الفصل السابع

التمثيل المطابق Conforma' Mapping

١ – إذا كان $f(z)$ تابعا هولومورفياً في ساحة D من مستوي المتحول العقدي z وإذا كانت الساحة Δ صورة D وفق التمثيل (التطبيق) $f(z)$ فعندئذ تكون صورة شكل لا متناه في الصغر تقع فيه، z_0 (z_0 نقطة من D) هو شكل لا متناه في الصغر تقع فيه النقطة $w_0 = f(z_0)$ يشابه على التقريب الشكل الاول وتساوي نسبة التشابه، على التقريب $f'(z_0)$ وتكون الزاوية التي يصنعها أي منحنيين متقاطعين في z_0 مساوية بالقيمة المطلقة والاشارة للزاوية المقابلة في w_0 شريطة أن يكون $f'(z_0) \neq 0$. وبالعكس إذا كان التابعان $P(x, y)$، $Q(x, y)$ مستمرين ومشتقاتها الجزئية الأولى واذا حفظ التمثيل :

$$w = f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$$

الزوايا في النقطة (x, y) فان التابع $f(z)$ تحليلي في هذه النقطة .

٢ – إذا كان التابع $w = f(z)$ هولومورفياً في ساحة مغلقة B محيطها الطريق l وإذا كانت صورة l في المستوي w هي الطريق المغلق l_1 الخالي من النقط المضاعفة فعندئذ نرى أنه عندما ترسم z الطريق l في الاتجاه الموجب ترسم w الطريق l_1 في الاتجاه الموجب كذلك ، والتابع $f(z)$ ينقل الساحة B إلى الساحة B_1 المحدودة بالطريق l_1 .

٣ – إذا كان $f(z)$ تقابلا هولومورفياً في الساحة B وكان l منحنياً ما في هذه الساحة و $\varphi(s)$ تابعاً معرفاً على l فعندئذ يكون :

$$\int_{l} \varphi(s)\, ds = \int_{l_1} \varphi(s_1)\, |F'(w)|\, ds_1$$

حيث $F'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$ مشتق التابع العكسي $z = F(w)$ وحيث

l_1 صورة المنحني l في المستوي w ، و s_1 القوس على l_1 المقابل لـ l على s

ويكون دستور تحويل التكامل المضاعف هو :

$$\iint_B \varphi(z)\, d\sigma = \iint_{B_1} \varphi_1(w)\, |F'(w)|^2\, d\sigma_1$$

٤ – نقول عن تمثيل مطابق انه من النوع الثاني إذا بقيت فيه قياسات الزوايا مصانة على ان تتغير اشارتها ، مثال ذلك التمثيل $w = \bar{z}$.

٥ – ان التمثيل المعين بالتابع الخطي الصحيح :

$$w = az + b \qquad (1)$$

(b ، a عددان عقديان ثابتان و $a \neq o$) يحافظ في مستوي المتحول العقدي z كله كما أنه تطبيق واحد إلى واحد على المستوي w ، وينقل بوجه عـــام كل نقطة z إلى النقطة المقابلة w بوساطة انسحاب ودوران وتحاك . وبشكل خاص تنتقل z إلى w بانسحاب شعاعه b إذا كان $w = z + b$ وبدوران حول مبدأ الاحداثيات زاويته α إذا كان $w = e^{i\alpha} z$ وبتحاك مركزه o ونسبته ϱ إذا كان $w = \varrho z$ (ϱ عدد حقيقي موجب) .

٦ – إن التابع الخطي العام :

$$w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \qquad (2)$$

(a ، b ، c ، d أعداد عقيدية ثابتة و $ad - bc \neq o$) ينقل المستوي z كله إلى المستوي w كله (بما في ذلك نقطة اللانهاية) كما انـــه ينقل الدوائر إلى دوائر (على أن نفهم من لفظة الدوائر هنا الدوائر بمعناها المألوف بالاضافة إلى المستقيات) وينقل الساحة التي تقع على يمين متحرك على دائرة في المستوي z إلى الساحة التي تقع على يمين المقابل له في المستوي w والساحة التي تقع على يسار الأول إلى الساحة التي تقع على يسار الثاني .

إن التمثيل الخطي العام الوحيد الذي ينقل ثلاث نقط مفروضة z_1 ، z_2 ، z_3 من المستوي z إلى ثلاث نقط مفروضة w_1 ، w_2 ، w_3 من المستوي w هو :

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \qquad (3)$$

وإن التمثيل :

$$w = \frac{a z + b}{c z + d} \qquad (4)$$

ينقل نصف المستوي العلوي إلى نفسه شريطة أن تكون a , b , c , d حقيقية وان يكون $ad - bc < o$ ، والتمثيل :

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - \beta}{\bar{\beta} z - 1} \qquad (5)$$

(α عدد حقيقي كيفي و β نقطة كيفية ضمن دائرة الوحدة) ينقل دائرة الوحدة إلى نفسها ، والتمثيل :

$$w = \frac{z - i}{z + i} \qquad (6)$$

ينقل نصف المستوي العلوي إلى دائرة الوحدة .

إن جداء كل تمثيلين خطيين (أي التمثيل الناتج عن اجرائهما الواحد بعد الآخر وفق ترتيب معين) هو كذلك تمثيل خطي ، وتتصف عملية الجداء هذه بكونها تجميعية ، غير أنها ليست تبديلية . وإذا أضفنا لذلك أن لكل تمثيل خطي L نظير L^{-1} وانه يوجد تمثيل واحدي $U(z)$ بالنسبة لعملية الجداء هذه نرى ان مجموعة التمثيلات الخطية تؤلف زمرة .

٧ – إن التابع $w = z^2$ ينقل المستوي z إلى مستويين w منطبقين على بعضهما وينقل الجزء الواقع داخل الفرع الأيمن من القطع الزائد $x^2 - y^2 = c$ إلى نصف المستوي $R\,w \geqslant c$ ، والتابع $w = \sqrt{z}$ ينقل جزء المستوي الواقع خارج القطع المكافىء $y^2 = 4\,c^2 (c^2 + x)$ إلى نصف المستوي $(I)\,w \geqslant c$

والتابع $w = \frac{k}{2} (z + \frac{1}{z})$ حيث k عدد موجب مفروض ، ينقل الدوائر في المستوي z إلى قطوع ناقصة في المستوي w وينقل المستقيمات إلى قطوع زائدة

والتابع $w = e^z$ ينقل المستقيمات الموازية لمحور السينات إلى دوائر والمستقيمات الموازية لمحور العينات إلى مستقيمات منبعثة من المبدأ .

٨ - دستور كريستوفل Christoffel : ان التمثيل المطابق :

$$z = A \int_0^t (s - a_1)^{\alpha_1 - 1} (s - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (s - a_n)^{\alpha_n - 1} ds + B \qquad (7)$$

(B ، A ثابتان عقديان) ينقل النصف العلوي من المستوي t إلى الساحة الواقعة داخل مضلع زواياه $\alpha_k \pi$ في المستوي z وينقل رؤوس هذا المضلع الى النقط a_k من المحور الحقيقي في المستوي t .

وإذا فرضنا ان النقطة المقابلة لأحد رؤوس المضلع ، ولتكن a_n ، تقع في اللانهاية فعندئذ يأخذ الدستور السابق الشكل :

$$z = A \int_0^t (s - a_1)^{\alpha_1 - 1} (s - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (s - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} ds + B \qquad (8)$$

٩ - نظرية ريمان Riemann : اذا كانت B ساحة ما بسيطة الترابط في المستوي z (نستثني من ذلك الساحة التي تشمل المستوي كله بما في ذلك نقطة اللانهاية والساحة التي تشمل المستوي كله سوى نقطة وحيدة منه كنقطة اللانهاية مثلاً) وإذا كانت z_0 نقطة من B فعندئذ يوجد تابع واحد $f(z)$ هولومورفي في B ينقل هذه الساحة إلى الساحة الواقعة داخل دائرة الوحدة ، وينقل z_0 إلى مركز هذه الدائرة ويحقق الشرط $f'(z_0) > o$. كذلك يتعين التابع $f(z)$ تماماً (إذا ضمنا استمراره حتى محيط الساحة B) إذا اشترطنا فيه ان ينقل ثلاث نقط مفروضة على محيط الساحة B إلى ثلاث نقط مفروضة على محيط دائرة الوحدة أو اذا اشترطنا فيه ان ينقل النقطة z_0 داخل الساحة B إلى نقطة مفروضة داخل دائرة الوحدة وان ينقل نقطة مفروضة على محيط الساحة B إلى نقطة مفروضة على محيط دائرة الوحدة .

★ ★ ★

تمارين

١٩٠ - ما هو التمثيل الخطي الذي ينقل دائرة الوحدة $|z| \leqslant 1$ إلى الدائرة $|w-1| \leqslant 1$ والذي ينقل النقطتين 0 و 1 من المستوي z إلى النقطتين $\frac{1}{2}$ و 0 من المستوي w . هل هذا التمثيل الخطي وحيد .

الحل : نعلم أن التمثيل الخطي العام ينقل كل نقطتين متعاكستين بالنسبة لدائرة في المستوي z (نقول عن نقطتين انهما متعاكستان بالنسبة لدائرة إذا وقعتا على نصف مستقيم واحد صادر عن المركز وإذا كان جداء بعديهما عن المركز مساوياً مربع نصف قطر الدائرة) إلى نقطتين متعاكستين بالنسبة للدائرة المقابلة في المستوي w ولذلك فإن التمثيل المطلوب ينقل النقطة ∞ (**عكس النقطة** 0 بالنسبة للدائرة $|z| = 1$) إلى النقطة $w = -1$ (**عكس النقطة** $\frac{1}{2}$ بالنسبة للدائرة $|w-1| = 1$) . وهكذا نرى أن هذا التمثيل وحيد لأنه ينقل ثلاث نقط وهي $0, 1, \infty$ من المستوي z إلى ثلاث نقط -1 ، $\frac{1}{2}$ ، $0,$ من المستوي w .

وللحصول على هذا التمثيل نبدل في (3) فنجد :

$$\frac{w-\frac{1}{2}}{w} : \frac{\frac{3}{-2}}{-1} = \frac{z}{z-1} : 1$$

ومنه :

$$\frac{2\,w-1}{3\,w}=\frac{z}{z-1}$$

أو :

$$w=-\frac{z-1}{z+2}$$

١٩١ - برهن أن التابع $w=\frac{1}{z+i}$ ينقـــل نصف المستوي $y \geqslant o$ إلى الدائرة $u^2+v^2+v \leqslant o$.

الحل : إن هذا التابع خطي عام ولذلـــك فهو ينقل الدوائر إلى دوائر كما أنه ينقل الساحة التي تقع على يمين متحرك على دائرة في المستوي z إلى يمين المتحرك على الدائرة المقابلة في المستوي w .

لنبحث عن صورة المستقيم $y=o$ وفق التمثيل المفروض . من أجل ذلك نضع $z=x$ فنجد .

$$w=u+i\,v=\frac{1}{x+i}=\frac{x-i}{x^2+1}$$

ومنه نجد :

$$u=\frac{x}{x^2+1} \quad ; \quad v=\frac{-1}{x^2+1}$$

وبحذف x نجد الدائرة :

$$u^2+v^2+v=o \qquad (1)$$

نلاحظ أنه عندما تتحول x من $-\infty$ إلى o إلى $+\infty$ فـإن w

تتحرك على الدائرة (1) من o إلى i - إلى o وفق الاتجاه الموجب أي إنه عندما ترسم النقطة z محور السينات بالاتجاه الموجب فان النقطة w ترسم الدائرة في الاتجاه الموجب وبالتالي نلاحظ أن نصف المستوي العلوي من المستوي z والذي يقع على يسار المتحرك على محور السينات بالاتجاه الموجب ينتقل إلى داخل الدائرة (1) الذي يقع على يسار المتحرك على هذه الدائرة بالاتجاه الموجب وهو المطلوب .

١٩٢ - برهن أن التابع $w = \dfrac{i - z}{i + z}$ ينقل الربع الأول من المستوي z إلى نصف الدائرة $|w| < 1$ ، $o < \arg w < \pi$.

الحل : إن هذا التابع ينقل كل دائرة (أو مستقيم) مار بالنقطة $z = -i$ إلى مستقيم في المستوي w وبشكل خاص ينقل محور العينات إلى مستقيم لايجاد معادلة هذا المستقيم نضع $z = i\,y$ فنجد :

$$w = u + i\,v = \frac{i - i\,y}{i + i\,y} = \frac{1 \quad y}{1 + y}$$

ومنه :

$$u = \frac{1 - y}{1 + y} \quad ; \quad v = o$$

فلو جعلنا y تتحول من o إلى $\infty +$ لرأينا أن w ترسم القطعة $(-1 , 1)$ من المحور الحقيقي بدءاً من 1 - إلى 1 . من هذا ينتج أن النصف الأيمن من المستوي z ينتقل إلى النصف الأعلى من المستوي w . كذلك نستطيع القول أن التابع المفروض ينقل كل دائرة (أو مستقيم) لاتمر بالنقطة $z = -i$ إلى دائرة وبشكل خاص ينتقل محور

السينات إلى دائرة (بالمعنى المألوف لكلمة دائرة) للحصول على معادلة هذه الدائرة نضع $z = x$ فنجد :

$$w = u + i\,v = \frac{i - x}{i + x} = \frac{1 - x^2 + 2\,i\,x}{x^2 + 1}$$

ومنه :

$$u = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad : \quad v = \frac{2\,x}{x^2 + 1}$$

أو :

$$u^2 + v^2 = 1$$

وعندما تتحول x من o إلى $+\infty$ نلاحظ أن w ترسم النصف الأعلى من هذه الدائرة بالاتجاه الموجب ، فالنصف الأعلى من المستوي z ينتقل إلى داخل الدائرة وبهذا نلاحظ أن الربع الأول من المستوي z ينقل إلى نصف الدائرة $|w| < 1$ $(o < \arg w < \pi)$.

١٩٣ – برهن أن التابع $w = \cos z$ ينقل الشريط $o \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ – إلى نصف المستوي $u \geqslant o$.

الحل : لنفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي في التابع المفروض :

$$w = u + i\,v = \cos(x + i\,y) = \cos x \,\mathrm{ch}\, y - i \sin x \,\mathrm{sh}\, y$$

ومنه نجد :

$$u = \cos x \,\mathrm{ch}\, y \quad ; \quad v = -\sin x \,\mathrm{sh}\, y$$

وتكون منحنيات متساويات الدرجة $x = x_1$ هي :

$$u = \cos x_1 \,\mathrm{ch}\, y \quad ; \quad v = -\sin x_1 \,\mathrm{sh}\, y \qquad (1)$$

وبحذف y نجد :

$$\frac{u^2}{\cos^2 x_1} - \frac{v^2}{\sin^2 x_1} = 1$$

وتمثل هذه المعادلة جملة قطوع زائدة متحدة المحارق (محرقاهـا المشتركان في النقطتين $u = \mp 1$)

وبما أن x_1 تتحول من $-\frac{\pi}{2}$ إلى o في الشريط المذكور فإن u تبقى موجبة ونكتفي لذلك بالفروع اليمنى من القطوع الزائدة .

وإذا كان $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ فإن القطع الزائد يؤول إلى المستقيم $u = o$ وعندما تزداد x_1 بدءاً من هذه القيمة حتى $x_1 = o$ فـإن الفرع الأيمن من القطع الزائد يمسح نصف المستوي الأيمن كله ويؤول أخيراً من أجل $x_1 = o$ إلى نصف المستقيم $v = o \text{ , } u \geqslant 1$.

١٩٤ – جد التابع الذي ينقل ربع المستوي $o < \arg z < \frac{\pi}{2}$ إلى الدائرة $|w| < 1$ على أن ينقل النقطتين $z = 1 + i \text{ , } o$ إلى النقطتين $w = o \text{ , } 1$.

الحل : إن التابع :

$$\zeta = z^2$$

ينقل ربع المستوي z إلى نصف المستوي ζ وينقل النقطتين $z = 1 + i \text{ , } o$ إلى النقطتين $\zeta = 2i \text{ , } o$ وينقل المحور التخيلي إلى النصف السالب من المحور الحقيقي . وبذلك تتحول المسألة إلى البحث عن التابع الذي ينقل نصف المستوي العلوي إلى الدائرة $|w| < 1$ على أن ينقل

النقطة المحيطة $\zeta = 0$ إلى النقطة المحيطة $w = 1$ والنقطة الداخلية $\zeta = 2i$ إلى النقطة الداخلية $w = 0$.

نعلم أن التابع $w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$ ينقل نصف المستوي العلوي إلى دائرة الوحدة وينقل ، بشكل خاص ، النقطة $\zeta = i$ إلى النقطة $w = 0$.

كذلك ينقل التابع :

$$w = e^{i\alpha} \frac{\zeta - \beta}{\zeta - \bar{\beta}}$$

(α عدد حقيقي كيفي و β عدد عقدي كيفي شريطة أن يكون جزؤه التخيلي موجب) نصف المستوي العلوي ζ إلى دائرة الوحدة وينقل ، بشكل خاص ، النقطة $\zeta = \beta$ إلى النقطة $w = 0$.

وبما أننا نريد ان تنتقل النقطة $\zeta = 2i$ إلى النقطة $w = 0$ فانه يلزم ان نضع $\beta = 2i$ فنحصل على التابع :

$$w = e^{i\alpha} \frac{\zeta - 2i}{\zeta + 2i}$$

ونعين α بحيث تنتقل فيه النقطة $\zeta = 0$ إلى النقطة $w = 1$

$$1 = e^{i\alpha} \frac{-2i}{2i}$$

ومنه :

$$e^{i\alpha} = -1$$

بالتعويض نحصل على التابع المطلوب :

$$w = -\frac{\zeta - 2i}{\zeta + 2i} = \frac{2i - z^2}{2i + z^2} = \frac{2 + iz^2}{2 - iz^2}$$

١٩٥ - ابحث عن تابع ينقل الدائرة $|z| < 1$ إلى المستوي المقطوع وفق النصف الموجب من المحور الحقيقي .

الحل : نعلم أن التابع $\zeta = \sqrt{w}$ ينقل المستوي w المقطوع وفق النصف الموجب من المحور الحقيقي إلى نصف المستوي العلوي من المستوي ζ .

ولكن التابع (انظر المسألة السابقة) :

$$z = e^{i\alpha}\,\frac{z-\beta}{z-\beta}$$

ينقل نصف المستوي العلوي إلى الدائرة $|z| < 1$ لذلك يكون التابع w المعطى بالعلاقة :

$$z = e^{i\alpha}\,\frac{\sqrt{w}-\beta}{\sqrt{w}-\beta}$$

محققاً المطلوب . من العلاقة الأخيرة نجد :

$$w = \left(\frac{\beta - \overline{\beta}\, z\, e^{-i\alpha}}{1 - e^{-i\alpha} z}\right)^2$$

فلو وضعنا ، على سبيل المثال ، $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; $\beta = i$ لحصلنا على التابع المطلوب :

$$w = -\left(\frac{1 + i z}{1 - i z}\right)^2$$

١٩٦ - جد تابعاً ينقل الدائرة $|z| < 1$ المقطوعة وفق نصف القطر $0 < x < 1$ إلى نصف المستوي $v > 0$ من المستوي المركب $w = u + i v$.

الحل : إن التابع التالي الذي يعطي للعدد الحقيقي الموجب جذراً موجباً :

$$\zeta = \sqrt{z}$$

ينقل الدائرة المذكورة إلى النصف الأعلى منها . وبوساطة تابع خطي يمكن نقل هذا النصف من الدائرة إلى ربع المستوي الأول من مستو مركب t . من أجل الحصول على هذا التابع الخطي نلاحظ أنه على هذا التابع أن ينقل إحدى النقطتين المشتركتين بين نصف الدائرة وقطرها وهما (1 و 1 -) إلى اللانهاية وان ينقل النقطة الأخرى إلى المبدأ . مثال ذلك التابع :

$$t = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$$

غير أن هذا التابع ينقل نصف الدائرة إلى الربع الرابع من المستوي t بدلاً من الربع الأول ، كما يمكن التحقق بسهولة ، ولهذا فإنه يلزم أن نجري دوراناً بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$. وبذلك نجد أن التابع .

$$t = i\,\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$$

ينقل نصف الدائرة إلى الربع الأول من المستوي t .

وبوساطة التابع :

$$w = t^2$$

ينتقل ربع المستوي الأول إلى نصف المستوي الأعلى . بالتعويض نحصل على التابع :

$$w = t^2 = -\left(\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}\right)^2 = -\left(\frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}}\right)^2$$

الذي يحقق المطلوب :

١٩٧ - ابحث عن تابع ينقل الشريط $o < x < a$ من المستوي العقدي $z = x + iy$ إلى نصف المستوي $v > o$ من المستوي العقدي $w = u + iv$.

الحل : من المعلوم ان التابع $w = e^z$ ينقل الشريط المحصور بالمستقيمين $y = o$; $y = \pi$ إلى نصف المستوي العلوي لذلك علينا ، اذا أردنا الاستفادة من هذا التحويل ، ان نحوّل الشريط المفروض $o < x < a$ إلى شريط آخر عرضه π ومحصور بين المحور الحقيقي ومحور آخر يوازيه في النصف الأعلى من المستوي . يكفي من أجل ذلك أن نجري التحويل

$$\zeta = i \frac{\pi}{a} z$$

وعلى هذا فان التابع :

$$w = e^{\zeta} = e^{i \frac{\pi}{a} z}$$

يحقق المطلوب :

١٩٨ ابحث عن التمثيل الذي ينقل الساحة $9 < |z - 3|$ $16 > |z - 8|$ إلى الحلقة الدائرية $\varrho < |w| < 1$. جد قيمة ϱ .

الحل : إن المنحني $|z - 3| = 9$ يمثل دائرة مركزها $z = 3$ ونصف قطرها 9 والمنحني $|z - 8| = 16$ يمثل دائرة مركزها $z = 8$ ونصف قطرها 16 والساحة المفروضة تقع بين هاتين الدائرتين . لنبحث أولاً عن التمثيل الذي ينقل الدائرة الكبرى إلى الدائرة المثلثية . من أجل ذلك يكفي ان نجري انسحاباً شعاعه $8 -$ وتحاكياً نسبته $\frac{1}{16}$ وهذا يتم بوساطة التابع الخطي :

$$\zeta = \frac{1}{16}(z - 8)$$

ان هذا التابع ينقل الدائرة الثانية إلى دائرة مركزها :

$$\zeta = \frac{1}{16}(z - 8) = \frac{-5}{16}$$

وينقل نقطتي تقاطعها مع المحور الحقيقي $z = 12 , - 6$ إلى النقطتين $\zeta = \frac{1}{4} , - \frac{7}{8}$.

لذلك كي نحصل على التمثيل المطلوب يكفي أن نبحث عن التمثيل الخطي الذي ينقل دائرة الوحـــدة إلى نفسها (أي يبقي على الدائرة الأولى) وينقل الدائرة الثانية إلى دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها أصغر من 1 .

ان التمثيل الذي ينقل دائرة الوحدة إلى نفسها هو (α عـــدد حقيقي كيفي و β عدد عقدي كيفي) .

$$w = e^{i\alpha} \frac{\zeta - \beta}{1 - \bar{\beta}\zeta}$$

فاذا اخترنا $\alpha = 0$ و β عدداً حقيقياً فعندئذ نـــلاحظ أن التمثيل الحاصل :

$$w = \frac{\zeta - \beta}{1 - \beta\zeta}$$

ينقل كل نقطتين متناظرتين بالنسبة للمحور الحقيقي في المستوي ζ إلى نقطتين متناظرتين بالنسبة المحور الحقيقي في المستوي w .

$$\frac{\bar{\zeta} - \beta}{1 - \beta\bar{\zeta}} = \overline{\left(\frac{\zeta - \beta}{1 - \beta\zeta}\right)}$$

ولذلك فهو ينقل الدائرة الثانية إلى دائرة مركزهـا على المحور الحقيقي . وعلى هذا يكفي أن نعين β على شكل يقع فيه هذا المركز في نقطة الأصل ، أي على شكل تقع فيه صورة النقطـة $\zeta = \frac{1}{4}$ مناظرة لصورة النقطة $\zeta = -\frac{7}{8}$:

$$\frac{\frac{1}{4} - \beta}{1 - \frac{1}{4}\beta} = - \frac{-\frac{7}{8} - \beta}{1 + \frac{7}{8}\beta}$$

وبالتالي :

$$2\beta^2 + 5\beta + 2 = 0$$

ومنه يكون $\beta = -\frac{1}{2}$ أو $\beta = -2$ ويكون نصف قطر الدائرة في الحالة الأولى .

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$

في حين يكون في الحالة الثانية $\frac{3}{2}$ وهذه مرفوضة لأننا نريد أن يكون نصف القطر أصغر من 1 فالتمثيل المطلوب هو اذن :

$$w = \frac{\zeta + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2\zeta + 1}{2 + \zeta} = \frac{\frac{1}{8}(z - z) + 1}{2 + \frac{1}{16}\ z - 8)} = \frac{2z}{z + 24}$$

من الممكن الحصول على تمثيل آخر ينـ الدائرة الصغرى إلى دائرة الوحدة وينقل الدائرة الكبرى إلى الدائرة $|z| = \varrho$. يكفي من أجل ذلك أن نعيد العمل ثانية أو أن نجري التحويل :

$$w = \frac{2}{3}\ \frac{1}{w} = \frac{z+24}{3z}$$

ان هذا التحويل ينقل دائرة الوحدة إلى دائرة نصف قطرها $\frac{2}{3}$ وينقل الدائرة الداخلية إلى دائرة الوحدة .

١٩٩ – استعمل التحويلات المتتالية :

$$\zeta = (z + \tfrac{1}{2})\pi i \ ; \ s = e^{\zeta} \ ; \ t = \frac{1+s}{1-s} \ ; \ r = t^2 \quad ; \quad w = \frac{r-i}{r+i}$$

لتكوّن تحويلاً واحداً $w = f(z)$ ينقل الشريط $0 \leqslant y$ ، $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ إلى الدائرة $|w| \leqslant 1$

الحل : إن التحويل $\zeta = (z + \frac{1}{2})\pi i$ يسحب الشريط بشعاع مقداره $\frac{1}{2}$ ويدوره بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ ويمدده بالنسبة π ولذلك فهو ينتقل إلى الشريط $o \leqslant \eta \leqslant \pi$, $\xi \leqslant o$ من المستوي $\zeta = \xi + i\eta$.

وأما التحويل $s = e^{\zeta}$ فهو ينقل الشريط الأخير إلى داخل النصف الأعلى من دائرة الوحدة في المستوي s (وينقل حدود الشريط إلى حدود نصف الدائرة)

والتحويل $t = \frac{1+s}{1-s}$ ينقل نصف الدائرة إلى الربع الأول من المستوي t وينقل محيطها إلى النصف الموجب من المحور الحقيقي والنصف الموجب من المحور التخيلي .

والتحويل $r = t^2$ ينقل هذا الربع إلى نصف المستوي في حين ينقل التحويل $w = \frac{r-i}{r+i}$ نصف المستوي إلى دائرة الوحدة وينقل المحور الحقيقي

إلى محيط هذه الدائرة . واما التابع $f(z)$ فيعطي على الشكل التالي :

$$w = \frac{r-i}{r+i} = \frac{t^2-i}{t^2+i} = \frac{(1+s)^2 - i(1-s)^2}{(1+s)^2 + i(1-s)^2}$$

$$= \frac{(1+i\,e^{i\pi z})^2 - i(1-e^{i\pi z})^2}{(1+i\,e^{i\pi z})^2 + i(1-i\,e^{i\pi z})^2} = \frac{i - \sin\pi z}{1 - i\sin\pi z}$$

٢٠٠ – استعمل التمثيلات :

$$\zeta = \sqrt{z} \quad ; \quad t = \sin\frac{\pi}{2} \ ; \ w = \frac{t-1}{t+1}$$

لتنقل داخل القطع المكافىء :

$$r = \frac{2}{1+\cos\Theta}$$

من المستوي z المقطوع من المحرق $z=o$ إلى $z=-\infty$ ، إلى داخل دائرة الوحدة من المستوي w المقطوع من $w=o$ إلى $w=1$.

الحل . ان التمثيل المعرف بتعيين التابع التالي الذي يعطي جذراً موجباً للعدد الحقيقي الموجب :

$$\zeta = \xi + i\,\eta = \sqrt{z} \qquad (1)$$

ينصف الزوايا فهو ينقل الطرف العلوي من نصف المحور الحقيقي السالب إلى النصف العلوي من المحور التخيلي وينقل الطرف السفلي من نصف المحور الحقيقي السالب إلى النصف السفلي من المحور التخيلي .

للحصول على صورة القطع المكافىء في المستوي ζ نضع في (١) :

$$z = r\,e^{i\Theta} = \frac{2}{1+\cos\Theta}\,e^{i\Theta} = \frac{1}{\cos^2\frac{\Theta}{2}}\,e^{i\Theta}$$

فنجد :

$$\zeta = \frac{1}{\cos\frac{\Theta}{2}}\left(\cos\frac{\Theta}{2} + i\sin\frac{\Theta}{2}\right) = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\Theta}{2}$$

(اكتفينا بالاشارة + لأن $-\pi < \Theta < \pi$ ويبقى $\cos \frac{\Theta}{2}$ بالتالي موجباً) .

فصورة القطع المكافئ هي المستقيم $\xi = 1$ وأما داخل القطع المكافيء فينتقل إلى الشريط $o < \xi < 1$.

لننتقل إلى التمثيل :

$$t = X + i\,Y = \sin \frac{\pi}{2}\,\zeta = \sin \frac{\pi}{2}\,(\,\xi + i\,\eta\,) \qquad (٤)$$

بفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي نجد :

$$X = \sin \frac{\pi}{2}\,\xi\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}\,\eta \quad ; \quad Y = \cos \frac{\pi}{2}\,\xi\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\,\eta$$

من أجل $\xi = 1$ نجد :

$$X = \mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}\,\eta \quad ; \quad Y = o$$

وعندما تتحول η من $-\infty$ الى $+\infty$ ترسم t المحور الحقيقي من $X = 1$ الى $X = +\infty$ مرتين .

من أجل $\xi = o$ يكون :

$$X = o \quad ; \quad Y = \mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\,\eta$$

فصورة المحور التخيلي من المستوي ζ هي المحور التخيلي في المستوي t .

وهكذا نرى أن الشريط $1 > \xi > o$ يتحول الى نصف المستوي الأيمن من المستوي t المقطوع من $X = 1$ الى $X = +\infty$

وأما التمثيل :

$$w = \frac{t - 1}{t + 1} \qquad (3)$$

فهو ينقل نصف المستوي الأيمن المقطوع من $X = 1$ الى $X = + \infty$

الى داخل دائرة الوحدة المقطوعة من $w = o$ الى $w = 1$.

بتركيب التمثيلات الثلاثة نجد :

$$w = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z} - 1}{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z} + 1}$$

٢٠١ ـ اذا كان :

$$w = \text{th}\, z \qquad (1)$$

فبرهن أن كلا من $x = \text{const}$ و $y = \text{const}$ ينتقل الى دوائر تقع مراكزها على استقامة واحدة في المستوي w . ثم برهن أن هذا التمثيل ينقل الشريط $o < y < \frac{\pi}{2}$ إلى نصف المستوي العلوي في المستوي w .

الحل : لنفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التحليلي في التابع (1) -

$$w = u + i v = \text{th} (x + i y) = \frac{\text{th}\, x + i\, \text{tg}\, y}{1 + i\, \text{th}\, x\, \text{tg}\, y}$$

ومنه نجد :

$$u = \frac{\text{sh}\, 2x}{\text{ch}\, 2x + \cos 2y} \quad ; \quad v = \frac{\sin 2y}{\cos 2y + \text{ch}\, 2x} \qquad (2)$$

بحذف y من هاتين العلاقتين نجد :

$$(u - c\,\text{th}\, 2x)^2 + v^2 = \frac{1}{\text{sh}^2\, 2x} \qquad (3)$$

وهذا يعني أن المستقيمات $x = const.$ تنتقل إلى دوائر في المستوي w تقع مراكزها على محور السينات يستثنى من ذلك المستقيم $x = o$ الذي ينتقل إلى المحور التخيلي .

وبحذف x من العلاقتين (2) نجد :

$$(v + ctg\, 2\, y)^2 + u^2 = \frac{1}{\sin^2 2\, y} \qquad (4)$$

وهذا يعني أن المستقيمات $y = const.$ تنتقل إلى دوائر في المستوي w مراكزها على محور العينات . يستثنى من ذلك المستقيمات التي تجعل من $\sin 2\, y$ مساوياً الصفر أي $2\, y = k\, \pi$ (k عدد صحيح) ومنهما المستقيمان $y = o$ و $y = \frac{\pi}{2}$. ان صورة المستقيم الأول تعطى بالمعادلتين :

$$u = \frac{sh\, 2\, x}{ch\, 2\, x + 1} = th\, x \quad , \quad v = o$$

وهذه تمثل القطعة ($-1 , 1$) من المحور الحقيقي . واما صورة المستقيم الثاني فتعطى بالمعادلتين .

$$u = \frac{sh\, 2\, x}{ch\, 2\, x - 1} = cth\, x \qquad v = o$$

وهذه ليست إلا المحور الحقيقي باستثناء القطعة ($-1 , 1$) منه .

وكل مستقيم $y = c$ حيث $o < c < \frac{\pi}{2}$ ينتقل كما هو واضح من (2) و (4) إلى قوس دائري في نصف المستوي العلوي (لأن $v > o$) ، وتر هذه القوس القطعة ($-1 , 1$) . وعندما تتحول c من o إلى $\frac{\pi}{2}$ تمسح هذه القوس نصف المستوي العلوي كله وهو المطلوب .

٢٠٢ – جد تمثيلاً ينقل خارج الكارديوئيد :

$$x = 2a(1-\cos t)\cos t \;,\; y = 2a(1-\cos t)\sin t \qquad (1)$$

$$t(o, 2\pi) \;,\; a > o$$

إلى داخل دائرة الوحدة .

الحل : نجري التحويل :

$$Z = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

بفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نجد :

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad Y = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

ونحصل على التمثيل الوسيطي لصورة الكارديوئيد في المستوي Z بتعويض (1) في (2) :

$$X = \frac{\cos t}{2a(1-\cos t)} = \frac{1}{4a}\,\mathrm{ctg}^2\frac{t}{2} - \frac{1}{4a}$$

$$Y = \frac{\sin t}{2a(1-\cos t)} = -\frac{1}{2a}\,\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}$$

وهذه ليست إلا المعادلات الوسيطية للقطع المكافىء :

$$Y^2 = \frac{1}{a}\left(x + \frac{1}{4a}\right) \qquad (3)$$

وأما ساحة خارج الكارديوئيد فتنقل إلى ساحة داخل هذا القطع (إن نقطة اللانهاية في المستوي z تنتقل إلى محرق القطع $Z=0$ ، كذلك إذا جعلنا a بدءاً من قيمة معينة تسعى نحو اللانهاية فان

القطع (3) يمسح ساحة داخله في حين يمسح الكاردبوئيد (1) ساحة خارجه) .

نجري بعد ذلك التحويل :

$$\zeta = \sqrt{Z} \tag{4}$$

وبفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نجد :

$$X = \xi^2 - \eta^2 \quad ; \quad Y = 2\,\xi\,\eta$$

وتنتقل المستقيمات $\eta = c$ بهذا التمثيل إلى المنحنيات :

$$X = \xi^2 - c^2 \quad ; \quad Y = 2\,c\,\xi$$

وبحذف ξ نحذف :

$$Y^2 = 4\,c^2\,(X + c^2) \tag{5}$$

بمقارنة (3) مع (5) نجـــد ان القطع المكافىء (3) ينتقل بالتمثيل (4) إلى المستقيم $\eta = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ وأما ساحة داخـــل القطع فتنتقل إلى الشريط .

$$o < \eta < \frac{1}{2\sqrt{a}} \tag{6}$$

(لانه إذا جعلنا c في (5) تتحول من $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ إلى الصفر فعندئذ يمسح القطع المكافىء ساحة داخله في حـــين يمسح المستقيم $\eta = c$ الشريط (6)) .

وأما نقل الشريط (6) إلى داخل دائرة الوحدة فيتم باشكال مختلفة أحدها يتم كما يلي : نجري التحويل :

$$t = \frac{\pi \sqrt{a}}{i} z - \frac{\pi}{2}$$

الذي ينقل الشريط المذكور إلى شريط آخر في المستوي t :

$$-\frac{\pi}{2} > R\, t < o$$

وتكون صورة $\eta = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ (أي صورة الكارديوئيد) هي المحور التخيلي في هذا المستوي . وبوساطة التحويل :

$$r = \sin t$$

ينتقل الشريط إلى نصف المستوي الأيسر المقطوع من $r = -1$ إلى $r = -\infty$ على طول المحور الحقيقي ، وينقل المحور التخيلي من المستوي t إلى المحور التخيلي في المستوي r .

وأما التحويل :

$$w = \frac{1 + r}{1 - r}$$

فينقل نصف المستوي المذكور إلى داخل دائرة الوحدة وينقل المحور التخيلي إلى محيط هذه الدائرة .

وهكذا نجد ان التحويل :

$$w = \frac{1 + r}{1 - r} = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} = tg^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) = tg^2 \frac{\pi \sqrt{a}}{2\, i} \sqrt{\frac{1}{z}}$$

ينقل ساحة خارج الكارديوئيد إلى ساحة داخل دائرة الوحدة وأما الكارديوئيد نفسه فينتقل إلى محيط دائرة الوحدة .

٢٠٣ جد تمثيلاً ينقل ساحة داخل القطع الناقص $4x^2 + 5y^2 = 20$ ،

المقطوع وفق القطعة المستقيمة الواصلة بين محرقيه ، إلى داخل الحلقة $1 < |w| < A$. ماهي قيمة A ؟

الحل : من المعلوم أن التابع :

$$w = \frac{k}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$$

ينقل الدوائر في المستوي z الى قطوع ناقصة في المستوي w وبالعكس فإن التمثيل :

$$z = \frac{k}{2}\left(w + \frac{1}{w} \right)$$

ينقل القطوع الناقصة في المستوي z إلى المستوي w . وللتحقق من ذلك نضع $w = \varrho e^{i\Theta}$ فنجد بفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي :

$$x = \frac{k}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho} \right) \cos \Theta \quad ; \quad y = \frac{k}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho} \right) \sin \Theta$$

فالدوائر $\varrho = c$ في المستوي w تنتقل إلى قطوع ناقصة انصاف اقطارها (بفرض k عدداً موجباً) :

$$a = \frac{k}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho} \right) \qquad ; \qquad b = \frac{k}{2}\left| \varrho - \frac{1}{\varrho} \right|$$

ومنه نلاحظ أنه عندما تتحول ϱ من 0 إلى 1 فإن القطع يمسح المستوي كله ويصبح من أجل $\varrho = 1$ القطعة المستقيمة $(-k , k)$ وإذا ازدادت ϱ من 1 إلى $+\infty$ فإن القطع يمسح المستوي ثانية . فالتمثيل المفروض ، اذن ، ينقل المستوي w الى مستويين z منطبقين على بعضهما أحدهما يوافق ساحة داخل الدائرة $|w| < 1$ والآخر يوافق ساحة

خارج هذه الدائرة .

لتعيين قيمتي k و ϱ نلاحظ أن نصفي محوري القطع المفروض هما $\sqrt{5}$ و 2 لذلك :

$$\sqrt{2} = \frac{k}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) \qquad 2 = \frac{k}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)$$

ومنه نجد :

$$\varrho = \sqrt{5} + 2 \qquad k = 1$$

فالتمثيل :

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \tag{1}$$

ينقل محيط الدائرة التي نصف قطرها $\varrho = \sqrt{5} + 2$ إلى محيط القطع الناقص $4x^2 + 5y^2 = 20$ وينقل الحلقة $\varrho > |w| > 1$ إلى داخل القطع الناقص المذكور المقطوع وفق القطعة $(1, -1)$.

من (1) نجد :

$$w = z \mp \sqrt{z^2 - 1}$$

ولكن إذا أخذنا بالاشارة – فان النقطة $z = \sqrt{5}$ الموجودة على القطع تنتقل الى النقطة $w = \sqrt{5} - 2$ وهذه غير موجودة على الدائرة $\varrho = \sqrt{5} + 2$ لذلك يلزم أن ناخذ بالاشارة + التي تحقق الغرض فالتحويل المطلوب اذن هو الفرع :

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

٢٠٤ - برهن أن $2w = \lg \frac{1+z}{1-z}$ ينقل $|z| < 1$ الى الشريط :

$-\frac{\pi}{4} < v < \frac{\pi}{4}$ في المستوي w

الحل : ان التحويل :

$$\zeta = \frac{1+z}{1-z}$$

ينقل الدائرة $|z| = 1$ الى المحور التخيلي وينقل الساحة $|z| < 1$ الى نصف المستوي الأيمن .

وبفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي في التعيين الرئيسي للتمثيل :

$$2w = \lg \zeta$$

نجد إذا استعملنا التمثيل القطبي لـ ζ ($\zeta = \varrho e^{i\Theta}$) :

$$2u = \lg \varrho \quad ; \quad 2v = \Theta$$

وبما أن ϱ تتحول في نصف المستوي الأيمن من o إلى $+\infty$ و Θ تتحول من $-\frac{\pi}{2}$ إلى $+\frac{\pi}{2}$ فان الساحة تنتقل إلى الشريط $-\frac{\pi}{4} < v < \frac{\pi}{4}$ وهو المطلوب :

٢٠٥ - لدينا التمثيل :

$$w = e^{i\alpha} \frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}} \quad (\beta = a + i b ; \; b > o)$$

الذي ينقل نصف المستوي إلى دائرة الوحدة . عيّن أين يتمدد نصف المستوي العلوي وأين يتقلص ؟

الحل : يكون هنالك تمدد عندما $|w'(z)| > 1$ أي عندما يكون .

$$\frac{|\beta - \beta|}{|z-\beta|^2} > 1$$

ومنه نجد :

$$|z-\beta|^2 < 2b$$

أي إن نصف المستوي العلوي يتمدد في النقط الواقعة داخل الدائرة التي مركزها β (في النصف السفلي من المستوي) ونصف قطرهـــا $\sqrt{2b}$. وشرط وجود ساحة مشتركة بين هذه الدائرة ونصف المستوي العلوي هو :

$$b < \sqrt{2b}$$

أي

$$b < 2$$

وهكذا نرى أنه إذا كان $b \geqslant 2$ فان نصف المستوي العلوي كله يتقلص وعنـد ما يكون $b < 2$ فإن المنطقـة الواقعـــة داخل الدائرة $z - \beta < \sqrt{2b}$ من المستوي العلوي تتمدد والمنطقة الواقعة خارج هذه الدائرة تتقلص وأما نقط قوس الدائرة فلا يصيبها تمدد أو تقلص .

٢٠٦ - برهن أن التمثيل $w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ينقل النصف العلوي من الدائرة $|z| < 1$ إلى النصف العلوي من المستوي w . عين النقط حيث تكون نسبة التمدد الخطي مساوية $\frac{1}{2}$ وتلك التي يكون الدوران عندها مساوياً $\pm \frac{1}{2}\pi$. برهن أن نسبة التمدد تكون أكبر من الواحد في جميع النقط الواقعـــة ضمن النصف العلوي للدائرة $3z^2 = 1$.

الحل : لو وضعنا $z = r e^{i\Theta}$ وفصلنـــا الجزء الحقيقي عن التخيلي لوجدنا :

$$u = -\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\Theta \qquad v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin\Theta$$

ومنه نلاحظ انه عندمـا تتحول r من o إلى 1 وتبقى Θ محصورة بين o و π فان النقطة w ترسم النصف العلوي كله من المستوي w .

ان نسبة التمدد الخطي تعطى بقيـــاس المشتق $w'(z)$ وزاوية الدوران بـ $\arg w'(z)$. ولذلك نرى إن نسبة التمدد الخطي تكون مساوية $\frac{1}{2}$ عندما :

$$\frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{2}$$

أي من أجل نقط القطع الزائد .

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$

وزاوية الدوران تساوي $\pm\frac{\pi}{2}$ عندما :

$$\arg\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

أي من أجل نقط المنحني (ليمنسكات) :

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

وفي جميع النقط الواقعة ضمن النصف العلوي للدائرة $3|z|^2 = 1$ تكون نسبة التمدد :

$$\frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{|z^2 - 1|}{|z|^2} > \frac{3}{2}\left|1 - |z|^2\right| > \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1$$

وهو المطلوب .

٢٠٧ -- برهن أن التابع :

$$w = \int_0^z t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} \, dt \qquad (1)$$

ينقل النصف العلوي من المستوي z إلى داخل مثلث متساوي الأضلاع في المستوي w . احسب طول ضلع هذا المثلث

الحل : بمقارنة العلاقة (١) مع دستور كريستوفل الثاني في صفحة ٢٢٦ نجد أن التابع (١) ينقل الى النصف العلوي من المستوي z مثلثاً من المستوي w . زوايا $\alpha_1 \pi , \alpha_2 \pi , \alpha_3 \pi$ حيث :

$$\alpha_1 - 1 = -\frac{2}{3} \; ; \quad \alpha_2 - 1 = -\frac{2}{3}$$

ومنه نجد أن كل زاوية من زوايا المثلث تساوي $\frac{\pi}{3}$ فهو متساوي الأضلاع .

لحساب طول ضلع المثلث نلاحظ أن رؤوسه ، ولتكن P و Q و R . تقع في النقط $t = o , 1 , \infty$ على المحور الحقيقي ولذلك فإن النقطة P تقع في مبدأ احداثيات المستوي w ($w = o$) في حين يتعين موضعا النقطتين Q و R بالتكاملين

$$\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1 \quad t)^{-\frac{2}{3}} \, dt \quad ; \quad \int_0^\infty t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{8}} \, dt \qquad (2)$$

ولحساب هذين التكاملين علينا ان نختار فرعاً لكل من التابعين كثيري القيم $t^{-\frac{2}{3}}$ و $(1 \quad t)^{-\frac{2}{8}}$ وذلك كي يبقيا مستمرين ووحيدي قيمة في $(T)t \geqslant o$ باستثناء النقطتين $t = o$ و $t = 1$) . ان هذا الأمر يتحقق اذا اخترنا :

$$0 \leqslant \arg t \leqslant \pi \quad ; \quad -\pi \leqslant \arg(1-t) \leqslant 0$$

عند ذاك يكون في التكامل الأول :

$$t = \varrho e^{i\theta} = \varrho \quad ; \quad 1-t = |1-\varrho| e^{i\theta} = 1-\varrho$$

ويكون بفرض s طول ضلع المثلث

$$PQ = s = \int_0^1 \varrho^{-\frac{2}{3}} (1-\varrho)^{-\frac{2}{3}} d\varrho = B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$$

ملاحظة : لحساب التكامل الثاني من (2) نكتب :

$$w_R = \cancel{s} + \int_1^{\infty} t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt$$

ويكون في هذا التكامل استناداً إلى ماذكرناه قبل قليل :

$$\arg t = 0 \quad ; \quad \arg(1-t) = -\pi$$

أي :

$$t = \varrho e^{i0} = \varrho \quad ; \quad 1-t = |1-\varrho| e^{-i\pi} = (\varrho - 1) e^{-i\pi}$$

وبالتالي

$$w_R = s + e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_1^{\infty} \varrho^{-\frac{2}{3}} (\varrho - 1)^{-\frac{2}{3}} d\varrho$$

واذا أجرينا في التكامل الأخير التحويل $\varrho = \frac{1}{u}$ حصلنا من جديد على s أي :

$$w_R = s + s e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

وهذا مايؤكد من جديد أن المثلث PQR متساوي أضلاع

٢٠٨ – جد التابع الذي ينقل المثلث PQR الذي تقع رؤوسه في النقط $(0, 1, i)$ في المستوي w الى النصف العلوي من المستوي z على أن تنتقل رؤوس هذا المثلث الى النقط $z = 0, 1, \infty$.

الحل : إن المثلث المفروض قائم الزاوية ومتساوي الساقين ولذلك فإن :

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{4} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

وبما أن أحد رؤوس المثلث ينتقل إلى $z = \infty$ فان دستور كريستوفل يأخذ في هذه الحالة الشكل :

$$w = A \int_0^z t^{-\frac{1}{2}} (1 - t)^{-\frac{3}{4}} dt + B \qquad (1)$$

لتعيين A و B نلاحظ أن النقطة $z = 0$ تقابل النقطة $w = 0$ ولذلك نجد بالتعويض في (١) أن $B = 0$. وبما أن النقطة $z = 1$ تقابل النقطة $w = 1$ فإن :

$$1 = A \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1 - t)^{-\frac{3}{4}} dt$$

$$= A\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{A \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

والتمثيل المطلوب هو :

$$w = \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/4)} \int_{o}^{t} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt$$

٢٠٩ - استعمل دستور كريستوفل لتنقل الشريط $-a<x<a \quad y>o$ من المستوي z الى النصف العلوي من المستوي t .

الحل : يمكن اعتبار الشريط المذكور مثلثاً P Q R رؤوسه $Q(a,o)$; $p(-a,o)$ وأما الرأس R ففي اللانهاية . ان زوايا هذا المثلث هي o , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ وبذلك بأخذ دستور كريستوفل (اذا اخترنا صور النقط الثلاث P و Q و R في النقط $t = -1 , 1 , \infty$) الشكل التالي :

$$z = A \int_{o}^{t} (1-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}} ds + B$$

ومنه :

$$z = A \int_{o}^{t} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} + B = A \arc \sin t + B$$

لتعيين B , A نلاحظ أن $z = -a$ من أجل $t = -1$. وأن $z = a$ من أجل $t =$ اذن :

$$-a = -A\frac{\pi}{2} + B \;\; ; \;\; a = A\frac{\pi}{2} + B$$

وبحل هاتين العلاقتين نجد : $B = o$ ؛ $A = \frac{2a}{\pi}$ وبالتالي :

$$z = \frac{2a}{\pi} \arc \sin t$$

ومنه :

$$t = \sin \frac{\pi z}{2a}$$

٢١٠ – (١) جد التمثيل الذي ينقل مضلعاً ، عدد أضلاعه n ، من المستوي w إلى دائرة الوحدة في المستوي z .

(٢) برهن أن التابع $w = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$ ينقل الدائرة $|z| < 1$ إلى المربع الذي ضلعه يساوي $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right)$.

الحل : من المعلوم انه يمكن بوساطة دستور كريستوفل نقل محيط المضلع إلى المحور الحقيقي من المستوي t والساحة داخل المضلع إلى نصف المستوي العلوي :

$$w = A \int (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + B \quad (1)$$

ولكن التحويل الذي ينقل النصف العلوي من المستوي t إلى داخل دائرة الوحدة في المستوي ج هو :

$$t = i \left(\frac{1 - z}{1 + z} \right) \quad ; \quad z = \frac{i - t}{i + t}$$

وإذا فرضنا أن النقط a_k تنتقل إلى النقط z_k على دائرة الوحدة وإذا لاحظنا أن :

$$t - a_1 = i \left(\frac{1 - z}{1 + z} \right) - i \left(\frac{1 - z_k}{1 + z_k} \right) = \frac{-2i(z - z_k)}{(1 + z)(1 + z_k)}$$

وأن :

$$dt = \frac{-2i\, dz}{(1 + z)^2}$$

وأن

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = n - 2$$

فعندئذ نجد بالتعويض في (1) :

$$w = A' \int (z - z_1)^{\alpha_1 - 1} (z - z_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (z - z_n)^{\alpha_n - 1} dz + B \quad (2)$$

حيث A' ثابت كيفي جديد :

(٢) استناداً إلى (2) نلاحظ أن التابع :

$$w = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$

ينقل دائرة الوحدة الى شكل رباعي زواياه :

$$\pi\,\alpha_1 = \pi\,\alpha_2 = \pi\,\alpha_3 = \pi\,\alpha_4 = \frac{\pi}{2}$$

فهو لذلك مستطيل (وفي الحالة الخاصة مربع) . ان صور رؤوس هذا الشكل الرباعي تقع في النقط $z = 1, i, -1, -i$ والرؤوس نفسها تقع في النقط :

$$w = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}, \int_0^i \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}, \int_0^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t}}, \int_0^{-i} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} \quad (3)$$

فاذا اخترنا من التابع $\sqrt{1 - t^4}$ ذلك الفرع الذي يكون من أجله $\arg(1 - t^4) = 0$ على قطعة المحور الحقيقي (1 ، 1 -) فعندئذ يكون التكامل الأول من (3) حقيقياً . ولحسابه نضع $t^4 = u$ فنجد :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

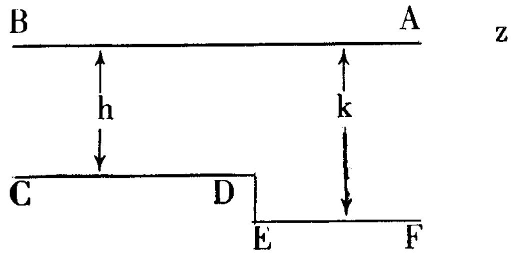
$$= \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) = s \quad .$$

وبحساب التكاملات الثلاثة الأخرى نجد أن رؤوس الشكل الرباعي تقع بالنقط :

$$w = (s , i s , -s , -i s)$$

وهذا يدلنا على أن الشكل الرباعي مربع وأن طول ضلعه يساوي $\sqrt{2}\,s$ أي $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$ وهو المطلوب :

٢١١ – أوجد التابع $z = f(t)$ الذي ينقل الساحـــة كما في الشكل (٢٥) إلى النصف العلوي من المستوي t .

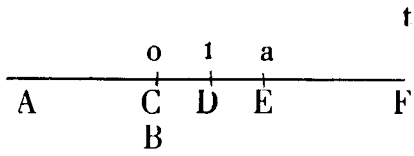


(شكل ٢٥)

الحل : يمكن استعمال دستور كريستوفل لأنه يمكن اعتبار محيط الساحة مضلعاً زواياه :

$$0 , \frac{3\pi}{2} , \frac{\pi}{2} , 0$$

لنفرض أن النقطة D تنتقل بالتابع المطلوب إلى النقطة $t = 1$ وأن النقطة B_∞ (و C_∞) إلى النقطة $t = o$ والنقطـــة F_∞ (و A_∞) إلى النقطة $t = \infty$ (لايمكن حسب نظرية ريمان اختيار صور أكـــثر من ثلاث نقط مفروضة على محيط الساحة) وأما النقطة E فنفرض أنهـا تنتقل إلى النقطة $t = a$ (يلزم تعيين a) . عندئذ يأخـــذ دستور كريستوفل الشكل :



(شكل ٢٦)

$$z = A' \int \frac{\sqrt{t-1}}{t\sqrt{t-a}}\, dt + B'$$

لحساب هذا التكامل نجري التحويل :

$$\frac{t-a}{t-1} = u^2 \qquad (1)$$

فيكون :

$$z = A' \left[\lg \frac{1+u}{1-u} - \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{a}+u}{\sqrt{a}-u} \right] + B' \qquad (2)$$

لتعيين B' نفرض أن نقطة الأصل في المستوي z تقع في النقطـة

E . وبما أن $t = a$ توافق $u = o$ فاننا نجد بالتعويض في (2)[1]

$$O = A' [\lg 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \lg 1] + B'$$

ومنه :

$$B' = o$$

لتعيين A' و a نلاحظ أنه من أجل النقطة D يكون $z = i\,(k-h)$، $u = \infty$ ومن أجل النقطة A يكون $z = \infty + i\,k$ ، $u = 1$ بالتعويض في (2) نجد :

$$i\,(k - h) = A' (i\,\pi - \frac{1}{\sqrt{a}}\, i\,\pi)$$

$$i\,k = A'\, i\,\pi$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد : $A' = \frac{k}{\pi}$; $a = \frac{k^2}{h^2}$

فالتمثيل المطلوب ينتج اذن بحذف u من (1) ومن :

$$z = \frac{k}{\pi} [\lg \frac{1 + u}{1 - u} - \frac{h}{k} \lg \frac{k + hu}{k - hu})$$

---

(١) ان التحويل (1) ينقل النصف العلوي من المستوي t إلى الربع الأول من المستوي u ويكون :

$$u_E = o \;;\; u_F = u_A = 1 \;;\; u_C = u_B = \sqrt{a} \;;\; u_D = \infty$$

وليكن في هذا الربع من المستوي

$$-\pi \leqslant \arg (1 - u) \leqslant o \;;\; o \leqslant \arg (1 + u) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leqslant \arg (\sqrt{a} - u) \leqslant o \;;\; o \leqslant \arg (\sqrt{a} + u) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

٢١٢ - برهن أن مجموعة التمثيليات $S = \{ T_1 , T_2 , \ldots , T_6 \}$

حيث :

$$T_1 = z ; \quad T_2 = \frac{1}{z} ; \quad T_3 = 1 - z ; \quad T_4 = \frac{z}{1-z} ; \quad T_5 = \frac{z-1}{z} ; \quad T_6 = \frac{z}{z-1}$$

تشكل زمرة (زمرة النسب اللاتوافقية) .

الحل : إن عناصر المجموعـة المفروضة $T_i \ (i = 1 , 2 , \ldots , 6)$ تنتمي كلها إلى مجموعة التمثيلات الخطية العامة ولما كانت مجموعـة التمثيلات الخطية العامة تؤلف زمرة ، فانه يكفي البرهان على المطلوب اثبات أن مجموعة العناصر T_i تؤلف زمرة جزئية من زمرة التمثيلات الخطية .

من السهل أن نبين أن :

$$T_1^{-1} = z \in S \ ; \quad T_2^{-1} = \frac{1}{z} \in S \ ; \quad T_3^{-1} = 1 - z \in S$$

$$T_4^{-1} = \frac{z-1}{z} \in S \ ; \quad T_5^{-1} = \frac{1}{1-z} \in S \ ; \quad T_6^{-1} = \frac{z}{z-1} \in S$$

وأنه مهما كان i و j $(i , j = 1 , 2 , \ldots , 6)$ فإن : $T_i T_j \in S$ ،

وعلى سبيل المثال :

$$T_3 T_6 = T_3 \left(\frac{z}{z-1} \right) = 1 - \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z} = T_4 \in S$$

لذا فإن S تشكل فعلاً زمرة وهو المطلوب .

٢١٣ - برهن أن مجموعة التمثيلات S التي عناصرها :

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

حيث a ، b ، c ، d أعداد صحيحة حقيقية أو اعداد صحيحة عقدية تحقق الشرط $ad - bc = 1$ تشكل زمرة (نقول عن عدد إنه صحيح عقدي إذا أمكن كتابته على الشكل $m + ni$ حيث m ، n عددان صحيحان حقيقيان) .

الحل - إن المجموعة المفروضة هي مجموعة جزئيـــة من زمرة التمثيلات الخطية العامة . وللبرهان على أن مجموعتنا تشكل زمرة يكفي ان نثبت أنها تؤلف زمرة جزئية من زمرة التمثيلات الخطية العامـــة (وذلك لأن الزمرة الجزئية هي بحد ذاتها زمرة) .

في الحقيقة يكون ، مهما كان العنصر L من المجموعة S :

$$L^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$$

ولما كان معين هذا التمثيل العكسي :

$$\begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc = 1$$

فإن $L^{-1}(z) \in S$.

كذلك مهما كان العنصران $L_i , L_j \in S'$ فإن :

$$L_i L_j(z) = \frac{(a_i a_j + c_i c_j) z + (b_i a_j + d_i b_j)}{(a_i c_j + c_i d_j) z + (b_i c_j + d_i d_j)}$$

فلو لاحظنا أن معين هذا التمثيل الحاصل :

$$(a_i a_j + c_i c_j)(b_i c_j + d_i d_j) - (b_i a_j + d_i b_j)(a_i c_j + c_i d_j) =$$
$$= (a_i d_i - b_i c_i)(a_j d_j - b_j c_j) = 1$$

لنتج المطلوب .

٢١٤ ـ لدينا التمثيل :

$$w = f(z) = \frac{4}{(1+z)^2}$$

الذي ينقل نصف الدائرة $|z| = 1$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ إلى منحن مقيس C . احسب طول هذا المنحني

الحل : يعطى طول المنحني المطلوب (استناداً إلى صفحة ٢٢٣) بالعلاقة :

$$S = \int_C ds = \int_{C_1} |f'(z)|\, ds$$

حيث رمزنا بـ C_1 لنصف الدائرة المذكورة .

وبما أن :

$$f'(z) = -\frac{8}{(1+z)^3}$$

فانه يكون على محيط الدائرة $|z| = 1$:

$$|f'(z)| = \frac{8}{|1+z|^3} = \frac{1}{\cos^3 \frac{\Theta}{2}}$$

(Θ هي زاوية العدد z) :

وهكذا نجد :

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\cos^3 \frac{\Theta}{2}} = 2\sqrt{2} + 2 \lg(1 + \sqrt{2})$$

تمارين للحل

٢١٥ – عين المنحني الذي ترسمه النقطة z في المستوي العقدي z وذلك في كل من الحالتين التاليتين :

(١) $z = (1 + e^{it})^2$

(٢) $z = a(1 + it)e^{-it}$

(a عدد حقيقي و t تتحول من $-\infty$ إلى $+\infty$) .

٢١٦ – عين المنطقة أو المنحني الذي يتعين وفق الشروط التالية :

(١) $|z^2 - 1| < 1$

(٢) $o < \arg \dfrac{z - i}{z + i} < \dfrac{\pi}{4}$

(٣) $I(z^{-1}) = 2$

(٤) $2z < 1 + z^2|$

برهن أن التوابع التالية $w = f(z)$ تنقل الساحة المفروضة في المستوي $z = x + iy$ إلى الساحة المفروضة في المستوي $w = u + iv$

٢١٧ – $w = \lg z$ ينقل الساحة $x^2 + y^2 \geqq 1$ ، $y > o$ إلى الشريط

$$o < v < \pi \quad , \quad u > o$$

٢١٨ – $w = \operatorname{arc\,tg} z$ ينقل الدائرة $z < 1$ إلى شريط في المستوي w . عين عرض هذا الشريط .

٢١٩ - $w = e^z$ ينقل الشريط $o < y < \frac{\pi}{2}$ إلى الربع الأول من المستوي w .

٢٢٠ - ماهي الساحة التي تنتقل اليهـا الدائرة $|z| < 1$ بوساطة التابع $w = a(nz - z^n)$ ، حيث $a > o$ و n عـدد صحيح اكبر من 1 . احسب مساحة هذه الساحة

٢٢١ - جد التمثيل $w = f(z)$ الذي ينقـل الدائرة $|z| < 1$ إلى الدائرة نفسها على أن تنتقـل النقط $z = -1, i, 1$ إلى النقط $1, \frac{3i+4}{5}$ و $w = -1$.

٢٢٢ - جد التمثيل $w = f(z)$ الذي ينقل الساحة المحـدودة بقوسي دائرتين تمران بالنقطتين $z = a$ و $z = b$ ويصنعان زاوية $\frac{\pi}{2}$ ، إلى نصف المستوي $\mathcal{I}(w) > o$ على شكل تنتقل فيه النقطة $z = a$ إلى النقطة $w = o$ والنقطة $z = b$ إلى النقطة $w = \infty$.

٢٢٣ - جـد التمثيل $w = f(z)$ الذي ينقل المستوي المقطوع وفق المجالين $z \leqslant a$ ؛ $z \geqslant b$ إلى المنطقة $\mathcal{I} w > o$ ($a < b$) .

٢٢٤ - جد التمثيل الذي ينقل المنطقة $o < a < |z| < b$ إلى مستطيل $o < \arg z < \pi$.

٢٢٥ - جد التمثيل الذي ينقل داخل القطع المكافىء $y^2 = 4x$ إلى نصف المستوي $\mathcal{I} w > o$

٢٢٦ - جد التمثيل الذي ينقل داخل القطع الزائد :

$$x^2 \sin^2 \alpha - y^2 \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$$

الى المنطقة $\mathcal{I} w > o$.

٢٢٧ - برهن أن التابع $w = \int_o^z (1 - t^2)^{-\frac{1}{3}} (1 + t^2)^{-\frac{2}{3}} dt$ الذي ينقل الدائرة $|z| < 1$ إلى داخل معين زاويته $60°$ وطول ضلعه $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{6})$.

٢٢٨ - عين التابع الذي ينقل النصف العلوي من المستوي w المقتطع منه المثلث QST .

$$(w_Q = -b \ , \ w_S = a i \ , \ w_T = b \ , \ a > o \ , \ b > o)$$

إلى النصف العلوي من المستوي z .

ناقش الحالة عندما $b \to o$.

٢٢٩ - برهن أن التابع :

$$w = \int_o^z \frac{dt}{(1 - t^6)^{1/3}}$$

ينقل مسدس منتظم إلى دائرة الوحدة . ماهو طول ضلع هذا المسدس

٢٣٠ - عين التابع الذي ينقل نصف الدائرة $\mathcal{I} z > o$ إلى نصف المستوي $\mathcal{I} w > o$ المقطوع على طول القطعة (o , i).

٢٣١ - عين التابع الذي ينقل الدائرة $|z| < 1$ الى الدائرة $|w| < 1$ المقطوعة على طول القطعة المستقيمة $(\frac{1}{2} , 2)$.

٢٣٢ - برهن بوساطة التحويلين المتتاليين $\zeta = -\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ أن التحويل $w = \frac{1}{\zeta^2}$:

$$w = \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}$$

ينقل النصف العلوي من الدائرة $|z| < 1$ إلى المستوي w المقطوع على طول المحور الحقيقي الموجب على شكل تنتقل فيـــه النقط $z = 0, 1, i$ إلى النقط $w = 0, 1, \infty$ على الترتيب .

٢٣٤ - برهن أن التحويل $w = \frac{2z}{1 - z^2}$ ينقل اثنتين من المناطق الأربعة المحدودة بالدائرتـــين $|z - 1| = \sqrt{2}$ ، $|z+1| = \sqrt{2}$ إلى $|w| < 1$.

الاجوبة

٢١٥ - (١) قطع مكافىء (٢) ناشر دائرة

٢١٦ - (١) داخل ليمنسكات

(٢) خارج الدائرة $(x+1)^2 + y^2 = 2$ من أجـــل $x < 0$ (وذلـك اذا اخترنا قيم الزوايا بشكل موافق) .

(٣) دائرة

(٤) تقاطع الدائرتين $x^2 + (y+1)^2 = 2$

$x^2 + (y-1)^2 = 2$ وخارجها .

٢١٨ - $\frac{\pi}{2}$

٢٢٠ - داخل ابيسكلوئيد ، المساحة $\pi a^2 n(n+1)$.

٢٢١ - $w = \dfrac{2z+1}{z+2}$

٢٢٢ - $w = c\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}$

٢٢٤ - $w = \sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$

٢٢٥ - $w = \lg z$

٢٢٦ - $z = w^2 + 2iw$

٢٢٧ - $z = 2\,\mathrm{ch}\left\{\dfrac{\pi - 2\alpha}{\pi}\lg w + i\alpha\right\},\ o < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

٢٢٨ - $w = K\int_{o}^{z} \dfrac{\zeta^{2\alpha/\pi}}{(1-\zeta^2)^{\alpha/\pi}}\,d\zeta + \alpha i$

حيث :

$$K = \frac{(b - a i)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)} \quad , \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

وعندما $b \to o$ يكون $w = a\sqrt{z^2 - 1}$

٢٢٩ - $\frac{1}{6}\sqrt[3]{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

٢٣٠ - $w = \sqrt{z^2 - 1}$

٢٣١ - $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$

تمارين عامة

٢٣٤ – إذا كان لدينا (في المستوي العقدي z) k نقطة $z_1 , z_2 , \dots , z_k$ واذا كانت $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_k$ أعداداً غير سالبة تحقق الشرط $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$ فعندئذ يقع العدد .

$$\zeta = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_k z_k$$

في أصغر مضلع (مغلق) محدب يحوي النقط $z_1 , z_2 , \dots , z_k$.

هل يصح الأمر نفسة من أجل كل متتاليتين غير منتهيتين (z_n) ، (α_n) يكون من أجلها $\sum \alpha_n = 1$ والعدد $\zeta = \sum \alpha_n z_n$ موجوداً ؟

٢٣٥ – اذا كان لـ α_n , z_n المعنى الوارد في المسألة السابقة فعندئذ يقع كل عدد ζ يحقق الشرط :

$$\frac{\alpha_1}{\zeta - z_1} + \frac{\alpha_2}{\zeta - z_k} + \dots + \frac{\alpha_k}{\zeta - z_k} = 0$$

في أصغر مضلع (مغلق) محدب يحوي النقط $z_1 , z_2 , \dots , z_k$.

٢٣٦ – برهن أن أصغر مضلع (مغلق) محدب يحوي جميع جذور تابع صحيح عادي (كثير حدود) $G(z)$ يحوي كذلك جميع جذور مشتقه .

٢٣٧ -- ليكن لدينا (في المستوي العقدي z) n نقطة مفروضة

($n \geqslant 4$) لا تقع أي أربع منها على محيط دائرة واحـدة . وليكن $l_\nu(z)$ تمثيلاً خطيـــاً يكون من أجله $l_\nu(z_\nu) = \infty$ ويكون لأصغر مضلع محدب π_ν يحوى صور النقط المتبقية ، a_ν رأساً ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) فعندئذ يصح مايلي :

(١) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 6(n-2)$

(٢) لايمكن أن يكون لكل مضلع π_n ستة رؤوس أو أكـثر من ذلك .

(٣) إذا كان $n < 12$ فعندئذ يكون من بـــين π_n مثلث أو شكل رباعي الاضلاع .

(٤) اذا لم يوجد في الحالة $n \geqslant 12$ أي مثلث أو أي شكل رباعي فعندئذ يكون عدد الأشكال خماسية الاضلاع مساوياً ١٢ على الأقل .

٢٣٩ – برهن أن السلسلة :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i\alpha} \lg n}$$

متقاربة من أجل كل عدد حقيقي α غير مساو للصفر .

٢٤٠ – إذا كان $f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ سلسلة قوى نصف قطر تقاربها $r > o$ وإذا كانت (b_n) متتالية تحقق الشرط :

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \longrightarrow \beta$$

وإذا كان $|\beta| < r$ فعندئذ :

$$\frac{c_n}{b_n} = \frac{a_o b_n a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_o}{b_n} \longrightarrow f(\beta) .$$

جد التابع التحليلي $w(z)$ ضمن الشروط التالية :

٢٤٠ - $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \;:\; w(o) = o$

٢٤١ - $u = \dfrac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$

٢٤٢ - $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ حيث φ تابع كيفي

٢٤٣ - عين قيمة التابع $w = z^z = e^{z \lg z}$ في النقطة $z = -e$ وذلك إذا فرضنا أن التابع $w(z)$ يتغير بشكل مستمر على طول طريق في النصف العلوي من المستوي أو في النصف السفلي منه وإذا فرضنا أن $\lg 1 = o$.

بوساطة نشر $\dfrac{1}{\cos z}$ ونشر $z \operatorname{ctg} z$ في سلاسل برهن صحة مايلي :

٢٤٤ - $$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_n}{(2n)!} z^{2n-1}$$

حيث $|z| < \frac{\pi}{2}$ و B_n اعداد برنولي .

٢٤٥ - $$\lg \frac{\sin z}{z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n}{n(2n)!} z^{2n} \;;\; |z| < \pi$$

عين الحدود الستة الأولى في نشور التوابع التالية وعين ساحة تقاربها :

٢٤٦ - $w = \dfrac{z}{\lg(1+z)}$

٢٤٧ - $w = \dfrac{z}{\operatorname{arc\,tg} z}$

٢٤٨ - عين دائرة تقارب سلسلة القوى لكل من التابعين :

$$\frac{\cos 2\pi z^2}{\cos \pi z} \quad \text{و} \quad \frac{\sin \pi z^2}{\sin \pi z}$$

انشر التوابع التالية في الساحات المذكورة بجانب كل منها .

٢٤٩ - $\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ ؛ $|< z|<1$

٢٥٠ - $\dfrac{2}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$ ؛ $<|z|<2$

٢٥١ - التابع السابق نفسه من أجل $|z| > 2$

٢٥٢ - $\dfrac{1}{z-2}\lg\dfrac{z-i}{z+i}$ عندما $|<|z|<2$ وذلك إذا فرضنا ان قيمة اللوغارتم من أجل $z=2i$ حقيقية . كذلك عندما $|z|>2$

٢٥٣ - $z^5 e^{\frac{1}{z}}$

٢٥٤ - $e^{z+\frac{1}{z}}$

٢٥٥ - اذا لم يكن للسلسلة $\sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ على محيط دائرة التقارب سوى نقطة شاذة وحيدة z_0 وإذا كانت هذه النقطة الشاذة قطباً مضاعفاً من المرتبة m فعندئذ تصح العلاقة :

$$a_n = \frac{An^{m-1}}{z_o^n}\left[1+\varepsilon(n)\right]$$

حيث يسعى $\varepsilon(n)$ إلى الصفر عندما يسعى n إلى اللانهاية وحيث A ثابت

احسب تكاملات التوابع التالية على المنحنيات المذكورة بجانب كل منها على ان يتم التكامل في الاتجاه الموجب .

۲٥٦ - $\int \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$

على الدائرة $x^2+y^2=2x+2y$

۲٥٧ - $\int \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)^2}$

على الاستروئيد $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$

۲٥٨ - $\int \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$

على الدائرة $|z|=2$

احسب التكاملات التالية :

۲٥٩ - $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

۲٦٠ - $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$

۲٦١ - $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$ عندما $m<n$ (m و n عددان صحيحان)

۲٦٢ - $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi+a}$ عندما $a>1$

۲٦٣ - $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi\,d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2}$ $|p|<1$

احسب ، باستعمال دساتير كوشي ، التكاملات التالية الممتدة على المنحنيات المذكورة بجانب كل منها .

۲٦٤ - $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^z}{z-2}\,dz$

الممتد على (١) الدائرة $|z|=3$

(٢) الدائرة $|z|=1$ ،

٢٦٥ - $\int \frac{\sin 3z}{z+\frac{\pi}{2}} dz$ على الدائرة $|z|=5$

٢٦٦ - $\int \frac{e^{iz}}{z^3} dz$ على الدائرة $|z|=2$

٢٦٧ - $\int \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^3} dz$ على الدائرة $|z|=1$

برهن صحة المتطابقات التالية :

٢٦٨ - $$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3} dx = \frac{\pi p(1-p)}{8 \sin \pi p} 2^p$$

٢٦٩ - $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\lg^2 x+\pi^2)} = \frac{\pi}{2a} \frac{1}{\lg^2 a+\frac{\pi^2}{4}} - \frac{1}{1+a^2}$$

$a > 0$

٢٧٠ - $$\int_0^\infty \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \left(e^{-a} - \frac{1}{2}\right)$$

$a > 0$

عين ، بالاستعانة بنظرية روشي ، عدد حلول كل من المعادلتين التاليتين الواقعة ضمن الدائرة $|z| < 1$.

٢٧١ - $z^6 - 6z + 10 = 0$

٢٧٢ - $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$

كم حل يوجد لكل من المعادلتين التاليتين في كل ربع من ارباع المستوي .

٢٧٣ - $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$

٢٧٤ - $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$

٢٧٥ - برهن انه يوجد للمعادلة $z = a e^z$ ، حيث $0 < a < \frac{1}{e}$، حل وحيد داخل الدائرة $|z| \leqslant 1$

٢٧٦ - برهن أنه يوجد للمعادلة $z^2 = a e^z$ ، حيث $0 < a < \frac{1}{e}$ حلان داخل $|z| < 1$ برهن كذلك أن هذين الحلين حقيقيان ومن اشارتين مختلفتين

٢٧٧ - برهن أن جميع حلول المعادلة :

$$(z - a)^n - k^n (z - b)^n = 0$$

تقع على محيط دائرة

٢٧٨ - عين صورة النصف العلوي من المستوي z حسب التمثيل $\cos w = \operatorname{ch} a \cos z$ وذلك إذا علمت أن $w = \frac{\pi}{2}$ عندما $z = \frac{\pi}{2}$

٢٧٩ - إن التابع $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ ينقل المنطقة s_n إلى نصف المستوي العلوي . عين s_n ثم عين $\lim_{n \to \infty} s_n$.

٢٨٠ - عين التمثيل الذي ينقل نصف الدائرة $|z| < 1$ ، $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ إلى النصف العلوي من المستوي w على أن تنتقل النقط $z = 0 , 1 , -1$ إلى النقط $w = 0 , 1 , -1$.

الاجوبة

٢٤٠ — $w = z^3 (1 - 2i)$

٢٤١ — $w = \operatorname{ctg} z$

٢٤٢ — $w = \alpha i \lg z + \beta i + \gamma$ (α و β و γ اعـــداد . حقيقية كيفية)

٢٤٣ — في الحالة الأولى يكون $w = e^{-e(1+\pi i)}$ وفي الحالة الثانية يكون $w = e^{-e(1-\pi i)}$

٢٤٦ — $w = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} - \frac{z^3}{24} - \frac{19 z^4}{720} - \frac{49 z^5}{480} - \dots ,$

٢٤٧ — $w = 1 + \frac{z^{\cdot}}{4} - \frac{4 z^4}{45} + \frac{44}{945} z^6 - \frac{428}{14175} z^8 + \frac{10196}{46775} z^{10} + \dots$

٢٤٨ — . يمكن نشر كل من التابعين في المستوي كله .

٢٤٩ — $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{12} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{4^{\nu}}$

٢٥٠ — $\frac{1}{9} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{2n}$ حيث $a_n = 1$ من أجل $n < o$

$a_n = \frac{3n + 7}{4^{n+2}}$ من أجل $n > o$

٢٥١ — $\frac{1}{9} \sum_{1}^{\infty} \frac{1 + (3'n - 7) 4^{n-2}}{z^{2n}}$

٢٥٢ — عندما $2 > |z| > 1$ يكون النشر

$$a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n+1}^{\infty}b_n\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

وعندما $|z|>2$ يكون : $\sum_{n=2}^{\infty}c_n\left(\frac{2}{z}\right)^n$

حيث :

$$c_{2n}=c_{2n+1}=-i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,2^{2n-1}}\right.$$

$$a=-\frac{1}{2}\lg\frac{2-i}{2+i}\qquad b_n=a+c_n$$

٢٥٣ — $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+5}}{n!}$

٢٥٤ — $\sum_{1=0}^{\infty}(a_n z^n+z^{-n})$

حيث :

$$a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,(n+\nu)!}\qquad a_0=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$$

٢٥٦ — $\frac{-\pi i}{2}$ ٢٥٧ — $\frac{3\pi i}{64}$

٢٥٨ — 0 ٢٥٩ — $\pi\sqrt{2}$

٢٦٠ — $\frac{\pi}{2a}$ ٢٦١ — $\frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$

٢٦٢ — $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ ٢٦٣ — $\pi\frac{1+p^4}{1-p^2}$

٢٦٤ — (١) a^2 (٢) صفر ٢٦٥ — $2\pi i$

٢٦٦ - $-\pi i$ ٢٦٧ - $\frac{21 \pi i}{16}$

٢٧١ - 0 ٢٧٢ - 5

٢٧٣ - حل في كل ربع ٢٧٤ - حل في كل ربع

٢٧٨ - النصف العلوي من المستوي بمقاطع شاقولية بـــين النقط

$n\pi$ و $n\pi + ai$

٢٧٩ - S_n هي الساحة داخل الزاوية الحادة المفتوحة نحو اليمين والتي

قياسها $\frac{\pi}{n}$ ورأسها $z = -n$ واحد اضلاعها على محور السينات . اما نهاية

S_n عندما $n \to \infty$ فهو شريط عرضه π .

٢٨٠ - $w = \frac{2z}{1 + z^2}$

٢٨١ - $w = \frac{1}{a} (z^2 - a^2)$