

الفصل السادس

التعمير التحليلي Analytic Continuation

١ - نظرية المطابقة في التتابع الهولومورفية : إذا كان لدينا تابعان هولومورفيان في ساحة G وكانت قيم هذين التابعين من أجل مجموعة غير منتبهة من النقاط z_0 متساوية وكان L نقطة تجمع واحدة على الأقل منتمية لـ G فعندئذ يكون التتابعان متساويين أينما كان في الساحة G .

٢ - لا يمكن لتابع $f(z)$ هولومورفي في ساحة G أن يكون له سوى عدد منته من المواضع a في كل ساحة مغلقة ومحدودة G' جزئية من G مالم يكن التابع $f(z)$ مطابقاً لـ a . (الموضع a لتابع $f(z)$ هو ذلك الموضع z_0 الذي يكون من أجله $f(z_0) = a$.

٣ - إذا كان التابع $f(z)$ هولومورفياً في ساحة G فعندئذ يمكننا أن نخط كل نقطة z_0 من G بدائرة صغيرة على شكل تكون فيه قيمة التابع في كل نقطة من هذه الدائرة غير مساوية لقيمته في مركزها z_0 باستثناء الحالة التي يكون فيها للتابع $f(z)$ القيمة نفسها في كل G . ويتبع من هذا ان أصفار التابع $f(z)$ منعزلة في G .

٤ - إذا كان التتابعان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هولومورفيين في G وإذا كانت قيمتا هذين التابعين في نقطة z_0 من G متساويتين وكانت كذلك قيم جميع مشتقاتها في هذه النقطة متساوية فعندئذ يكون هذان التتابعان متطابقين في G .

مبدأ التعمير التحليلي :

٥ - نظرية : لنفرض ان تابعاً $f_1(z)$ هولومورفي في ساحة G_1 ولتكن

G_2 ساحة تشترك مع G_1 بساحة جزئية g ولا تشترك معها في سوى ذلك . فإذا وجد تابع آخر $f_2(z)$ هولومورفي في G_2 ويتطابق مع $f_1(z)$ في g فمعتدئ يكون هذا التابع وحيداً .

ندعو كلاً من $f_1(z)$ و $f_2(z)$ امتداداً تحليلياً للآخر كما أنها يعتبران عناصر لتابع واحد $F'(z)$ هولومورفي في الساحة الكلية .

٦ - نظرية : إذا أمكن تمديد تابع لتحويل حقيقي x (معرف على قطعة من المحور الحقيقي k) إلى الساحة المركبة (أي إذا أمكن الوصول إلى تابع مركب هولومورفي في ساحة k ويتطابق مع التابع الأصلي على طول هذه القطعة) فمعتدئ لا يوجد سوى شكل وحيد لهذا التمديد .

إن كل تابع حقيقي عادي $P(x)/Q(x)$ [$P(x)$ و $Q(x)$ كثيرات حدود في x] قابل للتمدد إلى المستوي المركب كله باستثناء النقط التي تعدم منحرجه ويكون $F(z) = P(z)/Q(z)$ هو امتداده كما . أن e^x ، $\sin x$ ، $\cos x$ قابلة للتمديد إلى المستوي المركب كله وتكون امتدادات هذه هي e^z ، $\sin z$ ، $\cos z$.

٧ - إذا كان $f_1(z)$ هولومورفياً في ساحة G_1 وإذا كانت z_1 نقطة ما من G_1 فمعتدئ يمكننا أن نشر $f_1(z)$ في سلسلة قوى حول z_1 ، وأما نصف قطر تقارب هذه السلسلة فإنه قد يكون غير محدود ، وبالتالي يكون التابع هولومورفياً في المستوي المركب كله ، أو يكون محدوداً . فإذا ما حاولنا في الحالة الثانية تمديد السلسلة تحليلياً إلى خارج دائرة التقارب فمعتدئ نجد أنه لا يمكن أن تمتد إلى جميع الاتجاهات وأنه يوجد على محيط هذه الدائرة نقطة شاذة واحدة على الأقل للتابع الممثل بالسلسلة المذكورة .

وإذا كان تمديد السلسلة غير ممكن في أي اتجاه فمعتدئ نقول عن التابع المفروض أنه غير قابل للامتداد ويكون محيط دائرة التقارب المفروضة الحد الطبيعي للسلسلة .

٨ - إذا كانت G ساحة بسيطة الترابط وكان $f_0(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ عنصراً لتابع تحليلي في G من z_0 ، وإذا استطعنا أن نجد $f_0(z)$ بدءاً من z_0 وعلى

طول كل طريق ينتمي لـ G فمتدئذ يعطينا هذا التمديد تابعاً هولومورفياً وحيد القيمة في الساحة G كلها (نسمي كل منحني مستمر مقيس طريقاً) .

٩- مبدأ التناظر (مبدأ schwarz) : ليكن $f(z)$ تابعاً هولومورفياً على جانب من مجال (a, b) من المحور الحقيقي وعلى قطعة المجال نفسها ولنفرض أن قيم التابع على طول هذه القطعة حقيقية فمتدئذ يكون التابع قابلاً للتمديد عبر (a, b) وبأخذ في النقط المتناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي قيمة مركبة مترافقة .

* * *

تمارين

١٧٠ - لتكن لدينا المطابقة $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ التي تصح ، كما نعلم ، من أجل القيم الحقيقية لـ z برهن أنها تصح كذلك من أجل القيم المركبة لـ z .

الحل : ليكن لدينا التابع $F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ ولتكن G ساحة ما من المستوي المركب تحوي قطعة من المحور الحقيقي .

لما كان كل من $\sin z$ و $\cos z$ هولومورفياً في G فإن $F(z)$ هولومورفي كذلك . وبما أن $F(z) = 0$ على طول المحور الحقيقي فإن $F(z)$ يطابق الصفر في G ومنه ينتج أن $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ من أجل جميع قيم z في G وحيث أن G كيفية فإن العلاقة المذكورة تصح من أجل جميع القيم المركبة لـ z .

١٧١ - برهن أن التابع :

$$F_1(z) = z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots$$

هولومورفي في الساحة $|z| < 1$. أوجد بعد ذلك التابع الذي يمثل جميع تمديداته التحليلية الممكنة .

الحل : نجد بسهولة (اختبار النسبة) أن السلسلة متقاربة عندما $|z| < 1$ ولذا فإن هذه السلسلة تمثل تابعاً هولومورفياً في الساحة المذكورة . ان

بمجموع هذه السلسلة ، عندما $|z| < 1$ ، هو $F_2(z) = \frac{z}{1+z}$. ولكن

- ٢٠٩ - (الساحة العقديّة) - ١٠

هذا التابع هولومورفي من اجل جميع نقط المستوي باستثناء $z = -1$ كما انه يكون $F_2(z) = F_1(z)$ داخل الدائرة $|z|=1$ ولذا فإن $F_2(z)$ هو التابع المطلوب .

١٧٢ - برهن أن التابع المعرف بالعلاقة $F_1(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt$ هولومورفي في نصف المستوي $R(z) > 0$. أوجد بعد ذلك امتداده التحليلي إلى النصف الآخر من المستوي
الحل : بالتكامل بالتجزئة نجد :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^3 e^{-zt} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ (t^3) \left(\frac{e^{-zt}}{-z} \right) - (3t^2) \left(\frac{e^{-zt}}{z^2} \right) + (6t) \left(\frac{e^{-zt}}{-z^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - 6 \left(\frac{e^{-zt}}{z^4} \right) \right\} \Big|_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{6}{z^4} - \frac{M^3 e^{-Mz}}{z} - \frac{3M^2 e^{-Mz}}{z^2} - \frac{6Me^{-Mz}}{z^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6e^{-Mz}}{z^4} \right\} \end{aligned}$$

وهذه النهاية تساوي $\frac{6}{z^4}$ إذا كان $R(z) > 0$

إلا أن التابع $F_2(z) = \frac{6}{z^4}$ هولومورفي في المستوي كله باستثناء $z=0$ كما أن $F_2(z) = F_1(z)$ من أجل نصف المستوي الأيمن ولذلك نرى أن $F_2(z)$ هو الامتداد التحليلي المطلوب .

١٧٣ - هل التابع $F(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ المعروف على المحور الحقيقي $-\infty < x < +\infty$ قابل للتمديد إلى الساحة المركبة .

الحل : لا يمكن تمديد التابع المفروض إلى الساحة المركبة لأنه غير قابل للاشتقاق في النقطة $x = 0$.

أو نقول : إذا كان $x > 0$ فإن $F(x) = x$ قابل للتمديد ويكون $F(z) = z$ هو امتداده ، كذلك إذا كان $x < 0$ فإن $F(x) = -x$ قابل للتمديد و $F(z) = -z$ هو امتداده ولكن لا يمكن تمديد تابع ما بشكليين مختلفين .

١٧٤ - هل التابع الحقيقي $F(x)$ المعروف في المجال $-1 < x < 1$ والذي يساوي $e^{-\frac{1}{x^2}}$ من أجل $x \neq 0$ ويساوي 0 من أجل $x = 0$ قابل للتمديد إلى الساحة المركبة (للاحظ أن التابع $f(x)$ ذو مشتقات مستمرة من أية مرتبة كانت وذلك في جميع نقاط المجال المعروف به) .

الحل : لا يمكن إيجاد تابع هولومورفي في ساحة G بجوي القطعة $-1 < x < +1$ ويتفق مع $f(x)$ على طول هذه القطعة لأن التابع المرشح ليمثل هذا الأمتداد هو e^{-1/z^2} ، كما يتضح من قيم التابع من أجل $0 < x < +1$ ، ولكن هذا التابع ذو نقطة شاذة أساسية في الموضع 0 .

١٧٥ - إذا كانت $g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة وإذا كان كل حد من حدود هذه المتتالية أكبر أو يساوي 2 فعندئذ تمثل السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{g_0 g_1 \dots g_n}}{1 - z^{g_0 g_1 \dots g_n}}$$

تابعاً هولومورفياً في الساحة $|z| < 1$ غير قابل للتمديد عبر دائرة الوحدة مطلقاً .

الحل : من الواضح أن هذه السلسلة تمثل تابعاً هولومورفياً في الساحة $|z| < 1$ لأنه إذا كان $|z| \leq \rho < 1$ فإن :

$$\left| \frac{z^n}{1 - z^n} \right| \leq \frac{1}{1 - \rho^n} \rho^n \leq \frac{1}{1 - \rho} \rho^n$$

منه نلاحظ أن السلسلة تكون متقاربة إذا كان $|z| < 1$ ، وبالتالي تمثل تابعاً هولومورفياً .

ولدراسة تمديد هذا التابع نفرض ξ جذراً للعدد 1 من المرتبة p (حيث p عدد ثابت أكبر أو يساوي الصفر) أي :

$$\xi^{g_0 g_1 \dots g_p} = 1$$

لنضع :

$$z = \rho \xi \quad (0 < \rho < 1)$$

فعندئذ يكون :

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^{g_0 \dots g_n}}{1 - z^{g_0 \dots g_n}} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{\rho^{g_0 \dots g_n}}{1 - \rho^{g_0 \dots g_n}}$$

وإذا جعلنا $\rho \rightarrow +1$ فإننا نلاحظ أن هذه السلسلة تسعى إلى $+\infty$.
وأما مجموع الحدود الأولى من السلسلة والتي عددها p فإنه يشكل تابعاً عادياً هولومورفياً ولذلك فإنها تبقى محدودة عندما $\rho \rightarrow z$.

وهكذا نرى أن ξ موضع شاذ للتابع $f(z)$. وبما أن النقاط ξ كثيفة على $|z|=1$ فإنه لا يمكن للتابع $f(z)$ ان يكون قابلاً للتمديد عبر دائرة لوحدة .

١٧٦ - لنفرض $f(z)$ تابعاً مستمراً في ساحة G وانه ، بغض النظر عن خط مضلعي k منتم لـ G ، قابل للاشتقاق في الساحة نفسها برهن أنه لا بد أن يكون هذا التابع تحليلاً في نقاط هذا الخط المضلعي (يمكن لطرفي k أن تقع على محيط G) .

الحل : لتكن z_0 نقطة ما من k ولتكن C دائرة مركزها z_0 واقعة في G وتقطع k في نقطتين (لا أكثر ولا أقل) فعندئذ تنجز الساحة المحدودة بـ C إلى ساحتين جزئيتين G_1 ; G_2 نؤمز لمحيط الأولى بـ C_1 ولحيط الثانية بـ C_2 .

وبما أن التابع $f(z)$ هولومورفي في داخل الساحة G_1 (المحاطة بقوس دائري وبعدد محدود من القطع المستقيمة) ومستمر على هذه الساحة مع محيطها فإنه يكون استناداً إلى دستور كوشي (ص ٩٣) وبفرض أن z نقطة من G_1 :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \quad , \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

أي أن :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1)$$

بطريقة مماثلة يمكن برهان صحة هذه العلاقة من أجل كل نقطة z داخل G_2 .

ولكننا نعلم أن كل تكامل من الشكل :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

حيث C طريق كيفي و $\varphi(z)$ تابع مستمر على هذا الطريق ،
يمثل تابعاً $f(z)$ هولومورفياً في كل ساحة G لانهوي اية نقطة من C .
ولذلك فإن $f(z)$ تحليلي في z_0 وهو المطلوب .

١٧٧ - لنفرض $f_1(z)$ تابعاً هولومورفياً في ساحة G_1 و $f_2(z)$ تابعاً هولومورفياً في ساحة G_2 ولنفرض أن هاتين الساحتين متصادمتان وفق خط مضلعي k ، نقصد بذلك أن نقاط هذا الخط المضلعي هي نقاط حديه لكل من الساحتين . ولنفرض كذلك أن f_1, f_2 قيماً حدية متساوية من أجل جميع نقاط k . برهن أن كلا من هذين التابعين امتداد تحليلي للآخر .

الحل : إن قيم التابع f_1 على k تشكل تابعاً مستمراً لأنه إذا كان $f(z)$ تابعاً مستمراً على الساحة الداخلية لطريق مغلق خال من النقاط المضاعفة C ويقبل في كل نقطة حدية ξ قيمة حدية $f(\xi)$ فإن القيم الحدية $f(\xi)$ تشكل تابعاً مستمراً على C . ولبرهان ذلك يكفي أن نعود إلى تعريف الاستمرار على منحنى وإلى تعريف القيمة الحدية (القيمة الحدية لتابع في نقطة حدية ξ هي القيمة $f(\xi)$ التي تجعل من التابع $f(z)$ مستمراً في ξ من داخل الساحة المعرف بها) .

وبذلك تكون شروط المسألة السابقة محققة والتابع $f_1(z)$ امتداد تحليلي لـ $f_2(z)$ وبالعكس .

١٧٨ - ليكن التابع المعرف بالسلسلة .

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

والمطلوب إثبات أن هذا التابع كثير قيم وذلك بواسطة تمديده تحليلياً بدءاً من النقطة 0 وعلى طول دائرة حول النقطة 1 + في الاتجاه السالب حتى نعود ثانية إلى النقطة 0 .

الحل : لتكن z_1, z_2, \dots رؤوس مضلع منتظم على الدائرة $|z - 1| = 1$ وليكن p عدد رؤوس هذا المضلع $p > 6$ ولنكن النقطة 0 أحد هذه الرؤوس فعندئذ يكون :

$$z_n = 1 - e^{\frac{-2\nu\pi i}{p}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

لننشر التابع المفروض حول z_1 . من أجل ذلك نلاحظ أن :

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

$$F^{(k)}(z) = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k} \quad (k \geq 1)$$

وبالتالي يكون هذا النشر .

$$\begin{aligned} F(z_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z - z_1}{1 - z_1} \right)^n &= \\ &= F(z_1) + F\left(\frac{z - z_1}{1 - z_1} \right) \end{aligned}$$

ولما كان $|1 - z_1| = 1$ فإن نصف القطر لدائرة تقارب النشر الأخير مساو للواحد ثانية وبالتالي تقع النقطة z_2 داخل دائرة التقارب الجديدة

. ($|z_2 - z_1| < 1$ لأن عدد أضلاع المضلع أكثر من 6) .

وبما أن :

$$\frac{d}{dz} F \left(\frac{z - z_1}{1 - z_1} \right) = \frac{1}{1 - z_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_1}{1 - z_1} \right)^{n-1} = \frac{1}{1 - z}$$

$$\frac{d^k}{dz^k} F \left(\frac{z - z_1}{1 - z_1} \right) = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}$$

فان النشر في الموضع z_2 يكون :

$$F(z_1) + F\left(\frac{z_2 - z_1}{1 - z_1}\right) + F\left(\frac{z - z_2}{1 - z_2}\right)$$

وبتكرار العملية p مرة نصل إلى النشر التالي في الموضع $z_p = z_0 = 0$:

$$F(z_1) + F\left(\frac{z_2 - z_1}{1 - z_1}\right) + \dots + F\left(\frac{z_p - z_{p-1}}{1 - z_{p-1}}\right) + F\left(\frac{z - z_p}{1 - z_p}\right)$$

وبما أن السلسلة الواردة في هذا النشر (الحد الأخير من العبارة الأخيرة) مطابقة لـ $F(z)$ فإنه ينتج أن التابع $F(z)$ قابل للتمديد حول $z = 1$ وان قيمته تزداد بعد عودته إلى نقطة البدء بالثابت الاضافي :

$$F(z_1) + F\left(\frac{z_2 - z_1}{1 - z_1}\right) + \dots + F\left(\frac{z_p - z_{p-1}}{1 - z_{p-1}}\right)$$

لحساب هذا التابع نلاحظ :

$$\frac{z_p - z_{p-1}}{1 - z_{p-1}} = \frac{e^{-\frac{2(v-1)\pi i}{p}} - e^{-\frac{2v\pi i}{p}}}{e^{-\frac{2(v-1)\pi i}{p}} - 1} = 1 \sqrt[p]{e^{-\frac{2\pi i}{p}}} = z_1$$

وبالتالي يكون الثابت الاضافي مساوياً $p F(z_1)$ أي :

$$p \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{p}} \right) \left[1 + \frac{z_1}{2} + \frac{z_1^2}{3} + \dots \right]$$

وبما أنه يلزم أن تكون القيمة مستقلة عن p فلإننا نحصل عليها
بجعل p تسعي إلى ∞ عندئذ يسمى z_1 إلى الصفر وتكون الثابتة
مساوية $2\pi i$.

١٧٩ - لانعلم عن سلسلة القوى $f(z) = \sum a_n z^n$ سوى أن
التابع $f(z)$ الذي يمثلها ذو نقطة شاذة وحيدة z_0 على محيط دائرة
التقارب وأن هذه النقطة الشاذة قطب بسيط . والمطلوب البرهان أن :

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \rightarrow r \quad \text{و} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow z_0$$

بفرض أن r نصف قطر تقارب السلسلة :

الحل : لتكن c قيمة الراسب عند القطب z_0 فعندئذ يكون التابع

$f(z) - \frac{c}{z - z_0}$ تحليلاً في z_0 وبالتالي يكون هذا تابعاً هولومورفياً في دائرة
حيث $|z| < R$ حيث $|z_0| = r < R$.

$$f(z) - \frac{c}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

فنضع الآن :
فعندئذ يكون بشكل خاص :

$$b_n z_0^n \rightarrow 0$$

ولكن بما أن :

$$\frac{c}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{c}{z_0^{n+1}} \right) z^n$$

فإننا نجد بسهولة أن :

$$a_n = b_n - \frac{c}{z_0^{n+1}}$$

ومنه :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+1} z_0^{n+1} - c}{b_{n+1} z_0^{n+2} - c} z_0 \rightarrow z_0$$

وهو المطلوب الأول ومنه ينتج مباشرة المطلوب الثاني

١٨٠ - (١) برهن أن السلسلة :

$$F_1(z) = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 + \dots$$

متقاربة من أجل $|z| < 1$

(٢) وان السلسلة :

$$F_2(z) = \frac{1}{4} \pi i - \frac{1}{2} \lg 2 + \left(\frac{z-i}{1-i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^2 + \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^3 + \dots$$

متقاربة من أجل $|z-i| > \sqrt{2}$

(٣) برهن أن كلا من $F_1(z)$ و $F_2(z)$ امتداد تحليلي للآخر .

(٤) ماهو التابع الذي يمثل جميع التمديدات التحليلية الممكنة

لـ $F_1(z)$.

الحل : يمكن بسهولة استناداً إلى اختبار النسبة التحقق من صحة

الطين الأول والثاني .

ولبرهان الطلب الثالث نلاحظ أن الموضع $z=0$ يقع داخل دائرة

تقارب السلسلة الثانية ولذلك يمكن نشر التابع $F_2(z)$ في جوار $z=0$

من أجل ذلك نلاحظ أن :

$$F_2(0) = \frac{1}{4} \pi i - \frac{1}{2} \lg 2 + \frac{i}{1-i} + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{i-1} \right)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{4} \pi i - \frac{1}{2} \lg 2 - \lg \frac{1}{1-i} = 0$$

$$F_2'(z) = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1-i} \left(\frac{z-i}{1-i} \right) + \dots = \frac{1}{1-z}$$

$$F_2^{(k)}(z) = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}$$

وبالتالي يكون نشر $F_2(z)$ بجوار $z=0$ هو :

$$z + \frac{z^2}{2} + \dots$$

وهذه هي السلسلة الأولى . واستناداً إلى نظرية التمديدات التحليلية وإلى أن دائرتي التقارب مشتركتان بساحة جزئية مشتركة فإنه يمكن اعتبار كل من التابعين $F_1(z)$ و $F_2(z)$ امتداداً تحليلياً للآخر .

ولبرهان الطلب الرابع نلاحظ أن $F_1(z) = -\lg(1-z)$ من أجل $|z| < 1$ ولكن التابع $-\lg(1-z)$ هولومورفي في المستوي المركب كله باستثناء $z=1$ ولذلك يمكن اعتباره ممثلاً لجميع الامتدادات التحليلية الممكنة لـ $F_1(z)$.

★ ★ ★

تمارين للحل

١٨١ - برهن أن $F_1(z) = \int_0^{\infty} (1+t)e^{-zt} dt$ لا يتقارب إلا إذا كان $R(z) > 0$.

(٢) أوجد الامتداد التحليلي لـ $F_1(z)$ إلى النصف الأيسر من المستوي.

١٨٢ - أوجد مساحة تقارب :

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-(z+1)^2 t} dt$$

(٢) أوجد قيمة الامتداد التحليلي لـ $F_1(z)$ في الموضع $z = 2 - 4i$

١٨٣ - برهن أن السلسلة :

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^4}{1-z^8} + \dots$$

تساوي $z/(1-z)$ عندما $|z| < 1$ وتساوي $1/(1-z)$ عندما $|z| > 1$.

ناقش هذه النتيجة وفق وجهة نظر التمديد التحليلي.

١٨٤ - برهن أنه لا يمكن أبداً تمديد السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3^n}$ تحليلياً إلى

خارج الدائرة $|z|=1$.

١٨٥ - لنفرض أن نصف قطر تقارب السلسلة $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$

مساوياً 1 . فإذا وضعنا $z = \frac{\xi}{1-\xi}$ ثم نشرنا كل حد $a_n z^{n+1}$ حسب سلسلة قوى في ξ ثم رتبنا السلسلة المضاعفة حسب قوى ξ كذلك فعندئذ نحصل على سلسلة $F_1(\xi)$. ما هي أمثال السلسلة وما هو نصف قطر تقاربها . كيف يمكن من جهة أخرى الحصول على نصف تقارب $F_1(\xi)$ انطلاقاً من الخواص التحليلية للتابع $F(z)$ ما هي أعظم قيمة لنصف قطر التقارب وما هي أصغر قيمة له .

١٨٦ - ما هو ، ضمن شروط المسألة السابقة ، الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع $f(z)$ الممثل بالسلسلة $F(z)$ في $|z| < 1$ تحليلاً في $z=1$.

١٨٧ - برهن ، بمساطة المسألتين السابقتين أن التابعين الممثلين بالسلسلتين :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1}$$

تحليليان في $+1$.

١٨٨ - ليكن $f(z)$ تابعاً هولومورفياً في النقطة $z=0$ ومحققاً في جوار هذه النقطة المعادلة .

$$f(2z) = 2f(z) \cdot f'(z)$$

بين أن $f(z)$ قابل للتمديد في كل المستوي

١٨٩ - برهن أن سلاسل القوى التالية غير قابلة للتمديد مطلقاً .

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n+2}}{(2^n+2)(2^n+1)} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2} \quad (4)$$

$$\frac{z+1}{z^2} \quad \text{الأجوبة ١٨١}$$

$$\frac{-7+24i}{625} \quad (٢)$$

$$R(z+1)^2 > 0 \quad (١) - ١٨٢$$

$$\frac{1}{2} \leq \rho \leq +\infty \quad - ١٨٥$$

★ ★ ★