

الفصل الأول

الاعداد المركبة

تعريف الاعداد المركبة : من المعلوم أنه يمكن حل كل مستو على محورين متعامدين $y'oy$ ، $x'ox$ وبذلك تتمين كل نقطة من المستوي بزواج مرتب من الأعداد الحقيقية (x, y) إن المقابلة بين مجموعة نقاط المستوي ومجموعة الأزواج المعرفة بالشكل السابق هي مقابلة واحد لواحد .

نسمي عدداً مركباً الزوج المرتب $z = (x, y)$ حيث كل من x, y يمثل عدداً حقيقياً ونربط بين هذا العدد والنقطة M من المستوى المحمول على المحورين $x'ox$ ، $y'oy$ التي إحداثياتها (x, y) . نسمي النقطة M صورة العدد المركب $z = (x, y)$ كما نسمي المستوي xoy بالمستوي المركب أو بمستوي غوس Gauss أو بمستوي أركان Argand .

نعرف على مجموعة الأعداد المركبة قانونين داخليين :

الأول هو الجمع ونعرفه بالقاعدة التالية :

$$z_1 = (x_1, y_1) , z_2 = (x_2, y_2) ; z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

الثاني هو الضرب ونعرفه بالقاعدة :

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ملاحظات : ١ - يمكن تعريف العدد المركب بزواج مرتب من الأعداد يمثل الإحداثيين القطبيين للنقطة M ، صورة العدد المركب ، أي : $z = (\rho, \omega)$ ونعرف عندها عملية الضرب بالعلاقة :

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1, \omega_1) \cdot (\rho_2, \omega_2) = (\rho_1 \cdot \rho_2, \omega_1 + \omega_2)$$

- ٢ - لكي يكون $z_1 = z_2$ يلزم ويكفي أن يكون : $x_1 = x_2$ ، $y_1 = y_2$
- ٣ - إن الأعداد $(x, 0)$ متحدة الشكل isomorphe من أجل عمليتي الجمع والضرب مع مجموعة الأعداد الحقيقية لذا نكتب : $x = (x, 0)$
- ٤ - نرمز بـ $i = (0, 1)$ فيكون :

$$i^2 = i \cdot i = (-1, 0) = -1 ,$$

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)(y, 0) = x + i y$

إن الرمز $z = x + i y$ يسمى بالرمز الجبري للأعداد المركبة حيث x, y عدنان حقيقيان و i العدد الوهمي الذي يحقق العلاقة $i^2 = -1$.

تكتب عادة $x = \mathcal{R} z$ ، $y = \mathcal{O} z$

استناداً إلى ماتقدم يمكننا أن نبدل كل عدد مركب z في أي عملية حسابية بالرمز $x + i y$ ونجري هذه العملية كما نجريها على الأعداد الحقيقية ويكفي أن نبدل في النتيجة i^2 بـ -1

- ٥ - إن العدد المعلوم $0 = (0, 0)$ هو العدد المحايد بالنسبة للجمع :
- $$z + 0 = (x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$
- ٦ - إن الوحدة $z = (1, 0)$ هو العدد المحايد للضرب :
- $$(x, y) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$$

خواص الأعداد المركبة

١ العدنان المترافقان هما :

$$z = x + i y , \quad \bar{z} = x - i y$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \quad \text{ويكون}$$

٢ - قياس عدد مركب : نسمي بقياس عدد مركب z العدد الحسابي :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} , \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

٣ - التمثيل المثلثي لعدد مركب : $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

٤ - رفع الأعداد المركبة :

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

حيث n عدد عادي .

٥ - دستور موافر : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta$

٦ - خواص قياسات الأعداد المركبة :

$$|z z'| = |z| \cdot |z'|, |z + z'| \leq |z| + |z'|, |z| - |z'| \leq |z - z'|$$

إذا رمزنا للعدد المركب بالرمز القطبي (ρ, ω) فإنه يكون $|z| = \rho$ أي :

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

٧ - التمثيل الأسّي لعدد المركب : استناداً إلى نشر كل من التوابع e^x ، $\sin x$ ،

$\cos x$ حسب دستور ماك - لوران فإنه يمكننا أن نكتب :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$z = \rho (\cos x + i \sin x) = \rho e^{ix}$$

★ ★ ★

تمارين

١ - برهن انه يمكن كتابة معادلة أي دائرة واقعة في المستوى المركب بالشكل التالي :

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

حيث α, γ عددان حقيقيان أما β فيمكن أن يكون مركباً .

الحل : إن المعادلة العامة لدائرة واقعة في المستوى xy هي :

$$A (x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (1, 1)$$

حيث A, B, C, D أعداد حقيقية ثابتة .

لنفرض أن $z = x + iy$ عدد مركب و $\bar{z} = x - iy$ العدد المرافق له فيكون :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

لنبدل في معادلة الدائرة (1,1) فتأخذ الشكل التالي :

$$A z \bar{z} + B \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + C \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + D = 0$$

وبعد الاصلاح تأخذ هذه المعادلة الشكل التالي :

$$A z \bar{z} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i} \right) z + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i} \right) \bar{z} + D = 0$$

أو بالشكل :

$$A z \bar{z} + \frac{1}{2} (B - iC) z + \frac{1}{2} (B + iC) \bar{z} + D = 0$$

٢ - مثل هندسياً مجموعة قيم z التي تحقق العلاقة :

$$(1, 2) \quad \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$$

الحل : إن هذه المعادلة تكافئ المعادلة :

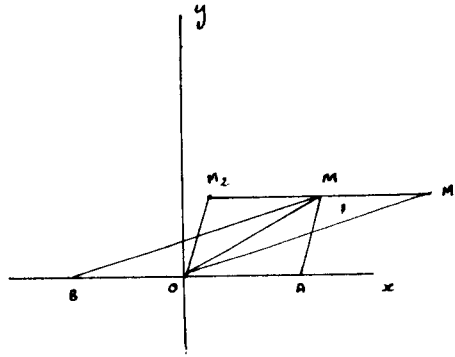
$$|z-3| = 2|z+3|$$

وإذا فرضنا أن $z = x + iy$ فإنه يكون :

$$\begin{aligned} |x + iy - 3| &= 2|x + iy + 3| \\ (x-3)^2 + y^2 &= 4[(x+3)^2 + y^2] \\ 3(x^2 + y^2) + 30x + 27 &= 0 \end{aligned}$$

$$(x+5)^2 + y^2 = 16$$

وهي كما يلاحظ معادلة دائرة مركزها $(-5, 0)$ ونصف قطرها (4) .



شكل - ١

الحل الهندسي : لتكن

النقطة M صورة العدد المركب

z والنقطة M_1 صورة العدد

المركب $z+3$ والنقطة M_2

صورة العدد المركب $z-3$

لننشئ MA موازياً لـ M_2O

فيكون $A = (3, 0)$

ولننشئ MB موازياً لـ M_1O فيكون $B = (-3, 0)$

ونلاحظ أن :

$$|OM_1| = |BM| = |z+3| \quad \text{و} \quad |OM_2| = |AM| = |z-3|$$

إستناداً إلى العلاقة المفروضة $(1, 2)$ نلاحظ أن نسبة بعدي النقطة M

عن النقطتين الثابتين B و A تساوي قيمة ثابتة هي $(\frac{1}{2})$ أي :

$$\frac{MA}{MB} = 2$$

ومن المعروف ان الحل الهندسي للنقطة M التي تتمتع بهذه الصفة هو محيط دائرة قطرها القطعة المستقيمة التي مبدؤها النقطة التي تقسم AB داخلياً بنسبة 2 الى 1 ونهايتها النقطة التي تقسم هذه القطعة المستقيمة خارجياً بالنسبة ذاتها . ويبرهن بسهولة أن هذه الدائرة هي التي وجدناها اعلاه تحليلياً .

حل آخر : استناداً إلى العلاقة :

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

يمكننا كتابة العلاقة (١,٢) بالشكل التالي :

$$\left(\frac{z-3}{z+3} \right) \left(\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3} \right) = 4$$

$$z\bar{z} + 5\bar{z} + 5z + 9 = 0 \quad \text{ومنه}$$

وهي معادلة دائرة كما برهنا في التمرين السابق (١) .

٣ - مثل هندسياً مجموعة الحلول z التي تحقق المتراجحة :

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2$$

إذا أعدنا ما أجريناه في التمرين (٢) فاننا نصل إلى المتراجحة :

$$(x+5)^2 + y^2 > 16$$

وهذا يعني أن بعد النقطة (x , y) عن النقطة (-5 , 0) أكبر من

(4) أي أن النقطة (x , y) واقعة خارج الدائرة التي مركزها (-5 , 0)

ونصف قطرها يساوي (4) .

٤ - أوجد جذور المعادلة :

$$(1+z)^5 = (1-z)^5$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$(1, 4) \quad \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^5 = 1$$

وبأخذ الجذر من أس خمسة لطرفي هذه العلاقة نجد :

$$(2, 4) \quad \frac{1-z}{1+z} = \sqrt[5]{1} = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

وإذا رمزنا بـ $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ فإن القيم المختلفة للطرف الايمن من العلاقة

(2, 4) هي :

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$$

فإذا بدلنا الطرف الأيمن من العلاقة (2, 4) بواحدة من هذه القيم على

التوالي فالتا نجد جذور المعادلة (1, 4) وهي :

$$0, z_1 = \frac{1-\omega}{1+\omega}, z_2 = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}, z_3 = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}, z_4 = \frac{1-\omega^4}{1+\omega^4}$$

0 - برهن صحة العلاقة :

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos nx + n \cos (n-2)x + \frac{n(n-1)}{2!} \cos (n-4)x + \dots + R_n \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } n \text{ فردياً} \\ \frac{n!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)! \left(\frac{n-1}{2}\right)!} \cos x \\ \text{إذا كان } n \text{ زوجياً} \\ \frac{n!}{2 \left(\frac{n}{2}\right)!^2} \end{array} \right\} = R_n : \text{ حيث}$$

الحل إن من المعروف أن :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n$$

لننشر القوة الاخيرة حسب دستور نيوتن :

$$(1, 5) \quad (a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

ولنذكر من خواص دستور نيوتن مايلي :

١ - إن عدد حدود منشور دستور نيوتن $(a+b)^n$ يساوي الى $n+1$

فاذا كان الاس n فردياً كان عدد حدوده زوجياً وإذا كان n زوجياً كان عدد حدوده فردياً .

٢ - إن عالمي الحدين المتساويي البعد عن الحد الأول والحد الأخير متساويان .

$$C_n^p = C_n^{n-p} \quad \text{أي أن}$$

وهما عاملا الحدين :

$$C_n^{n-p} a^p b^{n-p} , \quad C_n^p a^{n-p} b^p$$

٣ - إذا كان n زوجياً فانه يوجد حد متوسط واقع في منتصف سلسلة منشور دستور نيوتن وهو :

$$C_n^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$

وتكون بقية الحدود متناظرة بالنسبة لهذا الحد ولكل حدين متناظرين بالنسبة لهذا الحد عاملان متساويان .

٤ - إذا كان n فردياً فانه يوجد في هذه السلسلة حدان من الشكل :

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} , \quad C_n^{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}$$

حيث يكون :

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$$

لنبدل في الدستور (1,5) a بـ e^{ix} و b بـ e^{-ix} فنجد :

$$\left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^n = \frac{1}{2^n} \left[e^{nix} + C_n^1 e^{(n-1)ix} e^{-ix} + C_n^2 e^{(n-2)ix} e^{-2ix} + \dots + C_n^{n-2} e^{2ix} e^{-(n-2)ix} + C_n^{n-1} e^{ix} e^{-(n-1)ix} + e^{-nix} \right]$$

بما أن عاملي الحدين المتساويين البعد عن الحد الأول والأخير متساويان

فإنه يمكننا جمعها الى بعضها ووضع العامل المشترك خارج قوس فنجد :

$$(2,5) \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^n = \frac{1}{2^n} \left\{ (e^{nix} + e^{-nix}) + C_n^1 [e^{(n-2)ix} + e^{-(n-2)ix}] + C_n^2 [e^{(n-4)ix} + e^{-(n-4)ix}] + \dots \right\}$$

ولنلاحظ أنه إذا كان n فردياً فإن عدد حدود دستور نيوتن سيكون

زوجياً ومعنى ذلك أنه سنحصل على $\frac{n+1}{2}$ من المعترضات في الدستور (2,5)

ويكون الحد الأخير هو :

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} \left[e^{\frac{n-1}{2}ix} \cdot e^{-\frac{n-1}{2}ix} + e^{\frac{n-1}{2}ix} e^{-\frac{n+1}{2}ix} \right] = C_n^{\frac{n-1}{2}} [e^{ix} + e^{-ix}]$$

إذا ادخلنا $\frac{1}{2}$ داخل القوسين {} وبدلنا حسب دستور أولر .

$$\frac{e^{pix} + e^{-pix}}{2} = \cos px$$

فان الدستور (2,5) يأخذ الشكل الثاني وذلك بعد أن نبدل فيه C_n^p

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} \quad \text{بقيمتها وهي :}$$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos nx + n \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2!} \cos(n-4)x + \dots + \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \cos x \right]$$

أما إذا كان n زوجياً فإن عدد الحدود سيكون فردياً وأن الدستور (2, 5) سيحتوي $\frac{n}{2}$ من المعترضات ويجوي الحد المتوسط وهو :

$$C_n^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2} ix} e^{-\frac{n}{2} ix} = C_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)\left(\frac{n}{2}!\right)}$$

ولو أدخلنا $\frac{1}{2}$ داخل القوسين {} وبدلنا حسب دستور اولرفسوف نجد :

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos nx + n \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2!} \cos(n-4)x + \dots + \frac{n!}{2\left(\frac{n}{2}!\right)\left(\frac{n}{2}!\right)} \right]$$

وهو المطلوب برهانه :

طريقة ثانية : يمكن برهان هذا الدستور بطريقة البرهان بالتراجع وذلك باتباع المراحل التالية :

١ - نبرهن أنه صحيح من أجل قيمة ما لـ n مثل $n = 2$ مثلاً حيث

$$(3,5) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (\cos 2x + 1)$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n!}{2\left(\frac{n}{2}!\right)^2} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$$

٢ - نفرض أن هذا الدستور صحيح من أجل $n = p$ ونكتب :

$$(4,5) \quad \cos^p x = \frac{1}{2^{p-1}} [\cos px + C_p^1 \cos(p-2)x + C_p^2 \cos(p-4)x + \dots]$$

٣ - نضرب طرفي هذه العلاقة بـ $\cos x$ ونبرهن أن الناتج مطابق

للدستور المفروض من أجل $n = p + 1$ أي :

$$(5,5) \quad \cos^{p+1} x = \frac{1}{2^p} [\cos(p+1)x + C_{p+1}^1 \cos(p-1)x + C_{p+1}^2 \cos(p-3)x + \dots]$$

في الحقيقة إذا ضربنا طرفي العلاقة (5 ، 4) بـ $\cos x$ فالت طرف الأيمن منها يأخذ الشكل :

$$\frac{1}{2^{p-1}} [\cos p x \cos x + C_p^1 \cos(p-2)x \cos x + C_p^2 \cos(p-4)x \cos x + \dots]$$

لنفرق كل جداء من هذه الجداآت الى مجموع تمام جيبين حسب العلاقة :

$$\cos h x \cos x = \frac{1}{2} \cos (h+1)x + \frac{1}{2} \cos (h-1)x$$

فلاحظ مثلاً أن الجداء الأول يأخذ الشكل :

$$(6,5) \quad \cos p x \cos x = \frac{1}{2} \cos (p+1)x + \frac{1}{2} \cos (p-1)x$$

أما الجداء الثاني فيأخذ الشكل :

$$C_p^1 \cos(p-2)x \cos x = \frac{1}{2} C_p^1 \cos(p-1)x + \frac{1}{2} C_p^1 \cos(p-3)x$$

وبجمع هاتين العلاقتين إلى بعضهما نجد الحد الأول من الدستور (5,5) والحد الثاني كل منهما مضروب بـ $\frac{1}{2}$ وذلك لأن :

$$C_p^1 + 1 = p + 1 = C_{p+1}^1$$

وإذا تابعنا هذه العملية وأخرجنا $\frac{1}{2}$ خارج القوسين فالتنا نجد الحد العام في

الدستور (5 ، 5) الذي هو :

$$C_{p+1}^h \cos (p+1-2h)x$$

وينتج هذا عز، العلاقتين المشابهتين للعلاقة (5 و 6) حيث نبدل p بـ $p-2h$

ثم بـ $p-2h+2$ فقط لأن الحدين الموافقين لهاتين القيمتين لـ m في العلاقة (5 ، 4) بعد ضرب طرفيها بـ $\cos x$ هما :

$$(8,5) \quad C_p^h \cos (p-2h)x \cos x = \frac{1}{2} C_p^h \cos (p+1-2h)x + \frac{1}{2} C_p^h \cos (p+1-2h-2)x$$

$$(9,5) \quad C_p^{h-1} \cos (p-2h+2) \cos x = \frac{1}{2} C_p^{h-1} \cos (p+1-2h+2) \\ + \frac{1}{2} C_p^{h-1} \cos (p+1-2h)x$$

ونلاحظ أن الحد العام (5 , 7) ينتج من إضافة الحد الأول من الطرف الأيمن من العلاقة (5 , 8) إلى الحد الثاني من الطرف الثاني من العلاقة (5 , 9) أي :

$$\frac{1}{2} (C_p^h + C_p^{h-1}) \cos (p + 1 - 2 h) x$$

ومن المعروف أن :

$$C_p^h + C_p^{h-1} = C_{p+1}^h$$

وبكون الحد الناتج بعد إخراج العدد $\frac{1}{2}$ خارج القوسين هو :

$$C_{p+1}^h \cos (p + 1 - 2 h) x$$

وهو الحد العام في العلاقة (5 , 5) وبذلك نكون قد برهننا أن الحدود الناتجة عن ضرب طرفي العلاقة (5 , 4) بـ $\cos x$ مطابقة لحدود العلاقة (5 , 5) .
بقي علينا أن نميز من أجل الحد الأخير بين الحالة التي يكون فيها العدد n زوجياً وبين الحالة التي يكون فيها هذا العدد فردياً :

إذا كان p في الدستور (5 , 4) زوجياً فإن عوامل x في $\cos mx$ كلها زوجية ولأن الباقي هو :

$$R_p = \frac{p!}{2\left(\frac{p}{2}!\right)^2}$$

وبعد ضرب هذا الدستور بـ $\cos x$ فسوف نحصل على حدين فقط فيها $\cos x$ الأول هو :

$$(10,5) \quad R_p \cos x = \frac{p!}{2\left(\frac{p}{2}!\right)^2} \cos x$$

أما الحد الثاني فيأتي من تفريق الجداء الأخير الى مجموع وهو :

$$C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos \left[p - 2 \left(\frac{p}{2} - 1 \right) \right] x \cos x = C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos 2 x \cos x \\ = \frac{1}{2} C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos 3 x + \frac{1}{2} C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos x$$

إن الحد الثاني الذي سيضاف إلى الحد (5 , 10) ليكون الحد الأخير من الدستور (5 , 5) هو :

$$\frac{1}{2} C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos x$$

ويكون الحد الأخير من (5 , 5) في هذه الحالة بعد إخراج $\frac{1}{p}$ خارج القوسين هو :

$$R_{p+1} = \left[\frac{p!}{\left(\frac{p}{2} \right)!} + \frac{p!}{\left(\frac{p}{2} - 1 \right)! \left(\frac{p}{2} + 1 \right)!} \right] \cos x \\ = \frac{(p+1)!}{\left[\frac{(p+1)-1}{2} \right]! \cdot \left[\frac{(p+1)+1}{2} \right]!}$$

وهو مطابق لقيمة R_n عندما يكون $n = p + 1$ فردياً .

أما إذا كان p فردياً فإن الحد الأخير في الدستور (4,5) بعد ضربه بـ $\cos x$ هو :

$$\frac{p!}{\left(\frac{p+1}{2} \right)! \cdot \left(\frac{p-1}{2} \right)!}$$

وإذا بدلنا في هذا الحد $\cos^2 x$ بـ $(\cos 2 x + 1) \frac{1}{2}$ فإن الحد الأخير

في (5 , 5) يكون بعد إخراج $\frac{1}{p}$ خارج القوسين ، من الشكل التالي :

$$R_{p+1} = \frac{p!}{\frac{p+1}{2}! \frac{p-1}{2}!} = \frac{(p+1)!}{2 \cdot \frac{p+1}{2}! \cdot \frac{p-1}{2}! \frac{p+1}{2}}$$

$$R_{p+1} = \frac{(p+1)!}{2 \left(\frac{p+1}{2}! \right)^2}$$

وذلك إذا ذكرنا أن العدد الطبيعي الذي يلي مباشرة العدد الطبيعي

$$\frac{p+1}{2} \text{ هو } \frac{p-1}{2}$$

وبذلك نكون قد برهنا الدستور المطلوب في حالتيه .

٦- برهن أنه إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً أكبر من الواحد فإنه يكون :

$$(1,6) \quad (z+a)^{2m} - (z-a)^{2m} = 4m a z \prod_{k=1}^{m-1} \left[z^2 + a^2 \cot^2 \frac{k\pi}{2m} \right]$$

الحل : يمكننا كتابة المعادلة (١) بالشكل التالي :

$$\left[\frac{z+a}{z-a} \right]^{2m} = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

ثم بأخذ جذر الطرفين من اس $2m$ نجد :

$$(2,6) \quad \frac{z+a}{z-a} = \cos \frac{2k\pi}{2m} + i \sin \frac{2k\pi}{2m}$$

حيث $k = 0, 1, 2, \dots, 2m-1$

إذا حللنا مجموعة المعادلات (2 ، 6) فإننا نجد $2m$ قيمة لـ z نرمز لها بـ :

$$z_0, z_1, \dots, z_m, \dots, z_{2m-2}, z_{2m-1}$$

ينتج الجذر z_0 عن المعادلة (2 ، 6) من أجل $k = 0$ أي عن المعادلة :

$$\frac{z+a}{z-a} = 1$$

إن هذه المعادلة لا تتحقق من أجل أي قيمة محدودة لـ z ونقول إن حلها

هو $z_0 = \infty$. يفسر هذا بأن المعادلة المفروضة (6 , 1) لا تحوي حداً من الدرجة $2m$ بل الحد الأعلى درجة الذي تحويه هو من الدرجة $2m - 1$ كما هو واضح من شكلها المعطى بنص المسألة . إنها معادلة من الدرجة $2m - 1$ والجذر z_0 ليس له وجود وإن عدد جذورها هو $2m - 1$ فقط .
 أما الجذر z_m فينتج عن المعادلة (6 , 2) بأن نجعل فيها $k = m$ وتأخذ عندها الشكل التالي :

$$\frac{z + a}{z - a} = -1$$

ومنها نستنتج ان $z_m = 0$ وهذا يعني أن المعادلة (6 , 1) هي معادلة فردية وأنها كثير حدود لا يحوي عدداً ثابتاً أما بقية الجذور فانه يمكن تجميعها أزواجا من الشكل :

$$z_p = \frac{-a \left(1 + \cos \frac{p\pi}{m} + i \sin \frac{p\pi}{m} \right)}{1 - \cos \frac{p\pi}{m} - i \sin \frac{p\pi}{m}}$$

$$z_{2m-p} = \frac{-a \left(1 + \cos \frac{p\pi}{m} - i \sin \frac{p\pi}{m} \right)}{1 - \cos \frac{p\pi}{m} + i \sin \frac{p\pi}{m}}$$

ونبرهن بسهولة أن :

$$(z - z_p) (z - z_{2m-p}) = z^2 + a^2 \cot^2 \frac{p\pi}{2m}$$

حيث p يمكننا أن تأخذ القيم $1, 2, \dots, m-1$ فقط لأننا حذفنا من القيم (6 , 2) القيمة (0) التي لا تقابل جذراً للمعادلة (6 , 1) والقيمة m التي تقابل الجذر $z_m = 0$.

استناداً إلى قواعد تفريق كثيرات الحدود فانه يمكننا أن نكتب :

$$(4,6) \quad (z + a)^{2m} - (z - a)^{2m} = A z \prod_{k=1}^{m-1} \left(z^2 + a^2 \cot^2 \frac{k\pi}{2m} \right)$$

لإيجاد العدد A نطابق بين طرفي هذه العلاقة ونكتب أن للحددين المتساويين بالدرجة والموجودين في طرفي العلاقة $(4, 6)$ عاملين متساويين . إن الطرف الأيسر من $(4, 6)$ لا يحوي حداً من الدرجة $2m$ والحد الأعلى درجة فيه هو من الدرجة $2m - 1$ وهو :

$$2m z^{2m-1} a - (2m z^{2m-1} a) = 4ma z^{2m-1}$$

أما الحد الذي يقابله في الطرف الأيمن فهو $A z^{2m-1}$ وبذلك نستنتج أن $A = 4ma$ وعندما تأخذ العلاقة $(4, 6)$ الشكل المطلوب برهانه

★ ★ ★

تمارين للحل

٧ - أوجد المجموعة A التي تحقق العلاقة $|z - 1| < 3$ والمجموعة B التي تحقق العلاقة $|z - 2i| < 2$ ثم مثل هندسياً :

$$(a) \quad A \cap B \quad (b) \quad A \cup B$$

٨ - برهن من أجل $m = 2, 3, 4, \dots$ صحة العلاقة :

$$\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sin \frac{3\pi}{m} \dots \sin (m-1) \frac{\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

٩ - فرق $z^m - 1$ إلى مضارب من الدرجة الأولى .

١٠ - عين المنحنيات التي تمثلها المعادلات التالية :

$$(a) \quad |z - i| = 2 \quad (b) \quad |z + 2i| + |z - 2i| = 6$$

$$(c) \quad |z - 3| - |z + 3| = 4 \quad (d) \quad (z + 3)(\bar{z} + 3) = 3$$

$$(e) \quad \mathcal{I}(z^2) = 4.$$

١١ - اكتب معادلة قطع ناقص يقع محرقاه في النقطتين (0 , 4)

(0 , 0) ويساوي طول قطره الكبير (10) .

١١ - عين هندسياً الساحات الممثلة بكل من العلاقات :

$$(a) \quad 1 < |z + i| \leq 2 \quad (b) \quad \mathcal{R}(z^2) > 1$$

$$(c) \quad |z + 3i| > 4 \quad (d) \quad |z + 2 - 3i| + |z - 2 + 3i| < 10$$

١٣ - بعد دراسة التمرين المحلول رقم (5) أوجد دستوراً مشابهاً

من أجل $\sin^n x$.

١٤ - برهن أنه إذا كانت النقاط z_1, z_2, z_3 على إستقامة واحدة فإنه يوجد ثلاثة أعداد ثابتة α, β, γ بحيث يكون :

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0 \quad \text{بشرط} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

١٥ أوجد الحل الهندسي للنقطة z المعرفة بالمعادلة التالية :

$$|z - a| \cdot |z + a| = a^2 \quad \text{حيث } a > 0$$

١٦ - إذا كان $p_n = a_n^2 + b_n^2$ عددان طبيعيين و

$$(n = 1, 2, \dots)$$

برهن أنه من أجل أي عدد طبيعي m يمكن إيجاد عددين طبيعيين A, B

بحيث يكون :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m = A^2 + B^2$$

مثال :

$$13 = 3^2 + 2^2 \quad . \quad 10 = 3^2 + 1^2 \quad . \quad 5 = 2^2 + 1^2$$

$$5 \cdot 10 \cdot 13 = 650 = 5^2 + 25^2$$

١٧ - برهن صحة العلاقتين :

$$(a) \quad \cos \theta + \cos (\theta + \alpha) + \dots + \cos (\theta + n \alpha) =$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (n+1) \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \cdot \cos \left(\theta + \frac{1}{2} n \alpha \right)$$

$$(b) \quad \sin \theta + \sin (\theta + \alpha) + \dots + \sin (\theta + n \alpha) =$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} (n+1) \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \cdot \sin \left(\theta + \frac{1}{2} n \alpha \right)$$

١٨ - برهن العلاقة التالية مستفيداً من التمرين المحلول رقم (٦) .

$$\cot \frac{\pi}{2m} \cdot \cot \frac{2\pi}{2m} \dots \cot \frac{(m-1)\pi}{2m} = 1$$

١٩ - استفد من التمرين المحلول رقم (٦) وبرهن صحة العلاقتين

التاليتين ثم عممهما :

$$(a) \quad \csc^2 \frac{\pi}{7} + \csc^2 \frac{2\pi}{7} + \csc^2 \frac{3\pi}{7} = 8$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{16} = 28$$

٢٠ - برهن أن معادلة الدائرة المارة من النقاط z_1, z_2, z_3 هي :

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \bigg/ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2} \bigg/ \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}$$

٢١ - إذا كان $\sin \theta \neq 0$ برهن صحة العلاقات التاليتين :

$$(a) \quad \frac{\sin n \theta}{\sin \theta} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \theta - \cos \frac{k\pi}{n} \right)$$

$$(b) \quad \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right)$$

٢٢ - برهن صحة العلاقة :

$$\cos 2n\theta = (-1)^n \prod_{k=1}^n \left[1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} \right]$$

٢٣ - عين المحل الهندسي للنقطة $z = x + iy$ فيما إذا كان :

$$(a) \quad \left| z - \frac{1}{z} \right| = 2, \quad (b) \quad |z + z^3| = 2$$

٢٤ - ليكن θ عدد حقيقي وليكن $a = \sin \theta + i \cos \theta$:

$$z^2 - 2az + 1 = 0 \quad \text{ولتكن المعادلة :}$$

أ - برهن أن لجذري هذه المعادلة (z_2, z_1) قياسين متعاكسين ودليين متناظرين .

ب - ما هو الشرط اللازم والكافي الذي يجب على a أن يتمتع به

ليكون جذرا هذه المعادلة حقيقيين أو وهميين صرفاً .

ج - احسب قياس ودليل الأعداد : $z_1 \pm i$ ، $z_2 \pm i$ ثم أوجد العلاقات المهمة الكائنة بين هذه الأعداد .

٢٥ - إذا فرضنا : $u = \cos x + i \sin x$ احسب التوكيين .

$$\left(u + \frac{1}{u}\right)^n , \left(u - \frac{1}{u}\right)^n$$

واستنتج صيغة كل من $\cos^n x$ ، $\sin^n x$ بشكل تابع خطي لجيوب وتمام جيوب اضعاف القوس x .

٢٦ - أوجد معادلة دائرة نصف قطرها (2) ويقع مركزها في النقطة (2 , - 3) .

٢٧ - عين هندسياً مجموعة النقاط z التي تحقق كلا من العلاقتين التاليتين :

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2 , \quad \left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2$$

★ ★ ★