الفصل الثاني

الاعداد الطبيعية والاعداد الصحيحة

١ ـ ٢ مجموعة الأعداد الطبيعية ومبادىء بيانو Peano : يعد العدد الطبيعي أول مفهوم رياضي أوجده الفكر البشري بسبب حاجته لتعداد الأشياء المحيطة به . ولقد درست خواص مجموعة الأعداد الطبيعية :

$$N = \{ 0 , 1 , 2 , \dots \}$$

بشكل حسي وحدسي منذ زمن قديم ثم أعطيت لهذه المجموعة بنية مجردة متماسكة انطلاقاً من مبادىء أساسية تسمى عادة « مبادىء بيانو »[١] نذكرها فيما يلي :

N_1 ـ الصفر (0) عدد طبيعي .

N_2 ـ لكل عدد طبيعي a عدد طبيعي آخر وحيد يليه نرمز له بـ a^+ وبصورة خاصة تكتب : $0^+ = 1$.

وعلى العكس إذا كان $a \neq 0$ فإن هناك عدداً طبيعياً آخر يليه العدد a .

---

(١) عالم رياضي ايتالي عاش بين ١٨٥٨ و ١٩٣٢ .

N_3 ـ لا يمكن أن يكون العدد الطبيعي ، الذي يلي عـدداً طبيعياً آخر ، صفراً .

N_4 ـ إذا ولي عدد طبيعي واحد عددين طبيعيين كانا متساويين .

N_5 ـ إذا كانت E مجموعة جزئية من N وحققت الشرطين .

$$0 \in E \quad , \quad (h \in E \Rightarrow h^+ \in E)$$

فإنه يكون $\qquad E = N$

٢ ـ ٢ تفسير مبادىء بيانو :

١ ـ يعرف المبدأ الأول عدداً طبيعياً نسميه صفراً فالمجموعة N مجموعة غير خالية إذ أنها تحوي على الأقل هذا العنصر .

٢ ـ يعطينا المبدأ الثاني طريقة لبناء هذه المجموعة اعتباراً من عنصرها الأول ـ الصفر ـ فهي مكونة من الصفر والأعـداد التي يمكن تكوينها بإيجاد عدد يلي عدداً من N . وينتج عن هذا أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية ، وأنه عندما نتابع تكوين الأعداد الطبيعية فسوف لن نقع على عدد سبق مروره (انظر التمرين ٣٩) .

٣ ـ يمكننا أن نمثل المبدأ الرابع رمزياً بالشكل :

$$a^+ = a'^+ \Rightarrow a = a'$$

وأن نستنتج أن التطبيق f : $\quad a \xrightarrow{f} a^+$

يجعل كل عدد طبيعي لا يساوي الصفر خيالاً لعـدد طبيعي وحيـد فهو تقابل بين المجموعة N والمجموعة $N^* = N - \{0\}$.

٤ ـ إن المبدأ الأخير يعطي طريقة البرهان بالتراجع : في الحقيقة لنفرض أن E مجموعة جزئية من N معرفة بخاصة معينة نرمز لها بالقضية $P(n)$ حيث n متحول المجموعة E . فإذا كانت هذه القضية صحيحة من أجل $n = 0$ ($0 \in E$) وأمكن استنتاج صحتها من أجل $n = h^+$ انطلاقاً من فرض صحتها من أجل $n = h$ وذلك مهما كان $h \in E$ أي :

$$\forall h \in E \Rightarrow h^+ \in E$$

فإننا نقرر استناداً إلى هذا المبدأ أن هذه القضية صحيحة من أجل كل قيمة لـ n أي .

$$\forall n \in N \ : \ P(n) \Leftrightarrow E = N$$

ويمكننا أن نرمز لكل ماتقدم بالعلاقة المنطقية :

$$\{ P(0) \wedge [\forall h \in E \ : \ P(h) \Rightarrow P(h^+)] \} \Rightarrow E = N$$

٣ ـ ٢ **ملاحظة** : يمكننا تعميم مبدأ التراجع بالشكل التالي :

N'_5 ـ إذا كانت E مجموعة جزئية من N وحققت الشرطين التاليين :

$$h \in E \ , \ (q \in E \Rightarrow q^+ \in E) \ , \ q \geqslant h$$

فان : $E = N - \{0, 1, \ldots, h\}$

، أي إذا كانت القضية $P(n)$ محققة من أجل $n = h$ ، وتنتج صحتها من أجل $n = q^+$ عند فرض صحتها من أجل $n = q$ فإنها تكون صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant h$.

٤ ـ ٢ **بنية مجموعة الأعداد الطبيعية** : بعد أن كونا مجموعة الأعداد الطبيعية سنحاول فيما يلي بناء هذه المجموعة أي تعريف علاقات بين عناصرها وعمليات داخلية عليها .

٥ - ٢ **جمع الأعداد الطبيعية** : إن أول عملية داخليـة نجريها على الأعداد الطبيعية هي الجمع ونرمز له عادة بـ + وذلك بأن نقابل بين كل زوج مرتب (x , y) من الأعداد الطبيعية وعدد طبيعي آخر نرمز له بـ $x + y$ ونسميه « مجموع هذين العددين » . نعرف هذه العملية بطريقة التراجع انطلاقاً من المبدأين التاليين :

$$A_1 : \quad x + 0 = x \qquad \forall x \in N \qquad (1)$$

$$A_2 : \quad x + y^+ = (x + y)^+ \qquad \forall x , y \in N \qquad (2)$$

ويعني المبدأ الأول أن الصفر هو عنصر محايد أيمن لعمليـة الجمع كما يعني المبدأ الأخــير أنه إذا كان $x + y$ معرفاً فإن المجموع $x + y^+$ يعرف بأنه العـدد الذي يلي العدد $x + y$ وذلك مهما كان العددان x و y من N .

نفرض في هاتين العلاقتين أن لـ x قيمة معينة ولكنها كيفية بيـنما يمثل y متحول مجموعة جزئية من N نرمز لها بـ A ونفرض أن الجمع معروف من أجل كل عنصر منها . تبين لنا العلاقة (1) أن A تحوي الصفر على الأقل أما العلاقة (2) فإنها تبين أنه إذا كان الجمع معروفاً من أجل y فإنه معرف من أجل y^+ أي :

$$[(0 \in A) \text{ و } (y \in A \Rightarrow y^+ \in A)] \Rightarrow A = N$$

فاستناداً إلى المبدأ (N_5) يكون الجمع معرفاً على N كاملة وبصورة خاصة سيكون :

$$x + 0^+ = (x + 0)^+ \iff x + 1 = x^+$$

إن إضافة العدد (1) إلى x يعطي العدد الذي يلي x وذلك باعتبار (1) هو العدد الذي يلي الصفر .

٥ ـ ٢ خواص جمع الأعداد الطبيعية : إن الجمع يتمتع بالخواص التاليــة :

(١) إن الجمع عملية داخلية تجميعية (قابلة للدمج) (انظرالتمرين٤٢) :

$$\forall x , y , z \in N \quad : \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

(٢) إن الجمع عملية داخلية تبديلية (انظر التمرين ٤٣) :

$$\forall x , y \in N \quad : \quad x + y = y + x$$

ينتج عن هذه الخاصة وعن المبدأ A_1 أن :

$$\forall x \in \mathbf{N} \quad : \quad x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$$

وهذا يعني أن الصفر هو العنصر المحايد لعملية جمع الأعداد الطبيعية .

(٣) إذا كان a , b عددين طبيعيين فإنه يكون :

$$a + b = \mathbf{0} \Leftrightarrow a = \mathbf{0} \ , \ b = \mathbf{0}$$

(انظر التمرين ٤٤) .

ينتج عن هذه الخاصة أنه لا يوجد لأي عـدد طبيعي سوى الصفر ، نظير بالنسبة للجمع ، فالعملية المعاكـسة للجمع غير معرفة على N .

(٤) عملية جمع الأعداد الطبيعية قابلة للاختصار أي أن كل عــدد طبيعي عنصر منتظم [١] بالنسبة لهذه العملية (انظر التمرين ٤٥) أي :

---

(١) يعرف العنصر المنتظم بالعلاقتين الواردتين في [٣٣-١] وعندماتكون العملية تبديلية يكتفي بواحدة فقط من هاتين العلاقتين كالتي أوردناها فيرأس الصفحة التالية .

$$\forall x \in N \ : \ a + x = b + x \Rightarrow a = b$$

٦ ـ ٢ ملاحظة : بما أن جمع الأعداد الطبيعية عملية تبديلية وتجميعية فإنه يمكننا أن نبادل بين مواقع الأعداد المجموعة دون أن يتغير ناتج الجمع . وهذا يعني أنه لتكرار عملية الجمع يمكننا أن نبدأ بهذه العملية من حيث أردنا وبالترتيب الذي نريد ونرمز عادة :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

٧ ـ ٢ علاقة التراجح في المجموعة N : إذا كان $c \neq o$ و $a = b + c$ قلنا إن a أكبر من b أو إن a يكبر b ورمزنا لذلك بالشكل :

$$a = b + c \quad , \quad c \neq o \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ b < a \end{cases}$$

وإذا كان من الممكن أن نعطي لعدد طبيعي واحد رمزين مختلفين وكان من الممكن أن يكون $c = 0$ فإننا نعرف علاقة تراجح بالمعنى الواسع بالشكل التالي :

$$a = b + c \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant b \\ b \leqslant a \end{cases}$$

ويبرهن بسهولة أن العلاقة $\leqslant$ هي علاقة ترتيب كلي على N .

بما أن عملية الجمع وحيدة القيمة وتبديلية وتجميعية وقابلة للاختصار فإنه يمكننا أن نكتب :

$$a = b + c \Leftrightarrow a + d = (b + d) + c \quad . \quad \forall d \in N$$

وهذه العلاقة تكافىء العلاقة :

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a+d \geqslant b+d$$

ونقول عن هذا « إن علاقة التراجح المعرفة على N منسجمة مع عملية الجمع [1] » .

إذا تذكرنا أن العلاقة $>$ متعدية فانه يمكننا تعميم ماسبق بالشكل التالي :

$$\left.\begin{array}{l} a > b \Rightarrow a+c > b+c \\ c > d \Rightarrow b+c > b+d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c > b+d$$

نفسر ما تقدم بقولنا « يمكن جمع متراجحتين من اتجاه واحد إلى بعضها وذلك بأن نضيف إلى كل طرف من المتراجحة الأولى الطرف المشابه له في الوضع من المتراجحة الثانية » .

٨ - ٢ **فضل عددين طبيعيين** : إذا كان $a \geqslant b$ فقد رأينا أعلاه أنه يوجد عدد طبيعي x بحيث يكون $a = b + x$ ، نسمي x فضل a

---

(١) لقد عرفنا في [٣٧ - ١] انسجام علاقة تكافؤ مع عملية داخلية ويمكننا أن نعمم هذا التعريف فنقول : عن علاقة ما $\mathcal{R}$ إنها منسجمة مع العملية $\top$ المعرفة على المجموعة ذاتها فيما إذا كان :

$$\forall x, y, z \in E \quad , \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow (x \top z) \mathcal{R} (y \top z)$$

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow (z \top x) \mathcal{R} (z \top y)$$

وبصورة خاصة نعرف انسجام العملية $\top$ مع علاقة الترتيب $>$:

$$\forall a, b, c \in E, a < b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \top c < b \top c \\ c \top a < c \top b \end{array}\right.$$

عن b ونكتب ذلك بالشكل :

$$x = a - b$$

وكثيراً ما نقول إن x هو حاصل طرح b من a .

إن العدد x وحيد لأنه لو وجد عددان x' ، x يحققان ما سبق فإنه يكون :

$$a = b + x = b + x' \Rightarrow x = x'$$

لأن جمع الأعداد الطبيعية قابل للاختصار .

نسمي العملية التي نرمز لها بـ (−) **طرحاً** وبما أن :

$$x = a - b \Rightarrow a \geqslant b$$

فإنه ليس لعملية الطرح هذه معنى إلا إذا كان $a \geqslant b$ فهي غير معرفة من أجل كل زوج من عناصر N فهي إذن ليست عملية داخلية معرفة على N .

يتمتع الطرح بالخاصة الأساسية التالية :

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

والتي نذكرها بقولنا « لا يتغير حاصل الطرح عندما نضيف إلى حديه عدداً واحداً » (لماذا ؟) .

٩ ـ ٢ **الضرب** : الضرب عملية داخلية نرمز لها بـ $(\times)$ ونعرفها على N بالمبدأين التاليين :

P_1 − $\forall a \in N \quad , \quad a \times 0 = 0$

P_2 − $\forall a, b \in N \quad , \quad a \times b^{+} = a \times b + a$

ونجد بصورة خاصة :

$$a \times 1 = a \times 0^{+} = a \times 0 + a = a$$

$$a \times 2 = a \times 1^{+} = a \times 1 + a = a + a$$

وهكذا . . .

وقد اصطلح أن يستعاض عن الاشارة $(\times)$ بـ $(\cdot)$ وفي حالة ضرب حروف ببعضها يمكن حذف كل من هاتين الاشارتين .

١٠ ـ ٢ خواص ضرب الأعداد الطبيعية :

١ ـ الضرب عملية توزيعية على الجمع (انظر التمرين ٤٧) أي :

$$\forall a, b, c \in N : \ a(b+c) = ab + ac \ , \ (b+c)a = ba + ca$$

٢ ـ الضرب عملية تجميعية (قابلة للدمج) (لماذا ؟) أي :

$$\forall x, y, z \in N \ : \ (xy)z = x(yz)$$

٣ ـ الضرب عملية تبديلية (انظر التمرين ٤٩) أي :

$$\forall a, b \in N \ : \ ab = ba$$

٤ ـ إذا كان جداء عددين صفراً فان أحدهما على الأقل صفر (انظر التمرين ٥٠) أي :

$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ أو $b = 0$

٥ ـ إن عملية الضرب منسجمة مع علاقة الترتيب $\leqslant$ المعرفة على N (انظر التمرين ٥١) أي :

$$\forall c \in N \ : \ a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$$

$$\forall c \in N^{*} : \ a < b \Rightarrow ac < bc$$

وينتج عن هذه الخاصة إمكان ضرب متراجحتين من اتجاه واحد .
في الحقيقة إذا كنا أمام المتراجحتين :

$$a < b \quad , \quad c < d$$

فانه يمكننا ضرب الأولى بـ c والثانية بـ b فنجد :

$$a . c < b . c \quad , \quad b . c < b . d \Rightarrow a . c < b . d$$

وذلك لأن علاقة الترتيب > متعديه .

١٠ ـ ٢ التقسيم ـ مضاعفات عدد ـ ليكن a عدداً طبيعياً وليكن f التابع المعرف على N بالعلاقة :

$$x \xrightarrow{f} a x \quad \text{أو} \quad y = a x$$

نسمي y مضاعفاً لـ a وسيكون خيال N ، وفق هذا التابع ، مجموعة مضاعفات a التي نرمز لها بـ M(a) ونجد :

$$M(0) = \{0\} \quad , \quad M(1) = N \quad , \quad M(a) = \{ 0 , a , 2 a , \ldots \}$$

إن التابع f الذي أتينا على تعريفه هو تقابل (تطبيق ثنائي الجانب) بين N و M(a) . من أجل $a \neq 0$ يكون التطبيق المعاكس لـ f هو :

$$a \neq o \quad , \quad y \xrightarrow{f^{-1}} \frac{y}{a} \quad \text{أو} \quad x = \frac{y}{a}$$

إن x خيال y في التطبيق f^{-1} غـــير موجود إلا إذا كان y من مضاعفات a ونقول عندها إن a يقسم y ونرمز لذلك بالشكل $a | y$ أو إن a قاسم لـ y أو إن y يقبل القسمة على a .

نستنتج مما تقدم أن :

$$\forall a \in N : 1 | a \quad , \quad a | 0 \quad , \quad a | a$$

يبرهن بسهولة على أن علاقة (يقسم) منعكسة ، متعديةولا متناظرة فهي إذن علاقة ترتيب جزئي معرفة في المجموعة N .

۱۱ ـ ۲ **التقسيم الاقليدي** : إذا كان a , b عـددين طبيعيين فانه يبرهن (انظر التمرين ٥٣) على وجود عدد طبيعي وحيد q بحيث يكون :

$$b q \leqslant a < b (q + 1) \qquad (*)$$

نسمي عملية إيجاد العدد q « تقسيما اقليديا » ونسمي a مقسوماً و b مقسوماً عليه ، أما q فانه يدعى « ناتج التقسيم الاقليدي » .

ينتج عن العلاقة (*) أنه يوجد عـــدد طبيعي وحيد r يصغر b بحيث يكون :

$$a = b q + r$$

نسمي العدد r المعرف بالشـكل السـابق « باقي التقسيم الاقليدي لـ a على b » .

۱۲ ـ ۲ **تمرين** : هل التقسيم الاقليدي ، الذي يربط بين كل زوج مرتب من الأعداد الطبيعية وناتج التقسيم الاقليدي للمركبـة الأولى على المركبة الثانية لهذا الزوج ، عملية داخلية معرفة على N وإذا كان ذلك ادرس خواص هذه العملية .

۱۳ ـ ۲ **علاقة التوافق** : إذا كان n عدداً غير معدوم وإذا كان باقيا قسمة العددين (a , b) على n متساويين قلنا إن a يوافق b قياس n (Modulo n) وكتبنا ذلك بالشكل :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

أمثـــلة :

$$12 \equiv 17 \pmod 5 \quad , \quad 0 \equiv 7 \pmod 7 \quad , \quad 11 \equiv 3 \pmod 4$$

يبرهن بسهولة على أن هذه العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعـدية فهي، إذن علاقة تكافؤ تجزىء المجموعة N إلى أصناف تـكافؤ إذ أنه مهما كان، العدد $a \in N$ فإنه باقي قسمته على n سيكون واحداً من عناصر المجموعة :

$$[0 , n-1] = \{0 , 1 , 2 , \ldots , n-1\}$$

إذا كان r عدداً طبيعياً من هذا المجال فإن مجموعة الأعـداد الطبيعية الموافقة لـ r قياس n تدعى صنفاً توافقياً قياس n ونرمز له بالشكل :

$$(r) = \{r , r+n , r+2n , \ldots , r+q.n , \ldots\}$$

وإذا كان $a \in (r)$ فكثيراً مانكتب $(r) = (a)$ ونقول إن الصنف (a) يساوي الصنف (r) وإننا اخترنا r ممثلاً لهذا الصنف .

مثال : إن أصناف التوافق قياس 5 هي :

$$(0) = \{0 , 5 , 10 , 15 , \ldots\}$$

$$(1) = \{1 , 6 , 11 , 16 , \ldots\}$$

$$(2) = \{2 , 7 , 12 , 17 , \ldots\}$$

$$(3) = \{3 , 8 , 13 , 18 , \ldots\}$$

$$(4) = \{4 , 9 , 14 , 19 , \ldots\}$$

ونلاحظ بسهولة أن :

$$(0) \cup (1) \cup (2) \cup (3) \cup (4) = N$$

١٤ - ٢ خواص علاقة التوافق :

١ - ليكون عددان طبيعيان متوافقين قياس n يلزم ويكفي أن يكون فضلهما من مضاعفات العدد n (انظر التمرين ٥٧) :

$$a \geq b \quad , \quad a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \in M(n)$$

٢ - يمكن جمع علاقتي توافق من قياس n (انظر التمرين ٥٥) أي أن علاقة التوافق منسجمة مع عملية الجمع على N :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{n} \\ b \equiv b' \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$$

وبصورة خاصة فإن :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{n} \\ b \equiv b \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \equiv a' + b \pmod{n}$$

٣ - يمكن ضرب علاقتي توافق من قياس واحد (انظر التمرين ٦٠) أي أن علاقة التوافق منسجمة مع عملية الضرب على N .

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{n} \\ b \equiv b' \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a \,.\, b \equiv a' \,.\, b' \pmod{n}$$

وبصورة خاصة :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{n} \\ b \equiv b \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a \,.\, b \equiv a' \,.\, b \pmod{n}$$

٤ ـ يمكن رفع علاقة توافق إلى قوة اسها عدد طبيعي (انظر التمرين٦٢)

$$\forall x \in N \quad : \quad a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^x \equiv b^x \pmod{n}$$

١٥ ـ ٢ جبر أصناف التوافق : لنرمز بـ C_n لمجموعة أصناف التوافق قياس n أي :

$$C_n = \{(0),(1),(2), \ldots ,(n-1)\}$$

التي هي مجموعة منتهية عـــدد عناصرها n . سنعرف فيما يلي عمليتين داخليتين على هذه المجموعة نسميها أيضاً جمع وضرب أصناف التوافق .

١٦ ـ ٢ جمع صنفي توافق قياس n : لنقابل بين كل صنفين (a) , (b) من C_n وبين صنف ثالث من C_n نسميه مجموع هذين الصنفين ، نرمز له بـ (a + b) ونعرفه بالعلاقة التالية :

$$(a) \dotplus (b) = (a + b)$$

حيث $\dotplus$ يمثل جميع أصناف التوافق و + يمثل جمع الأعداد الطبيعية ونذكر ذلك بقولنـــا : « إن مجموع الصنفين الموافقـين (قياس n) لـ b , a هو الصنف الموافق (قياس n) لـ « a + b » ومن الواضح أن $(a+b) \in C_n$ لأن علاقة التوافق تجزىء المجموعة N فلا بد لكل عـدد طبيعي مثل a + b من أن ينتمي إلى أحد الأصناف C_n .

١٧ ـ ٢ أمثلة ١ ـ من جدول التوافق قياس(5) يمكننا أن نستنتج :

$$(3) + (4) = (7) = (2)$$

٢ ـ في التوافق قياس (10) يمكننا أن نكتب :

$$(5) + (5) = (10) = (0)$$

١٨ ـ ٢ خواص جمع أصناف التوافق : نستنتج بسهولة من تعريف جمع صنفي توافق الخواص التالية :

١ ـ إن جمع صنفين عملية داخلية تبديلية لأن :

$$(a) \dot{+} (b) = (a + b) \quad \text{و} \quad (b) \dot{+} (a) = (b + a)$$

ولكن $(a + b) = (b + a)$ لأن $a + b = b + a$.

٢ ـ إن هذه العملية قابلة الدمج لأن :

$$[\,(a) \dot{+} (b)\,] + (c) = (a + b) \dot{+} (c) = (a + b + c)$$

$$(a) + [\,(b) \dot{+} (c)\,] = (a) \dot{+} (b + c) = (a + b + c)$$

٣ ـ لهذه العملية عنصر حيادي هو الصنف (0) وذلك لأنها تبديلية ولأن :

$$(a) \dot{+} (0) = (a + 0) = (a)$$

٤ ـ لكل عنصر $(r) \in C_n$ ، $(r \neq 0)$ عنصر نظير بالنسبة لهذه العملية هو $(n - r)$ وذلك لأن العملية تبديلية ولأن :

$$(n - r) \dot{+} (r) = (n) = (0)$$

أما العنصر (0) فهو يناظر نفسه .

١٩ ـ ٢ مثال : يمثل الجدولان التاليـــان جمـع أصناف التوافق (قياس 5) و (قياس 6) .

$\dot{+}$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(0)
(2)	(2)	(3)	(4)	(5)	(0)	(1)
(3)	(3)	(4)	(5)	(0)	(1)	(2)
(4)	(4)	(5)	(0)	(1)	(2)	(3)
(5)	(5)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)

$\dot{+}$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(0)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	(1)	(2)	(3)	(4)	(0)
(2)	(2)	(3)	(4)	(0)	(1)
(3)	(3)	(4)	(0)	(1)	(2)
(4)	(4)	(0)	(1)	(2)	(3)

٢٠ ـ ٢ جداء صنفين : لنقابل بين كل صنفين (a) , (b) من C_n وصنف ثالث منه نسميه جداء (a) في (b) نرمز له بـ (a . b) ونعرفه بالعلاقة :

$$(a) \,.\, (b) = (a \,.\, b)$$

نذكر هذه القاعدة بقولنا : « إن جداء صنفي a , b هو صنف ab »

مثال : في التوافق (قياس 5) نجد :

$$(4) \,.\, (3) = (12) = (2)$$

ونجد في التوافق قياس (3) أن :

$$(4) . (3) = (12) = (0)$$

٢١ - ٢ خواص جداء أصناف التوافق : استناداً إلى تعريف هذه العملية الداخلية يمكننا أن نستنتج الخواص التالية :

١ ـ عملية جداء أصناف التوافق تبديلية لأن :

$$(a) . (b) = (a . b) \quad , \quad (b) . (a) = (b . a) \quad \text{و} \quad a . b = b . a$$

٢ ـ جداء أصناف التوافق قابل للدمج (عملية تجميعية) لأن :

$$[(a) . (b)] . (c) = (a . b) . (c) = [(a . b)] . (c) = (a . b . c)$$

٣ ـ لجداء أصناف التوافق عنصر محايد هو (1) وذلك لأن هذه العملية تبديلية ولأن :

$$(a) . (1) = (a . 1) = (a)$$

٢٢ - ٢ مثال : يمثل الجدولان التاليان جدولي الضرب لأصناف التوافق (قياس 5) و (قياس 6) :

$\dot{\times}$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(2)	(0)	(2)	(4)	(1)	(3)
(3)	(0)	(3)	(1)	(4)	(2)
(4)	(0)	(4)	(3)	(2)	(1)

$\dot{\times}$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(2)	(0)	(2)	(4)	(0)	(2)	(4)
(3)	(0)	(3)	(0)	(3)	(0)	(3)
(4)	(0)	(4)	(2)	(0)	(4)	(2)
(5)	(0)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

٢٣ - ٢ **مجموعة الأعداد الصحيحة** : لقد عرفنا على مجموعة الأعداد الطبيعية N عمليتين داخليتين هما الجمع والضرب ، وقلنا عند ذاك إن العمليتين المعاكستين لهاتين العمليتين غير معرفتين على N . سنبني الآن انطلاقاً من المجموعة N ، مجموعة عددية جديدة يكون لكل عنصر فيها نظير بالنسبة لعملية الجمع المعرفة عليها ، وبذلك نتمكن من تعريف عملية الطرح (العملية المعاكسة لعملية الجمع) على هذه المجموعة . نسمي هذه المجموعة « مجموعة الأعداد الصحيحة » ونرمز لها بـ Z .

نتوصل إلى هدفنا هذا بأن نوسع مفهوم $a - b$ على الحالة التي يكون فيها $a < b$.

لتكن المجموعة الجداء N^2 ولنعرف عليها علاقة $\mathcal{R}$ بالشكل التالي :

$$(*)\ \forall a, b, a', b' \in N ,\quad (a, b)\ \mathcal{R}\ (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$$

أمثلة :

$$(7, 3)\ \mathcal{R}\ (11, 7) \quad , \quad (5, 2)\ \mathcal{R}\ (9, 6) \quad , \quad (7, 1)\ \mathcal{R}\ (8, 2)$$

يبرهن بسهولة أن هذه العلاقة منعكسة ومتعدية ومتناظرة فهي علاقة تكافؤ تجزىء المجموعة N^2 إلى أصناف تكافؤ . نرمز عادة لمجموعة هذه الأصناف بالشكل $N^2/\mathcal{R}$ ونرمز لصنف من هذه الأصناف ، يحوي العنصر (a , b) بالشكل $(\widehat{a , b})$ ونسمي هذا الصنف عدداً صحيحاً .

٢٤ - ٢ تساوي عددين صحيحين : استناداً إلى الخاصة الأساسية لأصناف التكافؤ التي تقول : إذا كان ممثلا صنفي تكافؤ لعلاقة واحدة متكافئين ، وفق هذه العلاقة ، فإن هذين الصنفين متساويان » ، فإننا نقول :

« يتساوى العددان الصحيحان إذا كان ممثلاهما متكافئين وفق العلاقة (*) »

فنكتب مثلًا :

$$(5 , 0)\ \mathcal{R}\ (7 , 2) \quad \Leftrightarrow \quad (\widehat{7 , 2}) = (\widehat{5 , 0})$$

$$11 + 0 = 5 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad (\widehat{11 , 6}) = (\widehat{5 , 0})$$

وإذا رمزنا للعدد الصحيح $(\widehat{x , y})$ تجاوزاً ، لتسهيل الطباعة وعند عدم خشية الالتباس ، بالشكل (x , y) ، فإنه يمكننا أن نكتب العلاقات التالية :

$$\forall\, m \in N \;:\; (a , b) = (a + m , b + m) \qquad (1)$$

$$\forall\, l \in N , \ (l \leqslant a , l \leqslant b) \;:\; (a , b) = (a - l , b - l) \qquad (2)$$

وبصورة خاصة :

$$a \geqslant b \;:\; (a , b) = (a - b , 0) \qquad (3)$$

$$a \leqslant b \;:\; (a , b) = (0 , b - a) \qquad (4)$$

$$\forall\, k \in N \;:\; (0 , 0) = (k , k) \qquad (5)$$

وهذا يعني أنه يمكن أن يرمز لأي عدد صحيح بواحد من الأشكال التالية :

$$(0,0) \ , \ (a,0) \ , \ (0,b) \quad : \quad a , b \in N^*$$

إذا كان $a , b \in N^*$ ورمزنا بـ Z^+ لمجموعة الأعداد الصحيحة التي تمثل بالشكل (a , o) وبـ Z^- لمجموعة الأعداد الصحيحة التي تمثل بالشكل (o , b) فإنه يكون $Z = Z^- \cup \{(0,0)\} \cup Z^+$.

بعد تعريف المجموعة Z سنشيد عليها بنية رياضية وذلك بأن نعرف عليها عمليات داخلية وعلاقات ثنائية .

٢٥ - ٢ **جمع الأعداد الصحيحة** : ننشىء أولا على الجداء N^2 عملية داخلية نرمز لها تجاوزاً بـ + ، ونعرفها بالعلاقة :

$$(a , b) + (c , d) = (a + c , b + d)$$

ونبرهن بعد ذلك أنه إذا استعضنا عن العنصرين (a , b) ، (c , d) بالعنصرين المكافئين لهما على الترتيب (a' , b') , (c' , d') حسب العلاقة(*) فإن الناتج الجديد يكافىء الناتج السابق ، وهذا يعني أن :

$$(a + c \ , \ b + d) \ \mathcal{R} \ (a' + c' \ , \ b' + d')$$

في الحقيقة انطلاقاً من العلاقة (*) يمكننا أن نكتب :

$$(a , b) \ \mathcal{R} \ (a' , b') \iff a + b' = a' + b$$

$$(c , d) \ \mathcal{R} \ (c' , d') \iff c + d' = c' + d$$

واستناداً إلى قابلية جمع الأعداد الطبيعية للاختصار والمبادلة والتجميع

يمكننا أن نكتب :

$$a + c + b' + d' = a' + c' + b + d$$

$$\Longleftrightarrow (a + c , b + d) \ \mathfrak{R} \ (a' + c' , b' + d')$$

استناداً إلى ما تقدم يمكننا أن نورد تعريف جمع الأعـداد الصحيحة بالشكل التالي :

$$(\widehat{a , b}) \dot{+} (\widehat{c , d}) = (\overline{a + c \ , \ b + d})$$

نلاحظ أن العلاقة السابقة تحوي عمليتين سميناً كلا منها عملية جمع رمزنا للأولى منها بـ $\dot{+}$ (وسنحذف النقطة اذا لم يكن التباس) وللثانية بـ + للتفريق بين جمع عددين صحيحين معرفين كما سبق وبين جمع عددين طبيعيين .

٢٦ - ٢ خواص جمع الأعداد الصحيحة : يمكننا أن نستنتج بسهولة من تعريف جمع الأعداد الصحيحة ، الخواص التالية :

١ - جمع الأعداد الصحيحة عملية قابلة للدمج (تجميعية) .

٢ - جمع الأعداد الصحيحة عملية تبديلية .

٣ - إن العدد (0 , 0) هو العنصر المحايد لهذه العملية .

٤ - يقبل كل عدد صحيح مثل (a , b) نظيراً بالنسبة للجمع هو العدد (b , a) لأن :

$$(a , b) + (b , a) = (a + b , b + a) = (a + b , a + b) = (0 , 0)$$

وبصورة خاصة إن العددين (0 , n) , (n , 0) متناظران .

٥ - إن جمع الأعداد الصحيحة عملية قابلة للاختصار :

لبرهان هذه الخاصة نكتفي بأن نبرهن أنه مهما كانت الأعداد الصحيحة : $(\widehat{e,f})$ ، $(\widehat{c,d})$ ، $(\widehat{a,b})$ فإن العلاقة التالية صحيحة :

$$(\widehat{a,b}) \dot{+} (\widehat{c,d}) = (\widehat{a,b}) \dot{+} (\widehat{e,f}) \Rightarrow$$

$$(\widehat{c,d}) = (\widehat{e,f})$$

وذلك لأن جمع الأعداد الصحيحة تبديلي .

لبرهان هذه العلاقة نكتب :

$$[(a,b) + (c,d)] \mathcal{R} [(a,b) + (e,f)]$$

$$\Leftrightarrow (a+c, b+d) \mathcal{R} (a+e, b+f)$$

$$\Leftrightarrow a+c+b+f = b+d+a+e$$

وبما أن جمع الأعداد الطبيعية قابل للدمج والتبديل فان :

$$a+c+b+f = b+d+a+e$$

$$\Leftrightarrow (a+b)+(c+f) = (a+b)+(d+e)$$

وبما أن جمع الأعداد الطبيعية قابل للاختصار فإن :

$$(a+b)+(c+f) = (a+b)+(d+e) \Rightarrow (c+f) = (d+e)$$

$$\Leftrightarrow (c,d) \mathcal{R} (e,f)$$

ينتج مما تقدم أن :

$$(a+c, b+d) \mathcal{R} (a+e, b+f) \Rightarrow (c,d) \mathcal{R} (e,f)$$

واستناداً إلى [٢٤ – ٢] وإلى تعريف جمع الأعداد الصحيحة :

$$(\overline{a+c, b+d}) = (\overline{a+e, b+f}) \Rightarrow (\widehat{c,d}) = (\widehat{e,f})$$

أو :

$$(\widehat{a,b}) \dot{+} (\widehat{c,d}) = (\widehat{a,b}) \dot{+} (\widehat{e,f}) \Rightarrow (\widehat{c,d}) = (\widehat{e,f})$$

وهو المطلوب برهانه .

٢٧ - ٢ ضرب الأعداد الصحيحة : ننشىء على مجموعة الأعداد الصحيحة عملية داخلية أخرى نسميها (ضرباً) نرمز لها موقتاً بـ $\dot{\times}$ ونعرفها بالعلاقة التالية :

$$(\widehat{a,b}) \dot{\times} (\widehat{c,d}) = (\overline{ac+bd, ad+bc})$$

يبرهن أن ناتج العملية لا يتغير فيما إذا غيرنا ممثلي حديها بممثلين أخرين لذا يمكننا أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل :

$$(a, b) \times (c, d) = (ac+bd, ad+bc)$$

حيث نفرض أن الزوج المرتب من الأعداد الطبيعية (x, y) يمثل صنف التكافؤ $(\widehat{x,y})$ وحيث حذفنا النقطة من فوق $\times$.

٢٨ - ٢ خواص ضرب الأعداد الصحيحة : استناداً إلى تعريف الضرب على المجموعة Z يمكننا أن نستنتج بسهولة الخواص التالية :

١ - ضرب الأعداد الصحيحة عملية قابلة للدمج (تجميعية) أي :

$$[(a, b) \times (c, d)] \times (e, f) = (a, b) \times [(c, d) \times (e, f)]$$

٢ - ضرب الأعداد الصحيحة عملية تبديلية :

$$(a, b) \times (c, d) = (c, d) \times (a, b)$$

٣ ـ ضرب الأعداد الصحيحة توزيعي على جمعها :

$$(a , b) \times [(c , d) + (e , f)] = (a , b) \times (c , d) +$$
$$+ (a , b) \times (e , f)$$

٤ ـ إن العدد الصحيح (1 , 0) عنصر محايد لعملية الضرب :

$$(1 , 0) \times (a , b) = (a , b) \quad \text{و} \quad (a , b) \times (1 , 0) = (a , b)$$

٥ ـ ليس لأي عدد صحيح [سوى العددين (1 , 0) ، (0 , 1)] نظير بالنسبة للضرب .

٦ ـ حاصل ضرب العدد الصحيح (0,0) بأي عـــدد صحيح آخر يساوي (0 , 0) :

$$(0 , 0) \times (a , b) = (a , b) \times (0 , 0) = (0 , 0)$$

٧ ـ كل الأعداد الصحيحة منتظمة بالنسبة للضرب ما عدا العدد (0,0) (لماذا؟) .

٨ ـ بما أن عملية ضرب الأعداد الصحيحة تبديلية وقابـــلة للدمج (تجميعية) فإننا نجري تكرار هذه العملية بدون ترتيب ونكتب اصطلاحاً :

$$(a_1 , b_1) \times (a_2 , b_2) \times \ldots \times (a_n , b_n) = \prod_{1}^{n} (a_i . b_i)$$

٢٩ ـ ٢ المجموعة N مجموعة جزئية من Z : لقد عرفنا على N عمليتين داخليتين هما الجمع والضرب ورمزنا لهما بـ (+ ، ×) وعرفنا على Z عمليتين داخليتين تحملان هذين الاسمين نفسهما ورمزنا لهما بـ ($\dot{+}$, $\dot{\times}$) وعرفنا المجموعة $Z^+ \subset Z$ بأنها مجموعة الأعداد الصحيحة التي يمكن أن

يرمز لكل منها بالشكل $(\widehat{n,0})$ حيث $n \neq 0$، ويبرهن بسهولة أن المجموعة Z^+ مستقرة بالنسبة للعمليتين $(\dot{+}, \dot{\times})$.

لنطبق المجموعة N على المجموعة $Z' = Z^+ + \{0\}$ بالشكل :

$$\forall a \in N \quad : \quad a \xrightarrow{f} (\widehat{a,0})$$

إن هذا التطبيق تقابل (تطبيق ثنائي الجانب) ويحقق العلاقتين :

$$f(a+b) = (\widehat{a+b,0}) = (\widehat{a,0}) \dot{+} (\widehat{b,0}) =$$

$$= f(a) \dot{+} f(b)$$

$$f(a.b) = (\widehat{a.b,0}) = (\widehat{a,0}) \dot{\times} (\widehat{b,0}) =$$

$$= f(a) \dot{\times} f(b)$$

وهـــذا ما يبرهن على أن f هو إيزومورفيزم لـ (+ و × و N) على ($\dot{+}$, $\dot{\times}$, Z')، ونعبر عن هذا أحياناً بقولنا إن N متحدة بالشكل مع Z' بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين على كل منها . وبما أننا في الرياضيات المعاصرة نهدف إلى دراسة خواص الأشياء أكثر من الأشياء نفسها فإنه يمكننا أن نعطي لعمليتين تتمتعان بخواص متحدة رمزاً واحداً كما أننا نطابق بين x و f(x) عندما يكون f إيزومورفيزماً . فنكتب هنا :

$$a \neq 0 \quad , \quad (\widehat{a,0}) = a$$

و $(\widehat{0,0}) = 0$ فيكون : $Z' = N$

ونقول إن العدد الصحيح $(\widehat{0,0})$ هو صفر الأعداد الصحيحة .

نسمي الأعداد الصحيحة التي تنتمي إلى Z^+ أعداداً موجبة ونرمز لها

بالشكل $+a$ أما الأعـــداد التي يرمز لهـا بـ $(0, a)$ والتي تنتمي إلى Z^- فإنها مناظرة للأعداد الموجبة (a, o) ؛ نسميها أعداداً ســالبة ونرمز لها بالشكل :

$$(0 , a) = - a$$

ونقول في كل من هاتين الحالتين إن العدد الطبيعي a هو القيمــة المطلقة لكل من العددين الصحيحين $(a, 0) = +a$ ، $(0, a) = -a$ كما نقول إن إشارة العدد الموجب $+a$ هي $(+)$ وإن إشارة العدد السالب $(-a)$ هي $(-)$.

٣٠ ـ ٢ قواعد ضرب الأعداد الصحيحة : استناداً إلى تعريف عملية ضرب الأعداد الصحيحة يمكننا أن نكتب العلاقات التالية :

$$(m , 0) . (n , 0) = (m . n , 0) \Leftrightarrow (+ m) . (+ n) = +(m . n)$$

$$(m , 0) . (0 , n) = (0 , m . n) \Leftrightarrow (+ m) . (- n) = - (m . n)$$

$$(0 , m) . (n , 0) = (0 , m . n) \Leftrightarrow (- m) . (+ n) = - (m . n)$$

$$(0 , m) . (0 , n) = (m . n , 0) \Leftrightarrow (- m) . (- n) = + (m . n)$$

نلخص ماتقدم بالقاعدة التالية :

« جداء عددين صحيحين يساوي عدداً صحيحاً قيمته المطلقة تساوي جداء القيمتين المطلقتين لهذين العددين وتكون إشارة الجداء $(+)$ إذا كان العددان المضروبان من إشارة واحدة وتكون هذه الإشارة $(-)$ إذا كان هذان العددان من إشارتين مختلفتين . ونكتب عادة قاعدة ضرب الإشارات بالشكل التالي :

$$(+)\times(+)=+ \qquad (-)\times(-)=+$$

$$(+)\times(-)=- \qquad (-)\times(+)=-$$

نعمم القاعدة السابقة بقولنا :

« لإيجاد حاصل ضرب جملة من الأعداد الصحيحة نضرب القيم المطلقة لهذه الأعداد ببعضها ونتخذ الناتج قيمة مطلقة لحاصل الضرب ونضرب إشارات هذه الأعداد بالتدرج حسب القاعدة السابقة فنحصل على إشارة حاصل الضرب » .

٣١ - ٢ عملية طرح الأعداد الصحيحة : لقد رأينا أعلاه أن لكل عدد صحيح نظيراً بالنسبة للجمع وينتج عن هذا أن عملية الطرح ، العملية المعاكسة للجمع [٢٥ – ٢] ، معروفة على مجموعة الأعداد الصحيحة . نرمز لهذه العملية موقتاً بـ $\dot{-}$ ونكتب إستناداً إلى تعريف العملية المعاكسة :

$$(a\,,\,b)\ \dot{-}\ (c\,,\,d) = (a\,,\,b) + (d\,,\,c)$$

حيث ($d\,,\,c$) نظير المطروح ($c\,,\,d$) بالنسبة للجمع .

لقد عرفنا الطرح $a-b$ على N عندما يكون $a>b$ ويمكننا في هذه الحالة أن نكتب :

$$(a\,,\,0)\ \dot{-}\ (b\,,\,0) = (a\,,\,0) + (0\,,\,b) = (a\,,\,b) =$$
$$(a - b\,,\,0) = a - b$$

ونلاحظ أن ناتج الطرح $a-b$ على N يساوي ناتج الطرح ($\dot{-}$) لهذين العددين باعتبارهما عددين صحيحين لذا نستعمل عادة الإشارة ($\dot{-}$)

رمزاً لعملية طرح الأعداد الصحيحة بدلاً (∸) ونكتب تجاوزاً :

$$(a , 0) - (b , 0) = (a - b , 0)$$

نعمم ما تقدم على الحالة التي يكون فيها $a < b$ ونكتب :

$$(a , 0) - (b , 0) = (a , 0) + (0 , b) = (a , b) =$$
$$= (0 , b - a) = -(b - a)$$

أو بشكل مختصر :

$$a - b = -(b - a)$$

ونقول إذا كان المطروح b أكبر من المطروح منـــه a فإن ناتج الطرح سالب .

٣٢ ـ ٢ قاعـــدة : لقد رمزنا للعـدد الصحيح الموجب (n , 0) بالشكل n + ورمزنا للعدد الصحيح السالب بـ n - ويمكننا الآن أن نضمر إشارة الزائد من يسار n ونكتب بشكل مختصر $+n = n$.

وإذا لاحظنا استناداً إلى تعريف الطرح أن :

$$(n , 0) - (0 , m) = (n , 0) + (m , 0) = n + m$$
$$= n - (-m)$$

فإننا نتوصل إلى العلاقة :

$$n - (-m) = n + m$$

نفسر هذا بقولنا إن القوس التي تفصل بين إشـارتي الـ (-) تمثل عملية ضرب لهاتين الإشارتين ونكون بذلك قد عممنا قاعدة ضرب إشارات

الأعداد على ضرب الاشارات بصورة عامة .

إن إشارتي الناقص اللتين ضربناهما ببعضها تمثلان مفهومين مختلفين: الأولى منها تمثل عملية طرح بينما تمثل الثانية إشـــارة للعدد الصحيح $(-n)$ ويمكننا أن نعتبر أن كلا منهما تمثل إشارة لعدد بعد أن نذكر أن الطرح هو العملية المعاكسة للجمع فنكتب :

$$n - (-m) = n + [-(-m)]$$

حيث $(-m)$ ـ هو نظير $(-m)$ بالنسبة للجمع .

٣٣ ـ ٢ خواص عملية الطرح : استناداً إلى تعريف عملية الطرح على الأعداد الصحيحة يمكننا أن نستنتج بسهولة الخواص التالية :

١ ـ لهذه العملية عنصر حيادي من اليمين هو العدد $(0, 0)$:

$$(a, b) - (0, 0) = (a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

٢ ـ كل عدد صحيح نظير لنفسه بالنسبة للطرح :

$$(a, b) - (a, b) = (0, 0)$$

٣ ـ كل عدد صحيح عنصر منتظم بالنسبة للطرح :

$$(a, b) - (c, d) = (e, f) - (c, d) \Rightarrow (a, b) = (e, f)$$

$$(c, d) - (a, b) = (c, d) - (e, f) \Rightarrow (a, b) = (e, f)$$

لبرهان العلاقة الأولى نكتب مساواتها الأولى بالشكل :

$$(a, b) + (d, c) = (e, f) + (d, c) \Rightarrow (a, b) = (e, f)$$

وذلك لأن عملية جمع الأعداد الصحيحة قابلة للاختصار .

وتبرهن العلاقة الثانية بالطريقة ذاتها ونقول باختصار : « يمكن إضافة عدد صحيح واحـــد إلى طرفي مساواة » ، أو « يمكن جمع مساواتين إلى بعضها » .

٤ ـ لايتغير ناتج طرح عـددين صحيحين فيما إذا أضفنا إلى كل من حديه عدداً صحيحاً واحداً :

$$(a , b) - (c , d) = [(a , b) + (e . f)] - [(c . d) + (e . f)] \quad (2)$$

لبرهان صحة هذه العلاقة نكتب طرفها الأيمن بالشكل التالي :

$$(a + e , b + f) - (c + e , d + f) = (a + e , b + f) +$$
$$+ (d + f , c + e) = (a + e + d + f , b + f + c + e) =$$
$$= (a + d , b + c)$$

استناداً إلى الخاصة [٢٦ ـ ٢] .

ولكن الطرف الأيسر من (2) :

$$(a , b) - (c . d) = (a , b) + (d , c) = (a + d , b + c)$$

وهذا ما يبرهن صحة العلاقة (2) .

٥ ـ إن عملية الضرب توزيعية بالنسبة لعملية الطرح ؛ وذلك لأن :

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \quad , \quad \gamma(\alpha - \beta) = \gamma[\alpha + (-\beta)] =$$
$$= \gamma\alpha + \gamma(-\beta) = \gamma\alpha - \gamma\beta$$

٣٤ ـ ٢ **علاقة ترتيب** Z ـ **تعريف** : إذا كان α , β عـــددين صحيحين فإننا نقول تعريفاً إن α أكبر من β أو β أصغر من α إذا

كان $\beta - \alpha$ عدداً موجباً أي :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha > \beta \\ \beta < \alpha\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha - \beta = (n, 0) \\ n \neq 0\end{array}\right.$$

وبصورة خاصة فإن $\alpha = 0 - \alpha$ يؤدي إلى أن كل عدد موجب يكبر الصفر $\alpha = (n, 0) \Rightarrow \alpha > 0$ وأن كل عـــدد سالب يصغر الصفر $\alpha = (0, n) \Rightarrow \alpha < 0$.

لقد عرفنا بما تقدم علاقة رمزنا لها بـ ($>$) أو ($<$) ، ويبرهن بسهولة أن هذه العلاقة علاقة ترتيب كلي بالمعنى الضيق . ويمكننا أن نعرف بشكل مماثل التراجح بالمعنى الواسع فنقول :

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta \in Z^{+} + \{0\}$$

أو :

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \beta - \alpha \in Z^{-} + \{0\}$$

ويبرهن بسهولة أيضـــاً أن العلاقة $\geq$ هي علاقة ترتيب كلي بالمعنى الواسع أي أن كل عددين صحيحين يحققان العلاقة :

$$\alpha \geq \beta \quad \text{أو} \quad \beta \geq \alpha$$

٣٥ ـ ٢ نتـــائج :

١ ـ ينتج من العلاقة : $(m, 0) - (n, 0) = (m, n)$
أن العدد (m, n) يكون موجباً إذا كان $m > n$ ويكون سالباً إذا كان $m < n$ ويكون معدوماً إذا كان $m = n$، أي أن ترتيب العددين الموجبين يطابق ترتيب قيمتيها المطلقتين .

٢ ـ نستنتج من العلاقة :

$$(m\ ,\ 0) - (0\ ,\ n) = (m + n\ ,\ 0)$$

أن كل عدد موجب أكبر من أي عدد سالب .

٣ ـ نستنتج من العلاقة :

$$n > m \quad , \quad (0\ ,\ m) - (0\ ,\ n) = (n\ ,\ m)$$

ومن كون العدد $(n\ ,\ m)$ موجباً أن :

$$n > m \Rightarrow (0\ ,\ m) > (0\ ,\ n)$$

ونذكر ذلك بقولنا : « إن العدد السالب الأصغر بالقيمة المطلقة هو الأكبر بالقيمة الحقيقية » .

مثال :

$$-15 < -3 < 0 < 5 < 15$$

٣٦ ـ ٢ **خواص علاقة الترتيب على** Z :

١ ـ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

وذلك لأن : $\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$

و : $\alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) > 0$

ينتج مما تقدم أن :

$$\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + (-\beta) > \gamma + (-\beta) \Leftrightarrow \alpha > \gamma - \beta$$

إذن يمكننا أن ننقل حداً من أحد طرفي متراجحة إلى الطرف الآخر بعد أن نبدل إشارته .

٢ ـ يمكن اضافة متراجحتين من اتجاه واحد ، طرفاً الى طرف .

في الحقيقة :

$$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

$$\gamma > \delta \Rightarrow \beta + \gamma > \beta + \delta$$

وبما أن علاقة الترتيب $>$ متعدية فإننا نستنتج من العلاقة السابقة :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

وهو المطلوب برهانه .

٣ ـ إذا ضربنا طرفي متراجحة ، حداها عددان صحيحان ، بعدد موجب فإننا نحصل على متراجحة صحيحة .

في الحقيقة إذا كان $\mu > 0$ فإن :

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow \mu(\alpha - \beta) > 0 \Leftrightarrow \mu\alpha - \mu\beta > 0$$
$$\Leftrightarrow \mu\alpha > \mu\beta$$

تمارين محلولة

٣٩ برهن أن مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة غير منتهية .

الحل : تحوي المجموعة N على الأقل عنصراً واحداً هو الصفر (حسب N_1) . وبحسب المبدأ (N_2) يمكننا أن نجد العدد الذي يلي الصفر ولنرمز له بـ (a_1) ثم العـــدد الذي يلي (a_1) ولنرمز له بـ (a_2) وهكذا . ولنبرهن أن هذا يعطينا باستمرار أعداداً جديدة ، أي أننا سوف لن نقع على عدد سبق تكوينه . لنفرض جدلاً أننا وقعنا لأول مرة في هذا البناء على عدد a_{n+1} يلي آخر a_n كان قد سبق أن مررنا به وليكن مثلاً :

$$a_{n+1} = a_p \qquad n \geqslant p$$

إن $p \neq 0$ لأن $a_0 = 0$ لا يلي أي عـــدد من N كما أن $p \neq n$ لأن $p = n$ يعني أن a_n يلي نفسه وبما أن a_n يلي a_{n-1} فسوف يكون حسب (N_4) :

$$a^+_{n-1} = a_n \quad , \quad a_n^+ = a_n \Rightarrow a_{n-1} = a_n$$

وهذا مخالف لما فرضناه من أن هذه الحادثة تقـــع لأول مرة من أجل a_{n+1} .

إذا كان $p \neq 0$ و $p \neq n$ فسوف يكون $0 < p < n$ ولنبرهن استحالة ذلك . ينتج عن هذا الفرض وعن (N_4) :

$$a_n^+ = a_p \quad , \quad a^+_{p-1} = a_p \Rightarrow a_n = a_{p-1}$$

وتعني هذه النتيجة أن هذه الحادثة وقعت من أجل a_n قبل وقوعها من أجل a_{n+1} وهذا مخالف لما فرضناه .

ينتج مما تقدم أننا خلال تكوين مجموعة الأعداد الطبيعية بحسب المبدأ N_2 : سوف لن نقع على عدد مر معنا . وبما أنه لايوجد مايمنع من استمرار عملية التكوين وإيجاد أعداد جديدة فإن المجموعة N غير منتهية .

٤٠ - برهن بطريقة التراجع أنه مهما كان العدد الطبيعي n :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

الحل : إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$ و $n = 1$ إذ أن :

$$1 \times 1! = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$$

لنفرض أن هذه العلاقة صحيحة من أجل $n = p$ ولنستنتج من ذلك صحتها من أجل $n = p+1$.

الفرض :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + p \times p! = (p+1)! - 1$$

لنجمع إلى طرفي هذه المساواة العدد $(p+1).(p+1)!$ فنجد :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + p \times p! + (p+1) \times (p+1)!$$
$$= (p+1)(p+1)! + (p+1)! - 1 = (p+1)!(p+1+1) - 1$$
$$= (p+2)! - 1$$

وهذا ما يثبت أن العلاقة المفروضة صحيحة من أجل $n = p+1$ بفرض صحتها من أجل $n = p$. واستناداً إلى مبدأ التراجع تكون صحيحة من

أجل كل قيمة لـ n .

٤١ - برهن بطريقة التراجع صحة العلاقة التالية (بفرض α عنصراً كيفياً من N) :

$$\sum_{\alpha}(n) = \sum_{h=1}^{n} h(h+1)\dots(h+\alpha-1)$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\, n(n+1)\dots(n+\alpha)$$

الحل : أن هذه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$ و $n=1$ لأنها تأخذ الشكل :

$$1.2.3\dots(1+\alpha-1) = \frac{1}{\alpha+1}\, 1.2\dots\alpha.(1+\alpha)$$

أو : $$1.2.3\dots\alpha = 1.2\dots\alpha$$

لنفرض أنها صحيحة من أجل $n=p$ ولنستنتج من ذلك صحتها من أجل $n=p+1$ أي لنفرض :

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{p} h(h+1)\dots(h+\alpha-1) =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\, p(p+1)\dots(p+\alpha)$$

ولنبرهن صحة العلاقة :

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{p+1} h(h+1)\dots(h+\alpha-1) =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}(p+1)(p+2)\cdots(p+\alpha)\ (p+\alpha+$$

لنجمع إلى طرفي العلاقة (1) الحد $(p+1)(p+2)\ldots(p+\alpha)$
فيصبح طرفها الأيسر مطابقاً للطرف الأيسر من (2) وأما الطرف الأيمن فيأخذ الشكل .

$$\frac{1}{\alpha+1}\,p\,(p+1)\ldots(p+\alpha)+(p+1)(p+2)\ldots(p+\alpha)=$$

$$=\left(1+\frac{p}{\alpha+1}\right)(p+1)\ldots(p+\alpha)$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}\,(p+1)(p+2)\ldots(p+\alpha)(p+\alpha+1)$$

وهو مطابق للطرف الأيمن من العلاقة (2) وهذا مايبرهن الاقتضاء :

$$(1) \Rightarrow (2)$$

ويبرهن صحة العلاقة المفروضة مهما كانت قيمة n وذلك استناداً إلى مبدأ التراجع .

٤٢ - برهن أن عملية جمع الأعداد الطبيعية تجميعية (قابلة للدمج) :

الحل : سنبرهن صحة العلاقة :

$$(1) \qquad \forall\, x\,,\,y\,,\,z \in N\,:\quad (x+y)+z=x+(y+z)$$

بطريقة التراجع :

١ - نبرهن صحة العلاقة (1) من أجل $z=0$: استناداً إلى تعريف الجمع يمكننا أن نكتب :

$$(x+y)+0 = x+y$$

$$x+(y+0) = x+y$$

وهذا ما يبرهن صحة العلاقة (1) من أجل $z = 0$.

لنفرض (فرضية التراجع) أن العلاقة (1) قد برهنت من أجل $z = p$ ولنستنتج من ذلك صحتها من أجل $z = p^+$ أي :

$$(x+y)+p = x+(y+p) \Rightarrow (x+y)+p^+ = x+(y+p^+)$$

لننطلق من الطرف الأيسر للمساواة التي يطلب برهانها فنجد على التوالي

$(x+y)+p^+ = [(x+y)+p]^+$ (تعريف الجمع)

$= [x+(y+p)]^+$ (فرضية التراجع و N_2)

$= x+(y+p)^+ = x+(y+p^+)$ (تعريف الجمع)

ونكون بذلك قد استنتجنا صحة العلاقة المطلوبة وبرهنا أن عملية الجمع قابلة للدمج .

٤٣ - برهن أن جمع الأعداد الطبيعية تبديلي :

الحل : نبرهن صحة العلاقة :

$$(1) \qquad \forall x, y \in N \ : \ x+y = y+x$$

بطريقة التراجع .

١ - نبرهن صحة العلاقة (1) من أجل $y = 0$ أي :

$$\forall x \in N \ : \ x+0 = 0+x$$

استناداً إلى تعريف الجمع $x+0 = x$ لذا يكفي أن نبرهن أنـه :

$$\forall x \in N \ : \ 0 + x = x \qquad (2)$$

في الحقيقة إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $x = 0$ أي :

$$0 + 0 = 0 \qquad (\text{بحسب } A_1)$$

لنبرهن صحتها من أجل x^+ استناداً إلى فرض صحتها من أجل x أي :

$$0 + x = x \Rightarrow 0 + x^+ = x^+$$

$$0 + x^+ = (0 + x)^+ \qquad (\text{بحسب } A_2)$$

$$(0 + x)^+ = x^+ \qquad (\text{فرضية التراجع})$$

وهذا يؤدي إلى العلاقة : $0 + x^+ = x^+$

فالعلاقة (2) صحيحة من أجل كل x من N .

٢ ـ لنبرهن صحة العلاقة (1) من أجل $y = 1$ أي :

$$x + 1 = 1 + x \qquad (3)$$

نبرهن صحة هذه العلاقة بطريقة التراجع فنقول إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $x = 0$ استناداً إلى ما سبق أي :

$$0 + 1 = 1 + 0$$

لنبرهن صحة العلاقة (3) من أجل $x = p^+$ استناداً إلى فرض صحتها من أجل $x = p$ أي :

$$p + 1 = 1 + p \Rightarrow p^+ + 1 = 1 + p^+ \qquad (4)$$

في الحقيقة يمكننا أن نكتب :

$$(p + 1)^+ = (1 + p)^+ \qquad (\text{فرضية التراجع})$$

ولكن : $p + 1 = p^+ \Rightarrow (p+1)^+ = (1+p)^+ = p^+ + 1$

ولدينا (حسب A_2) $(1+p)^+ = 1 + p$

وينتج عن العلاقتين الأخيرتين أن : $1 + p^+ = p^+ + 1$

وهو المطلوب إثباته .

٣ ـ لنفرض الآن أن العلاقة (1) صحيحة من أجل $y = p$ ولنبرهن صحتها من أجل $y = p^+$ أي لنبرهن صحة :

$$x + p = p + x \Rightarrow x + p^+ = p^+ + x \quad (5)$$

في الحقيقة يمكننا أن نكتب :

(حسب A_2) : $x + p^+ = (x+p)^+$

(الخاصة التجميعية) $p^+ + x = (p+1) + x = p + (1+x)$

(استناداً إلى (3)) $= p + (x+1) = p + x^+ = (p+x)^+$

(فرضية التراجع) $(x+p)^+ = (p+x)^+$

وهذا مايؤدي إلى العلاقة (5) من أجل كل قيمة لـ y ويبرهن الخاصة المطلوبة .

٤ ـ a , b عددان طبيعيان برهن صحة العلاقة :

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \quad (1)$$

الحل : إن الانتقال من اليمين إلى اليسار واضح ، فلنبرهن صحة العلاقة :

$$a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \quad (2)$$

لنفرض جدلاً أن $b \neq 0$ وهذا يعني حسب (N_3) وجود عدد

طبيعي مثل c بحيث يكون $c^+ = b$ وتأخذ المساواة الأولى من العلاقة (2) الشكل :

$$a + c^+ = (a + c)^+ = 0 \qquad \text{(تعريف الجمع)}$$

وهذا مخالف للمبدأ (N_3) ويؤدي إلى أن b لا يمكن إلا أن يكون معدوماً. وبالطريقة ذاتها نبرهن أن $a = 0$.

٤٥ - a و b عددان طبيعيان برهن صحة العلاقتين :

$$a + x = b + x \Rightarrow a = b$$

$$x + a = x + b \Rightarrow a = b$$

بما أن عملية الجمع تبديلية فإنه يكفي أن نبرهن واحداً من هذين الاقتضاءين ولنبرهن الأول مثلاً :

إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $x = 0$ ولنبرهن صحتها من أجل x^+ استناداً إلى فرض صحتها من أجل x أي :

$$[a + x = b + x \Rightarrow a = b] \Rightarrow [a + x^+ = b + x^+ \Rightarrow a = b]$$

في الحقيقة لدينا :

$$a + x^+ = b + x^+ \Rightarrow (a + x)^+ = (b + x)^+ \qquad \text{(حسب } A_2 \text{)}$$

$$\Rightarrow a + x = b + x \qquad \text{(حسب } N_4 \text{)}$$

$$\Rightarrow a = b \qquad \text{(فرضية التراجع)}$$

وبما أن العلاقة $\Rightarrow$ متعدية فيكون قد ثبت المطلوب .

٤٦ - برهن أن عملية ضرب الأعداد الطبيعية عملية توزيعية على جمعها

من اليسار أي :

$$(1) \qquad \forall a, b, c \in N \; : \; a(b+c) = ab + ac$$

بما أن جمع الأعداد تبديلي فإنه يمكننا أن نعتبر واحداً من العددين b , c ثابتاً والثاني متحولاً ثم نعيد البرهان بعدأن نبادل بين موضعي العددين (b , c) كما أننا نعتـــبر a ثابتاً ولكنه كيفياً ونبرهن هذه الخاصة بطريقة التراجع .

إن العلاقة (1) صحيحة من أجل $c = 0$ إذ أن :

$$a(b+0) = ab \quad \text{و} \quad ab + a.0 = ab$$

٢ ـ لنفرض أننا برهنا صحتها من أجل $c = p$ ولنستنتج صحتها من أجل $c = p^+$ أي لنثبت :

$$a(b+c) = ab + ac \Rightarrow a(b+c^+) = ab + ac^+$$

$a(b+c^+) = a(b+c)^+$	(A_2)
$= a(b+c) + a$	(P_2)
$= ab + ac + a$	(فرضية التراجع)
$= ab + ac^+$	(P_2)

ونكون بذلك قد برهنا المطلوب :

٤٧ ـ برهن أن ضرب الأعداد الطبيعية عملية توزيعية من اليمين على جمعها أي :

$$(1) \qquad \forall a, b, c \in N \; : \; (a+b)c = ac + bc$$

نعتبر في هـذه العلاقة a , b ثابتين ولكنهما اختياريان و c متحولاً

ولنبرهن هذه الخاصة بطريقة التراجع بعد أن نلاحظ بداهـة صحتها من أجل $c = 0$:

١ ـ بما أن العدد (1) عنصر حيادي في الضرب فإنه يكون :

$$(a + b) \cdot 1 = a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1$$

وهذا ما يؤكد صحة العلاقة (1) من أجل $c = 1$.

لنبرهن صحة الاقتضاء :

$$[(a + b)\, p = a\, p + b\, p] \Rightarrow [(a + b)\, p^{+} = a\, p^{+} + b\, p^{+}]$$

$(a + b)\, p^{+} = (a + b) \cdot p + a + b$ $\qquad$ (p_2)

$= a\, p + b \cdot p + a + b$ $\qquad$ (فرضية التراجع)

$= (a\, p + a) + (b\, p + b)$ $\qquad$ (الجمع تجميعي وتبديلي)

$= a \cdot p^{+} + b \cdot p^{+}$ $\qquad$ (P_2)

٤٨ ـ برهن أن عملية ضرب الأعداد الطبيعية عمليـة توزيعية بالنسبة لطرحها أي :

$$\forall\, x , y , z \in N \quad , \quad y \geqslant z \;:\; x\,(y - z) = x\,y - x\,z$$

الحل : بما أن $z \geqslant y$ فإنه يوجد عدد طبيعي d بحيث يكون :

$y = z + d \Leftrightarrow d = y - z$ $\qquad$ (تعريف الطرح)

$x\,y = x\,(z + d) = x\,z + x\,d$ $\qquad$ (الضرب توزيعي بالنسبة للجمع)

$x\,y - x\,z = x\,d$ $\qquad$ (تعريف الطرح)

ومنه نجد المطلوب : $\qquad$ $x\,y - x\,z = x\,(y - z)$

٤٩ - برهن أن عملية ضرب الأعـــداد الطبيعية منسجمة مع علاقة الترتيب $\leqslant$ المعرفة عليها أي :

$$\forall c \in N \quad : \quad a \geqslant b \Rightarrow a.c \geqslant b.c$$

الحل : يمكننا بحسب ما رأيناه كتابة العلاقات التالية :

$a \geqslant b \Rightarrow \exists\, d \in N \ : \ a = b + d$ (تعريف علاقة الترتيب)

$a = b + d \Rightarrow a.c = bc + dc$ (الضرب قابل للتوزيع)

$\Rightarrow ac \geqslant bc$ (تعريف علاقة الترتيب)

يبرهن بالطريقة ذاتها على أن عملية ضرب الأعـداد الطبيعية منسجمة مع علاقة الترتيب $>$ المعرفة على N^* .

٥٠ - برهن أنه إذا كان جداء عددين طبيعيين صفراً فإن أحدهما على الأقل صفر .

الحل : لنفرض جدلاً أن $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a.b = 0$ وهذا يعني أن العدد b يلي عـــدداً آخر e (قد يكون صفراً) أي $c^+ = b$ ويكون عندها :

$a.b = a.c^+ = ac + a$ (بحسب المبدأ P_2)

إن $ac + a$ لا يمكن أن يكون معدوماً لأننا فرضنا $a \neq o$ وهذا مخالف لما فرضناه من كون $a.b = 0$ أي أن فرضنا $b \neq 0$ غـــير منسجم مع الفرض الأصلي $ab = 0$ فلا بـد إذن من كون $b = 0$ وإذا

كان $b \neq 0$ فلا بد من كون $a = 0$ وهو المطلوب برهانه .

٥١ - برهن إن عملية ضرب الأعداد الطبيعية منسجمة مـــع علاقة الترتيب المعروفة على هذه المجموعة .

الحل : يمكننـا استناداً إلى التعليل المكتوب على اليمين أن نعطي العلاقات التالية :

(تعريف التراجح) $a , b \in N : a \geqslant b \Leftrightarrow \exists\, x \in N : a = b + x$

(عملية الجمع وحيدة القيمة) $\forall\, c \in N : a = b + x \Leftrightarrow ca = cb + cx$

(تعريف التراجح) $c\, a = c\, b + c\, x \Leftrightarrow c\, a \geqslant c\, b$

ينتج عن هذه العلاقات العلاقة :

$$a \geqslant b \Rightarrow c\, a \geqslant c\, b$$

وهو المطلوب برهانه .

٥٢ - برهن أن ضرب الأعداد الطبيعية عملية تبديلية أي :

$$\forall\, x , y \in N \ : \ x . y = y . x \qquad (1)$$

الحل : نلاحظ أن هذه العلاقة صحيحة من أجل $y = 0$ مهما كان x فلنبرهن أولاً صحتها من أجل $y = 1$ أي :

$$\forall\, x \in N \ : \ x . 1 = 1 . x \qquad (2)$$

١ ـ إن هـذه العلاقة صحيحة من أجل $x = 1$ فلنفرض صحتها من أجل $x = p$ ولنستنتج من ذلك صحتها من أجل $x = p^+$ أي لنـــبرهن صحة العلاقة :

$$p . 1 = 1 . p \Rightarrow p^+ . 1 = 1 . p^+$$

(P_1 والعنصر الحيادي) : $1 . p^+ = 1 . p + 1 = p + 1$

(العنصر الحيادي) $p^+ . 1 = (p + 1) . 1 = p + 1$

٢ ـ لنفرض صحة العلاقة (1) من أجل $y = p$ ولنبرهن صحتها من أجل $y = p^+$ أي لنبرهن :

$$\forall p \in N \; : \; x . p = p . x \Rightarrow x . p^+ = p^+ . x$$

(بحسب P_2) $x . p^+ = x . p + x$

(التوزيع من اليمين) $p^+ . x = (p + 1) x = p x + x = x p + x$

٥٣ ـ إذا كان b ، a عددين طبيعيين،برهن على وجود عدد طبيعي وحيد q يحقق العلاقة :

$$b q \leqslant a < b (q + 1)$$

الحل : لتكن $M(b)$ مجموعة مضاعفات b .

$$M(b) = \{ 0 , b , 2 b , . . . , n b , . . . \}$$

ولنرمز بـ $\mathcal{T}$ للمجموعة الجزئية من مضاعفات b التي لاتزيد على a أي :

$$x \in \mathcal{T} \iff [x \in M(b) \; , \; x \leqslant a]$$

إن $\mathcal{T}$ غير خالية لأنها تحوي على الأقل الصفر وهي منتهية لأنها محدودة

من الأعلى بـ a فسيكون لهـــا عنصر أعظم نرمز له بـ m وهو أكبر مضاعف لـ b يصغر أو يساوي a .

بما أن $m \in M(b)$ فإنه يوجد عدد وحيد q بحيث يكون :

$$m = q \cdot b$$

وسيكون بالبداهة $\qquad q \cdot b \leqslant a$

فلنبرهن على أن $\qquad (q + 1)\ b > a$

في الحقيقة إذا لم يكن ذلك فسوف يكون :

$$(q + 1)\ b \leqslant a$$

ولن يكون $q \cdot b$ هو العنصر الأعظم من $\mathcal{P}$ خلافاً لمـــا فرضناه وهذا يعني أنه لا يمكن إلا أن يكون المطلوب برهانه وهو :

$$q \cdot b \leqslant a < (q + 1)\ b$$

٥٤ - برهن أن مجموعة مضاعفات العدد n ، كمجموعة جزئية من N ، مستقرة بالنسبة لجمع وضرب الأعداد الطبيعية .

الحل : إذا كان $a, b \in M(n)$ فإنه يمكن إيجاد عددين مثل q', q بحيث يكون :

$$a = q\,n \quad , \quad b = q'\,n$$

وبما أن الضرب توزيعي على الجمع :

$$a + b = q\,n + q'\,n = (q + q')\,n \in M(n)$$

وبما أن الضرب تجميعي :

$$a \cdot b = q\,n \cdot q'\,n = (q\,n\,q')\,n \in M(n)$$

وهذا يثبت المطلوب .

٥٥ - برهن أن ضرب الأعداد الصحيحة تبديلي :

الحل : إذا عدنا إلى تعريف الضرب على N^2 [٢-٢٧] فسوف نجد :

$$(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, \ ad + bc)$$

$$(c, d) \times (a, b) = (ca + db, \ da + cb)$$

بما أن ضرب الأعداد الطبيعية تبديلي فإن الناتجين السابقين متساويان أي :

$$(ac + bd, \ ad + bc) = (ca + db, \ da + cb)$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \times (c, d) = (c, d) \times (a, b)$$

وينتج عن هذه العلاقة حسب [٢-٢٧] :

$$(\widehat{a, b}) \times (\widehat{c, d}) = (\widehat{c, d}) \times (\widehat{a, b})$$

وهذا ما يبرهن على أن ضرب الأعداد الصحيحة تبديلي .

٥٦ - نعرف على Z عملية داخلية $\top$ نرمز لهـــا بـ max ، نربط بكل زوج من الأعداد الصحيحة (x , y) أكبر هذين العددين ونكتب :

$$x \top y = \max(x, y)$$

ادرس توزيع جمع وضرب الأعداد الصحيحة على هـذه العملية وبين متى تكون هذه العملية منسجمة مع علاقة الترتيب $\leqslant$ المعرفة على Z .

الحل : إن الجمع في Z توزيعي على $\top$ لأنه من الواضح أن :

$$z + (x \top y) = (z + x) \top (z + y)$$

$$(x \top y) + z = (x + z) \top (y + z)$$

لأنه لو كان x هو أكبر العددين x , y فإن $x + z$ هو أكبر العددين $x + z$, $y + z$ وذلك لأنه :

$$\forall x , y , z \in N \quad : \quad x > y \Rightarrow x + z > y + z$$

أما الضرب فهو عملية توزيعية على $\top$ في Z^+ :

$$z > 0 \qquad z . (x \top y) = (z . x) \top (z . y)$$

$$(x \top y) . z = (x . z) \top (y . z)$$

لأن :

$$z > 0 \quad , \quad \forall x , y , z \in N \quad : \quad x > y \Rightarrow x . z > y . z$$

أما في الحالة التي يكون فيها $0 > z$ فإن عملية الضرب غير قابلة للتوزيع بالنسبة لـ $\top$ المعرفة في هذا التمرين .

إن العلاقة $\top$ منسجمة مع علاقة الترتيب $\leqslant$ المعرفة على Z لأن :

$$x \geqslant y \Rightarrow \max (x , z) \geqslant \max (y , z) \Leftrightarrow x \top z \geqslant y \top z$$

لأنـــه انسجاماً مع فرضنا $x \geqslant y$ ، سيكون وضع الأعـــداد الثلاثة x , y , z بالنسبة لبعضها واحداً من الأشكال الثلاثة :

$$z \geqslant x \geqslant y \quad , \quad x \geqslant z \geqslant y \quad , \quad x \geqslant y \geqslant z$$

وفي كل حالة من هذه الحالات الثلاث يكون الاقتضاء السابق محققاً وذلك إذا اعتبرنا تمشياً مع تعريف علاقة الترتيب $\leqslant$ أن :

$$\max (x , x) = x$$

٥٧ - برهن أنه ليكون العددان الطبيعيان a , b متوافقين (قياس n)

يلزم ويكفي أن يقبل فضلها القسمة على n أي :

$$a \geqslant b \quad , \quad a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow a - b \in M(n)$$

الحل : لنجر التقسيم الاقليدي لكل من a , b على n فنجد مثلاً :

$$a = nq + r \quad , \quad b = nq' + r' \quad , \quad q \geqslant q'$$

وانطلاقاً من تعريف التوافق وقابلية الضرب للتوزيع على الطرح [٤٨]

$$a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow r = r' \Rightarrow a - b = (q - q')\, n$$

$$\Leftrightarrow a - b \in M(n)$$

وعلى العكس :

$$(1) \qquad a - b \in M(n) \Leftrightarrow (q - q')\, n + r - r' \in M(n)$$

لا يمكن أن يتحقق الانتماء الأخير إلا إذا كانت حالة من الحالات الثلاث :

١ - $r - r' = 0$

٢ - $r > r'$, $r - r' \in M(n)$ ولكن $r < n \Rightarrow r - r' < n$

وهذا يعني أن $r - r' = 0$

٣ - $r < r'$ $r' - r \in M(n)$ ولكن $r' < n \Rightarrow r' - r < n$ أي:

$r' - r = 0$

وهذا ما يؤكد دوماً صحة العلاقة التالية :

$$a - b \in M(n) \Leftrightarrow r - r' = 0 \Leftrightarrow a \equiv b \pmod n$$

٥٨ - برهن ما يلي :

$$\forall c \in N : \quad a \equiv b \pmod n \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod n$$

الحل : استناداً إلى الخاصة [٣٢ - ٢ ، ٤] من خواص الطرح يمكننا أن نكتب :

$$a - b \in M(n) \Rightarrow (a + c) - (b + c) \in M(n)$$

واستناداً إلى التمرين [٥٧] يمكننا أن نكتب العلاقة التالية التي تعطي المطلوب :

$$(a + c) - (b + c) \in M(n) \Leftrightarrow a + c \equiv b + c \pmod{n}$$

٥٩ - برهن أنه يمكن جمع علاقتي توافق (قياس n) (أي أن علاقة التوافق منسجمة مع عملية الجمع [٣٧ - ١]) .

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{n} \\ a' \equiv b' \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a + a' \equiv b + b' \pmod{n}$$

الحل : استناداً إلى التمرين (٥٨) يمكننا أن نكتب :

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a + a' \equiv b + a' \pmod{n}$$

$$a' \equiv b' \pmod{n} \Rightarrow b + a' \equiv b + b' \pmod{n}$$

وبما أن علاقة التوافق متعديه فإننا نستنتج من هاتين العلاقتين العلاقة المطلوبة .

٦٠ - برهن ما يلي :

$$\forall c \in N : \; a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a . c \equiv b . c \pmod{n}$$

الحل : استناداً إلى التمرين [٥٧] وخواص مضاعفات عدد يمكننا

أن نكتب :

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a - b) \in M(n) \Rightarrow c\,(a - b) \in M(n)$$

وبما أن ضرب الأعداد الطبيعية توزيعي على طرحها [٤٨] فان

$$c\,(a - b) \in M(n) \Leftrightarrow c\,a - c\,b \in M(n) \Leftrightarrow c\,a \equiv c\,b \pmod{n}$$

وهو المطلوب برهانه .

٦١ - برهن أنه يمكن ضرب علاقتي توافق (قياس n) معرفتين على N ، أي (أن علاقة التوافق منسجمة مع عملية الضرب [٣٧ - ١]) :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a\,c \equiv b\,d \pmod{n}$$

الحل : يمكننا أن نكتب استناداً إلى التمرين (٥٦) :

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a\,c \equiv b\,c \pmod{n}$$

$$c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow b\,c \equiv b\,d \pmod{n}$$

وبما أن علاقة التوافق علاقة متعدية فإن العلاقتين الأخيرتين تؤديان إلى المطلوب .

٦٢ - برهن أنه يمكن رفع علاقة توافق (قياس n) إلى قوة أسها عدد طبيعي أي :

$$\forall x \in N : \; a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^x \equiv b^x \pmod{n}$$

الحل : استناداً إلى التمرين [٦١] يمكننا أن نضرب x علاقة

من الشكل :
$$a \equiv b \pmod{n}$$

فنحصل على المطلوب $a^x \equiv b^x \pmod{n}$

٦٣ - إذا كان n عدداً طبيعياً ادرس البواقي الممكنة للتقسيم الاقليدي لـ n^2 على 5 ولـ n^3 على 7 .

الحل : إذا رمزنا لباقي قسمة العدد n على 5 بـ r فسوف يكون :

$$n \equiv r \pmod{5} \quad , \quad r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

(علاقة التوافق قابلة للرفع) $n^2 \equiv r^2 \pmod{5}$

إن r' باقي قسمة العدد n^2 على 5 يساوي باقي قسمة r^2 على 5 وإذا كان $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ فإن $r^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$ و

$$r' \equiv r^2 \pmod{5} \Rightarrow r' \in \{0, 1, 4, 4, 1\}$$

وإذا رمزنا بـ h لباقي قسمة العدد n على 7 فسوف يكون :

$$n \equiv h \pmod{7} \quad : \quad h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(علاقة التوافق قابلة للرفع) $n^3 \equiv h^3 \pmod{7}$

وإذا رمزنا بـ h' لباقي قسمة n^3 على 7 ... يكون :

$$h' \equiv h^3 \pmod{7}$$

وإذا كان : $h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فإن :

$$h^3 \in \{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216\}$$

$h' \equiv h^3 \pmod 7 \qquad h' \in \{0, 1, 1, 6, 1, 6, 6\}$

أي : $h' \in \{0, 1, 6\}$

٦٤- أوجد العددين الصحيحين $x = \alpha$ ، $y = \beta$ المحققين للعلاقة :

$$3x - 4y = 7$$

الحل : يمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل :

$$3x = 4y + 7 \qquad (1)$$

وهذا يعني إيجاد حد مضاعفات الـ (4) بحيث إذا أضفنا إليه 7 أصبح من مضاعفات العدد (3) ونلاحظ بسهولة أن $y = 2$ يجعل الطرف الأيمن من (1) من مضاعفات الـ (3) ويصبح $x = 5$ وبذلك نجد واحداً من حلول هذه المعادلة : ($x = 5$, $y = 2$) . لايجاد بقية الحلول نفرض :

$$x = 5 + X \quad , \quad y = 2 + Y$$

فتأخذ عندها المعادلة (1) الشكل :

$$3X = 4Y$$

وهذا يعني : $3X \equiv 0 \pmod 4$

وبما أن : $X \equiv X \pmod 4$

وبما أنه يمكن جمع علاقتي توافق $4X \equiv X \pmod 4$

أي $X \in M(4)$

وبالطريقة السابقة ذاتها نجد $Y \in M(3)$

إذا فرضنا $X = 4 . h$ يكون $Y = 3 . h$ حيث h عدد كيفي من N

فتكون مجموعة حلول المعادلة المفروضة هي :

$$x = 5 + 4h \quad , \quad y = 2 + 3h$$

٦٥- أوجد عددين طبيعيين a , b يحققان العلاقة :

$$a\,b = a + b$$

الحل : إذا استبعدنا الحل البدهي $b = 0 , a = 0$ فإننا نلاحظ أنه لا يمكن أن يكون واحد منها أو كل منهما مساوياً الواحد ، فلنبحث عن الحل الذي يحقق :

$$a > 1 \quad , \quad b > 1$$

لنكتب العلاقة المفروضة بالشكل :

$$a\,b - a = b \Leftrightarrow a\,(b - 1) = b$$

ينتج عن هذه العلاقة أن b من مضاعفات $b - 1$ أي :

$$b \equiv (b - 1) \pmod{b - 1} \Leftrightarrow b - (b - 1) \in M(b - 1)$$

$$\Leftrightarrow 1 \in M(b - 1)$$

وبما أن العدد واحد مضاعف لنفسه فقط فإن هذه العلاقة تؤدي إلى :

$$1 = b - 1 \Leftrightarrow b = 2$$

ونجد بالطريقة السابقة ذاتها أن $a = 2$.

٦٦- b , a عددان طبيعيان ($a > b$)،برهن أن واحداً ، على الأقل ، من الأعداد :

$ab \ , \ a + b \ , \ a - b$ يقبل القسمة على 3 .

الحل : إن باقي قسمة كل عدد على 3 هو عنصر من المجموعة $\{0, 1, 2\}$ ومن الواضح أنه إذا كان باقي قسمة أحد العددين a, b على 3 صفراً فإن الجداء ab يقبل القسمة على 3 . لندرس بعد ما تقدم الحالتين الباقيتين :

١ ـ إذا كان $a \equiv 1 \pmod 3$, $b \equiv 1 \pmod 3$

فإن : $a \equiv b \pmod 3$, $a - b \in M(3)$

٢ ـ إذا كان $a \equiv 1 \pmod 3$, $b \equiv 2 \pmod 3$

فإن : $a + b = 0 \pmod 3$, $a + b \equiv 3 \pmod 3$

نتابع بالطريقة ذاتها دراسة بقية الحالات ونجد المطلوب .

إذا قبل كل من a, b القسمة على 3 فإن كل الأعداد الثلاثة ab , $a + b$, $a - b$ تقبل القسمة على 3 (لماذا ؟) .

٦٧ـ ماهو باقي قسمة العدد 4^{738} على العدد 11 ؟

الحل : لنبحث عن أصغر قوة للعدد 4 يكون باقي قسمتها على 11 أصغر ما يمكن علماً بأن القوى المختلفة للعدد 4 لا تقبل القسمة على 11 (لماذا ؟) لنكتب إذن :

$$4 \equiv 4 \pmod{11} \quad , \quad 4^2 \equiv 5 \pmod{11} \quad , \quad \ldots\ldots \quad ,$$
$$4^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

فنجد أن القوة الخامسة لـ 4 توافق الواحد قياس 11 وبما أن :

$$738 = 147 \,.\, 5 + 3$$

فإنه يمكننا أن نكتب :

(علاقة التوافق قابلة للرفع) :

$$4^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (4^5)^{147} \equiv (1)^{147} \pmod{11}$$

أي :

$$4^{735} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$4^3 \equiv 9 \pmod{11}$$

(ضرب علاقتي توافق)

$$4^{738} \equiv 9 \pmod{11}$$

وهذا ما يظهر لنا أن باقي قسمة العدد المفروض على 11 هو 9 .

٦٨- برهن أنه مهما كان العدد الطبيعي n فإن العددين :

$$3^{2n} - 2^n \quad , \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} \qquad (1)$$

يقبلان القسمة على 7 وأنه إذا كان $n > 0$ فإن العدد :

$$3^{2n} + 2^{6n-5} \qquad (2)$$

يقبل القسمة على 11 .

الحل : لننطلق من العلاقة :

$$3^2 \equiv 2 \pmod 7$$

(رفع علاقة التوافق)

$$3^{2n} \equiv 2^n \pmod 7 \qquad (3)$$

(التمرين رقم ٥٧)

$$3^{2n} - 2^n \in M(7)$$

لبرهان قابلية قسمة العدد الثاني المفروض على 7 ننطلق من العلاقة (3) :

(انسجام علاقة التوافق مع الضرب) $3 \cdot 3^{2n} \equiv 3 \cdot 2^n \pmod 7$

(انسجام علاقة التوافق مع الجمع)

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv (3 \cdot 2^n + 2^{n+2}) \pmod 7$$

أو :

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7 \cdot 2^n \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$$

وهذا ما يبرهن على أن العدد الثاني من (1) يقبل القسمة على 7 .

نبرهن قابلية قسمة العدد (2) على 11 بطريقة التراجع بعد أن نلاحظ أن هذه الخاصة محققة من أجل $n = 1$ ($3^2 + 2^1 = 11$) فلنبرهن صحة هذه الخاصة من أجل $n = p + 1$ استناداً إلى فرض صحتها من أجل $n = p$ أي لنبرهن صحة العلاقة :

$$3^{2p} + 2^{6p-5} \in M(11) \Rightarrow 3^{2p+2} + 2^{6p+1} \in M(11)$$

في الحقيقة إن :

$$3^{2p} + 2^{6p-5} \in M(11) \Rightarrow 9 \, . \, 3^{2p} + 9 \, . \, 2^{6p-5} = 3^{2p+2} + 9 \, . \, 2^{6p-5} \in M(11)$$

وبما أن :

$$3^{2p+2} + 2^{6p+1} = 3^{2p+2} + 9 \, . \, 2^{6p-5} + (2^{6p+1} - 9 \, . \, 2^{6p-5})$$

و :

$$2^{6p+1} - 9 \, . \, 2^{6p-5} = (2^6 - 9)\, 2^{6p-5} = 55 \, . \, 2^{6p-5} \in M(11)$$

فإن العدد (2) سيكون مجموع مضاعفين للعدد 11 فهو مضاعف للعدد 11 ويثبت المطلوب .

تمارين للحل

٦٩- برهن بطريقة التراجع صحة العلاقات التالية حيث n عـــدد طبيعي كيفي :

$$S_1(n) = 1 + 2 + \dots + n = \tfrac{1}{2}\, n(n+1)$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)\,(2n+1)$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \tfrac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2$$

$$S_1'(n) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$S_1'(n) = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}\, n(2n-1)\,(2n+1)$$

$$S_3'(n) = 1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^3\,(2n^2-1)$$

$$\Sigma_2(n) = 1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + \dots + n(n+1) = \tfrac{1}{3}\, n(n+1)\,(n+2)$$

$$\Sigma_3(n) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 + \dots + n(n+1)\,(n+2) =$$
$$\tfrac{1}{4}\, n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$$

$$2 \,.\, 6 \,.\, 10 \dots (4n-2) = (n+1)\,(n+2) \dots (2n)$$

٧٠- حل في المجموعة Z المعادلات التالية :

$$5x + 3y = 9 \quad , \quad 12x - 5y = 11 \quad , \quad 24x - 13y = 7$$

$$15x + 11y = 12 \quad , \quad 3x - 5y = 7 \quad , \quad 7x + 4y = -8$$

٧١- هل العلاقة "تقسم" المعرفة في مجموعة الأعـــداد الصحيحة هي علاقة ترتيب كما هو الحال في N ؟

وهل هذه العلاقة منسجمة مع الضرب والجمع في المجموعة Z ؟

٧٢ - ١ - ليكن k عدداً صحيحاً . برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي يقسم عدد صحيح a عدداً صحيحاً آخر b هو أن يقسم العدد a العدد $b - k\,a$.

٢ - أوجد $x \in Z$ بحيث يقسم العدد $x - 5$ العدد $x + 7$.

٣ - أوجد $x \in Z$ بحيث يقسم العدد $x - 4$ العدد $x + 9$.

٤ - أوجد $x \in Z$ بحيث يقسم العدد $x + 2$ العدد $4x - 6$.

٧٣ - ما هو باقي التقسيم الإقليدي على 11 للأعداد :

$$4^{1124} \quad , \quad (738)^4 \quad , \quad (1184)^4$$

٧٤ - شكل جدول ضرب أصناف التوافق (قياس 8) وبرهن أنه يوجد صنفين من هذه الأصناف :

$(a) \neq (o)$ ، $(b) \neq (o)$ بحيث يكون $(a) \cdot (b) = (o)$

ادرس عمليتي جمع وضرب الأصناف C_8 على المجموعة $C_8 - \{(0)\}$.

عمم ما تقدم وأوجد الشرط اللازم والكافي الذي يجب أن يتحلى به العدد n ليكون في C_n صنفان غير معدومين جداؤهما معدوم .

٧٥ - شكل جدول ضرب أصناف التوافق (قياس ٧) وادرس على $C_7 - \{(0)\}$ خواص ضرب الأصناف .

٧٦ - حل في المجموعة N كلا من المعادلتين :

$$x^2 - y^2 = 120 \quad , \quad x^2 + x\,y = 240$$

٧٧ - عين قيمة العدد الطبيعي a ليكون للمعادلة التاليـــة حل في

المجموعة N :

$$x^2 - a x - 152 = 0$$

٧٨- إذا كان A و B مجموعتين جزليتين من N ورمزنا بـ k . A لمجموعة الأعداد الطبيعة التي تنتج عناصرها عن عناصر A بضرب كل منها بـ k ، برهن صحة العلاقة :

$$k (A \cup B) = (k A) \cup (k B)$$

٧٩- إذا رمزنا بـ D(a) لمجموعة قواسم a وبـ D(a , b) لمجموعة القواسم المشتركة لـ (a , b) برهن صحة العلاقتين :

$$k D(a) \subset D(k a)$$

$$k D(a , b) \subset D(k a , k b)$$

حيث لـ k D(a) المعنى الذي بيناه في التمرين السابق .

٨٠- برهن أنه مهما كان العدد n فإن الأعداد التالية تقبل القسمة على 6 .

$$a = n(n+1)(n+2) \quad , \quad b = n^3 + 11 n \quad , \quad c = n(2n+1)(7n+1)$$

$$d = n(n+1)(2n+1)$$

٨١- أوجد أصغر الأعداد المتوافقة (قياس 5) مع الأعداد :

$$19 \quad , \quad 288 \quad , \quad 19 . 288 \quad , \quad 19^3 . 288^2$$

٨٢- برهن صحة العلاقة التالية حيث تعني بـ (z | t) أن z يقسم t .

$$a \mid b \text{ و } a \mid c \Rightarrow a \mid (bx + cy)$$

٨٣- أوجد حلول المعادلات التالية في المجموعة N .

(a) $4x \equiv 3 \pmod 7$

(b) $9x \equiv 11 \pmod{26}$

(c) $3x + 1 \equiv 4 \pmod 5$

(d) $8x \equiv 6 \pmod{14}$

(e) $153x \equiv 6 \pmod{12}$

(f) $x + 1 \equiv 3 \pmod 7$

(g) $8x \equiv 6 \pmod{422}$

(h) $363x \equiv 345 \pmod{624}$