإذا رمزنا لقيمة الظاهرة بالرمز ص عند زمن معين فإن نموذج حاصل الضرب يكون كالتالي:

ص = ع × س × د × ج ...... (١)

حيث إن

ع هي مقدار مركبة الاتجاه العام.
س هي مقدار مركبة التغيرات الموسمية.
د هي مقدار مركبة التغيرات الدورية.
ج هي مقدار مركبة التغيرات الفجائية.

ونموذج حاصل الجمع يكون الشكل التالي:

ص = ع + س + د + ج

ويمكن استخدام كل من النموذجين السابقين في تحليل السلاسل الزمنية واتجاه مركباتها الأربع السابقة إن وجدت أو بعضها، وسوف نكتفي في هذا المستوى بدراسة مركبة الاتجاه العام.

(٧ ـ ٣ ـ ١) تقدير مركبة الاتجاه العام (ع)

تعتبر مركبة الاتجاه العام من أهم المركبات التي تتكون منها السلسلة الزمنية، وذلك لأنها تستخدم في عمليات التنبؤ بقيم الظاهرة للفترات الزمنية المستقبلية. ويمكن تقدير مركبة الاتجاه العام بعدة طرق نذكر منها: طريقة التمهيد باليد، وطريقة الأوساط المتحركة للتخلص من الذبذبات الموسمية، حتى يظهر بوضوح الاتجاه العام للظاهرة

محل الدراسة. كما يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى. وسنعرض لكل من هذه بالشرح والتفصيل والأمثلة فيما يلي:

طريقة التمهيد باليد

تستخدم هذه الطريقة التمهيد باليد للحصول على خط مستقيم مناسب، أو منحنى مناسب من المنحنى البياني الذي يسمى بالمنحنى التاريخي للظاهرة، وذلك للحصول على الاتجاه العام. وتعتبر طريقة التمهيد باليد غير دقيقة لأنها تعتمد على تقدير الشخص في التمهيد لخط الاتجاه العام، وهذا يختلف من شخص إلى آخر.

طريقة الأوساط المتحركة

وتستخدم هذه الطريقة للحصول على سلسلة مرنة أو ملساء أكثر من السلسلة الأصلية، وذلك بعد التخلص من ذبذبات التغيرات الموسمية، وبعدها يتضح شكل الاتجاه العام. وسنتناول فيما يلي شرح طريقة الأوساط المتحركة.

إذا كانت لدينا مجموعة من القيم للظاهرة (ص) في فترات زمنية متتالية عددها ن هي $ص_١$، $ص_٢$، . . . . ، $ص_ن$

فإن الأوساط المتحركة لكل فترتين زمنيتين هي:

$$\frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ص_٢ + ص_٣}{٢} ، \ldots\ldots ، \frac{ص_{ن-١} + ص_ن}{٢}$$

وعددها (ن − ١) وسط أو قراءة جديدة.

والأوساط المتحركة لكل ثلاث فترات زمنية هي:

$$\frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} ، \frac{ص_٢ + ص_٣ + ص_٤}{٣} ، \ldots\ldots ، \frac{ص_{ن-٢} + ص_{ن-١} + ص_ن}{٣}$$

وعددها (ن − ٢) وسط أو قراءة جديدة، وهكذا. . .

ولدراسة الاتجاه العام للظاهرة محل الدراسة تستخدم قيم الأوساط المتحركة في جدول القيم الأصلية. مثلاً في حالة حساب هذه الأوساط المتحركة لعدد فردي من الفترات الزمنية، نضع قيمة الوسط المتحرك أمام القراءة الوسيطية لهذا العدد من القيم، كما هو موضح في الجدول التالي حيث كانت الأوساط المتحركة لكل ثلاث فترات زمنية.

الفترات الزمنية	قيم الظاهرة	الأوساط المتحركة لثلاث فترات زمنية
الفترة الأولى	$ص_1$	ــــ
الفترة الثانية	$ص_2$	$\frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3}$
الفترة الثالثة	$ص_3$	$\frac{ص_2 + ص_3 + ص_4}{3}$
الفترة الرابعة	$ص_4$	$\frac{ص_3 + ص_4 + ص_5}{3}$
الفترة الخامسة	$ص_5$	$\frac{ص_4 + ص_5 + ص_6}{3}$
الفترة السادسة	$ص_6$	$\frac{ص_5 + ص_6 + ص_7}{3}$
الفترة السابعة	$ص_7$	ــــ

أما الأوساط المتحركة في حالة كون عدد الفترات الزمنية زوجيًا فإننا نضع قيم الأوساط المتحركة في الجدول أمام قيمتي الظاهرة الممثلتين للحدين الأوسطين، أي في منتصف المسافة بينهما ثم بعد ذلك يحسب من الأوساط المتحركة ما يسمى الأوساط المتحركة المركزية: وهي عبارة عن الوسط الحسابي لكل وسطين متحركين متتاليين من الأوساط المتحركة التي سبق حسابها، كما يتضح في الجدول التالي وذلك بأخذ الأوساط المتحركة لعدد قدره ٤ فترات زمنية.

الفترة الزمنية	قيم الظاهرة	الأوساط المتحركة	الأوساط المتحركة المركزية
الفترة الأولى	$\text{ص}_{١}$		—
الفترة الثانية	$\text{ص}_{٢}$		—
		$\frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢} + \text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٤}}{٤}$	
الفترة الثالثة	$\text{ص}_{٣}$		$\frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢} + \text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٤}}{٤} + \frac{\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٤} + \text{ص}_{٥}}{٤}\right)$
		$\frac{\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٤} + \text{ص}_{٥}}{٤}$	
الفترة الرابعة	$\text{ص}_{٤}$		$\frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ص}_{٢} + \ldots + \text{ص}_{٥}}{٤} + \frac{\text{ص}_{٣} + \ldots + \text{ص}_{٦}}{٤}\right)$
		$\frac{\text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٤} + \text{ص}_{٥} + \text{ص}_{٦}}{٤}$	
الفترة الخامسة	$\text{ص}_{٥}$		$\frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ص}_{٣} + \ldots + \text{ص}_{٦}}{٤} + \frac{\text{ص}_{٤} + \ldots + \text{ص}_{٧}}{٤}\right)$
		$\frac{\text{ص}_{٤} + \text{ص}_{٥} + \text{ص}_{٦} + \text{ص}_{٧}}{٤}$	
الفترة السادسة	$\text{ص}_{٦}$		—
الفترة السابعة	$\text{ص}_{٧}$		—

نوضح طريقة حساب الأوساط المتحركة في كل من الفترات الزمنية الفردية والزوجية بالمثال التالي.

مثال (٣)

أوجد قيم الأوساط المتحركة للبيانات الواردة في مثال (١)، وذلك للواردات عن طريق البر للمملكة العربية السعودية، وذلك في الفترات الزمنية التالية:

ا) ٣ سنوات متحركة

ب) ٤ سنوات متحركة

الحل

لسهولة الوصول للمطلوب (ا) نكوّن الجدول التالي:

السنوات	الكمية بملايين الكجم	المجموع المتحرك لثلاث سنوات	الأوساط المتحركة لثلاث سنوات
١٩٧٨	٢,١٨٢	—	
١٩٧٩	٣,٢٠٧	٢,١٨٢ + ٣,٢٠٧ + ٣,٠٧٨ = ٨,٤٦٧	$\frac{٨,٤٦٧}{٣}$ = ٢,٨٢٢
١٩٨٠	٣,٠٧٨	٣,٢٠٧ + ٣,٠٧٨ + ٢,٦٣٤ = ٨,٩١٩	$\frac{٨,٩١٩}{٣}$ = ٢,٩٧٣
١٩٨١	٢,٦٣٤	٣,٠٧٨ + ٢,٦٣٤ + ٢,٦٧٦ = ٨,٣٨٨	$\frac{٨,٣٨٨}{٣}$ = ٢,٧٩٦
١٩٨٢	٢,٦٧٦	٢,٦٣٤ + ٢,٦٧٦ + ٢,٧٤٩ = ٨,٠٥٩	$\frac{٨,٠٥٩}{٣}$ = ٢,٦٨٦
١٩٨٣	٢,٧٤٩	—	

من الجدول السابق نلاحظ أن قيم الأوساط المتحركة تأخذ شكلاً متقاربا. أكثر من القيم الأصلية للكميات وإذا ما رسم المنحنى التاريخي للأوساط المتحركة فإن المنحنى يكون أملس أو أكثر تجانسا من المنحنى التاريخي للقيم الأصلية.

ولسهولة الوصول للمطلوب (ب) في المثال السابق نكوّن الجدول التالي:

السنوات	الكمية بملايين الكجم	المجموع المتحرك لأربع سنوات	الأوساط المتحركة لأربع سنوات	المجموع المركزي	الوسط المتحرك المركزي
١٩٧٨	٢,١٨٢				
١٩٧٩	٣,٢٠٧				
		١١,١٠١	٢,٧٧٥		
١٩٨٠	٣,٠٧٨			٥,٦٧٤	٢,٨٣٧
		١١,٥٩٥	٢,٨٩٩		
١٩٨١	٢,٦٣٤			٥,٦٨٣	٢,٨٤٢
		١١,١٣٧	٢,٧٨٤		
١٩٨٢	٢,٦٧٦				
١٩٨٣	٢,٧٤٩				

طريقة المربعات الصغرى

لقد سبق أن استعرضنا كيفية إيجاد الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بواسطة التمهيد باليد للمنحنى التاريخي. وكذلك بواسطة استخدام الأوساط المتحركة. والآن سوف نبحث طريقة إيجاد الاتجاه العام في حالة مستقيم (أو منحنى) وذلك باستخدام طريقة المربعات الصغرى، وهي عبارة عن توفيق خط مستقيم (أو منحنى) بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات النقاط الواقعة على المنحنى التاريخي عن هذا الخط الممثل للاتجاه العام أصغر ما يمكن.

مثلاً في حالة تغير قيم الظاهرة بمعدَّل ثابت، فإن الاتجاه العام عبارة عن خط مستقيم، ويحدث ذلك في كثير من الظواهر في الحياة العملية، وتكون معادلة الخط المستقيم الذي يمثل الاتجاه العام هي:

ص = ا س + ب .... (٣)

حيث إنّ ص قيمة الاتجاه العام للظاهرة، س الفترة الزمنية، أ، ب مقداران ثابتان، وقد سبق دراسة خط الانحدار وبيّنا كيفية حساب أ، ب حيث كانت كالتالي:

$$ا = \frac{ن \text{ مج } س ص - \text{مج } س \text{ مج } ص}{ن \text{ مج } س^{٢} - (\text{مج } س)^{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots (٤)$$

$$ب = \bar{ص} - ا \bar{س}$$

مثـــال (٤)

أوجد معادلة خط الاتجاه العام للكميات المنتجة من البترول بملايين البراميل في الشهر الأول من كل عام كما هو موضح بالجدول، ثم أوجد تقدير كمية الانتاج للشهر الأول من عام ١٩٨٧م.

جدول (٧ ـ ٣): كميات المنتجة من البترول في الشهر الأول من كل عام في الأعوام من ١٩٧٤م حتى ١٩٨٤م بملايين البرامل

السنـة	الإنتاج بملايين البراميل	السنـة	الإنتاج بملايين البراميل
١٩٧٤م	٣٣	١٩٨٠م	٣٩
١٩٧٥م	٤١	١٩٨١م	٤٥
١٩٧٦م	٤٢	١٩٨٢م	٤٣
١٩٧٧م	٣٩	١٩٨٣م	٣٧
١٩٧٨م	٣٣	١٩٨٤م	٥٠
١٩٧٩م	٣٨		

عنـد حسـاب معـادلة خط الاتجاه العام فإننا نعطي للسنوات أرقام ١، ٢، ٣، . . . . وهكـذا بحيث تأخـذ السنة الأولى ١، والسنة الثانية ٢، . . . وهكذا، ولتسهيل الحسابات نوضح الحل بالجدول التالي:

س	ص	س ص	س٢
١	٣٣	٣٣	١
٢	٤١	٨٢	٤
٣	٤٢	١٢٢	٩
٤	٣٩	١٥٦	١٦
٥	٣٣	١٦٥	٢٥
٦	٣٨	٢٢٨	٣٦
٧	٣٩	٢٧٣	٤٩
٨	٤٥	٣٦٠	٦٤
٩	٤٣	٣٨٧	٨١
١٠	٣٧	٣٧٠	١٠٠
١١	٥٠	٥٥٠	١٢١
٦٦	٤٤٠	٢٧٢٦	٥٠٦

$$ا = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{١١ \times ٢٧٢٦ - ٦٦ \times ٤٤٠}{١١ \times ٥٠٦ - (٦٦)^{٢}}$$

$$= \frac{٩٤٦}{١٢١٠}$$

$$= ٠,٧٨$$

$$ب = \bar{\text{ص}} - ا\,\bar{\text{س}}$$

$$= \left(\frac{٤٤٠}{١١}\right) - ٠,٧٨ \left(\frac{٦٦}{١١}\right)$$

$$= ٤٠ - ٤,٦٨$$

$$= ٣٥,٣٢$$

فتكون معادلة خط الاتجاه العام هي :

ص = ٠,٧٨س + ٣٥,٣٢ .... (٥)

ولتقدير كمية الإنتاج (ص) في الشهر الأول من عام ١٩٨٧م أي عند س = ١٤ تكون

ص = ٠,٧٨ × (١٤) + ٣٥,٣٢

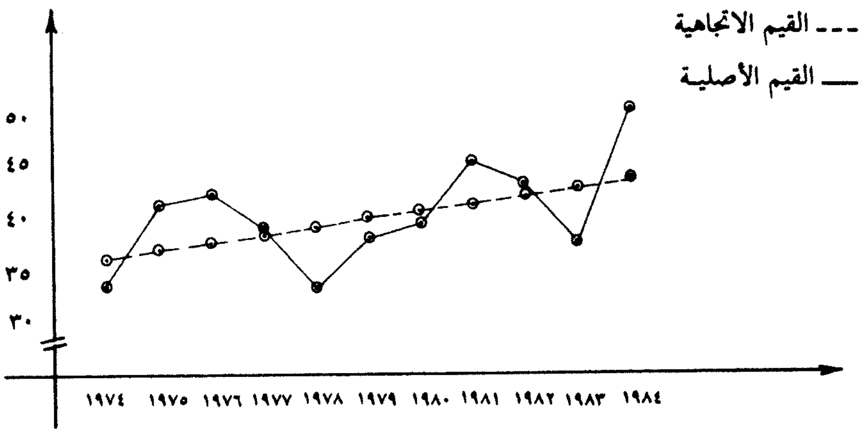
أي أن :

ص = ٤٦,٢٤ مليون برميل

ولإيجاد القيم الاتجاهية للظاهرة السابقة نعوض في المعادلة (٥) بقيم س السابقة وهي ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، فنحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة التي يمكن وضعها في الجدول التالي مع القيم الأصلية للظاهرة.

السنوات	قيم الظاهرة	القيم الاتجاهية
١٩٧٤	٣٣	٣٦,١
١٩٧٥	٤١	٣٦,٩
١٩٧٦	٤٢	٣٧,٧
١٩٧٧	٣٩	٣٨,٤
١٩٧٨	٣٣	٣٩,٢
١٩٧٩	٣٨	٤٠
١٩٨٠	٣٩	٤٠,٨
١٩٨١	٤٥	٤١,٦
١٩٨٢	٤٣	٤٢,٣
١٩٨٣	٣٧	٤٣,١
١٩٨٤	٥٠	٤٣,٩

ويمكن تمثيل القيم الاتجاهية بيانيا مع المنحنى التاريخي للظاهرة محل الدراسة كما يلي :



شكل (٧ ـ ٩): الاتجاه العام لسلسلة انتاج البترول الزمنية

وهناك بعض الظواهر لا يكون التغير فيها بمعدَّل ثابت كما سبقت دراسته، وفي هذه الحالة يكون الاتجاه العام غير خطي (أي منحني) وهناك صور كثيرة تعتمد على قيم مثل هذه الظواهر، وسوف نكتفي بدراسة الظاهرة التي تكون قيمها متغيرة بنسب ثابتة مثل نمو السكان، ونمو الحيوانات والأسماك والطيور والبكتيريا. أما في النواحي الاقتصادية مثل زيادة الإنتاج للشركات ومبيعات هذه الشركات وأرباحها فإن منحنى الاتجاه العام لمثل هذه الظواهر عادة ما يتبع المعادلة الأسية التي تكون صيغتها الرياضية كالتالي:

$$ص = ا^{س} \cdot ب \qquad \ldots\ldots\ldots (٦)$$

حيث إن أ ، ب ثابتان يتعينان بأخذ اللوغاريثم لطرفي المعادلة (٦) فنحصل على الصيغة التالية

$$لو ص = س\ لو ا + لو ب \qquad \ldots\ldots\ldots (٧)$$

ويمكن كتابة المعادلة (٧) في الصورة التالية

$$ص = ا س + ب \qquad \ldots\ldots\ldots (٨)$$

والمعادلة (٨) هي صورة معادلة الخط المستقيم (٣) حيث تكون

ص = لو ص، ا = لو ا، ب = لو ب

وباستخدام طريقة مربعات الانحرافات الصغرى للمعادلة (٨) نحصل على قيم ا، ب كالتالي:

$$ا = \frac{ن \text{ مج } س ص - \text{مج } س \text{ مج } ص}{ن \text{ مج } س^{٢} - (\text{مج } س)^{٢}}$$

$$ب = \bar{ص} - ا \bar{س}$$

ويأخذ الأعداد المقابلة للوغارتمات لو ا، لو ب نحصل على قيم ا، ب، ونعوض بهما في المعادلة (٦)، فنحصل على معادلة الاتجاه العام المطلوبة، ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثـــال (٥)

الجدول التالي يمثل عدد السكان بالملايين في دولة ما.

جدول (٧ ـ ٤): عدد السكان بالمليون في إحدى الدول للأعوام لكل عشر سنوات ١٩٠٠ ـ ١٩٧٠م

السنة (س)	١٩٠٠	١٩١٠	١٩٢٠	١٩٣٠	١٩٤٠	١٩٥٠	١٩٦٠	١٩٧٠
عدد السكان بالملايين (ص)	٩,٧	١١,٢	١٢,٨	١٤,٢	١٦,١	١٩,١	٢٥,٩	٣٠,٥

اوجد معادلة الاتجاه العام وتقدير عدد السكان لهذه الدولة في عام ٢٠٠٠م.

في حالـة نمو السكان يقدر الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستخدام النموذج الأسي الذي معادلته (٦) السابقة وتكون

$$ص = ب \cdot ا^{س}$$

أو

$$\bar{ص} = \bar{ا} س + \bar{ب}$$

حيث إن

$$\bar{ص} = لو ص \text{ ، } \bar{ا} = لو ا \text{ ، } \bar{ب} = لو ب$$

ولتبسيط طريقة الحساب نكون الجدول التالي :

السنوات (س)	اي س	ص	صَ = لو ص	س صَ	س^2
١٩٠٠	٠	٩,٧	٠,٩٨٧	٠	٠
١٩١٠	١	١١,٢	١,٠٤٩	١,٠٤٩	١
١٩٢٠	٢	١٢,٨	١,١٠٧	٢,٢١٤	٤
١٩٣٠	٣	١٤,٢	١,١٥٢	٣,٤٥٦	٩
١٩٤٠	٤	١٦,١	١,٢٠٧	٤,٨٢٨	١٦
١٩٥٠	٥	١٩,١	١,٢٨١	٦,٤٠٥	٢٥
١٩٦٠	٦	٢٥,٩	١,٤١٣	٨,٤٧٨	٣٦
١٩٧٠	٧	٣٠,٥	١,٤٨٤	١٠,٣٨٨	٤٩
المجموع	٢٨		٩,٦٨	٣٦,٨١٨	١٤٠

$$\text{ا} = \frac{\text{ن مج س صَ} - \text{مج س مج صَ}}{\text{ن مج س}^2 - (\text{مج س})^2}$$

$$= \frac{٨ \times ٣٦,٨١٨ - ٢٨ \times ٩,٦٨}{٨ \times ١٤٠ - (٢٨)^2}$$

$$= \frac{٢٩٤,٥٤٤ - ٢٧١,٠٤}{١١٢٠ - ٧٨٤}$$

$$= \frac{٢٣,٥٠٤}{٣٣٦}$$

$$\text{ا} = ٠,٠٦٩٩٥$$

أي أن :

$$\text{لو ا} = ٠,٠٦٩٩٥$$

ومن ذلك يمكن إيجاد قيمة أ باستخدام جدول معكوس اللوغاريثم

$$\text{ا} = ١,١٧٤٨$$

وحيث إنه يمكن حساب قيمة ب من العلاقة

$$ب = \bar{ص} - آ\bar{س}$$

$$= \frac{٩,٦٨}{٨} - ٠,٠٦٩٩٥ \times \frac{٢٨}{٨}$$

$$= ١,٢١ - ٠,٢٤٤٨$$

$$= ٠,٩٦٥٢$$

أي أن:

$$لو ب = ٠,٩٦٥٢$$

وباستخدام جدول معكوس اللوغاريثم فإن

$$ب = ٩,٢٢٩٩٦$$

ومن ذلك تكوّن علاقة النمو السكاني بدلالة الزمن هي.

$$ص = (١,١٧٤١)(٩,٢٢٩٩٦)^{س} \quad \ldots\ldots\ (١٠)$$

لتقدير عدد السكان سنة ٢٠٠٠م تكون س = ١٠

$$\hat{ص} = آ س + \hat{ب}$$

$$\hat{ص} = (٠,٠٦٩٩٥)(١٠) + ٠,٩٦٥٢$$

$$= ٠,٦٩٩٥ + ٠,٩٦٥٢$$

$$\hat{ص} = ١,٦٦٤٧$$

$$لو ص = ١,٦٦٤٧$$

ومن جدول الأعداد المقابلة للوغاريثمات نجد أن

ص = ٤٥,٠٥ مليون نسمة

وباستخدام معادلة الاتجاه العام (١٠) وبوضع قيم س = ٠، ١، ٢، ...... ، ٧ نحصل على القيم الاتجاهية لظاهرة نمو السكان، ويمكن رسم منحنى الاتجاه العام، ومنحنى التاريخي بيانيا كما سبق في مثال (٤).

(٧ ـ ٤) تمارين

١ ـ الجدول التالي يمثل عدد الحجاج (بالآلاف) الوافدين للمملكة العربية السعودية.

أعداد الحجاج للأعوام ١٣٩٦هـ ـ ١٤٠١هـ

السنوات	١٣٩٦	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠	١٤٠١
عددالحجاج	٧١٩	٧٣٩	٨٣٠	٨٦٣	٨١٣	٨٧٩

والمطلوب إيجاد ما يلي.

ا) رسم المنحنى التاريخي لعدد الحجاج.

ب) حساب الاتجاه العام على أساس متوسط متحرك فترته ثلاث سنوات.

جـ) حساب معادلة الاتجاه العام (نفترض أنه خط مستقيم).

د) تقدير عدد الحجاج عام ١٤٠٨هـ.

٢ ـ الجدول التالي يوضح تطور عدد العمال (بالمائة) في إحدى المؤسسات الصناعية.

تطور أعداد العمال في إحدى المؤسسات في الأعوام ١٣٩٦ ـ ١٤٠٣هـ

السنوات	١٣٩٦	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠	١٤٠١	١٤٠٢	١٤٠٣
عددالعمال	٦	٧	٨	١٠	١٢	١٣	١٤	١٥

ا) اوجد معادلة خط الاتجاه العام للبيانات السابقة.

ب) اوجد القيم الاتجاهية للظاهرة من معادلة خط الاتجاه العام.

جـ) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة، وكذلك القيم الاتجاهية للظاهرة.

٣ ـ الجدول التالي يوضح قيم الواردات من الدقيق إلى المملكة العربية السعودية خلال الفترة من عام ١٩٧٨ إلى عام ١٩٨٣م.

واردات المملكة العربية السعودية من الدقيق ١٩٧٨ - ١٩٨٣م

السنـوات	قيـم الـواردات
١٩٧٨	٤٥٢,٤٠٨
١٩٧٩	٦٠٧,٤٧٣
١٩٨٠	٧١٢,٢٦٢
١٩٨١	٣٠٠,٨٣٦
١٩٨٢	١٨٧,٣٢٣
١٩٨٣	١٩١,٨٠٦

المصدر: إحصاءات التجارة الخارجية بمصلحة الإحصاءات العامة.

ا) ارسم المنحنى التاريخي لقيم الواردات.

ب) احسب المتوسطات المتحركة لفترة ٣ سنوات.

جـ) اوجد معادلة الاتجاه العام.

د) اوجد قيم الاتجاه العام، وارسمها مع المنحنى التاريخي.

٤ - الجدول التالي يمثل النفقات لإحدى المؤسسات بآلاف الريالات.

إنفاق إحدى المؤسسات بآلاف الريالات للأعوام ١٣٩٠هـ - ١٤٠٠هـ

السنوات	١٣٩٠	١٣٩١	١٣٩٢	١٣٩٣	١٣٩٤	١٣٩٥	١٣٩٦	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠
الانفاق	١٠	١٢	١٣	١٥	١٦	١٧	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٥

ا) احسب المتوسطات المتحركة لفترة طولها ٣ سنوات ثم لفترة طولها ٤ سنوات، ثم أوجد المتوسطات المتحركة مركزيا بطول سنتين.

ب) اوجد معادلة الاتجاه العام.

جـ) احسب القيم الاتجاهية للظاهرة.

د) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة، وكذلك المتوسطات المتحركة والقيم الاتجاهية.

٥ ـ الجدول التالي يمثل عدد السكان (بالملايين) في الولايات المتحدة الأمريكية خلال الفترة من عام ١٩٠٠م إلى ١٩٦٠.

أعداد السكان في الولايات المتحدة الأمريكية بالملايين كل عشر سنوات في الأعوام ١٩٠٠م ـ ١٩٦٠م

السنوات	١٩٠٠	١٩١٠	١٩٢٠	١٩٣٠	١٩٤٠	١٩٥٠	١٩٦٠
عددالسكان	٧٦,٠	٩٢,٠	١٠٥,٧	١٢٢,٨	١٣١,٧	١٥١,١	١٧٩,٣

ا) اوجد معادلة الاتجاه العام (باستخدام النموذج الأسي).

ب) اوجد القيم الاتجاهية للظاهرة.

جـ) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة، وكذلك القيم الاتجاهية.

د) ما القيمة المتوقعة لعدد السكان عام ٢٠٠٠م.

٦ ـ الجدول التالي يبين أعداد الطلبة المتخرجين من إحدى الجامعات.

أعداد الخريجين في إحدى الجامعات في الأعوام ١٣٨٠/ ١٣٨١ ـ ١٤٠١/ ١٤٠٢هـ

العام الدراسي	٨٠/ ١٣٨١	٨١/ ١٣٨٢	٨٢/ ١٣٨٣	٨٣/ ١٣٨٤	٨٤/ ١٣٨٥	٨٥/ ١٣٨٦
عددالخريجين	٥٠	٧١	٦٠	١٣٠	٢٠١	١٧٠
العام الدراسي	٨٦/ ١٣٨٧	٨٧/ ١٣٨٨	٨٨/ ١٣٨٩	٨٩/ ١٣٩٠	٩٠/ ١٣٩١	٩١/ ١٣٩٢
عددالخريجين	٣٥٠	٢٥٦	٥٨١	٦٥١	٥١٢	٧١٧
العام الدراسي	٩٢/ ١٣٩٣	٩٣/ ١٣٩٤	٩٤/ ١٣٩٥	٩٥/ ١٣٩٦	٩٦/ ١٣٩٧	٩٧/ ١٣٩٨
عددالخريجين	٨٢٩	٨٠٤	١١٣٠	١٢٠٠	١٥٩٠	١٣٥٢
العام الدراسي	٩٨/ ١٣٩٩	٩٩/ ١٤٠٠	٤٠٠/ ١٤٠١	٤٠١/ ١٤٠٢		
عددالخريجين	١٥٦٠	١٧٣٣	١٩٠٠	٢١٠٠		

ا) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة.

ب) احسب الاتجاه العام للظاهرة على أساس متوسط متحرك فترته ٣ سنوات ثم ارسم خط الاتجاه العام .

جـ) ارسم خط الاتجاه العام على أساس متوسط متحرك فترته ٤ سنوات .

د) قارن بين خطي الاتجاه العام في الحالتين ب ، جـ.

٧ ـ الجدول التالي يمثل الواردات من القمح بآلاف الأطنان لإحدى البلدان .

واردات القمح بآلاف الأطنان لإحدى البلدان في الأعوام ١٩٦١-١٩٧٠م

السنة	١٩٦١	١٩٦٢	١٩٦٣	١٩٦٤	١٩٦٥	١٩٦٦	١٩٦٧	١٩٦٨	١٩٦٩	١٩٧٠
الواردات	١٨٩	١٤٦	١٥٢	١٧٢	٢١٠	١٧٨	١٦٥	١٧٦	١٩٢	١٦٠

ا) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة .

ب) احسب الاتجاه العام للظاهرة على أساس متوسط متحرك فترته سنتين .

جـ) ارسم خط الاتجاه العام .