الملاحق

الملحق الأول

مراجعة في بعض المعلومات الرياضية المفيدة

١ ـ حول خاصية التجانس في عملية الجمع

لكي نستطيع جمع كميتين أو مقدارين لابـد أن تكـون وحـدة القيـاس نفسهـا للمقـدارين وجمع 10سم و 5م غير ممكـن. ولـو ادعينـا جـدلاً أن المجمـوع الناتج 15 فلا يمكـن القول إن ال 15 هـذه هي 15 سم ولا 15م. إذا 15 مـاذا؟ في الواقع لا معنى للعـدد 15 في هـذه الحالـة. ولكن لو اتخذنـا وحدة قيـاس مشتركـة، وقلنا إن 500 سـم = 5م، أو 10 سـم=0.1م، فـالجمـع يصبح ممكنـا، والجواب هـو 500سم+10سم=510سم، أو 5م +0.1م = 5.1م. ولو سألت شخصا، ما مجموع 5 كتب و 7 أقلام؟ فأجاب 12، فإنه سيشعر بالعجز والخطأ عندما تطلب منه تحديد 12 ماذا؟ إذ لا يستطيع أن يقول 12 كتابا ولا 12 قلما. وسيعود يدرك أن 5 كتب و 7 أقلام هي 5 كتب و7 أقلام، ولا يمكن التعبير عنهما في رقم واحد.

وهذه الحقيقـة البسيطة هي خـاصة أسـاسية في الجمع بصرف النظـر عن طبيعة عمليـة الجمع. ففي الجبر لا نجمع إلا الحدود المتشـابهة. و $5x^2y$ مضافـا إليها $7x^2y$ يسـاوي $12x^2y$. تماما كأننا نقول 5 كتب و7 كتب تصبح 12 كتابا. ولكن $5x^2y$ مضافا إليها $7xy$ هي $5x^2y$ و $7xy$، تماما كأننـا نقول 5 كتب و 7 أقلام، ولا يمكـن جمعهما في حد واحـد، لأنهما غير متشـابهين. وكـذلك الأمـر، يمكـن جمع $F(0.5)$ و $3F(0.5)$

لنجد $4F(0.5)$، حيث $F(0.5)$ تعني قيمة دالة F عند النقطـــة 0.5. ويمكن جمع $3\sqrt{2}$ و $5\sqrt{2}$ لنجد $8\sqrt{2}$ أما $F(0.5) + 3F(1)$، أو $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$، فستبقى كـل منهما كما وردت دون تغيير.

وتبقى الفكرة نفسهـا في الكسور العادية (الأعداد النسبيـة). فمقام الكسر يعني أننا قسمنا الواحد الصحيح إلى عدد من الأجـزاء المتساوية يساوي المقام. والبسط يعني أننا أخذنا من هـذه الأجزاء عددا يساوي البسط. و 3/4 تعني ثلاثة أرباع. أي قسمنا الواحـد الصحيح إلى أربعة أجزاء متسـاوية وأخـذنا منها ثـلاثة أجزاء. ومقلـوب مقام الكسر يُعتبر بمثابة وحدة قياس أو شيء، والبسط يمثل عدد مـا لدينا من هذه الوحدة أو هـذا الشيء. و 9/5 تعني تسع مـرات المقـدار 1/5 أو تسع أخماس وهكـذا. . . وجمع كسرين عاديين لابد إذا من توحيد المقامات حتى يصبح الجمع ممكنا ولجمع 3/4 و 9/5 نحـول الكسرين بحيث يكـون لهما المقـام نفسه. ومن خـواص الكسر أو العـدد النسبي نعرف أن قيمتـه لا تتغير إذا ضربنا البسط والمقام بالعـدد نفسه، وقيمة 3/4 هي نفس قيمة 15/20، وقيمة 9/5 هي نفس قيمة 36/20. إذا

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{5} = \frac{15}{20} + \frac{36}{20} = \frac{15+36}{20} = \frac{51}{20}.$$

لأن 15/20 هـي 15 مـرة الـ 1/20، و 36/20 هي 36 مرة الـ 1/20. ومجموعهما هو $15 + 36 = 51$ مرة الـ 1/20، أو 51/20.

ولا تـوجـد مشكلـة في ضرب كسرين عـاديين فالجواب هـو كسر بسطـه جـداء البسطين ومقامه جداء المقامين.

$$\frac{3}{4} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{20}$$

وبصورة عامة:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

وينطبق على الطرح ما ينطبق على الجمع. وطرح عدد b من عدد a، أي $a - b$، هو جمع العدد السالب $(-b)$ إلى العدد a، أي $a + (-b)$. (تذكر أننـا نقرأ في اللغات

الأجنبيـة من اليسار إلى اليمين). وكـذلك ينطبق على التقسيم مـا ينطبق على الضرب. وقسمة a على b ما هي إلا ضرب a بمقلوب b، $a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ولتقسيـم كسر عادي على كسر عادي آخر نضرب الأول في مقلوب الثاني. وهكذا يكون:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

وعلى سبيل المثال:

$$\frac{3}{4} \div \frac{9}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{15}{36}$$

ولحساب كسر من عدد معين نضرب هذا الكسر بالعدد. ولحساب ثلث الستة، مثلا، نضرب 6 بـ 1/3 فنجد

$$\frac{1}{3} \times 6 = \frac{1}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$$

ولو أردت حساب خمسة أسباع الثلاثين تكتب ببساطة:

$$\frac{5}{7} \times 30 = \frac{5}{7} \times \frac{30}{1} = \frac{150}{7}$$

٢ ـ النسب المئوية

يتألف العـــدد العشري من جــزئين، أحـــدهما صحيح يقـع على اليســار من الفاصلـة، والآخـر عشري يقع على اليمين من الفاصلـة. وعلى سبيل المثال، 921.534 فيه جـزء صحيح هو 921 وجزء عشري هـو 0.534. (تذكـر في الكتب الانجليزيـة وما شابهـا أن النقطـة مكتوبــة بين رقمين تعني فاصلـة عشريــة، وأنها بين رمزيـن تعني إشـــارة ضرب، و $a \cdot b$ تعني $a \times b$.) ولا تتغير قيمــة العدد إذا أضفنـا مزيــدا من الأصفار على اليمين من الجزء العشري، أو على اليسار من الجزء الصحيح، 921.534 = 0921.534000 وكما أن للجـزء الصحيح منـازل (أو مـراتب) هي منـزلة الآحـاد ومنـزلـة العشرات ومنزلـة المئات . . . الخ فكـذلك للجزء العشري منـازل تبدأ بمنـزلة الجزء من عشرة، تليها منـزلة الجزء من مـائة، تليها منـزلة الجزء من ألف، وهكـذا. ونلاحظ أن الرقم يختلف مدلولـه من منزلة إلى أخرى. فالخمسة نكتبهـا في منزلة الآحاد تعني خمس

مرات الواحد الصحيح ، وهي في منزلة العشرات تعني خمس عشرات أي 50 ، وهي في منزلة المئات تعني خمس مئات أي 500. وكذلك في الجزء العشري ، نجد أن للرقم نفسه مدلول يختلف باختلاف المنزلة التي يشغلها . فالخمسة بعد الفاصلة مباشرة ، أي في منزلة الجزء من عشرة ، تعني خمسة أجزاء من عشرة أي 5/10 ، وهي في منزلة الجزء من مائة تعني خمسة أجزاء من مائة أي 5/100 ، وفي منزلة الجزء من ألف تعني خمسة أجزاء من ألف أي 5/1000 ، وهكذا . واصطلاح 921.534 يعني $9 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$ أي

$$9 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 1 + 5 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}$$

ولو أردنا التعبير عن هذا المجموع كلاميا لقلنا :

واحد وعشرتان وتسع مئات بالإضافة إلى خمسة أعشار وثلاثة أجزاء من مائة وأربعة أجزاء من ألف . وبالطبع سيكون من الأيسر بكثير أن نصطلح على القول تسعمائة وواحد وعشرون فاصلة خمسمائة وأربع وثلاثون ، ونكتب 921.534.

ونلاحظ أيضا أن كل منزلة في العدد العشري هي عشرة أمثال تلك التي تقع إلى اليمين منها مباشرة . فالمائة هي عشر عشرات ، والعشرة عشر وحدات ، والواحد عشرة أجزاء من عشرة ، والجزء من عشرة هو عشرة أجزاء من مائة ، وهكذا . ولذلك يطلق على هذا النظام في الترقيم اسم «النظام العشري» . وهذا يوضح أن ضرب عدد على شكل كسر عشري بمضاعفات العشرة ، أو قسمته على مضاعفات العشرة ، لا يحتاج إلا إلى إزاحة الفاصلة في اتجاه اليمين عند الضرب ، أو في اتجاه اليسار عند القسمة ، عددا من المنازل يساوي عدد الأصفار في مضاعف العشرة . وعلى سبيل المثال لضرب 20.604 بعشرة نأخذ الفاصلة منزلة واحدة إلى اليمين فنجد 206.04 ؛ ولقسمته على عشرة نأخذ الفاصلة منزلة واحدة إلى اليسار فنجد 2.0604. وفي الحالة الأولى أصبح كل جزء من عشرة واحدا ($1 = 10 \times 1/10$) أي أن منزلة الجزء من عشرة أصبحت هي منزلة الآحاد ، ولذلك أزحنا الفاصلة منزلة واحدة إلى اليمين . وفي الحالة الثانية أصبح كل واحد صحيح جزءا من عشرة ($1/10 = 10 \div 1$) ، أي أن منزلة الآحاد أصبحت منزلة الجزء من عشرة ، ولذلك أزحنا الفاصلة منزلة واحدة إلى اليسار. وكقاعدة عامة ، عند الضرب بـ

10^n نأخذ الفاصلة إلى اليمين n منزلة، وعند القسمة على 10^n (أي الضرب بـ10^{-n}) نأخذ الفاصلة إلى اليسار n منزلة.

والآن كيف نعبر عن عدد عشري في شكل نسبة مئوية؟

النسبة المئوية تعني النسبة إلى مائة، أي عدد نسبي مقامه يساوي 100. وخمسون في المائة تعني 50/100، وخمس وستون بالمائة تعني 65/100، ونصف بالمائة تعني 0.5/100 أي 5/1000. وللتعبير عن عدد عشري في صيغة نسبة مئوية نضرب العدد العشري بمائة فنحصل على العدد المطلوب، ونضيف إلى قراءته عندئذ كلمتي «في المائة».

مثال (١)

عبر عن الأعداد التالية في شكل نسبة مئوية:

0.75، 0.3، 1.21، 0.05، 0.052، .0003، 21.3، 0.3254.

الحـــل

الأجوبة المطلوبة هي على الترتيب: 75 في المائة؛ 30 بالمائة؛ 121 في المائة؛ 5 في المائة؛ 5.2 في المائة (ونقرؤها خمس واثنان من عشرة في المائة)؛ 0.03 في المائة (ونقرؤها ثلاثة من مائة في المائة)؛ 2130 في المائة، 32.54 في المائة (ونقرؤها اثنان وثلاثون وأربع وخمسون من المائة في المائة).

ولجمع الأعداد العشرية نرتب المنازل المتشابهة تحت بعضها تماما. وبالتالي تقع الفواصل تحت بعضها البعض تماما. ثم نجمع جمعا عاديا ونضع الفاصلة عندما نصل إلى موقع الفاصلة.

٣ـ التناسب

إذا كانت المقادير a، b، c، d بحيث يكون

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

قلنا إنها متناسبة. وتسمى العلاقة بينها تناسبا طرفاه a و d ووسطاه c و b. ومن أهم خواص التناسب:

أ ـ $a\times d=b\times c$، (جداء الطرفين = جداء الوسطين).

ب ـ $$\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{d\pm c}$$

جـ ـ $$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$

د ـ $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

مثال (٢)

الأعداد 2، 3، 4، 6 متناسبة. اكتب التناسب وتحقق من الخواص المذكورة أعلاه.

الحـــل

الأول والرابع هما الطرفان والثاني والثالث (الواردين في الوسط) هما الوسطان.

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$$

ومن الواضح أن

أ ـ $2\times 6=3\times 4$

ب ـ $$\frac{2}{2+3}=\frac{4}{4+6}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$$

و $$\frac{2}{3-2}=\frac{4}{6-4}$$

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$$

جـ ـ $$\frac{2+3}{3}=\frac{4+6}{6}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

و
$$\frac{2-3}{3} = \frac{4-6}{6}$$

$$-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6}$$

د-
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6} = \frac{6}{9}$$

مثال (٣)

صندوق يتضمن 5 كرات سود، و 6 كرات بيض. ما نسبة الكرات السود إلى الكرات البيض؟ وما نسبة الكرات البيض في الصندوق؟

الحـــل

نسبة الكرات السود إلى الكرات البيض هي 5/6.

نسبة الكرات البيض في الصندوق هي نسبة عدد الكرات البيض إلى مجموع عدد الكرات في الصندوق أي

$$\frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$$

مثال (٤)

في صندوق 15 كرة بعضها أبيض والآخر أسود. إذا كانت الكرات تتوزع بين اللونين الأبيض والأسود بنسبة 2:1 فاحسب عدد الكرات من كل لون.

الحـــل

مجموع الحصص 1+2=3

ويكون 1/3 الكرات أبيض و 2/3 الكرات أسود.

عدد الكرات البيض = $15 \times 1/3 = 5$

عدد الكرات السود = $15 \times 2/3 = 10$

مثال (٥)

قسمنا ستةآلاف ريال بين ثلاثة أشخاص بنسبة 1:3:2 فما هي حصة كل منهم؟

الحـــل

مجموع الحصص 6=2+3+1

مقدار الحصة الواحدة $6000/6 = 1000$

وتكون حصة الأول= $2 \times 2000 = 2000$ ريال

حصة الثاني = $3 \times 1000 = 3000$ ريال

حصة الثالث = $1 \times 1000 = 1000$ ريال .

أو نقول إن حصة الأول تشكل 2/6 من المبلغ وحصة الثاني 3/6 من المبلغ وحصة الثالث 1/6 من المبلغ . أي أن :

حصة الأول = $2/6 \times 6000 = 2000$ ريال

حصة الثاني = $3/6 \times 6000 = 3000$ ريال

حصة الثالث = $1/6 \times 6000 = 1000$ ريال

٤ ـ العمليات الأساسية في المجموعات وقانونا دي مورغان

الاحتـــــــــواء

نقول إن المجموعة A محتواة في المجموعة B ، ونكتب $A \subset B$ ، إذا كـان كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي أيضا إلى B.

وفي حـال وجـود عنصر واحـد على الأقل ينتمي إلى B ولا ينتمي إلى A نسمي A مجموعة جزئية فعلية من B. ومن الواضح أن كل مجمـوعة محتواة في نفسها ، ونـرمز لهذه الحقيقة بكتابة $A \subseteq A$.

المجموعتان المتساويتان

نقول إن المجموعتين A و B متساويتان إذا كانت $A \subset B$ و $B \subset A$. الشرط الأول $A \subset B$ يقتضي أن كـل عنصر ينتمـي إلى A ينتمي أيضـا إلى B ، والشرط الثاني $B \subset A$ يقتضي أن كل عنصر ينتمي إلى B ينتمي أيضا إلى A. وهذا يعني بوضوح تطابق عناصر المجموعتين .

اتحاد مجموعتين

اتحاد مجموعتين A ، B هو مجمـوعة تتضمن كافة العنـاصر التي تنتمي إلى واحدة منهما على الأقل . ونرمز له بـ$A \cup B$.

تقاطع مجموعتين

تقاطع مجموعتين A ، B هو مجموعة تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إليهما معا . ونرمز له بـ$A \cap B$.

ومن الواضح أنه يمكن التعبير عن انتماء عنصر إلى $A \cup B$ بقولنا إنه ينتمي إلى A أو B. ويمكن التعبير عن انتماء عنصر إلى $A \cap B$ بقولنا إنه ينتمي إلى A و B وإذا لم يكن هناك أي عنصر مشترك بين A و B كان تقاطعهما خاليا . ونرمـز للمجموعة الخالية بـϕ. ومن الواضح أن المجمـوعة الخالية ϕ محتواة في أي مجموعـة أخرى ($\phi \subset A$ حيث A أي مجموعة غير خالية) .

المجموعتان المنفصلتان

إذا كـان تقاطع المجمـوعتين A ، B خاليـا ، أي $A \cap B = \phi$ ، قلنـا إن المجمـوعتين منفصلتان .

الفرق بين مجموعتين

الفرق بين مجموعتين A ، B ، ونرمز له بـ$A\text{-}B$ (أو A/B) هو مجموعة تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B.

مكملة مجموعة

مكملة مجموعة A هي مجموعـة تتضمن كافة عنـاصر المجموعة الشـاملة التي لا تنتمي إلى A. ونرمز لها بـ $\bar{A}$ (أو A^c).

ومن الـــواضح أن $\bar{A}$ تشكل نفي A. ولذلك نقرؤها أحيانا «ليس A» . ومكملة مجموعـة A ليست إلا الفـرق بين المجمـوعة الشاملـة ، ولنرمز لهـا بـS، وبين A، أي أن $\bar{A} = S - A$. وهذا بالاضـافة إلى نص التعريف (٢ـ ٥ ـ ٧) يـوضحان أنه يمكن التعبير عن الفرق بين مجموعتين A ، B كتقاطع بين A ومكملة B. وهكذا نكتب :

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

قانونا دي مورغان

ومن الخواص المهمة لعمليتي الاتحاد والتقـاطع أن كلا منهما تتـوزع على الأخرى بمعنى أن :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

و

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

وأن

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

و

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

وتسمى العلاقتان الأخيرتان «قانوني دي مورغان» . وتقول الأولى منهما إن مكملة اتحاد مجموعتين هي تقـاطع مكملتيهما . وتقول الثانيـة إن مكملة تقـاطع مجموعتين هي اتحاد مكملتيهما . وتسهيلا لحفظ هاتين العلاقتين نلاحظ أنه للانتقال من الطرف الأيسر إلى الطرف الأيمن في كل منهما نتبع القاعدة التالية :

نقلب اتجاه الرمز الفاصل بين المجموعتين (إذا كانت الفتحة إلى الأعلى تصبح إلى الأسفل والعكس) ثم نستعيض عن كل مجموعة بمكملتها .

مثال (٦)

لتكن المجموعة الشاملة مجموعة الحروف في الكلمات أبجد، هوز، حطي.
ولنرمز لها بـ S. ولتكن $A =$ {أ، ب، هـ، د، ط}

$B =$ {أ، هـ، ز، جـ، ط، ي}

$S =$ {أ، ب، جـ، د، هـ، و، ز، ح، ط، ي}

i) هل A محتواة في B؟

ii) أكتب $A \cup B$، $A \cap B$، $A - B$، $B - A$، $\bar{A}$، $\bar{B}$.

iii) اكتب $A \cap \bar{B}$ وقارنها مع $A - B$، واكتب $\bar{A} \cap B$ وقارنها مع $B - A$.

iv) لنعرف المجموعة $C =$ {أ، و}. تحقق من قانوني التوزيع.

v) اكتب $\overline{A \cup B}$، $\bar{A} \cap \bar{B}$، $\overline{A \cap B}$، $\bar{A} \cup \bar{B}$، ثم تحقق من صحة قانوني دي مورغان.

الحل

i) A غير محتواة في B لوجود عنصر د ينتمي إلى A ولكنه لا ينتمي إلى B.

د $\in A$ ولكن د $\notin B$

ii) $A \cup B =$ {أ، ب، هـ، د، ط، ز، جـ، ي}

لكتابة اتحاد A، B نكتب عناصر A ثم نضيف إليها عناصر B ما لم تكن ذُكرت سابقا، لأنه عند التعبير عن مجموعة، لا نكرر ذكر أي عنصر من عناصرها.

$A \cap B =$ {أ، هـ، ط}

ولكتابة تقاطع A، B نستعرض عناصر A واحدا فآخر ونضع في $A \cap B$ ما نجده منها واردا في B.

$A - B =$ {ب، د}

وللحصول على $A - B$ نلغي من عناصر A كل ما كان منها مشتركا مع B. وبصورة مماثلة نجد:

$B - A =$ {ز، جـ، ي}

$\bar{A} = S - A =$ { أ، ب، جـ، د، هـ، و، ز، ح، ط، ي } - { أ، ب، هـ، د، ط }
= { جـ، و، ز، ح، ي }

ولكتابة $\bar{A}$ نلغي عناصر A من المجموعة الشاملة ونأخذ كل ما تبقى منها.

وبصورة مماثلة نجد:

$\bar{B} =$ { ب، د، و، ح }

iii)

$A \cap \bar{B} =$ { ب، د } $= A - B$

$B \cap \bar{A} =$ { ز، جـ، ي } $= B - A$

iv) نحسب الطرف الأيمن فنجد

$B \cup C =$ { أ، هـ، ز، جـ، ط، ي، و }

$A \cap (B \cup C) =$ { أ، ب، هـ، د، ط } $\cap$ { أ، هـ، ز، جـ، ط، ي، و }
= { أ، هـ، ط }

نحسب الطرف الأيسر فنجد

$A \cap C =$ { أ }

$(A \cap B) \cup (A \cap C) =$ { أ، هـ، ط }

وهو يساوي الطرف الأيمن.

v) بالعودة إلى النتائج في ب نجد:

$\overline{A \cup B} =$ { أ، ب، هـ، د، ط، ز، جـ، ي }^{c} = { و، ح }

$\bar{A} \cap \bar{B} =$ { جـ، و، ز، ح، ي } $\cap$ { ب، د، و، ح } = { و، ح } $= (A \cup B)^c$

مما يحقق قانون دي مورغان الأول.

ولدينا أيضا:

$\overline{A \cap B} =$ { أ، هـ، ط }^{c} = { ب، جـ، د، و، ز، ح، ي }

و

$\bar{A} \cup \bar{B} =$ { جـ، و، ز، ح، ي } $\cup$ { ب، د، و، ح }

$\bar{A} \cup \bar{B} =$ { ب، د، و، ح، جـ، ز، ي } $^c = \overline{A \cap B}$

مما يحقق قانون دي مورغان الثاني.

حاصل الضرب الديكارتي

الحاصل الديكارتي لمجموعتين A، B هو مجموعـة كل الأزواج المرتبة التي يمكن تشكيلها بأخذ العنصر الأول من A والعنصر الثاني من B. ونرمز له عادة بـ $A \times B$.

مثال (٧)

لدينا $A = \{a,b,c\}$ ، $B = \{1,2,3\}$. اكتب الحاصل الديكارتي $A \times B$.

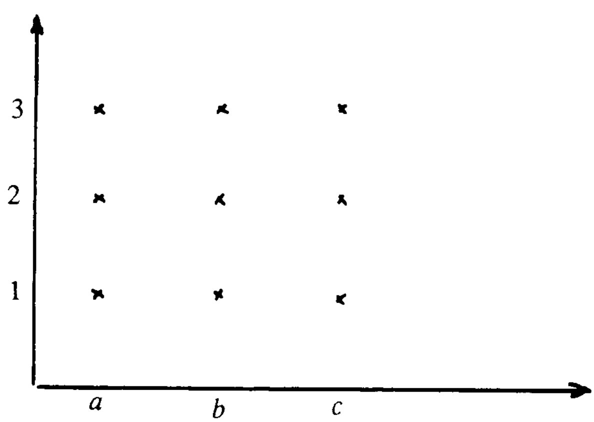
الحـــل

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$$

ونلاحظ أنه إذا كـان عدد عناصر A مساويا n وعد د عنـاصر B مساويا m فإن عدد عناصر الحاصـل الديكارتي $A \times B$ يساوي $n \times m$. ويمكن تمثيل كل زوج مـرتب بنقطـة في المستوى الاحـداثي ، حيث يشكل العنصر الأول من الـزوج المرتب الاحـداثي السيني للنقطـة ويمثل العنصر الثاني الاحداثـي الصادي لها . ونحصل عنـدئذ على ما يسمى «بيان الحاصل الديكارتي» .

مثال (٨)

ارسم بيان الحاصل الديكارتي للمجموعتين A ، B في المثال (٧) .



شكل (١) : بيان الحاصل الديكارتي $A \times B$.

٥ ـ التطبيق والصورة العكسية

تعريف التطبيق

التطبيق f المعرف على مجموعة A إلى مجموعة B هو توافق يقابل بموجبه كل عنصر من A عنصر واحد وواحد فقط من B . ونكتب رمزيا

$$A \xrightarrow{f} B$$

وتسمى المجموعة A مجال التطبيق (أو ساحة التطبيق) وتسمى المجموعة B المجال المصاحب. ونكتب $f(a) = b$ للدلالة على أن العنصر a من المجال A يوافقه العنصر b من المجال المصاحب B . ونقول إن b هو صورة a وفق التطبيق f .

مثال (٩)

في المثال (٧) عرف تطبيق f_1، f_2 على A إلى B .

الحل

أي قاعدة توافق يقترن بموجبها كل عنصر من A بعنصر واحد من B تشكل تطبيقا. وعلى سبيل المثال يمكننا تعريف f_1 كما يلي:

$$f_1 = \{(a,2), (b,1), (c,3)\}$$

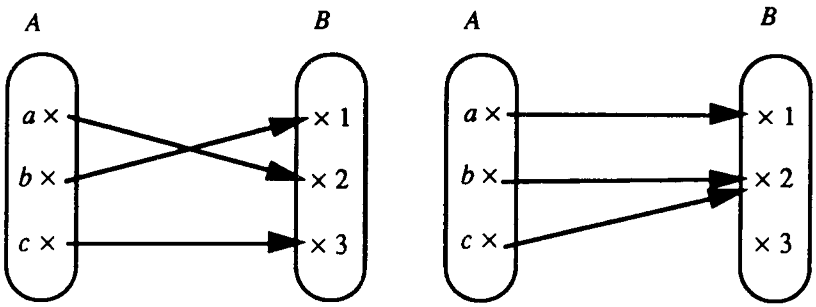
وتقول قاعدة التوافق أو التطبيق الذي رمزنا له بـ f_1 إن العنصر a من A يقابله أو يوافقه العنصر 2 من B؛ والعنصر b من A يوافقه العنصر 1 من B؛ وأخيرا يوافق العنصر c من A العنصر 3 من B . أو أن صورة a وفق f_1 هي 2 وصورة b هي 1 وصورة c هي 3.

ويمكن تعريف تطبيق آخر f_2 كما يلي:

$$f_2 = \{(a,1), (b,2), (c,2)\}$$

ونلاحظ أن شرطي التعريف محققان. فلكل من عناصر A الثلاثة عنصر مقابل واحد من B. هنا a يقابله 1؛ و b يقابله 2؛ و c يقابله 2 أيضا. أي أن 1 هي صورة لـ a و 2 صورة لكل من b و c . أما 3 فليست صورة لأي عنصر من A .

ويمكن توضيح التطبيق بمخطط سهمي ينطلق فيه من كل عنصر من المجال سهم واحد ينتهي بالعنصر المقابل (بصورته) من المجال المصاحب. وفي الشكل (٢) نجد المخطط السهمي لكل من f_1 و f_2 في المثال (٥).



المخطط السهمي للتطبيق f_1 المخطط السهمي للتطبيق f_2

شكل (٢)

وتجدر ملاحظة أن التطبيق هو مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتكرر فيها أبدا العنصر الأول. وتشكل العناصر الأولى مجتمعة مجموعة المجال دون زيادة أو نقصان. وعلى المخطط السهمي نقول إنه ينطلق من كل عنصر من عناصر المجال سهم واحد وواحد فقط.

تعريف الصورة العكسية

الصورة العكسية لعنصر d، مثلا، من المجال المصاحب، هي مجموعة عناصر المجال التي صورتها وفق f هي d. (أي مجموعة عناصر المجال التي انطلق منها سهم إلى d) ونرمز لها بـ $f^{-1}(d)$.

مثال (١٠)

في المثال السابق اكتب الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر B وفق f_1^{-1} ووفق f_2^{-1}.

الحل

$$f_1^{-1}(3) = c \ , \ f_1^{-1}(2) = a \ , \ f_1^{-1}(1) = b$$

ونلاحظ أن f_1^{-1} يمثل بدوره تطبيقا من B إلى A **يسمى التطبيق المعاكس. ولا يصح هذا إلا عندما يكون f تقابلا.** أي الحالة التي يكون فيها كل عنصر من B صورة لعنصر واحد وواحد فقط من A وبصورة مماثلة نجد أن

$$f_2^{-1}(2) = \{ b, \ c\} \ , \ f_2^{-1}(1) = a$$

ونلاحظ أن الصورة العكسية للعنصر 2 من B هو مجموعة مؤلفة من عنصرين b ، c من عناصر A ذلك لأن 2 هي صورة لكل من b و c وفق f_2 . أما f_2^{-1} (3) فهي خالية ونكتب $f_2^{-1}(3) = \phi$ ، ولا يمثل f_2^{-1} تطبيقا لأنه لا يحقق شرطي التعريف، إذ يقابل العنصر 2 من B عنصران من A هي b و c ، وكذلك لا صورة للعنصر 3 من B .

تعريف الدالة العددية

إذا عُرّف تطبيق f من مجموعة جزئية من R ، مجموعة الأعداد الحقيقية ، إلى مجموعة جزئية أخرى منها ، فإننا نسمي مثل هذا التطبيق دالة عددية ذات متغير حقيقي . وكثيرا ما نهمل عند تعريف دالة عددية ، المجال والمجال المصاحب ، ونعطي فقط قاعدة الربط بشكل علاقة رياضية ، $y = f(x)$ ، ونعتبر في هذه الحالة أن مجال الدالة هو أوسع مجموعة جزئية من R يمكننا أن نُجري عليها العمليات الداخلة في القاعدة f. ويسمى المجال في هذه الحالة مجموعة التعريف أو ساحة التعريف ويسمى المجال المصاحب مدى الدالة .

٦ ـ رمز المجموع Σ وخواصه

تستخدم العلوم الرياضية ومختلف العلوم التجريبية الرموز للدلالة على مقادير أو مسميات وأشياء من طبائع مختلفة. فمثلا نرمز لمقدار أو لقياس عددي بـ x ، ونرمز لمجموعة بـ A . ونرمز لعنصر من مجموعة بـ a ، الخ. وفي بحث أو دراسة معينة ينبغي أن نستخدم رموزا مختلفة للدلالة على قياسات أو أشياء مختلفة ، وذلك تجنبا للالتباس. وفي دراسة فيزيائية ، مثلا ، لو رمزنا لشدة التيار بـ x ، فيجب المحافظة على هذا الرمز في الدراسة بأكملها . وحيثما وردت x ضمن هذه الدراسة فإنها تعني شدة التيار . وقد

نحتاج في دراسة واحـدة إلى عدد هائل من الرمـوز، وربما ما لا نهاية له مـن الرموز، ولا يمكن لحروف أبجدية أو حروف مختلف الأبجديـات المعروفة في العالم أن تفي بالحاجة. ولذلك نلجأ إلى استخدام الحرف نفسه x، مثلا، عددا هائلا من المرات دون أن نقع في التبـاس، وذلك بإضــافـة دليل رقمي تحت الحرف، فنكتب x_1 و x_2، مثلا، كـرمزين مختلفين. ومع أننـا استخدمنـا هنا الحرف الأبجـدي نفسه، إلا أننـا ميزنـا بين x وآخر بالدليل 1 ملحقا بـالأول وبدليل آخـر ملحقا بالثـاني ونقرؤه x واحد، x اثنان، الخ. ويفتح لنـا استخـدام الحرف مع دليل رقمـي ملحق بـه آفـاقـا واسعـة، بحيث يمكن استخدام الحرف x نفسه عددا لانهائيا من المرات، لنكتب، مثلا، المتوالية اللانهائية من المقادير:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ , \ldots$$

يسمى x_n الحد العام للمتواليـة. وعندما يتغير n متخذا عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,3,\ldots\}$، كقيم لـه نحصل على متواليـة لانهائية مـن المقاديـر لكل منها رمـز مختلف. ولم نستخدم فيها إلا حرفا واحدا من حروف الأبجدية هو x. ويمكن أن نكتب متوالية أخرى

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n \ , \ldots$$

ومتوالية أخرى

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \ , \ldots$$

وهكذا.

لنفرض الآن أننا نريد التعبير عن مجمـوع ستة مقادير هي x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6. فمن الطبيعي كتابة:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

وسنتفق الآن على التعبير عن هذا المجموع بصورة مختصرة فنكتب:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i$$

ونقرؤها «مجموع x_i من $i = 1$ إلى $i = 6$». ونستخدم هنا الحرف اليوناني الكبير $\sum$، ويسمى «سيجما»، ليـدل على كلمة «مجموع». والـدليل i يسمى «متغير الجمع» وهـو

يتغير هنا من $i = 1$ إلى $i = 6$. ويسمى x_i «الحد العام». وللحصـول على الحد الأول في المجموع نضع $i = 1$ في الحد العام، وفي الحد الثـاني نضع $i = 2$. وهكذا. وتفصل بين الحدود المختلفة إشارة + بالطبع مادمنا نعبر عن مجموع عدد من المقادير.

مثال (١١)

أ ـ اكتب بالتفصيل ما تعنيه الرموز:

$$\sum_{t=1}^{3} t x_t^t \quad , \quad \sum_{j=1}^{4} j(j-1) \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} i(y_i - 1) \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} x^i$$

ب ـ استخدم إشارة المجموع $\sum$ للتعبير عن كل من المجاميع التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5$$

الحـــل

أ ـ

$$\sum_{i=1}^{5} x^i = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{3} i(y_i - 1) = (y_1 - 1) + 2(y_2 - 1) + 3(y_3 - 1)$$

$$\sum_{j=1}^{4} j(j-1) = 1(1-1) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) \ ,$$

$$\sum_{t=1}^{3} t x_t^t = x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3$$

ب ـ

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} y^i \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} x_i$$

وتنبغي ملاحظـة أن الشيء الوحيد من عبارة الحد العام الـذي يتغير من حد إلى آخـر من حدود المجمـوع هـو متغير الجمع i. وبهذا المعنى يمكن اعتبــار أي كميـة لا

تتضمن متغير الجمع في حكم الثابتة. ويمكن أن يرد متغير الجمع دليلا أو معاملا أو قوة أو مقدارا قائما بذاته الخ.

خواص رمز المجموع Σ

الخاصة الأولى

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

وهو واضح من كون:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} cx_i &= cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n \\ &= c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

الخاصة الثانية

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

وهو واضح أيضا من الخاصتين التبديلية والتجميعية لعملية جمع الأعداد الحقيقية. فلدينا

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) &= (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \ldots + (x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i\end{aligned}$$

الخاصة الثالثة

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

وهذا واضح من حقيقة أن الحد العام c لا يتضمن متغير الجمع i، فهو ثابت من حد إلى آخر. أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{\text{مرة } n} = nc$$

مثال (١٢)

تطبيقا لخواص الرمز $\sum$ يمكن كتابة ما يلي :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + c)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2cx_i + c^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2cx_i + + \sum_{i=1}^{n} c^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2c \sum_{i=1}^{n} x_i + nc^2 .$$

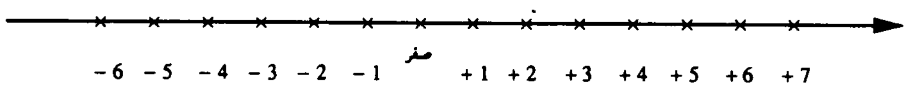
ونجد أيضا :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 3y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 6x_i y_i + 9y_i^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 6x_i y_i + 9 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 6 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 9 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

٧ ـ محور الأعداد الحقيقية ـ الانسحاب وتغيير سلّم القياس

يمكن تمثيل الأعداد كنقاط على مستقيم موجه نسميه محورا. ولهذا الغرض نرسم مستقيما كما في الشكل (٣)، نتخذ عليه اتجاها موجبا إلى اليمين، ثم نحدد عليه نقطة تدعى عادة مبدأ الفصول، وتقابل العدد «صفر» وتقع الأعداد الموجبة إلى اليمين من مبدأ الفصول والأعداد السالبة إلى اليسار منه. ومع تبني طول معين ليمثل وحدة قياس (السنتمتر، مثلا، كما في الشكل (٣)) تصبح كل نقطة من المحور ممثلة لعدد حقيقي واحد هو عدد وحدات القياس التي تفصل بينها وبين مبدأ الفصول مسبوقا بإشارة موجبة إذا كانت النقطة إلى اليمين من مبدأ الفصول. أما إذا وقعت النقطة إلى اليسار

من مبدأ الفصول فـالعدد الحقيقي الذي تمثله هـو عدد وحدات القياس الفـاصلة بينها وبين المبدأ مسبوقا بإشـارة سالبة. وبالعكس كل عدد حقيقي تقـابله نقطة واحدة على هذا المحور. وبذلك نستكمل تمثيل مجموعـة الأعداد الحقيقية هندسيا، ويسمى المحور المدرج النـاتج محور الأعـداد الحقيقية. ونـلاحظ أن تحديـد المحـور، في الشكل (٣)، كمحـور للأعـداد الحقيقية قـد اسُتكمل بعد تحديـد اتجاه عليه واتخاذ نقطـة من نقاطـه كمبدأ للفصول وتبني السنتمتر كوحدة للقياس.



شكل (٣): محور الأعداد الحقيقية

ولو أننـا أضفنا إلى كل عـدد المقدار 2 فإن النقطـة التي تمثل العدد «صفـر»، أي تشكل مبدأ الفصول في الشكل (٣)، ستصبح ممثلة للعدد 2، والنقطة التي تمثل العدد 2- ستصبح ممثلة للعدد «صفر»، أي مبدأ الفصـول الجديد، والنقطة التي تمثل العدد 4 ستصبح ممثلـة للعدد 6، وهكذا. . . ويبـدو بوضـوح أن هذا التغيير في تمثيـل النقاط للأعـداد يكافىء تماما انسحابـا إلى اليمين بمقدار وحدتي قيـاس. فكأن النقطة 2 - قد زحفت لتحتل موقع نقطـة الأصل. وفي المقابل، لو طرحنا مـن كل عدد المقدار 2 (أي أضفنا إلى كل عدد 2-) فإن النقطة التي كـانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد «صفر» (نقطة الأصل)، والنقطة التي كـانت تمثل الصفر (نقطة الأصل) ستصبح ممثلة للعدد 2-، وقس على ذلك. وهـذه التغييرات في تمثيل النقـاط لـلأعداد تكـافىء تمامـا انسحابا إلى اليسار بمقدار 2.

وبصورة عامة، نقول إن إضافة أو طرح عدد ثابت b، مثلا، إلى كل عدد يكافىء انسحاب التدريج بكامله مسافة b وحدة قياس إلى اليمين، إذا كان b موجبا، ومسافة b - وحدة قياس إلى اليسار إذا كان b سالبا. وإن إضافة أو طرح عدد ثابت تبدو وكأنها تغيير في اختيار نقطة الأصل.

لنفرض الآن أن لدينا مجمـوعة من القياسات {2, 3, 4, 5} فهي تحتل مـواقع معينة على محـور الأعـداد في الشكـل (٣)، ولو أضفنـــا إلى كـل منهـا العدد 4 فإنها ستصبح

{6, 7, 8, 9} وتحتل مواقع جديـدة في الشكل (٣) هي المواقع الناتجة عن انسحاب المواقع الأساسية بمقدار 4 وحدات قياس إلى اليمين. وإضـافة العدد 4 - (أي طرح العدد 4) إلى كل منها يؤدي إلى انسحـابها يسارا بمقدار 4. ونلاحظ أن المواقع النسبيـة للقياسات الأربعة من بعضها البعض لم تتغير بعد عملية الانسحاب.

لنضرب الآن كل عدد بالمقدار 2، مثلا، فالنقطة التي تمثل العدد صفر ستبقى في مكانها بدون تغيير، ولكن النقطة التي كانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد 4، والنقطة التي تمثل 4 - ستصبح الآن ممثلـة للعدد 8 -، وهكذا. . . وهـذه التغييرات في تمثيل النقاط لـلأعداد هي بالضبط مـا سنحصل عليه لـو أننا غيرنا وحـدة القياس من السنتمتر إلى نصف السنتمتر (أي ضربنـا وحـدة القياس بــ 1/2). إذ لو اتخذنـا نصف النستمتر وحدة لقيـاس المسافة في الشكل (٣) لكانت النقطـة التي تمثل العدد 1 حاليا ممثلة للعدد 2، ولكانت النقطة الممثلة للعدد 3 - حاليا ممثلة للعدد 6 -، وهكذا. . . وفي المقابل لو أننا قسمنا كل عدد على 2 (أي ضربنا كل عدد بـ 1/2) فإن النقطة التي كانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد 1، والنقطة التي كانت تمثل العدد 4 - ستصبح الآن ممثلة للعدد 2 -، وهكذا. . . وهذه التغييرات في تمثيل النقاط للأعداد تكافىء تماما ما سنحصل عليه لو أننا غيرنا وحدة القياس إلى 2 سنتمتر بدلا من السنتمتر الواحد (أي ضربنا وحدة القياس بـ 2). وفي الحالتين نقول إننا غيرنا سلّم القياس.

وبصورة عـامة، نقول إن ضرب كل عـدد بمقدار ثـابت موجب a يكافىء تغيير سلّم القياس بضرب وحدة القياس بـ $1/a$ (تصغيراً لها إذا كان a أكبر من الواحد وتكبيراً لها إذا كان a أصغر من الواحد). وتسمى عمليـة الضرب بعدد موجب عملية تغيير في سلّم القياس.

لنعد إلى مجموعـة القياسات {2, 3, 4, 5} فإذا ضربنا كـلا منها بـ 2 فإنها ستحتل مواقع جـديدة هي النقاط المقابلـة لـ {4, 6, 8, 10} وتجدر مـلاحظة أن المواقع النسبيـة للقيـاسـات الأربعة بعضهـا من بعض قـد تغيرت الآن. فتغيير سلم القيـاس يغير من المواقع النسبية لجملة من القياسات بعضها من بعض، ولكن عملية الانسحاب لا تؤثر في تلك المواقع النسبية.

ولو افترضنا الآن أن الرمز x يمثل عددا دارجا على محور الأعداد فإن إجراء التحويل من x إلى y وفق العلاقة:

$$y = x + b$$

هو تعبير جبري عن عملية انسحاب بمقدار b . وإجراء التحويل من x إلى y وفق العلاقة:

$$y = ax$$

هو تعبير جبري عن عملية تغيير في سلم القياس. ومن الواضح الآن أن إجراء تحويل من x إلى y وفق العلاقة:

$$y = ax + b$$

تعني القيام بعملية تغيير في سلم القياس (الضرب بمقدار a) ثم القيام بعملية انسحاب للنقاط الناتجة بمقدار b.

مثال (١٣)

لدينا الأعداد

9200, 8200, 7200, 6200, 5200, 4200, 3200, 2200, 1200

إذا حولنا وفقا للعلاقة:

$$y = \frac{x - 5100}{1000} = \frac{1}{1000}\, x - \frac{5200}{1000} = 0.001\, x - 5.2$$

فإن الأعداد المعطاة تتغير، على الترتيب، إلى:

4, 3, 2, 1, 0, − 1, − 2, − 3, − 4

مثال (١٤)

لدينا الأعداد

0.011, 0.012, 0.013, 0.014, 0.015, 0.016, 0.017

إذا حولنا وفقا للعلاقة:

$$y = 1000x - 14$$

فإن الأعداد المعطاة تتغير، على الترتيب، إلى:

− 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3

٨ ـ أنواع القياسات

يتعامل الإنسان مع ثلاثة أنـواع من المتغيرات. وسنصطلح، بصورة عامة، على تسميـة القيم التي يفترضها متغير «قيـاسا». ومجمـوعة من القيـاسات هي، على وجـه العموم، مجموعة من القيم لمتغير أو أكثر.

والنوع الأول من المتغيرات هـو المتغير الوصفي، وهو متغير يصنف جملـة من العناصر وفق صفـات محددة، كأن نصنف السكان في مـدينة الـرياض وفقـا للصفات التالية:

سعودي، عربي غير سعودي، غير عربي

والمتغير هنا هو متغير الجنسية وهذه الصفات الثلاث هي قيمه الممكنة، إذ يأخذ بـالنسبة لكل فـرد يسكن الريـاض واحـدة وواحدة فقط من هـذه القيم الثلاث (هنـا الصفات الثـلاث). وإذا رمزنا لهذا المتغير بالـرمز x، واقتفينا جنسيـة شخص يسكن الريـاض فوجدناه «غير عـربي» قلنا إن المتغير x أخذ عنـد هذا الشخـص القيمة «غير عربي». وإذا سألنا شخصا ثانيا وثالثا ووجدناهما سعوديين نقول إن قيمة المتغير x لكل منهما هي «سعودي» وهكذا. وإحدى الصفات المميزة للمتغير الوصفي هي أن مجموعة القيم التي يأخذهـا تصنف جملة من العناصر أو الأشيـاء إلى أصناف بحيث ينتمي كل عنصر (أو شيء) منها إلى صنف واحد وواحد فقط. أو بعبارة أخرى لابد أن ينتمي كل عنصر (أو شيء) منهـا إلى صنف من تلك الأصناف ولا يمكنـه أن ينتمي إلى صنفين أو أكثر في آن واحد. وهكذا تجزىء قيم المتغير الوصفي جملة من العناصر (أو الأشياء) إلى أجزاء منفصلة بعضها عن بعض، انفصالا تاما. وفي المثال السابق لايمكن وجود مقيم في الريـاض يتصف بأنه «سعـودي» و«غير عربي». أو أنه «عـربي غير سعودي» و«غير عربي» الخ.

والنوع الثـاني من المتغيرات هو متغير تـرتيبي. والمتغير الترتيبي يتميـز بكل مـا يتميز بـه المتغير الوصفي بالاضـافة إلى توفـر نوع من الترتيب الـذي يمكن إضفاءه على

الصفات التي تشكل قيم المتغير الممكنة. فلـو فرضنا، مثلا، أن متغيرا y يمثل التقدير الذي نـاله طـالب من طلاب فصل معين. فـالقيم الممكنة لهذا المتغير هي ممتـاز، جيد جدا مرتفع، جيد جدا، جيد مـرتفع، جيد، مقبول مرتفع، مقبول، ضعيف. وبما أن هذه الصفـات مرتبطة بمقيـاس كمي هو الـدرجة العدديـة التي نالها الطـالب فإن هذا يمنح ترتيبـا لهذه الصفات من الأعلى إلى الأدنى أو العكس، فنقـول إن أعلى هذه القيم هي صفـة «ممتاز» يليهـا «جيد جـدا مرتفـع» وهكذا حتى نصل إلى أدنـاها وهي صفـة «ضعيف».

والنوع الثالث مـن المتغيرات هو متغير عددي. والمتغير العددي يتميـز بكل ما يتميز بـه المتغيران الوصفي والترتيبي، أي أنه يصنف، وُيقيم تـرتيبا ولكنه بالإضـافة إلى ذلك ينبئنـا، في مجال الترتيـب، بجواب واحـد دقيق عن الفـارق بين صفة أعلى وصفـة أدنى، أو قيمة أعلى وقيمة أدنى. ومع معرفتنا في مثال التقديرات بأن قيمة «ممتاز» أعلى من قيمة «جيد» لو أننا سألنا مـا هو الفارق بينهما تماما لما أمكن الإجابة، إذ لا نعلم أي معنى أو جواب محدد لـ «ممتاز ــ جيد». ولكننـا في المتغير العددي يمكن الإجـابة على مثل هذا السؤال بـدقة تامة. لنصنف، مثلا، فصلا من عشرة طـلاب، وفقا لمعدلاتهم العامة، ولنفرض أننا وجدنا الجدول التالي:

المعدل العام	91	87	85	73	71	60	45
عدد الطلاب	1	1	1	2	2	2	1

لنرمز للمعدل العام بالرمز Z، فالمتغير Z هو متغير عددي لأن قيمه الممكنة أعداد حقيقية. وقد صنف المتغير Z طلاب الفصل وفق معـدلاتهم فظهر معنا سبعـة أصناف هي «ذوو المعدل 91» ، ذوو المعدل 87» الخ. وبالطبع يمكن ترتيب الأعداد من الأكبر إلى الأصغر أو بـالعكس، بالاضافـة إلى أن الفرق بين أي قيمتين محسوب تماما وبـدقة. والفارق بين الصنف 91 والصنف 71 هو 20 درجة. والبيانات الإحصائية التي تتضمن قياسات متغير وصفي تسمى بيانات وصفية، وتلك التي تتضمن قياسات متغير ترتيبي تسمى بيانات ترتيبية، أما التي تتضمن قياسات متغير عددي فتسمى بيانات عددية.

ويجب ألا يختلط علينا الأمر عندما نقوم بترميز بيانات وصفية أو ترتيبية وفق نظام رموز عددي معيّن، فلـو رمزنا لصفة «سعـودي» بالرقم 3 ولصفة «عـربي غير سعودي» بالرقم 2 ولصفة «غير عربي» بـالرقم1 فإن هـذا لا يعني أن بيـانا حصلنـا عليـه يتعلق بجنسيات جماعـة من المقيمين في الريـاض أصبح بيانـا عدديـا، ومع أنه سيقتصر على الأرقام 1,2,3 إلا أننا يجب أن نتذكر بأن هذه الأرقـام هي رموز لصفات وصفية وأن البيان لا يزال بيانا وصفيا.

وتنقسم البيانـات العددية بدورهـا إلى نوعين، **بيانات عدديـة منفصلة وبيانات عددية مستمرة**. والبيانات المنفصلـة تتضمن قياسات ناتجة عن عمليـة عد أو تعداد. وعندما نسجل، مثلا، عدد الولادات التي تمت في مستشفى للتوليد في كل يوم من أيام شهر معين سنحصل على بيان إحصائي عددي من النـوع المنفصل جميع قياساته أعداد صحيحة. وكـذلك الأمر عندمـا نعد الكـريات البيض الظاهـرة على منطقة محددة من زجاجة فحص مجهـري، وعدد المراجعين الذين زاروا مركزا للرعـاية الأولية في يوم معين، وعدد وقـوعات الزواج أو الطـلاق أو الوفـاة خلال فترة محددة في منطقة معينـة. وعدد حوادث المرور اليومية في مدينة الرياض الخ. أمـا النوع الآخر من البيانات العددية وهو البيانات المستمرة فإنها تتضمن قياسات نـاتجة عن استخدام جهاز للقياس مثل مسطرة أو ميـزان لقيـاس وزن أو درجـة حــرارة أو ضغط الـدم أو الضغط الجوي، أو اختبـار (أورائز) لقيـاس حاصل الذكاء أو اختبـار لقياس معلومات طالب في مقرر معين الخ. ويسمى المتغير العددي الـذي تكون قيمه الممكنة من النـوع المنفصل أي نحصل عليها بطريقـة التعداد، متغيرا عدديا منفصـلا، كما يسمى ذاك الذي تكون قيمـه الممكنة من النوع المستمـر، أي نحصل عليهـا باستخـدام جهاز للقيـاس، متغيرا عدديـامستمرا. ونلاحظ بسهولـة أن القيم الممكنة لمتغير عددي منفصل قابلة للعـد، بمعنى أنه يمكننا القول إن هـذه القيمة هـي القيمة الأولى الممكنـة تليها القيمـة كذا كقيمـة ثانيـة، تليها القيمة كذا كقيمة ثالثة، وهكذا. ونطمئن إلى أننا عند الانتقال من قيمة إلى القيمة التي تليها لم نغفل بينهما أيا من القيم الممكنة للمتغير. فمثـلا، لو رمزنا بـx لعدد الولادات اليومية في مستشفى للتوليد، فإن القيم الممكنة لـ x هي إما صفر، أو 1 أو 2 أو 3 إلخ. ولا يمكن أن يكون هنـاك نصف ولادة أو ولادة ونصف إلخ. وعندمـا ننتقل من الصفر

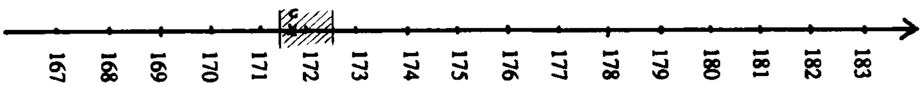
كقيمة ممكنـة إلى الواحد كقيمة ممكنـة تالية لها، لم نخلف وراءنـا أيا من قيم x الممكنة. وإذا حـاولنا تطبيـق الفكرة ذاتها في مجمـوعـة القيم الممكنـة لمتغير مستمر، أي نحـاول عدها، فسنجد أن ذلك مستعص. لنرمز بـy، مثلا، لطول إنسان ذكـر بالغ من رعايا المملكة. فعنـد قياس طوله بمسطـرة مدرجة مـرتفعة ومناسبة، كتلك التي نجـدها في المستشفيات لقياس الطول، سنجد أن طوله يكافىء نقطة على تدريج المسطرة، لنفرض أن هذه النقطة واقعة بين 171 سم و 172 سم، فطول الرجل، واقع إذا، في مكان ما بين 171 سم و 172 سم. أي أنـه يمكن أن يكـون أي نقطـة من الفترة [171,172] من محور الأعداد الحقيقية. ولو كلف المرء نفسه بعـد هذه القيم الممكنة فسيقول إن 171 سم هي قيمة ممكنة أولى ثم يتـوقف عاجزا تماما عن تحديد القيمـة التي تليها. إذمهما اتخذ عددا قريبا من الـ 171 فبين الـ 171 وبين هـذه القيمة، على قـربها الشديـد من 171، ما لا يحصى ولا يعـد من القيم. ونقول إن مجمـوعة القيم الممكنـة لمتغير مستمر هي مجمـوعة غير قابلة للعد. وقابلية العد هي الخاصة الـرياضية التي نميز بموجبها بين النوعين من البيانات العددية، النوع المنفصل والنوع المستمر.

٩ ـ تدوير الأرقام العشرية ـ أخطاء القياسات

رأينا أن قياس طول شخص يقابل نقطة على المسطرة المدرجة التي نستخدمها في قياس الطول. وهذه النقطة من المسطـرة المدرجة (نقطة من محور الأعداد) تقابل أو تمثل عـددا حقيقيـا هـو طـول الشخص. ولكن هـب أن المسطـرة التي نقيس بها مـدّرجـة بالسنتمتر، وليس فيها تدريج ميليمتر. وكل ما في الأمر أن هناك نقطة تشير إلى منتصف المسافة بين رقم والرقم الذي يليه، شكل (٤)، ولنفرض أن النقطة c على حرف المسطرة هي النقطـة المقابلـة لقمة رأس الشخص. فـالمسطرة بما أوتيت بـه من دقة في التـدريج تخبرنا أن طول الشخص هو عدد حقيقي واقع بين 171 سم و 172 سم إلا أنه أقرب إلى 172 سم منـه إلى 171 سم (النقطة C واقعة بعد منتصـف المسافة بين 171 و 172) ومن المنطقي جدا، في غياب أية معلومات أخرى، أن نصطلح على القول إن طول الشخص مقرب إلى أقرب سنتمتر هو 172سم. وكذلك النتيجة ستكون لو أن النقطة c وقعت في أي مكان من المنطقة المظللة على المحور، التي تمتد بين 171.5 سم إلى 172.5 سم. ولكن

ماذا لو وقعت c عند الـ 171.5 سم تماما أو عند الـ 172.5 تماما؟ في مثل هذه الحالة نتفق على تقريب الـ 171.5 سم إلى 172 سم، وتقريب الـ 172.5 سم إلى 173 سم. لنفرض الآن وجود تدريج ميلليمتري، فما اصطلحنا عليه سابقا يكافىء ما يلي:

إذا كان القياس 171.5 سم أو 171.6 سم أو 171.7 سم أو 171.8 سم أو 117.9 نعتبره 172 سم وكذلك نعتبره 172 سم إذا كان القياس 172.1 سم أو 172.2 سم أو 172.3 سم أو 172.4 سم. وهذا يُملي علينا، بصورة عامة، القاعدة التالية لتدوير الأرقام العشرية:



شكل (٤)

قاعدة

لتدوير عدد عشري إلى منزلة معينة ننظر في الرقم الذي يحتل المنزلة التي تليها فإذا كان 5 أو أكثر نضيف واحدا إلى المنزلة المطلوبة ونلغي جميع الأرقام العشرية التي تليها. وإذا كان 4 أو أقل نبقي المنزلة المطلوبة كما وردت ونستغني كذلك عن جميع الأرقام العشرية التي تليها.

مثال (١٥)

كيف تصبح الأعداد التالية بعد تدويرها إلى أقرب جزء من عشرة.

181.253 ، 314.0621، 7.3198 ، 0.9808 ، 0.0532 ، 9.1701

الحـــل

وفقـا للقاعـــدة المذكـورة أعلاه ، ننظر إلى الـرقم العشري الثاني فـإذا كان 5 أو أكـثر نضيف 1 إلى الرقـــم العشري الأول (وهـو الـرقم الذي يحتـــل منزلـة الجـزء مـــن عشرة) وإذا كان أقل من 5، نحتفظ بالرقـم العشري الأول كما ورد. وهكذا نجد، على الترتيب، 181.3 ، 314.1، 7.3، 1.0 ، 0.1، 9.2.

مثال (١٦)

فيما يلي عـدد الـزيـارات التي قـام بها المرضى المراجعـون للعيـادات الخارجيـة بالمستشفيـات ومراكـز الرعايـة الصحية الأوليـة في المناطق الأربع عشرة في المملكـة لعام ١٤٠٦هـ: 11168617، 4330131، 4870214، 3028921، 2049754، 4801820، 1577160، 6374554، 6034118 ، 1479722 ، 3875879 ، 3464826 ، 2825761 ، 1793849 .

والمطلـوب التعبير عن هذا البيـان العددي بـآلاف الأشخاص ثم تـدوير الـرقم الناتج إلى أقرب ألف .

الحـــل

التعبير عن البيـان بـآلاف الأشخاص يعني أن وحـدة القيـاس أصبحت «ألف شخص» فكل ألف مراجع يشكلون جماعة واحدة تتضمن ألف شخص. وللتعبير عن هـذه الأعداد بـآلاف الأشخاص يجب أن نقسم كـل عدد على ألف. وتـدوير الأعـداد الناتجة إلى أقـرب ألف يعني تدويرهـا إلى الرقم الذي يحتل منـزلة الآحاد. وهكـذا نجد الأعداد معبرا عنها بآلاف الأشخاص كما يلي:

11168.617، 4330.131، 4870.214، 3028.921، 2049.754، 4801.820، 1577.160، 6374.554، 6034.118 ، 1479.722 ، 3875.879 ، 3464.826 ، 2825.761 ، 1793.849 .

وبعد تدويرها إلى أقرب ألف نجد:

11169، 4330، 4870، 3029، 2050، 4802، 1577، 6375، 6034، 1480، 3876، 3465، 2826، 1794.

ونلاحظ أنه من الأيسر على القارىء متابعة البيان عندما يُعطى بهذا الشكل.

وفي الوقت الذي لا تخضع فيـه قياسات بيان عـددي من النوع المنفصل لأخطاء فإن القياسات في بيان عـددي من النوع المستمر تخضع دائما لخطأ يسمى خطأ القياس. ويعـود السبب في ذلك إلى أننا نستخـدم للوصـول إلى مثل ذلك القياس جهـازا أو أداة

للقياس، ولا يمكن للإنسـان أن يبتكر جهازا للقياس لا يخطىء. لقـد توصل الإنسان إلى ابتكار أجهزة قياس في علوم الفيزياء والكيميـاء وغيرها تقيس بدقة هائلة إلا أنها مع ذلك تخطىء. وبالطبع يضاف إلى هذا السبب أو المصدر مصـادر أخرى نذكر منها أن الإنسان الذي يقيس مُعرض أيضا لارتكاب خطأ، ومهما أحسن استخدام الجهاز الذي يقيس به فسيرتكب أيضا نوعا من الخطأ.

وعنـدما نطلّع على بيـان إحصائي عـددي من النوع المستمـر ينبغي أن نفهم من القياس المقدم لنا شيئين، أولهما فكرة عن مقدار الشيء المقيس وثانيهما درجة الدقة التي يتمتع بها القيـاس. وإذا قيل لنا إن طول شخـص هو 168.7 سم فإن هذا الـرقم يعطينا فكرة عن قامة الشخص ولكنه يعطينا أيضا أن دقة هذا القياس تصل إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، أي إلى أقرب ميلليمتر. وكقاعدة عـامة، يكون الرقم الأخير المعطى على اليمين رقما مشكـوكا في صحتـه. وعندمـا نقيس، بطريقـة علمية، طـول شخص ونفيد بأن طوله 168.7 سم فهذا يعني أن الطـول الحقيقي لهذا الشخص واقع في مكان ما بين 168.65 سم و 168.75 سم. ولتوضيح الفكرة نقول إننا لـو استخدمنا جهازا أكثر دقة لقيـاس الطول لأعطانا الطـول صحيحا حتى منزلة الجزء من مـائة، أي حتى الرقم العشري الثاني بعد الفـاصلة، وفي هذه الحالة سيكون الرقم العشري الأول بعـد الفاصلة صحيحا والشك لا يتطرق إلا إلى الرقم الذي يليـه، ولو أن دقة الجهاز سمحت بإعطاء ثلاثـة أرقام عشرية بعد الفـاصلة أي بدقة تصل إلى أقـرب جزء من ألف من السنتمتر، فسيكون الرقمان العشريان الأول والثاني بعد الفاصلة صحيحين ويتطرق الشك إلى الرقم العشري الثالث، وهكـذا. وبصرف النظر عن مقدار هذه الأرقام (الـرقم العشري الثاني والثالث والرابع الخ. بعد الفاصلة) فإن تدوير العدد الذي نحصل عليه إلى أقرب جزء من عشرة لن يعطينا 168.7 سم إلا إذا كان العـدد الذي نقوم بتدويـره واقعا بين 168.65 سم، و 168.749999 (ويمكن أن يتكرر الـرقم 9 إلى ما لا نهاية له) وذلـك وفقا لقاعدة تدوير الأرقام العشرية، ونصطلح هنا، توخيا للسهولة، أن القيمة الفعلية للقياس تقع بين 168.65 سم و 168.75 سم.

وبصورة عـامة، للوصـول إلى الحدين الأدنى والأعلى للقيمة الفعليـة لقياس من النوع المستمـر، معطى على شكل عدد صحيـح (أي مقرب إلى أقرب واحـد صحيح)، نطرح منه 0.5 فنحصل على الحد الأدنى ونضيف إليه 0.5 فنحصل على الحد الأعلى. أما إذا كان القيـاس معطى كعدد عشري فنضع صفرا بعد آخـر رقم معطى في القياس (أي آخر رقم على اليمين بعد الفاصلـة العشرية) ثم نضع الرقم 5 تحت هذا الصفر ونطرح فنحصل على الحد الأدنى ثم نجمع للحصول على الحد الأعلى. (محتفظين بـالفاصلة في موقعها تماما عند الجمع أو الطرح) ونوضح الطريقة بالمثال التالي:

مثال (١٧)

ما هو الحد الحقيقي الأدنى والأعلى لكل من القياسات التالية:

12 سم، 1517 سم، 18.4 سم، 125.05 سم، 34.70 سم، 4.3208 سم؟

الحـــل

الحدود المطلوبة هي على الترتيب:

$$\begin{array}{r} 12.0 \\ 0.5- \\ \hline 11.5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12.0 \\ 0.5+ \\ \hline 12.5 \end{array}$$

فالقياس الأول واقع فعلا بين 11.5 سم و12.5 سم:

وبصورة مماثلة نجـد أن القياس الثاني واقع فعلا بين 1516.5 سم و 1517.5 سم.

ومن أجل القياس الثالث نكتب:

$$\begin{array}{r} 18.40 \\ 0.05- \\ \hline 18.35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18.40 \\ 0.05+ \\ \hline 18.45 \end{array}$$

والقياس الثالث واقع فعلا بين 18.35 سم و 18.45 سم.

وبصورة مماثلة نكتب من أجل القياسات الثلاثة الباقية، على الترتيب،

125.050	125.050
0.005 +	0.005 −
125.055	125.045
34.700	34.700
0.005 +	0.005 −
34.705	34.695
4.32080	4.32080
0.00005 +	0.00005 −
4.32085	4.32075

وفي كل حالة إنما نطرح ونضيف، في الواقع، نصف وحدة دقة. حيث وحدة الدقة هي الواحد في منزلة الرقم المشكوك فيه .

١٠ ـ التناسب الطردي

نقول إن المتغيرين x و y متناسبان طرديا إذا بقيت نسبتهما ثابتة. أي $c = \frac{y}{x}$ ، أو $y = cx$ حيث c عدد ثابت يسمى ثابت التناسب .

لنفرض الآن أن المقدارين x و y يتغيران متناسبين طرديا. ولنفرض أن x تغير من x إلى $x + \Delta x$، وفي مقابل ذلك تغير y من y إلى $y + \Delta y$. ما هي العلاقة بين Δx تغير x و Δy تغير y؟ وللإجابة نفترض أن ثابت التناسب c ، فيكون :

$$\frac{y}{x} = c\,,\ \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} = c$$

ومنه

$$\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} = \frac{y}{x}$$

ومن خواص التناسب يمكن أن نكتب:

$$\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}=\frac{-y}{-x}=\frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x)-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أي أن $\frac{\Delta y}{\Delta x}=c$ أو $\Delta x = c\Delta x$

فالتغيران في x و y يحافظان دائما على علاقة التناسب الطردي ذاتها القائمة بين x و y. ونلجأ إلى هذه الحقيقة البسيطة في كثير من التطبيقات. فإذا علمنا مثلا أنه عندما ازدادت قيمة x بمقدار 5، ازدادت قيمة y بمقدار 3؛ فكم سيزداد y مقابل زيادة في x مقدارها 7؟ ولحساب المطلوب نكتب:

$$\frac{3}{5}=\frac{\Delta y}{7}$$

ومن خواص التناسب نعلم أن

$$5\times\Delta y=3\times 7$$

$$\Delta y=\frac{3\times 7}{5}=4.2$$

ونلخص عادة هذه العمليات في مخطط بسيط كما يلي:

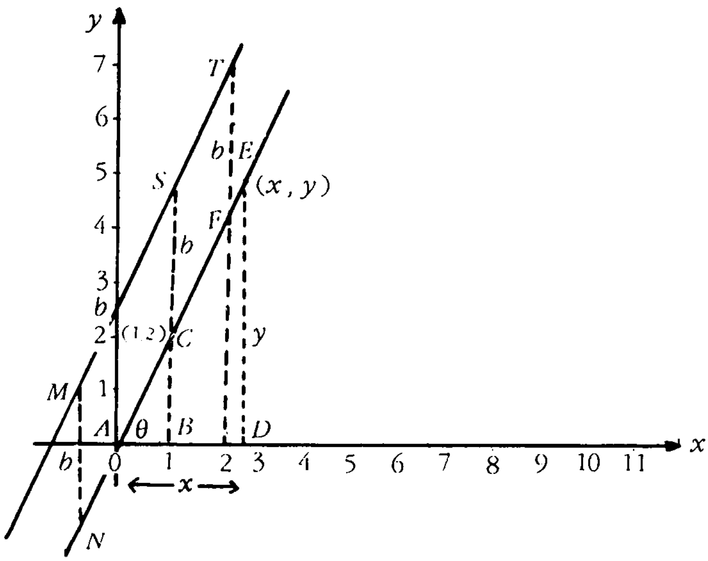
ΔX	ΔY
5	3
7	?

وتكون الزيادة المطلوبة في y مساوية $\frac{3\times 7}{5}=4.2$

١١ ـ معادلة مستقيم

لندرس أولا معادلة مستقيم يمر من مبدأ الاحداثيات. ويتحدد المستقيم تماما عند معرفة نقطتين منه. وفي حالتنا هنا نعلم سلفا أن المستقيم يمر من النقطة (0,0) وهي مبدأ الاحداثيات، فتكفي معرفة نقطة واحدة أخرى لكي يكون ممكنا تحديد معادلة المستقيم. لنفرض أن النقطة (1,2) واقعة على المستقيم فكيف نحدد معادلته؟

إذا رسمنا محورين للاحداثيات وحددنا النقطة (1,2) ثم وصلنا بينها وبين المبدأ نحصل على بيان المستقيم. وعلى هذا البيان نأخذ نقطة ما، نرمز لاحداثياتها بـx وy ، وتكون المعادلة المطلوبة هي علاقة بين x وy . ومن تشابه المثلثين ABC و ADE نكتب :



شكل (٥)

أو
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

ومنه
$$\frac{1}{x} = \frac{2}{y}$$
$$y = 2x$$

وهي ذات العلاقة التي تربط بين مقدارين متناسبين طرديا، حيث ثابت التناسب يساوي 2. وتنبغي ملاحظة أن ثابت التناسب 2 يمثل ظل الزاوية θ (حرف يوناني منطوقه ثيتا) التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (انظر الشكل ٥) ويسمى ظل الزاوية θ ميل المستقيم. وكل مستقيم آخر في المستوى ميله 2، أي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية تساوي زاوية المستقيم AE ، سيقطع المحور الصادي في نقطة غير نقطة المبدأ. لنفرض مستقيما MT موازيا لـAE ويقطع المحور

الصادي في نقطة $(b, 0)$. فما معادلتـه؟ يمكن الحصول على نقـاط المستقيم MT بإضافة مقدار ثابت b إلى الاحداثي الصادي للنقـاط الموافقة من المستقيم $y = 2x$، وهي النقاط التي تقع على الخط الرأسي نفسه. فإذا أضفنـا إلى الاحداثي الصادي للنقطة N مقدار b حصلنا على M وإذا أضفنا المقدار b إلى الاحداثي الصادي لكل من c و F وجدنا، على الترتيب، S و T. وهذا يعني أن معادلة المستقيم الجديد هي

y (نقطة على المستقيم الجديد) = y (نقطة على المستقيم AE) + b

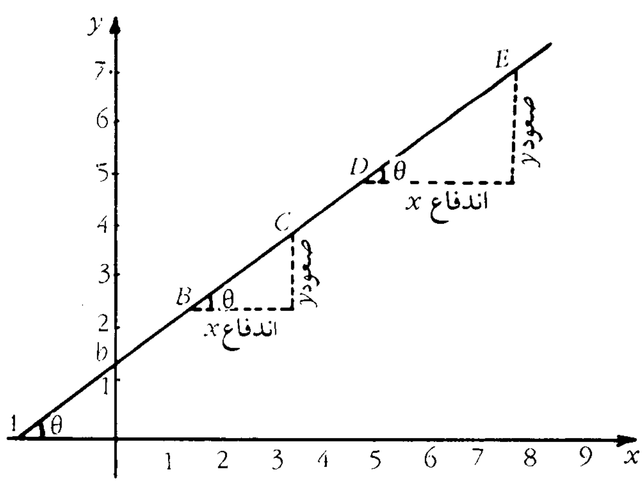
أو

$$y = 2x + b$$

وبصورة عامة نجد أن معادلة المسستقيم AE (انظر الشكل ٦) هي

$$y = (\text{ظل الزاوية } \theta)x + b$$

حيث b إحداثي نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات.



شكل (٦)

ولو انتقلت نقطـة على المستقيم من الوضع B إلى الوضع C فإن x سيتغير بمقدار سميناه «اندفاع x» وسيقابله تغير في y سميناه «صعود y». وكذلك عند انتقال نقطة من

الوضع D إلى الوضع E، فإن x سيتغير بمقدار سميناه «اندفاع x» وسيقابله تغير في y سميناه أيضا «صعود y». ومن خواص الشكل الهندسية نلاحظ بسهولة أن

$$\text{ثابت} = \text{ظل}\ \theta = \frac{\text{صعود}\ y}{\text{اندفاع}\ x}$$

أي أن نسبة تغير y إلى تغير x تبقى ثابتة باستمرار، في حالة مستقيم. وهي الخاصة نفسها التي رأيناها في حالة مقدارين متناسبين طرديا.

وأخيرا، إذا كانت العلاقة بين متغيرين x و y علاقة خط مستقيم قلنا إنها علاقة خطية. وبصورة عامة، معادلة أي مستقيم هي علاقة خطية وبالعكس كل علاقة خطية تمثل مستقيما.

١٢ ـ تصميم الجداول

نحتاج إلى تنظيم نتائج التجارب والمشاهدات العلمية في شكل جداول، وذلك في مختلف ميادين المعرفة. وفي أبسط الحالات نجد جدولا ثنائيا، يتضمن في كل خلية من خلاياه قياسا أو مشاهدة مرتبطة بمتغيرين، ثبتنا كلا منهما عند مستوى معين من مستوياته الممكنة. فنفرض، مثلاً، أن لمتغير x ثلاثة مستويات، سنرمز لها بـ x_1، x_2، x_3؛ وأن لمتغير آخر y أربعة مستويات، سنرمز لها بـ y_1، y_2، y_3، y_4؛ وإذا حصلنا عند كل زوج مختلف من المستويات للمتغيرين x و y على قياس أو مشاهدة، فسيتوفر لدينا اثنا عشر قياسا نضعها في جدول كما في الشكل (٧).

حيث أشير بـ × للقياس وبـ ـــ لمجاميع السطور أو الأعمدة وبـ = للمجموع الكلي. وبصورة عامة، إذا كان عدد مستويات المتغير x مساويا لـ n، وعدد مستويات المتغير y مساويا لـ m فإن عدد خلايا الجدول سيكون $n \times m$.

وفي حال وجود ثلاثة متغيرات x وله n من المستويات، y وله r من المستويات، و z وله q من المستويات، نحتاج إلى تصميم جدول ثلاثي يتضمن $n\ r\ q$ خلية. ونلاحظ بوضوح أننا نحتاج إلى جدول ثنائي مؤلف من $n\ r$ خلية ليستوعب المتغيرين x

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	y_4	المجموع
x_1	×	×	×	×	-
x_2	×	×	×	×	-
x_3	×	×	×	×	-
المجموع	-	-	-	-	=

شكل (٧)

و y . ثم نعيد هذا الجدول q مرة وذلك عند كل مستوى من مستويات المتغير الثالث z . ولتقديم مثال عن تصميم جدول ثلاثي نفترض أن $n = 3$ ، $r = 4$ ، $q = 3$. فنجد جدولا كما في الشكل (٨).

	Z_1			المجموع	Z_2			المجموع	Z_3			المجموع
	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3	
y_1	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_2	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_3	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_4	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (٨)

ومن الواضح أنه يمكن تنظيم الجدول بطريقة ثانية تستوعب فيها الجداول الثنائية المكررة مستويات Z و Y . (انظر الشكل ٩) أو بطريقة ثالثة تستوعب فيها الجداول الثنائية المكررة مستويات X و Z . (انظر الشكل ١٠).

	x_1			المجموع	x_2			المجموع	x_3			المجموع
	z_1	z_2	z_3		z_1	z_2	z_3		z_1	z_2	z_3	
y_1	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_2	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_3	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_4	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (٩)

	y_1			المجموع	y_2			المجموع	y_3			المجموع	y_4			المجموع
	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3	
z_1	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
z_2	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
z_3	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (١٠)

وعلى سبيل المثال، لنفرض أن لدينا أربعة أنواع من الأبقار نرمز لها C_1, C_2, C_3, C_4 . أخضعناها في محطة للتجارب الزراعية تابعة لكلية الزراعة، إلى ثلاثة أشكال من النظام الغذائي هي N_1, N_2, N_3 . وذلك لدراسة أثر النظام الغذائي في إنتاج الحليب اليومي بالكغ لكل من الأنواع الأربعة. وكانت النتائج كما في الجدول الثنائي التالي:

أنواع البقر / النظام الغذائي	C_1	C_2	C_3	C_4	المجموع
N_1	25	28	30	35	118
N_2	28	29	31	35	123
N_3	27	28	31	34	120
المجموع	80	85	92	104	361

وإذا فرضنـا أن التجربـة نفسها قـد أجريت في محطـة للتجارب الـزراعية في أبها وذلك لدراسـة أثر عامـل البيئة والمناخ. إذا رمزنا لعامل البيئة بـV فلدينا هنا مستويان V_1 وتـرمز لبيئـة المنطقة الـوسطى و V_2 وترمـز لبيئة المرتفعـات الجنوبيـة الغربيـة من المملكة. وأن تجربة أبها أعطت النتائج التالية:

أنواع البقر / النظام الغذائي	C_1	C_2	C_3	C_4	المجموع
N_1	27	30	29	38	124
N_2	29	33	30	36	128
N_3	30	31	29	38	128
المجموع	86	94	88	112	380

فيمكن جمع هـذه النتائج في جـدول واحد يلخص العـوامل الثلاثـة N, C و V. وذلك بأشكال مختلفة، منها، على سبيل المثال، الشكل التالي:

	V_1				المجموع	V_2				المجموع
	C_1	C_2	C_3	C_4		C_1	C_2	C_3	C_4	
N_1	25	28	30	35	118	27	30	29	38	124
N_2	28	29	31	35	123	29	33	30	36	128
N_3	27	28	31	34	120	30	31	29	38	128
المجموع	80	85	92	104	361	86	94	88	112	380

أو يمكن تنظيمه على الشكل التالي :

	V_1			المجموع	V_2			المجموع
	N_1	N_2	N_3		N_1	N_2	N_3	
C_1	25	28	27	80	27	29	30	86
C_2	28	29	28	85	31	33	31	94
C_3	30	31	31	92	29	30	29	88
C_4	35	35	34	104	38	36	38	112
المجموع	118	123	120	361	124	128	128	380

كما يمكن كتابته على الشكل:

	N_1			N_2			N_3		
	V_1	V_2	المجموع	V_1	V_2	المجموع	V_1	V_2	المجموع
C_1	25	27	52	28	29	57	27	30	57
C_2	28	30	58	29	33	62	28	31	59
C_3	30	29	59	31	30	61	31	29	60
C_4	35	38	73	35	36	71	34	38	72
المجموع	118	124	242	123	128	251	120	128	248

تمرين: اقترح أشكالا أخرى.

ويمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين C و V، مثلا، بالجمع فوق مستويات العامل N فنجد:

	V_1	V_2	المجموع
C_1	80	86	166
C_2	85	94	179
C_3	92	88	180
C_4	104	112	216
المجموع	361	380	741

وكذلك يمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين C و N، مثلا، بالجمع فوق مستويات العامل V فنجد:

	N_1	N_2	N_3	المجموع
C_1	52	57	57	166
C_2	58	62	59	179
C_3	59	61	60	180
C_4	73	71	72	216
المجموع	242	251	248	741

وبصورة مماثلة يمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين N و V.

ومن المجاميع الفرعية في الشكل (٧) يمكن تشكيل جدولين ثنائيين. فإذا أخذنا المجاميع الفرعية الواردة في وضع شاقولي نجد جدولا 3×4 يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت z و y فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير x أو جمعنا فوق مستويات X. ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي $z \times y$»، وكذلك لو أخذنا المجاميع الفرعية الواردة في وضع أفقي نجد جدولا 3×3 يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت Z و X فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير y أو جمعنا فوق مستويات Y. ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي $z \times x$». ولو أخذنا في الشكل (٧) المجاميع الفرعية الواردة في وضع شاقولي لوجدنا جدولا 3×4 يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت x و y فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير Z، أو جمعنا فوق مستويات Z. ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي $x \times y$». (ضع جداول ثنائية في مثال الأبقار تمثل $N \times C$، $N \times V$، $C \times V$).

ولتوضيح حالة أربعة متغيرات نأخذ المثال التالي. فلنفرض أن لدينا أربعة متغيرات هي x ويقع في ثلاثة مستويات؛ y ويقع في 3 مستويات؛ Z ويقع في 3 مستويات؛ T ويقع في مستويين. فعندئذ يمكن تصميم جدول $y \times x \times Z \times T$ أبعاده $4 \times 3 \times 3 \times 2$ ويتضمن 72 خلية. هي في الواقع ستة جداول كل منها 3×4. (انظر الشكل ١١).

		Z_1			Z_2			Z_3		
		x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
T_1	y_1	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_2	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_3	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_4	×	×	×	×	×	×	×	×	×
T_2	y_1	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_2	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_3	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_4	×	×	×	×	×	×	×	×	×

شكل (١١)

تمارين الملحق الأول

١) قم بالعمليات الحسابية والجبرية التالية إن أمكن:

ا - في الفصل أربعون طالبا وخمسون مقعدا وثلاثة نوافذ. كم طالبا ومقعدا ونافذة في الفصل؟

ب - في الغرفة ا أربعون طالبا وخمسون مقعدا، وفي الغرفة المجاورة ب ثلاثون طالبا وخمسة وأربعون مقعدا. ما هو عدد الطلاب وعدد المقاعد في الغرفتين معا؟

جـ - $3xy^2z + 0.5\,xy^2z + 1.2xy^2z - 2.2xy^2z = ?$

د - $5x^2yz^2 + 3xyz^2 - x^2yz = ?$

هـ - $5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} = ?$

و - $\sqrt{15} - 3\sqrt{5} = ?$

ز - $8\,F(3) + 3\,F(3) - 0.5\,F(3) - F(3) = ?$

ح - $7\,F(2) - 3\,F(1) = ?$

ط ـ $\frac{2}{3} + \frac{3}{7} - \frac{5}{21} = ?$

ك ـ $\frac{3}{32} + \frac{5}{16} + \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{13}{32} - 1 = ?$

ل ـ $0.5403 + 1.0279 + 12.03 - 3.0101 - 14.123 = ?$

٢) في صندوق ثـلاث كرات حمر وخمس كـرات سود وثماني كـرات بيض ما هـي النسبة المئوية في الصندوق لكل من الكرات الحمر والكرات السود والكرات البيض؟

٣) في الفصل 25 طالبا من طلاب كلية العلوم و 10 من طلاب الحاسب الآلي و إثنان من الهندسة وطـالب من العلوم الصحية . ما هي النسبـة المئوية لوجـود طلاب كليات العلوم والحاسب الآلي والهنـدسة والعلوم الصحية في الفصل علما أن مجمـوع طلاب الفصل 38 طالبا؟

٤) احسب ما يلي : $12.025 \times 0.19 = ?$

$\frac{4}{5} \times 0.61 = ? \quad ; \quad \frac{2}{9} \times \frac{7}{5} = ? \quad ; \quad \frac{7}{3} \times \frac{7}{9} = ?$

$130.576 \div 1.2 \quad ; \quad 0.7895 \div 0.05$

٥) مستخدما خواص التناسب فيما يلي :

ا ـ أحسب x إذا كان $\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$

ب ـ أحسب x و y إذا كان $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ ، و $x + y = 10$.

جـ ـ في صندوق كرات بيض وسـود نسبة 2 إلى 1 ، على الترتيب، أحسب عـدد الكرات من كل نوع إذا علمت أن الصندوق يتضمن 12 كرة .

د ـ إذا كان $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ و $y^2 - x^2 = 32$ فاحسب x و y .

هـ ـ إذا كان $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ و $x + y + z = 30$

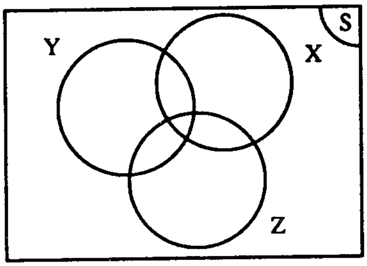
فاحسب x، y، z .

٦) $A = \{ x :$ طالب في جامعة الملك سعود $x\}$; $B = \{ y :$ طالب متزوج $y\}$
$C = \{ Z :$ طالب لا يدخن $Z\}$
عبر كلاميا عن $A \cap B$، $B \cap C$، $A \cap C$، $A \cap B \cap C$.

٧) أوجد $A \cup B$ في كل من الحالات التالية:
أ ـ $A = \{a, b, c\}$، $B = \{b, c, d\}$
ب ـ $A = \{a, b, c\}$، $B = \{a, b\}$
جـ ـ $A = \{O , \bigstar\}$، $B = \{+ , -\}$

٨) لتكن المجموعة الشاملة S هي مجموعة سكان شبه الجزيرة العربية:
$A = \{a :$ مواطن سعودي $a\}$ ، $B = \{b :$ شخص متعلم $b\}$
$C = \{c :$ شخص مغترب $c\}$
عبر كلاميا عن المجموعات التالية:
$\bar{A}$ ، $A \cap B$ ، $\bar{B} \cap \bar{C}$ ، $B \cup C$ ، $A \cap B \cap C$ ، $\bar{A} \cup (B \cap C)$
$B \cup \bar{B}$ ، $A \cup B$ ، $B - C$ ، $B - \bar{C}$.

٩) يمثل الشكل (١٢) المقابل ثلاث مجموعات X ، Y ، Z . ظلل المنطقة التي تمثل المجموعات التالية، كل واحدة في رسم مستقل.
أ ـ $X \cup (Z \cup Y)$
ب ـ $(X \cup Z) \cup Y$ ، وقارن النتائج مع أ.
جـ ـ $(X \cap Y) \cap Z$
د ـ $X \cap (Y \cap Z)$ وقارن النتائج مع جـ .
هـ ـ $X \cap (Y \cup Z)$.



شكل (١٢)

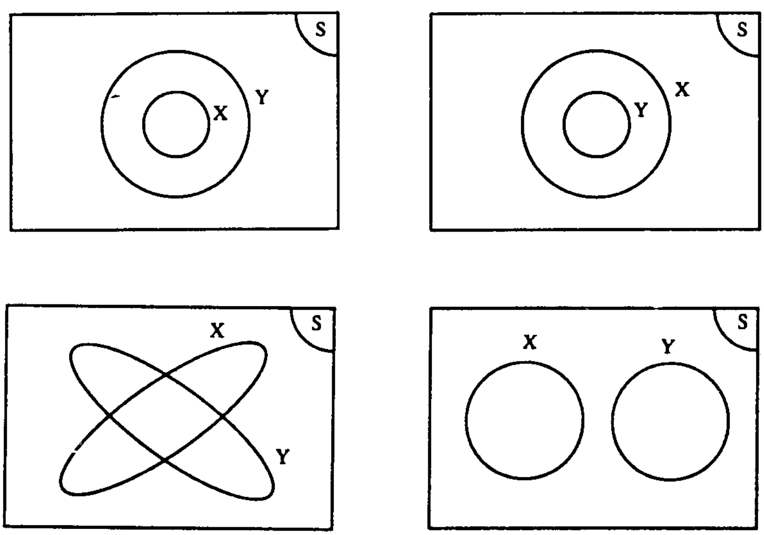
و ـ $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ وقارن الناتج مع هـ .

ز ـ $X \cup (Y \cap Z)$.

ح ـ $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ وقارن النتائج مع ز .

لخص النتائج التي حصلت عليها من هذا التمرين بالنسبة إلى قابلية توزيع عملية التقاطع على عملية الاتحاد وتوزيع عملية الاتحاد على عملية التقاطع .

١٠) ظلل $Y - X$ في كل من الأشكال التالية :



شكل (١٣)

١١) في الشكل (١٤)، المقابل، أكتب المجموعات:

أ ـ X،

ب ـ Y،

جـ ـ $X \cap Y$،

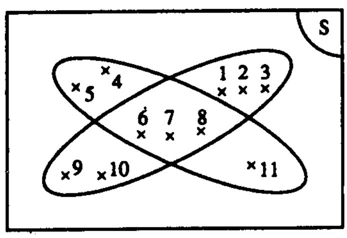
د ـ $X - Y$، $X - (X \cap Y)$،

هـ ـ $Y - X$، $Y - (X \cap Y)$،

و ـ $X \cup Y$،

ز ـ $(X \cup Y) - X$،

لاحظ أن الناتج لا يساوي Y، متى يكون الناتج مساويا لـ Y ؟



شكل (١٤)

١٢) اكتب الجداء الديكارتي $X \times Y$ إذا كان $X = \{b, c, d\}$ ؛ $Y = \{m, n, t\}$، أكتب أيضا $X \times X$ و $Y \times Y$.

١٣) لتكن الدالة المعرفة بالقاعدة

$$y = \frac{2x + 5}{x - 3}$$

أ ـ حدد مجموعة تعريف الدالة ومداها،

ب ـ احسب $f(-1)$، $f(0)$، $f(4)$، $f(5)$، $f^{-1}(1)$، $f^{-1}(7)$.

١٤) التطبيق $f: Z \to Z$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة. معرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } x \text{ عددا يقبل القسمة على } 2 \\ 1 & \text{إذا كان } x \text{ لا يقبل القسمة على 2 ويقبل القسمة على } 3 \\ 2 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ما هي صور الأعداد 8- ، 6- ، 5- ، 0 ، 3 ، 7 ، 11 ، 16 ؟

١٦) لتكن الدالة العددية f المعرفة بالقاعدة:

$$f(x) = \begin{cases} x \,, & x \leq 0 \quad \text{إذا كان} \\ 0 \,, & 0 < x \leq 1 \quad \text{إذا كان} \\ 1 \,, & x > 1 \quad \text{إذا كان} \end{cases}$$

أ ـ أحسب f (-5)، f (1/2)، f (1)، f (3)، f (1000) .

ب ـ أرسم بيان هذه الدالة وعين مداها .

١٧) لتكن الدالة العددية f المعرفة بالقاعدة:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \,, & x < -1 \quad \text{إذا كان} \\ 1 \,, & 1 < x < 2 \quad \text{إذا كان} \\ -2x + 3 \,, & x > 3 \quad \text{إذا كان} \end{cases}$$

ا ـ عين مجموعة تعريف هذه الدالة (ساحة الدالة) .

ب ـ أحسب $f(-3)$ ، $f(-2)$ ، $f(3/2)$ ، $f(5)$.

جـ ـ ما هي الصورة العكسية للعدد (2-) .

د ـ أرسم بيان هذه الدالة .

١٨) أكتب بالتفصيل ما تمثله المجاميع التالية:

$$\sum_{i=2}^{6} x_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} (x_i - 2)^2 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} (x_i + 3)\, x_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} f_i x_i^2$$

١٩) أكتب كلا من العبارات التالية مستخدما إشارة المجموع Σ :

$y_9^2 + y_{10}^2 + y_{11}^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2$, $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, $(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + (x_3 - m)^2$,

$kn_1 + kn_2 + kn_3 + kn_4 + kn_5$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$,

$y_1 + y_2 + y_3 - a - a^2 - a^3$, $ay_1 + a^2 y_2 + a^3 y_3 + a^4 y_4$,

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$, $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$

٢٠) إذا كان $x_1 = 3$ ، $x_2 = 2$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 0$ ، $x_5 = -3$ حيث

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$ و $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 23$. أحسب قيمة كل من العبارات التالية :

(i) باستخدام تعريف Σ ،

(ii) تبسيط العبارة أولا مستخدما خواص Σ ثم حساب القيمة .

أ- $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 10)$

ب- $\sum_{i=1}^{5} (2x_i + 3)$

جـ- $\sum_{i=1}^{4} (x_i + x_{i+1})$

د- $\sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i+1})$

هـ- $\sum_{i=1}^{5} (x_i - 1)(x_i + 1)$

٢١) (i) بين أن

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^2-r^2\right]=(n+1)^2$$

(أكتب أول حدين وآخر حدين ولاحظ اختصار الحدود السالبة مع الحدود الموجبة).

(ii) بين أن

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^2-r^2\right]=2\sum_{r=0}^{n}r+n$$

(باستخدام خواص $\sum$).

(iii) من (i) و (ii) بين أن $\sum_{r=0}^{n}r=\frac{1}{2}n(n+1)$

٢٢) إذا كانت النقطة $(x, 11)$ واقعة على المستقيم $y=3x+5$ فاحسب قيمة x .

٢٣) بين أن النقاط الثلاثة (2,5) ، (4, 9) ، (1, 3) واقعة على استقامة واحدة .

٢٤) في مسح لالتهاب الكبد الفيروسي في مدينة معينة، جرى تسجيل الحالات التي أخبر عنها من المستشفيات، ومن العيادات الطبية، ومن السلطات الصحية المحلية. ويبين الجدول التالي أعداد المرضى الموجودين في مستشفى وغير الموجودين في مستشفى، مصنفين وفقا للجنس، العمر، ولما إذا كانت الحالة من النوع HBSAG أم لا.

أكتب جداول مختصرة تبين تغير نسبة المرضى في المستشفيات مع كل من العمر، الجنس، وحالة الـ HBSAG .

HBSAG سلبي				HBSAG إيجابي				العمر بالسنوات
في مستشفى		ليس في مستشفى		في مستشفى		ليس في مستشفى		
أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	
0	0	0	0	9	25	42	43	0 - 14
7	16	10	18	20	39	39	41	15 - 29
4	18	3	17	10	21	25	48	≥ 30

٢٥) يتألف فصل الإحصاء من 40 طالبا. صنفوا وفق ثلاثة متغيرات هي الجنسية (سعودي، غير سعودي)، والسكن (يعيش في سكن الطلاب، لا يعيش في سكن الطلاب)، والكلية التي ينتسب إليها (علوم، حاسب آلي، هندسة). إذا علمت أن:

15 طالب سعودي يسكنون في سكن الطلاب ومن العلوم؛ 5 سعوديون لا يسكنون ومن العلوم، 3 طلاب سعوديون يسكنون في سكن الطلاب ومن الحاسب؛ 2 غير سعوديين يسكنون ومن العلوم، 4 طلاب سعوديون يسكنون في سكن الطلاب ومن الهندسة؛ 1 غير سعودي يسكن ومن الحاسب، 1 غير سعودي لا يسكن ومن الحاسب. فاعرض هذه المعلومات في جدول علما أن ربع طلاب الفصل من غير السعوديين وأن طلاب الهندسة هم حصرا من السعوديين وجميعهم يعيشون في سكن الطلاب.

الملحق الثاني

بعض الجداول الإحصائية

١ ـ جدول التوزيع الطبيعي المتجمع

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t^2/2}\,dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7743	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9023	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9734	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

جدول توزيع ستيودنت t المتجمع

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}\,dx$$

n \ F	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.55	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.888
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.683	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.667	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

ثبت المصطلحات

- عربي - إنجليزي
- إنجليزي - عربي

أولا : عربي - إنجليزي

أ

اتحاد	Union
احتمال شرطي	Conditional probability
إحصاء	Statistics
وصفي	Descriptive statistics
اختبار فرضية	Hypothesis testing
ارتباط	Correlation
استقلال	Independence
أصلي	Original
انحراف	Deviation
متوسط	Mean deviation
معياري	Standard deviation

ب

بيانات	Data
ترتيبية	Ordinal data
عددية	Interval value data
وصفية	Nominal data
بياني	Graphic

ت

تباين	Variance
تجربة	Experiment
ترتيب تصاعدي	Ascending order
طبيعي	Natural order
ترميز	Coding
تفرطح	Kurtosis
تقاطع	Intersection
تقدير	Estimate
بفترة	Interval estimation
تقريب	Approximation
الثنائي بالطبيعي	Normal approximation to binomial

تكرار	Frequency
تكرارات مستقلة	Independent trials
تكرار متجمع	Cumulative frequency
تمثيل بياني	Graphic presentation
توزيع	Distribution
احتمالي منفصل	Discrete probability distribution
التكرار	Frequency distribution
ثنائي	Binomial distribution
ستيودنت «التوزيع t»	Student's t-distribution
طبيعي	Normal distribution
طبيعي معياري	Standard normal distribution
فوق الهندسي	Hypergeometric distribution
المعاينة	Sampling distribution
توقع	Expectation
رياضي	Mathematical expectation

ج

جدول التكرار	Frequency distribution

ح

حادثة	Event
حادثتان متنافيتان	Mutually exclusive events
منفصلتان	Disjoint events
حادثة بسيطة	Simple event
خالية	Empty event
مركبة	Compound event
حجم العيّنة	Sample size
حد الشقة الأدنى	Lower confidence bound
حوادث مستقلة	Independent events

ر

ربع أول	First quardrant
ربيع أدنى	Lower quarter
أعلى	Upper quarter

ع

عشوائي	Random
عُشير	Decile
عملية	Operation
عنصر	Element
عيّنة	Sample

ف

فترة ثقة	Confidence interval
فرضية	Hypothesis
إبتدائية	Null hypothesis
فضاء	Space
العيّنة	Sample space

ق

قانون بايز	Bayes law
قياس	Measurement
قيمة مطلقة	Absolute value

ك

كشف (تفتيش)	Inspection
بطريقة العينة	Sampling inspection

م

مبدأ العدّ	Counting Principal
متباينة	Inequality
متغيّر	Variable
عشوائي متصل (مستمر)	Continuous random variable
عشوائي منفصل	Discrete random variable
متممة (مكملة)	Complement
متوافقات (توافيق)	Combinations
متوسط	Mean
الانحراف	Mean deviation
حسابي	Arithmatic mean
عيّنة	Sample mean
مرجّح (موزون)	Weighted mean
مجموعة	Set
جزئية	Subset
شاملة	Universal set
مخطط الانتشار	Scatter diagram
ڤن	Venn - diagram
مدى	Range
ربيعي	Interquartile range
مدرج	Hystogram
التكرار	Frequency hystogram
مساواة	Equality
مستوى الدلالة	Level of significance
مسلمات الاحتمال	Axioms of probability
مشاهدة (ملاحظة أو قياس)	Observation
مضلع التكرار	Frequency polygon
المتجمع	Cumulative frequency polygon
معامل	Coefficient
ارتباط	Correlation coefficient
تغير	Coefficient of variation
ثقة	Confidence coefficient
معاينة	Sampling
طبقية	Stratified sampling
معياري	Standard
مقاييس التشتت	Measures of dispersion
النزعة المركزية	Measures of central tendency
مقدمة	Introduction
مقياس	Measure
منحنى	Curve
التكرار	Frequency curve
طبيعي	Normal curve
منطقة حرجة	Critical region
منفصل	Discrete
منوال	Mode

ن

نتيجة	Outcome
نظرية النهاية المركزية	Central limit theorem
نموذج	Model
الاحتمالات المتساوية	Equal probability model

و

وسيط	Median
وصف بيانات	Description of data

ثانيًا : إنجليزي - عربي

A

Absolute value	قيمة مطلقة
Approximation	تقريب
Arithmatic mean	متوسط حسابي
Ascending order	ترتيب تصاعدي
Axioms of probability	مسلمات الاحتمال

B

Bayes law	قانون بايز
Binomial distribution	توزيع ثنائي

C

Central limit theorem	نظرية النهاية المركزية
Coding	ترميز
Coefficient	معامل
of variation	معامل التغيّر
Combinations	متوافقات (توافيق)
Complement	متممة
Compound event	حادثة مركبة
Conditional probability	احتمال شرطي
Confidence coefficient	معامل الثقة
interval	فترة ثقة
Continuous random variable	متغيّر عشوائي متصل مستمر
Correlation	ارتباط
coefficient	معامل ارتباط
Counting principle	مبدأ العدّ
Critical region	منطقة حرجة
Cumulative frequency	تكرار متجمع
polygon	مضلع التكرار المتجمع
Curve	منحنى

D

Data	بيانات
Deciles	عشيرات
Description of data	وصف بيانات
Descriptive statistics	إحصاء وصفي
Deviation	انحراف
mean	متوسط الانحراف

Discrete	منفصل
probability distribution	توزيع احتمالي منفصل
random variable	متغيّر عشوائي منفصل
Disjoint events	حادثتان منفصلتان
Distribution	توزيع

E

Element	عنصر
Empty event	الحادثة الخالية
Equality	مساواة
Equal probability model	نموذج الاحتمالات المتساوية
Estimate	تقدير
Event	حادثة
Expectation	توقع
Experiment	تجربة

F

First quardrant	الربع الأول
Frequency	تكرار
curve	منحنى التكرار
distribution	توزيع التكرار
histogram	مدرج التكرار
polygon	مضلع التكرار
table	جدول التكرار

G

Graphic	بياني
presentation	تمثيل بياني

H

Histogram	مدرج
Hypergeometric	فوق الهندسي
distribution	توزيع فوق الهندسي
Hypothesis	فرضية
testing	اختبار فرضية

I

Independence	استقلال
Independent events	حوادث مستقلة
trials	تكرارات مستقلة
Inequality	متباينة
Inspection	كشف (تفتيش)
Interquartile range	المدى الربيعي
Intersection	تقاطع
Interval estimation	تقدير بفترة
valued data	بيانات عددية
Introduction	مقدمة

K

Kurtosis	تفرطح

L

Level of significance	مستوى الدلالة
Lower confidence bound	حد الثقة الأدنى
quartile	الربيع الأدنى

M

Mathematical expectation	توقع رياضي
Mean	متوسط
deviation	الانحراف المتوسط
Measure	قياس (مقياس)
Measurement	قياس

Measures	مقاييس
of central tendency	مقاييس النزعة المركزية
of dispersion	مقاييس التشتت
Median	وسيط
Mode	منوال
Model	نموذج
Mutually exclusive events	حادثتان متنافيتان

N

Natural order	ترتيب طبيعي
Nominal data	بيانات وصفية
Normal approximation to binomial	تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي
curve	المنحنى الطبيعي
distribution	توزيع طبيعي
Null hypothesis	الفرضية الابتدائية

O

Observation	مشاهدة (ملاحظة) (قياس)
Operation	عملية
Ordinal data	بيانات ترتيبية
Original	أصلي
Outcome	نتيجة

P

Parameter	وسيط (معلمة)
Partial	جزئي
Partition	تجزئة
Percentage	نسبة مئوية
Percentiles	المئينات
Permutations	متبادلات (تباديل)
Point	نقطة
estimation	تقدير نقطي
Poisson distribution	توزيع بواسون
Population	مجتمع
Presentation of data	عرض البيانات
Probability	احتمال
Properties	خواص
Proportion	نسبة

Q

Quartiles	الربيعات

R

Random	عشوائي
experiment	تجربة عشوائية
number	رقم عشوائي
sample	عيّنة عشوائية
variable	متغيّر عشوائي
Range	مدى
Rank correlation	ارتباط الرتب
Ratio	نسبة
Raw data	البيانات الخام
Real	حقيقي
numbers	أعداد حقيقية
numbers axis	محور الأعداد الحقيقية
Relative frequency	تكرار نسبي
Rule	قاعدة
Rules of probability	قواعد الاحتمال

Stratified sampling	معاينة طبقية
Student's t-distribution	توزيع ستيودنت (توزيع - t)
Subset	مجموعة جزئية

U

Union	اتحاد
Universal set	مجموعة شاملة

V

Variable	متغيّر
Variance	تباين
Venn-diagram	مخطط فن

W

Weighted mean	المتوسط المرجّح
Weights	أوزان

S

Sample	عيّنة
mean	متوسط عيّنة
size	حجم العيّنة
space	فضاء العيّنة
Sampling	معاينة
distribution	توزيع المعاينة
inspection	الكشف بطريقة العيّنة
Scatter diagram	مخطط الانتشار
Set	مجموعة
Simple event	حادثة بسيطة
Space	فضاء
Standard	معياري
deviation	انحراف معياري
normal distribution	التوزيع الطبيعي المعياري

المراجع

Cramer, H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press, 1961.

Clarke, G.M. and Cooke, D. *A Basic Course In Statistics*. England, Bath: Edward Arnold, 1982.

Campbell, R.C. *Statistics for Biologists, 2nd* ed. England: Cambridge Univ. Press, 1974

Dunn. O.J. *Basic Statistics: A Primer for the Biomedical Science, 2nd* ed. New York: John Wiley, 1977.

Daniel, W.W. *Biostatistics- A Foundation for Analysis in the Health Sciences*. Singapore: John Wiley, 1987

Feller, F. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* Vol. I, *3rd* ed. New York: John Wiley, 1967.

Freund, J.E. *Modern Elementary Statistics, 5th* ed. New Jersey: Prentice Hall, 1979.

Hodge, S.F. and Seed, M.L. *Statistics and Probability, 2nd* ed. Edinburgh: Blackie & Chambers, 1977.

Huntsburger, H. *Elements of Statistical Inference*. Boston: Allyn and Bacon Inc., 1981

Handel, D.J. *Inroductory Statistics for Sociology*. New Jersey Prentice-Hall Inc., 1978.

Kendall, M. and Stuart, A. *Advanced Theory of Statistics,* vol. 1, *4th* ed. London: Charles Griffin & Company, 1977.

Levin, J. *Elementary Statistics in Social Research*. New York: Harper and Row Publishers, 1977.

Mendenhall, W. *Introduction to Probability and Statistics, 6th* ed. Boston: Duxbury press, 1983

Osborn, J. F. *Statistical Exercises in Medical Research*. Oxford: Blackwell Scientific Publications, 1979.

أنيس كنجو. *الإحصاء وطرق تطبيقه في ميادين البحث العلمي (الجزء الأول)*. بيروت: مؤسسة الرسالة، ١٩٧٩م.

كشاف الموضوعات