

الفصل الثالث

نظرية الزمر

مقدمة :

لقد رأينا في الفصل الأول أن من البنى الجبرية ما هو مزود بعملية جبرية واحدة (أي بقانون واحد للتشكيل) ، ومنها ما هو مزود بأكثر . وفي هذا الفصل سنعرض للزمرة التي هي من أهم البنى الجبرية ذات العملية الجبرية الواحدة ، بينما سنتطرق في الفصول اللاحقة إلى بنى جبرية ذات عمليتين جبريتين .

تعد نظرية الزمر من أهم مواضيع الجبر المجرد ، فهي تلعب دوراً رئيسياً في نظرية غالوا Galois (١٨١١ - ١٨٣٢) التي تعالج المسائل المتعلقة بالحلول الجبرية لكثيرات الحدود (*) . والدور الذي تلعبه نظرية

(*) يقال إن للمعادلة : $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ حيث أمثال كثير الحدود في الطرف الأيسر أعداد حقيقية أو عقدية و n عدد صحيح موجب (مجموعة حلول جبرية إذا أمكن التعبير عن كل من حلولها بدلالة أمثالها باستخدام عدد منته من عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والجذر . ومن المعلوم أن لأي معادلة درجتها n لا تتجاوز 4 مجموعة حلول

←

الزمر في التوبولوجيا لا يقل أهمية وشمولاً عنه في علم الجبر ، ذلك أن نسبة لا يستهان بها من البحوث التي تمت في السنوات الأخيرة في علم التوبولوجيا تعتمد بشكل مركز على نظرية الزمر ، حتى بات من الضروري لعلماء التوبولوجيا (الجبرية) الاحاطة بنظرية الزمر وسبر أغوارها على نحو لا يقل عمقاً عن علماء الجبر أنفسهم .

وبالنسبة لعلم الهندسة ، فحتى القرن التاسع عشر لم يكن الرياضيون على وفاق حول طبيعة علم الهندسة وحول المواد التي يجب تدريسها في هذا الحقل . ولم يفض هذا الخلاف إلا عام ١٨٧٢ بفضل العالم الألماني كلاين Klein الذي استخدم الزمر لتعريف علم الهندسة تعريفاً دقيقاً وشاملاً . فقد أعلن كلاين فيما يسمى منهاج إيرلانكو (Erlanger - Program) أن الهندسة هي العلم الذي يدرس تلك الخواص لمجموعات النقط والمستقيمات ، التي لا تتغير عند القيام « بزمرة » معينة من التحويلات (التطبيقات) . ففي الهندسة الاقليدية مثلاً ، فإن مايمنا هو « زمرة الحركات الصلبة » .

ويجدر بنا أن نضيف إلى ما تقدم ، بأن مجال تطبيق نظرية الزمر

جبرية . بل توجد دساتير تعبر عن هذه الحلول بدلالة الأمثال الواردة فيها . أما في الحالة $n > 4$ ، فقد أثبت العالمان روفيني Ruffini (١٧٦٥ - ١٨٢٢) وأبل Abel (١٨٠٢ - ١٨٢٩) استحالة إيجاد دساتير حالة (شبيهة بالدساتير الحالة عندما $n \leq 4$) لجذور هذه المعادلات ، إلا أن غالوا اكتشف الشروط التي يجب أن تتحقق في معادلة درجتها لا تقل عن الخامسة كي تقبل هذه المعادلة مجموعة حلول جبرية .

تعدى حقل العلوم الرياضية البحتة إلى علم الفيزياء النظرية والكيمياء الكوانتية ، وحتى إلى علم البلورات ، الأمر الذي جعل هذه النظرية تشغل بالنسبة لاتساع مجال تطبيقاتها المركز الثاني بعد الجبر الحطي بين فروع علم الجبر .

هذا ونأمل من القارئ الافادة من هذه النظرية لسبب وجيه آخر : ذلك أن المبادئ (المسلمات) البسيطة نسبياً لبنية الزمرة توفر فرصة ممتازة لفهم أفضل وأعمق للطريقة الاستنتاجية التي تحتل مكان القلب من العلوم الرياضية المعاصرة . فعند دراستنا لمجموعة الأعداد الصحيحة في الفصل السابق ، نعتقد أنه من العسير على الطالب أن يحور نفسه من كمية وافرة من الحقائق التي تجمعت لديه في سياق حياته المدرسية ، الأمر الذي يجعله يعتمد تلقائياً على هذه الحقائق مبتعداً عن البراهين المبنية مباشرة على المبادئ (axioms) والتعاريف . ولما لم تكن الزمرة مألوفاً لدى الطالب ، فإن الدارس لها سيضطر غالباً إلى معالجة جديدة ودقيقة ، وما يشجعه على هذا بساطة وقلة المبادئ التي تستند عليها الزمرة . ويجدر بنا أخيراً أن نشير إلى أن سرد نظرية الزمر بجميع تفاصيلها يتطلب كتاباً كاملاً من الحجم الكبير . وبالطبع ، فإن هذا الكتاب الذي يبحث في مبادئ الجبر المجرد لن يطمح إلى الالمام بجميع جوانب هذه النظرية وإنما سيكتفى بمس بعض النقاط الرئيسية فيها .

- ١ - ٣ تعريف : لتكن G مجموعة ، \circ عملية داخلية على G .
- نقول عن البنية (G, \circ) إنها زمرة إذا توفرت الشروط (المبادئ) التالية :
- (١) أن تكون \circ تجميعية .

(٢) أن تحوي G عنصراً محايداً e ل o .

(٣) أن يوجد لكل عنصر a من G نظير a' بالنسبة ل o (*) .

ملاحظات :

٢ - ٣ إذا كانت (G, o) زمرة فإننا نقول « إن G زمرة بالنسبة ل o » ، أو اختصاراً ، « إن G زمرة » ، إذا لم يكن ثمة مجال للالتباس .

٣ - ٣ لا يمكن أن تكون دعامة الزمرة خالية لضرورة احتوائها على عنصر محايد .

٤ - ٣ قد يرمز أحياناً للعملية o ب $+$ ، عندها تسمى الزمرة جمعية ويرمز للعنصر المحايد e ب 0 ويسمى صفراً ، كما يرمز للنظير a' ب $(-a)$ ويسمى « ناقص a » أو المقلوب الجمعي . ويسمى الناتج $a+b$ « مجموع العنصرين a, b » ، ويكتب المجموع $a+(-b)$ عندئذ على الشكل $a-b$ ويسمى حاصل طرح b من a (أو فضل a عن b) .

كذلك يرمز أحياناً ل o بإشارة الضرب . ، عندها تسمى الزمرة ضربية ويرمز للعنصر المحايد e ب 1 ويسمى واحداً ، كما يرمز للنظير a' ب a^{-1} ويسمى المقلوب الضربي ل a ، أو اختصاراً ، مقلوب a . ويسمى

(*) إذا حذفنا الشرط (٣) فتسمى البنية (G, o) مونويداً [٣٠-١] .
ولو حذفنا الشرطين (٣) ، (٢) فلنسمي (G, o) عندئذ كروبويد Groupoid . وإذا حذفنا الشروط (٣) ، (٢) ، (١) . فإن بعض المؤلفين يطلق على (G, o) اسم نصف الزمرة Semigroup .

الناتج $a \cdot b$ حاصل ضرب أو جداء a, b ، وغالباً ما يكتب $a \cdot b$ بالشكل ab .

٥ - ٣ يسمى العدد الأساسي (الكاردينالي) $|G|$ للمجموعة G مرتبة الزمرة (G, \circ) . وهكذا فإن مرتبة زمرة منتية عدد عناصرها n تساوي n .

٦ - ٣ ليس $[3-1]$ هو التعريف الوحيد للزمرة ، فهناك تعاريف أخرى أشهرها تعريف الروسي كوروش Kurosh الذي نحصل عليه بأن نستعيض عن (٢) ، (٣) من $[3-1]$ بالشرطين التاليين :

(٢) أبا كان العنصران a, b من G فهناك عنصر x من G

بحيث : $a \circ x = b$.

(٣) أبا كان العنصران a, b من G فهناك عنصر y من G

بحيث : $y \circ a = b$.

(انظر التمرين المحلول رقم ٩١) .

أمثلة :

٧ - ٣ إن زمرة Z بالنسبة لعملية الجمع العادية : ذلك أن مجموع عددين صحيحين هو عدد صحيح (أي + عملية داخلية على Z) وأن عملية الجمع العادية هي تجميعية كما نعلم ، وأن هناك عنصراً محايداً $ل$ + (هو العدد صفر) ، وأن لكل عنصر a مقلوباً جمعياً (وهو $-a$) . كذلك فإن كلا من Q, R, C يشكل زمرة جمعية . أما N فليست كذلك (لماذا ؟) .

٨ - ٣ إن Q^* تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب العادية ، ذلك أن عملية الضرب مغلقة على Q^* ، وأن هذه العملية تجميعية ، وأن هنالك عنصراً محايداً هو 1 ، وأن لكل عنصر a من Q^* مقولباً . كذلك فإن كلا من R^* ، C^* تشكل زمرة ضربية ، أما Z^* فليست كذلك (لماذا ؟) .

٩ - ٣ إن $G = \{ a, b, c \}$ لا تشكل زمرة بالنسبة للعملية \square الممثلة بالجدول الوارد أدناه ، رغم أن هذا الجدول يبين مباشرة أن \square عملية داخلية ، وأن a هو عنصر محايد لـ \square ، وأن لكل عنصر نظيراً على الأقل ($a' = a$ ، $b' = c$ ، $c' = b$) . والسبب في أن (G, \square) ليست زمرة هو أن \square غير تجميعية . ففي الحقيقة ، لدينا (على الأقل) :

$$b \square (b \square c) = b \square a = b \quad ; \quad (b \square b) \square c = a \square c = c$$

وبالتالي فإن :

$$b \square (b \square c) \neq (b \square b) \square c$$

\square	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	b

١٠ - ٣ لترمز بـ R_1, R_2, R_3 للدورانات المطبقة على المثلث متساوي الأضلاع ABC حول مركزه O ، والتي تتم في مستوي المثلث باتجاه يائس

اتجاه الانتقال من A الى C عن طريق B ،
 وبالزوايا 120° ، 240° ، 360° على الترتيب . انرمز كذلك
 بـ R_4 ، R_5 ، R_6 لدوران المثلث حول الارتفاعات AA' ، BB' ، CC' على
 الترتيب كل بزواية قدرها 180° (R_4 ، R_5 ، R_6) هي إذن تناظرات بالنسبة
 لـ $(AA'$ ، BB' ، $CC')$. فإذا اصطلحنا على أن ناتج دوران R_i يعقبه
 دوران R_j هو $R_i \# R_j$ فإن مجموعة الدورانات R_1 ، \dots ، R_6 تشكل
 زمرة بالنسبة لـ $\#$. وفي الحقيقة فإن عملية داخلية جدولها :

#	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
R_1	R_2	R_3	R_1	R_5	R_6	R_4
R_2	R_3	R_1	R_2	R_6	R_4	R_5
R_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
R_4	R_6	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1
R_5	R_4	R_6	R_5	R_1	R_3	R_2
R_6	R_5	R_4	R_6	R_2	R_1	R_3

ومن السهل التحقق من أن $\#$ تجميعية ، وأن لهذه العملية عنصراً
 محايداً هو R_3 ، وان لكل عنصر نظيراً بالنسبة لـ $\#$:

$$(R_1' = R_2, R_2' = R_1, R_3' = R_3, R_4' = R_4, R_5' = R_5, R_6' = R_6)$$

١١ - ٣ الزمرة التناظرية لمجموعة : نسمي كل تقابل (أي تطبيق
 متباين وغامر) لمجموعة E على نفسها تبديلاً أو تعويضاً لـ E . سنبرهن
 الآن أن مجموعة تعويضات E تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب
 التطبيقات . o

(١) إذا كان كل من f, g تبديلاً لـ E فإن $g \circ f$ تبديل لـ E .
في الحقيقة إن $g \circ f$ متباين لأن :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \quad (\text{تعريفاً}) \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) \quad (\text{لأن } g \text{ متباين}) \\ &\Rightarrow x = y \quad (\text{لأن } f \text{ متباين}) \end{aligned}$$

كذلك فإن $g \circ f$ غامر ، ذلك أنه أياً كان x من E ، فهناك عنصر z من E بحيث : $g(z) = x$ (لأن g غامر) . ولما كان f غامراً كذلك ، فهناك عنصر y من E بحيث $f(y) = z$. وبالتالي فإن $g(f(y)) = x$ أو $(g \circ f)(y) = x$. وهذا يعني أنه أياً كان x من E فهناك عنصر y من E يحقق العلاقة $(g \circ f)(y) = x$ ، وبالتالي فإن $g \circ f$ غامر .

وهكذا نرى أنه إذا كان كل من f, g تبديلاً لـ E فإن $g \circ f$ تبديل لـ E ، أي أن \circ هي عملية داخلية على مجموعة تبديل E .
(٢) إن العملية \circ تجميعية (انظر I) .
(٣) إن التطبيق المطابق id_E هو عنصر محايد لـ \circ ، ذلك أنه أياً كان التبديل f فإن :

$$\forall x \in E : (f \circ id_E)(x) = f(id_E(x)) = f(x) \Rightarrow f \circ id_E = f$$

$$\forall x \in E : (id_E \circ f)(x) = id_E(f(x)) = f(x) \Rightarrow id_E \circ f = f$$

(٤) لكل تعويض f لـ E نظير f^{-1} بالنسبة لـ \circ . في الحقيقة ، إذا كان x عنصراً اختيارياً من E ، فهناك عنصر y من E يحقق :

$f(y) = x$ (لأن f غامر) . ولما كان f متبايناً فإن y وحيد . لذا فمن الطبيعي أن نعرف تابعاً متبايناً وغامراً $f^{-1} : E \rightarrow E$ على E بالدستور $f^{-1}(x) = y$. ويسمى f^{-1} عادة التابع العكسي لـ f . ومن الواضح أن :

$$\forall x \in E : (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(y) = x = \text{id}_E x \\ \Rightarrow f \circ f^{-1} = \text{id}_E$$

ويبرهن بصورة مماثلة أن : $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$

وهكذا فإننا نرى أن مجموعة تباديل E تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات \circ ، وتسمى هذه الزمرة زمرة تباديل (أو تعويضات) E ، كما تسمى الزمرة التناظرية لـ E ، ويرمز لها بـ S_E .

١٢ - ٣ الزمرة التناظرية من الدرجة n : إذا كانت E مجموعة منتهية عدد عناصرها n ($\text{Card } E = n$) ، فإن S_E تدعى عندئذ الزمرة التناظرية من الدرجة n ويرمز لها بـ S_n . ومن الواضح أن مرتبة S_n هي $n!$. ولو رمزنا عندئذ بـ $\{1, 2, \dots, n\}$ إلى المجموعة E ، فإننا نرمز عادة إلى كل عنصر من S_n بسطرين محصورين بين قوسين ، بحيث يقابل كل عدد من السطر العلوي العدد الواقع دونه من السطر السفلي . وعلى سبيل المثال فإن :

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{array} \right)$$

هو تعويض f من S_4 حيث :

$$f(1) = 1 , f(2) = 3 , f(3) = 4 , f(4) = 2$$

هذا ويمكن كتابة التبديل نفسه بأسكال مختلفة تبعاً لترتيب الأعداد في السطر العلوي . وعلى سبيل المثال فإن الرموز :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) , \left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) , \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

تشير إلى التعويض نفسه ، حيث : $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$.
ويشار غالباً إلى الناتج $p \circ q$ بـ pq ويدعى « حاصل ضرب »
التعويض q بالتعويض p . وهكذا فإذا كان

$$p = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) , \quad q = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

عنصرين من S_5 فإن :

$$p q = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

الخواص الابتدائية للزمر :

١٣ - نظرية . العنصر المحايد في الزمرة وحيد [١ - ٢٧] ، ولكل
عنصر a من الزمرة نظير وحيد a' [١ - ٢٨] .

١٤ - نظرية . كل عناصر الزمرة (G, \circ) منتظمة ،
أي أن :

$$\forall a, b, c \in G : \begin{cases} a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c \\ b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c \end{cases}$$

البرهان : بما ان لكل عنصر من الزمرة نظيراً ، فان صحة هذه

النظرية ناتج من النظرية [٣٤ - ١] . لاحظ أنه في الحالة العامة :

$$b = c \text{ لا تقتضي } b o a = a o c$$

وعلى سبيل المثال فإذا اخترنا العناصر :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

من $S_7 [١٢ - ٣]$ فإن :

$$b a = a c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

رغم أن $b \neq c$ كما هو واضح .

١٥ - نتيجة : إن كان a, b عنصرين من زمرة وكان $a o b = a$

أو $b o a = a$ فإن $b = e$ ، لأن المساواة الأولى هي $a o b = a o e$ ،

والمساواة الثانية هي : $b o a = e o a$.

١٦ - نظرية . إن نظير نظير أي عنصر a من زمرة هو العنصر a

نفسه ، أي : $(a')' = a$

البرهان : لما كان a' نظيراً لـ a ، فإن a نظير لـ a' [٢٢ - ١] .

وبما أن $(a')'$ نظير لـ a' أيضاً ، فإنه يترتب على كون النظير واحداً بالنسبة

للعملية التجميعية [٢٨ - ١] أن $(a')' = a$.

١٧ - نظرية . إذا كانت (G, o) زمرة فإن :

$$\forall a, b \in G : (a \circ b)' = b' \circ a'$$

البرهان : إن صحة هذه الدعوى ناتجة من النظرية [٣٢ - ١] بعد ملاحظة أن الزمرة هي مونويد لكل عنصر منه نظير فيه .

ويمكننا بالافادة من هذه المساواة ، ومن طريقة التراجع إثبات التالي :

$$\begin{aligned} \forall a, b, \dots, p, q \in G : (a \circ b \circ \dots \circ p \circ q)' &= \\ &= q' \circ p' \circ \dots \circ a' \circ b' \end{aligned}$$

١٨ - ٣ نظرية . لتكن (G, \circ) زمرة . فأيا كان العنصران

a, b من G ، فإن لكل من المعادلتين :

$$a \circ x = b \quad , \quad y \circ a = b$$

حلاً وحيداً في G .

البرهان : إن صحة هذه الدعوى ناتجة من النظرية [٣٥ - ١] بعد

ملاحظة أن الزمرة هي مونويد لكل عنصر منه نظير فيه .

هذا ونجد حل المعادلة الأولى على النحو التالي :

$$\begin{aligned} a \circ x = b &\Rightarrow a' \circ (a \circ x) = a' \circ b \Rightarrow (a' \circ a) \circ x = a' \circ b \Rightarrow \\ e \circ x &= a' \circ b \Rightarrow x = a' \circ b \end{aligned}$$

ونجد بصورة مماثلة أن حل المعادلة $y \circ a = b$ هو $y = b \circ a'$.

١٩ - ٣ تعريف : لتكن (G, \circ) زمرة . فإذا كان a عنصراً

من G ، m عدداً صحيحاً موجباً فإننا نعرف :

$$a^m = a \circ a \circ \dots \circ a \quad (\text{عدد الحدود } m)$$

وإذا رمزنا بـ e للعنصر المحايد في G ، فإننا نعرف :

$$a^0 = e$$

وإذا رمزنا بـ a^{-1} لنظير a بالنسبة لـ o ، فإننا نسطح على أن :

$$a^{-m} = (a^{-1})^m = a^{-1} o a^{-1} o \dots o a^{-1} \quad (\text{عدد الحدود } m)$$

هذا وفي الحالة الخاصة عندما تكون الزمرة جمعية ، فإننا نعرف

(بفرض m عدداً صحيحاً موجباً)

$$m a = a + a + \dots + a \quad (\text{عدد الحدود } m)$$

$$(-m) a = m(-a) = (-a) + (-a) + \dots + (-a)$$

(عدد الحدود m)

وإذا رمزنا بـ O للعنصر المحايد في الزمرة الجمعية [٣ - ٤] فإننا

نسطح على أن :

$$0 a = O$$

ويجب التنبيه في هذا الصدد إلى أن ma (m عدد صحيح موجب أو سالب أو صفر) هو مجرد رمز نعتمده بغية الاختصار في الكتابة ، ولا يجوز البتة الظن بأنه حاصل ضرب عدد صحيح m بالعنصر a من G ، فليس من مبرر لمثل هذا الظن ، ذلك أننا بصدد عملية جمع عناصر من G ، ولا مجال للكلام عن عملية ضرب الأعداد الصحيحة وعناصر G .

هذا ونترك للقارئ إثبات صحة النظرية الواضحة التالية .

٣ - ٢٠ نظرية : لتكن (G, o) زمرة عناصرها المحايد e ،

ولیکن a عنصراً من G . عندئذ يكون :

$$e^n = e \quad (1)$$

$$a^m \circ a^n = a^{m+n} \quad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (3)$$

وذلك أياً كان العددين الصحيحان m, n .

٢١ - ٣ الزمرة التبديلية (الأبيلية) : إذا كانت العملية \circ في الزمرة (G, \circ) تبديلية ، أسمينا الزمرة تبديلية أو أبيلية [١٢ - ١] . وبالإضافة إلى الخواص الابتدائية للزمر التي أوردناها فيما تقدم ، فان الزمرة التبديلية (G, \circ) تمتاز بالخاصة البيضة التالية :

أياً كانت العناصر a, b, \dots, p من G ، فإن الناتج $a \circ b \circ \dots \circ p$ لا يتغير عند العبث بترتيب العناصر ، أو عند الاستعاضة عن بعض هذه العناصر بناتجها . ويترتب على هذا مثلاً أنه يمكن إيراد نظير الناتج $a \circ b \circ \dots \circ p$ بنفس الترتيب ، أي :

$$(a \circ b \circ \dots \circ p)' = a' \circ b' \circ \dots \circ p'$$

وأنه لا فرق بين حلي المعادلتين $a \circ x = b$ ، $x \circ a = b$ ، ذلك أن حل كل منهما هو $x = a' \circ b = b \circ a'$.

وعلى سبيل المثال فإن أي زمرة تناظرية S_n (درجتها لا تقل عن 3) هي زمرة غير أبيلية . فإذا كانت $n = 5$ مثلاً ، واخترنا من S_5 العنصرين :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

فإن :

$$a b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

كذلك فإن زمرة دورانات المثلث [٣ - ١٠] غير آبلية .

الزمرة الجزئية

٢٢ - ٣ تعريف : لتكن (G, o) زمرة ، H مجموعة جزئية من G . نقول عن H إنها زمرة جزئية من الزمرة G إذا كانت H نفسها زمرة بالنسبة $(*)$ ل o .

ملاحظات :

٢٣ - ٣ لما كانت الزمرة الجزئية هي زمرة ، فلا يمكن أن تكون خالية لاحتوائها على عنصر محايد .

٢٤ - ٣ في كل زمرة G زمرتان جزئيتان على الأقل هما الزمرة G نفسها ، والزمرة الجزئية $\{e\}$ الحاوية على العنصر المحايد e ل o .

٢٥ - ٣ إذا كانت H زمرة جزئية من G ، وكانت K زمرة جزئية من H ، فإن K زمرة جزئية من G .

٢٦ - ٣ لكل الزمر الجزئية من الزمرة (G, o) عنصر محايد واحد

(*) أو بصورة أدق ، بالنسبة لمقصود العملية الداخلية (أي التابع)
على H .

هو العنصر المحايد e في G . وفي الحقيقة ، إذا كان u هو العنصر المحايد للزمرة الجزئية H مثلاً ، فيجب أن يتحقق في G المساواتان :

$$eou = uoe = u$$

كما يجب أن يتحقق في H المساواة :

$$uou = u$$

وبالتالي فيجب أن يتحقق في G المساواة $uou = eou$ التي تقتضي $u=e$ لأن جميع عناصر الزمرة منتظمة [١٤ - ٣] .

أمثلة :

٢٧ - ٣ إن مجموعة الأعداد الصحيحة Z هي زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$ أي زمرة الأعداد الحقيقية R بالنسبة لعملية الجمع العادية $+$. كذلك فإن مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(Z, +)$. وبالتالي فإن مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$ [٢٥ - ٣] ، الأمر الذي يمكن التأكد منه مباشرة دون استخدام الزمرة الوسيطة $(Z, +)$.

هذا ولا تشكل مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية زمرة جزئية من $(Z, +)$ (ولا من الزمرة $(R, +)$) .

٢٨ - ٣ إن كلا من $\{R_1, R_2, R_3\}$ ، $\{R_3, R_4\}$ يشكل زمرة جزئية من زمرة دورانات المثلث الواردة في [١٠ - ٣] .

٢٩ - ٣ نظرية : لتكن (G, o) زمرة و H مجموعة جزئية من

G . إن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية من الزمرة G هو أن تتحقق الشروط التالية :

- (١) أن تكون H مجموعة غير خالية .
- (٢) أن تكون H مغلقة (أي مستقرة) بالنسبة ل o .
- (٣) أن تحوي H نظير أي من عناصر H بالنسبة ل o .

البرهان : لزوم الشروط واضح ، ذلك أنه إذا كانت H زمرة جزئية من G ، فهي زمرة بالنسبة ل o ، وبالتالي فهي غير خالية [٢٣ - ٣] وهي مغلقة بالنسبة ل o ، وتحوي نظير أي عنصر متم اليها .

وبالعكس سنفترض الآن أن H مجموعة جزئية من G تحقق الشروط (١) - (٣) ، ولنبرهن أن H زمرة .
ويكفي لهذا الغرض ، إذا أدخلنا في اعتبارنا الشرطين (٢) ، (٣) وأن العملية o تجميعية على H لأنها تجميعية على G ، يكفي إثبات وجود عنصر محايد في H بالنسبة ل o .

في الحقيقة ، لما كانت H غير خالية استناداً إلى (١) ، فإنها تحتوي على عنصر a على الأقل . وبالتالي فإن $a' \in H$ استناداً إلى (٣) . ولما كانت H مغلقة بالنسبة ل o استناداً إلى (٢) ، فإن $aoa' = e$ ينتمي إلى H . وبما أن e هو العنصر المحايد في G فهو العنصر المحايد في H [٢٦ - ٣] .

٣ - ملاحظة . في الحالة الخاصة التي تكون فيها المجموعة الجزئية

H في النظرية السابقة منتهية ، يمكن حذف الشرط الأخير (٣) (راجع التمرين المحلول ٩٧) .

٣ - ٣١ مثال : ليكن k عدداً صحيحاً مثبتاً . إن مجموعة الأعداد الصحيحة $K = \{ km \mid m \in \mathbb{Z} \}$ تشكل زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع العادية ، ذلك أن $K \neq \emptyset$ وضوحاً ، كما أن حاصل جمع أي عنصرين km_1 و km_2 من K هو العنصر $k(m_1 + m_2)$ الذي ينتمي إلى K (أي أن K مغلقة بالنسبة للعملية $+$) . وأخيراً فإن نظير أي عنصر km من Z هو العنصر $-km$ الذي ينتمي إلى K (لأنه يساوي حاصل ضرب العدد k بالعدد الصحيح $(-m)$) .

٣ - ٣٢ مثال : لتكن $G = \{ e, a, b, c, d, f \}$ زمرة بالنسبة لعملية الداخلية (•) الممثلة بالجدول :

•	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

إن استخدام [٣-٣٠] يبين مباشرة بأن $\{e, a, b\}$ و $\{e, f\}$ زمرتان جزئيتان من الزمرة G .

٣٣ - ٣ نظرية : لتكن (G, o) زمرة ، H مجموعة جزئية من G . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية من الزمرة G هو أن يتوفر الشرطان التاليان :

(١) أن تكون H مجموعة غير خالية .

(٢) أياً كان العنصران a, b (المختلفان أو المتساويان) من H ،

فإن العنصر aob' ينتمي كذلك إلى H .

البهتان : إن الشرطين لازمان ، ذلك أنه إذا كانت H زمرة جزئية

من G فهي غير خالية [٣-٢٣] . ولما كانت H زمرة بالنسبة لـ o

[٣-٢٢] فإنه أياً كان a, b من H ، فإن b' عنصر من H . ولما

كانت H مغلقة بالنسبة لـ o ، فإن aob' عنصر من H كذلك .

لنتقل إلى البهتان على كفاية الشرطين ، أي لنثبت أنه إذا كانت

H مجموعة جزئية من G تحقق الشرطين (١) ، (٢) ، فإن H زمرة .

في الحقيقة ، لما كانت H غير خالية (الشرط (١)) فإنها تحتوي على عنصر

a (على الأقل) . عندئذ نجد استناداً إلى الشرط (٢) أن $aoa' = e$

ينتمي إلى H . وبما أن e عنصر محايد في G فهو عنصر محايد في H

كذلك [٣-٢٦] . وبتطبيق الشرط (٢) ثانية ، ولكن الآن على

a, e نجد :

$$a \in H \Rightarrow eoa' \in H \Rightarrow a' \in H \quad (*)$$

أي أن لكل عنصر a من H نظيراً a' متتمياً إلى H كذلك .

سنثبت الآن أنه أياً كان العنصران a, b من H فإن aob عنصر

من H . في الحقيقة ، نرى استناداً إلى $(*)$ أن b' عنصر من H .
 وبالتالي ، واستناداً إلى (2) يكون $a \circ (b') = a \circ b$.
 وهكذا نكون قد توصلنا إلى أن الشرطين (1) ، (2) يقتضيان
 الشروط (1) ، (2) ، (3) من $[3-29]$ ، وبالتالي فإن H زمرة
 جزئية من الزمرة G .

٣٤ - ٣ مثال : لتكن (G, \top) زمرة ، ولتقابل كل عنصر a
 من G بتطبيق f_a لـ G في G معرف بالقاعدة :

$$\forall x \in G : f_a(x) = a \top x$$

وسنبرهن الآن أن مجموعة التطبيقات :

$$F = \{ f_a \mid f_a(x) = a \top x : a, x \in G \}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة التناظرية S_G .

(أ) إن التطبيق $f_a : G \rightarrow G$ غامر ، ذلك أنه أياً كان b من G ،
 فهناك عنصر x من G يحقق $f_a(x) = b$ [٣-١٨] . ولما كان هذا
 العنصر وحيداً [٣-١٨] فإن f_a متباين كذلك . لذا فإن f_a (أياً
 كان a) هو تبديل لـ G ، وبالتالي فإن F هي مجموعة جزئية من مجموعة
 تبديل G (التي تشكل دعامة S_G) .

(ب) إن $F \neq \emptyset$ ، ذلك أن G تحتوي (على الأقل) على العنصر
 المحايد e . وبالتالي فإن F تحتوي على f_e .

(ج) ليكن f_a ، f_b أي عنصرين من F . من السهل التأكد من
 أن نظير f_b بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات \circ هو $f_{b'}$ (تأكد من

ذلك بعد أن تثبت أن f_c هو العنصر المحايد في F بالنسبة لـ (o) . ولما كانت العلاقة التالية .

$$(f_a \circ f_{b'}) (x) = f_a (f_{b'}(x)) = f_a (b' \top x) = a \top (b' \top x) = (a \top b') \top x = f_{a \top b'}(x)$$

صحيحة أيا كان x من G ، فالتنا نستنتج أنه أيا كان f_a, f_b من F ، فان $f_a \circ f_{b'}$ (الذي هو ناتج تركيب أي عنصر f_a مع $f_{b'}$ نظير العنصر الآخر) هو العنصر $f_{a \top b'}$ الذي ينتمي إلى F (لأن $a \top b'$ ينتمي إلى G) .

وهكذا نرى أن شرطي النظرية [٣٣ - ٣] محققان بالنسبة لـ F التي هي مجموعة جزئية من S_G (استناداً إلى (أ ، ب)) . لذا فان F هو زمرة جزئية من S_G .

٣٥ - ٣ نظرية . لتكن (G, o) زمرة ، a عنصراً من G . عندئذ تكون المجموعة الجزئية من G :

$$[a] = \{ a^k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$$

زمرة جزئية من الزمرة G .

البرهان : نلاحظ قبل كل شيء أن $[a]$ ليست خالية ، ذلك أن $a^1 = a$ عنصر من $[a]$. لنفترض الآن a^m, a^n أي عنصرين من $[a]$ عندئذ : $a^m \circ (a^n)^{-1} = a^m \circ a^{-n} = a^{m-n}$. ولما كانت $[a]$ تحتوي على كل القوى الصحيحة لـ a ، فان a^{m-n} عنصر من $[a]$. وهكذا نكون قد أثبتنا أن ناتج أي عنصر a^m مع نظير أي عنصر

a^n من المجموعة الجزئية غير الخالية $[a]$ هو عنصر من $[a]$ أيضاً .
وبالتالي فان $[a]$ زمرة جزئية من (G, o) ، وذلك استناداً إلى
[٣ - ٣٣] .

الزمرة الدوارة

٣ - ٣٦ تعريف . تسمى $[a]$ الواردة في $[٣ - ٣٥]$ زمرة
دوارة مولدة بـ a . وإذا كانت $G = [a]$ من أجل عنصر a من G ،
قلنا إن G زمرة دوارة (مولدها a) . ومن الواضح أن كل زمرة
دوارة أبيلية .

وقد تكون الزمرة الدوارة منتهية أو غير منتهية . وعلى سبيل المثال ،
فان $(Z, +)$ الواردة في $[٣ - ٧]$ هي زمرة دوارة غير منتهية
مولدها 1 ، ذلك أنه أياً كان العدد الصحيح m (الموجب أو السالب
أو الصفر) ، فانه يساوي 1^m . فمثلاً إذا كان $m = -3$ ، فاننا نجد
[٣ - ١٩] : $(1)^{-3} = (1^{-1})^3$ ، حيث 1^{-1} هو كما اصطللحنا عندئذ
نظير 1 بالنسبة للعملية + ، أي أن $1^{-1} = -1$. لذا فان $(1)^{-3} = (-1)^3$.
ولما كانت العملية على Z هي عملية الجمع العادية ، فان :

$$(-1)^3 = (-1) + (-1) + (-1) = -3$$

هذا ويطلب من القارئ التحقق من أن العدد (-1) يصلح مولداً
آخر لهذه الزمرة .

وعلى الرغم من ورود عدد غير منته من القوى الصحيحة لـ a في زمرة
دوارة $[a]$ ، فقد يكون عدد العناصر المختلفة في $[a]$ منتهياً ، وعندها

تكون الزمرة الدوارة منتهية . وعلى سبيل المثال فان $\{1, -1, i, -i\}$ (بفرض $i^2 = -1$) هي زمرة دوارة منتهية بالنسبة لعملية الضرب ، مولدها i أو $-i$. فإذا أخذنا المولد i مثلاً نجد : $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.
 وأية قوة صحيحة أخرى لـ i هي حتماً أحد هذه العناصر الأربعة .
 وسنبرهن في التمرين المحلول (٩٥) ما يلي :

٣٧ - ٣ نظرية . إذا كانت G زمرة دوارة منتهية مرتبتها n ومولدها a ، فان $a^n = e$ (العنصر المحايد في G) ، كما أن العناصر المختلفة في G هي عناصر المجموعة $\{a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n = e\}$.
 ٣٨ - ٣ نظرية . إن تقاطع أي جماعة S من الزمر الجزئية من الزمرة (G, \circ) هو أيضاً زمرة جزئية من (G, \circ) .

البرهان : نلاحظ أولاً أن تقاطع الجماعة S غير خال ، ذلك أن كلا من عناصر S يحتوي على العنصر المحايد e في G [٣-٢٦] .
 وهكذا ، ليكن a, b عنصرين متساويين أو لا من التقاطع (غير الخالي) للجماعة S . عندئذ يكون a, b عنصرين من كل من الزمر الجزئية من G التي تشكل S . واستناداً إلى [٣-٣٣] يكون $a \circ b'$ عنصراً منتبهاً إلى كل زمرة جزئية ، وبالتالي إلى تقاطع هذه الزمر الجزئية ، وهكذا نرى أن شرطي النظرية [٣-٣٣] محققان ، وهذا يعني أن التقاطع هو زمرة جزئية من G .

الزمر الجزئية الناظمية (السوية) :

من بين الزمر الجزئية الشهيرة ، تلك التي ميزها غالوا في أبحاثه والتي

تسمى بالزمر الجزئية الناعمية (أو اللامتغيرة أو المتميزة) .

٣٩ - ٣ تعريف . نقول عن زمرة جزئية H من الزمرة (G, \circ)

إنها زمرة جزئية ناعمية من G إذا تحقق الشرط :

$$\forall g \in G, \forall h \in H : g \circ h \circ g' \in H$$

وإذا عرفنا المجموعة $g \circ H \circ g'$ على أنها :

$$g \circ H \circ g' = \{ g \circ h \circ g' : h \in H \}$$

فانه يترب على التعريف أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H

زمرة جزئية ناعمية هو أن يكون :

$$\forall g \in G : g \circ H \circ g' \subseteq H \quad (*)$$

٤٠ - ٣ نظرية . الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية

H من G زمرة جزئية ناعمية من G هو :

$$\forall g \in G : g \circ H \circ g' = H \quad (**)$$

البرهان : إن تحقق الشرط $(**)$ يقتضي بوضوح الشرط $(*)$ ،

أي أن تحقق الشرط $(**)$ كاف حتى تكون H زمرة جزئية

ناعمية من G .

وبالعكس ، لنفرض الآن أن H زمرة جزئية ناعمية من G (أي

أن الشرط $(*)$ محقق) ، ولنبرهن على تحقق الشرط $(**)$. في

الحقيقة إذا كان g عنصراً اختيارياً من G ، فإن g' يكون عنصراً من

G . عندها يقتضي الشرط $(*)$ أن يكون $g' \circ H \circ (g') \subseteq H$ أي أن يكون

$g' \circ H \circ g \subset H$. وينتج عن هذا أنه أياً كان g من G :

$$g \circ (g' \circ H \circ g) \circ g' \subset g \circ H \circ g' \Rightarrow (g \circ g') \circ H \circ (g \circ g')$$

$$\subset g \circ H \circ g' \Rightarrow e \circ H \circ e = H \subset g \circ H \circ g' \quad (***)$$

إن $(*)$ و $(***)$ يبينان أن $\forall g \in G : g \circ H \circ g' = H$ وهو المطلوب .

الهومومورفيزم والايزومورفيزم :

عرفنا في الفصل الأول صنفاً خاصاً من التطبيقات من بنية جبرية إلى أخرى أسميناها في حينه الهومومورفيزم ودرسنا بعض خواصها . وتلعب هذه التطبيقات في نظرية الزمر دوراً غاية في الأهمية ، ذلك أنها تعتبر وسيلة لدراسة الخواص الرئيسية للزمرة ، كما أنها تصلح أداة لبرهان بعض النظريات المتعلقة بالزمر .

* ٤١ - ٣ نظرية . لتكن (G, \circ) زمرة ، $(E, *)$ مجرد مجموعة عليها عملية داخلية ، واكن f هومومورفيزماً لـ (G, \circ) في $(E, *)$.
عندئذ :

(١) يكون الخيال الهومومورفي $\bar{G} = f(G)$ زمرة بالنسبة لـ $*$.

(٢) إذا كانت H زمرة جزئية نظامية من G ، فإن خيالها

$\bar{H} = f(H)$ هو زمرة جزئية نظامية من الزمرة \bar{G} .

البرهان : (١) إن النظرية [١ - ٥٠] تبين بأن \bar{G} مجموعة جزئية

مغلقة بالنسبة لـ $*$ ، وأن $*$ عملية تجميعية على \bar{G} (لأن العملية \circ

تجميعية على G) ، وأن العنصر $u = f(e)$ هو عنصر محايد في \bar{G} بالنسبة
 لـ $*$ (لأن e عنصر محايد لـ o في G) ، وأن لكل عنصر $f(a)$ من
 \bar{G} نظيراً $f(a')$ بالنسبة لـ $*$ (لأن لكل عنصر a من G نظيراً a'
 بالنسبة لـ o) . لذا فإن \bar{G} زمرة بالنسبة لـ $*$.

(٢) لنفترض \bar{h} عنصراً كيفياً من \bar{H} و \bar{g} عنصراً كيفياً من \bar{G} .
 عندئذ يوجد عنصران (على الأقل) h من H و g من G بحيث :
 $f(g) = \bar{g}$, $f(h) = \bar{h}$. ولما كان :

$$f(g \circ h \circ g') = f(g) * f(h) * f(g') \quad (\text{لأن } f \text{ همومورفيزم})$$

$$= f(g) * f(h) * [f(g)]' \quad (\text{الشق (٥) من [١ - ٥٠]})$$

$$= \bar{g} \circ \bar{h} \circ \bar{g}'$$

وكان $g \circ h \circ g'$ عنصراً من H ، فإن $\bar{g} \circ \bar{h} \circ \bar{g}'$ عنصراً من \bar{H} .
 لكن \bar{h} أي عنصر من \bar{H} ، \bar{g} أي عنصر من \bar{G} ، إذن \bar{H} مجموعة
 جزئية ناظمية من \bar{G} .

٤٢ - ٣ نظوية . إذا كان f همومورفيزماً للزمرة (G, o) ذات

العنصر المحايد e في الزمرة $(S, *)$ ذات العنصر المحايد u فإن :

$$(١) \quad u = f(e) \quad \text{و} \quad f(a') = [f(a)]' \quad \text{أيا كان } a \text{ من } G .$$

(٢) الحبال الهومومورفي $\bar{G} = f(G)$ (الذي يرمز له أحياناً بـ $\text{Im } f$)

هو زمرة جزئية من الزمرة S .

(٣) المجموعة $H = f^{-1}(u)$ (التي تتشكل من جميع عناصر G التي

خيال كل منها u) هي زمرة جزئية ناظمية من G . وتسمى $f^{-1}(u)$ نواة
 الهومومورفيزم f ، ويرمز لها بـ $\text{Ker } f$.

البرهان : لقد تم إثبات (١) سابقاً [١ - ٥٠] . أما (٢) فهو
 ناتج عن النظرية [٣ - ٤١] ذلك أننا أثبتنا في حينه أن \overline{G} زمرة بالنسبة
 لـ $*$ ؛ ولما كانت \overline{G} مجموعة جزئية من S ، فان تعريف الزمرة الجزئية
 يقتضي بأن تكون \overline{G} زمرة جزئية من الزمرة S .

(٣) من الواضح أنه أبا كان العنصران a, b من H فإن :

$$f(a \circ b') = f(a) * f(b') = f(a) * [f(b)]' = u * u' = u$$

وتعني هذه المساواة أن $a \circ b'$ عنصر من H . وإذا أضفنا إلى ذلك
 أن $H \neq \emptyset$ (لأن $e \in H$ استناداً إلى (١)) لاستنتجنا اعتماداً على
 [٣ - ٣٣] أن H زمرة جزئية من G .
 هذا ، ومن جهة أخرى ، فأياً كان العنصر h من H والعنصر
 g من G فإن :

$$\begin{aligned} f(g \circ h \circ g') &= f(g) * f(h) * f(g') = f(g) * u * [f(g)]' \\ &= f(g) * [f(g)]' = u \end{aligned}$$

وهذا يعني أنه عندئذ يكون $g \circ h \circ g'$ عنصراً من H ، أي أن
 الزمرة الجزئية H من G هي زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G .
 ٤٣ - ٣ نظرية كايلي : Cayley . كل زمرة (G, τ) هي
 إيزومورفية لزمرة جزئية من الزمرة التناظرية S_G .

البرهان : لقد وجدنا في [٣ - ٣٤] أن المجموعة :

$$F = \{ f_a \mid f_a(x) = a \top x \quad : \quad a, x \in G \}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة التناظرية S_G .

وسنبرهن الآن أن التطبيق $K : G \rightarrow F$ المعروف بالقاعدة $K(a) = f_a$

هو إيزومورفيزم للزمرة (G, \top) على الزمرة الجزئية (F, \circ) من S_G (\circ هي هنا عملية تركيب التطبيقات).

(١) سنبين أولاً أن التطبيق K ، الذي هو غامر كما هو واضح، متباين. في الحقيقة :

$$\begin{aligned} K(a) = K(b) &\Rightarrow f_a = f_b \Rightarrow \forall x \in G : f_a(x) = f_b(x) \\ &\Rightarrow a \top x = b \top x \end{aligned}$$

ولما كانت المساواة $a \top x = b \top x$ تقتضي $a = b$ [١٤ - ٣] فإننا نستنتج أن K متباين حقاً.

(٢) بعد أن بينا في (١) أن K تقابل، بقي علينا إثبات أن K هو مورفيزم. في الحقيقة أياً كان العنصران a, b من G فإن :

$$\begin{aligned} f_{a \top b}(x) &= (a \top b) \top x = a \top (b \top x) = f_a(b \top x) = \\ &= f_a(f_b(x)) = (f_a \circ f_b)(x) \end{aligned}$$

ولما كان هذا صحيحاً أياً كان x من G فإن $f_{a \top b} = f_a \circ f_b$. وبما أن :

$$K(a) = f_a \quad , \quad K(b) = f_b \quad , \quad K(a \top b) = f_{a \top b}$$

فإن :

$$K(a \top b) = K(a) \circ K(b)$$

أي أن K هو مورفيزم . وإذا أضفنا إلى ذلك ما وجدناه في (١)
من أن K تقابل فان K هو إيزومورفيزم لـ (G, T) على الزمرة الجزئية
(F, o) من الزمرة التناظرية S_G .

٤٤ - ٣ ملاحظة : بما أننا لم نغل أي شرط على العدد الكاردينالي
(الأساسي) لـ G ، فإننا نستنتج أنه إذا كانت الزمرة G منتهية
ومرتبتها n ، فإنها إيزومورفية لزمرة جزئية من الزمرة التناظرية S_n من
الدرجة n .



تمارين محلولة

٨٤ - لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية \circ . نسمي العنصر

a من E متساوي القوى (أو مراوحاً) Idempotent إذا كان $a \circ a = a$.

برهن أن أي زمرة (G, \circ) تحتوي على عنصر مراوح واحد فقط هو العنصر المحايد e .

الحل : لما كان $e \circ e = e$ ، فإن e عنصر مراوح. ولو افترضنا

وجود عنصر مراوح آخر u ($u \neq e$) في هذه الزمرة، لكان $u \circ u = u$.

ولكن هذه المساواة تقتضي $u = e$ [٣-١٥]، وهذا خلاف الفرض.

لذا فإن أي عنصر مراوح للزمرة G هو عنصر محايد في G . ولما كان في أي زمرة عنصر محايد واحد فقط [٣-١٣] فإن أي زمرة تحتوي على عنصر مراوح وحيد هو العنصر المحايد e فيها.

٨٥ - لتكن (G, \top) زمرة. برهن أنه إذا حقق عنصران a, x

من G العلاقة $a \top x = x$ ، كان العنصر المحايد e لـ \top .

الحل : لما كان $x = e \top x$ (استناداً إلى تعريف e)، فإن

العلاقة المفروضة تكافئ العلاقة $a \top x = e \top x$. التي تقتضي استناداً إلى [٣-١٤] $a = e$ وهو المطلوب.

٨٦ - لنرمز بـ $P(X)$ لمجموعة أجزاء المجموعة غير الخالية X . برهن

أن كلا من البنيتين $(P(X), \cup)$ ، $(P(X), \cap)$ هي مونويد وليست زمرة.

الحل : إن $(U, P(X))$ مونويد ، ذلك أن : (١) عملية الاجتماع هي عملية داخلية على $P(X)$ ، فاجتماع أي عنصرين من $P(X)$ (أي اجتماع أي مجموعتين جزئيتين من X) هو عنصر من $P(X)$. (٢) العملية U تجميعية كما نعلم . (٣) يوجد عنصر محايد بالنسبة لـ U هو المجموعة الخالية ϕ (وذلك لأن المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية من أية مجموعة X) .

لكن $(U, P(X))$ ليست زمرة ، ذلك أنه لو افترضنا العكس ، لكان لكل عنصر من $P(X)$ نظير بالنسبة لـ U . وهذا يقتضي وجود نظير لـ X (عنصر من $P(X)$) بالنسبة لـ U ، أي وجود عنصر Y من $P(X)$ بحيث : $X \cup Y = \phi$. لكن هذا مستحيل ، لأنه أياً كانت Y من $P(X)$ فإن $X \cup Y \subset X$ و $X \neq \phi$ فرضاً .

ملاحظة (١) : لو كانت $X = \phi$ ، فإن المونويد $(U, P(X))$ يغدو زمرة . (لماذا ؟) .

ملاحظة (٢) : إن دراسة المسألة من أجل $(P(X), \cap)$ تم على نحو مماثل .

٨٧ - لنكن (G, o) زمرة عنصرها المحايد e . برهن أنه إذا تحقق أحد الشروط التالية :

$$\forall a, b \in G : (a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2 \quad (١)$$

$$\forall a \in G : a^2 = e \quad (٢)$$

$$\forall a \in G : a' = a \quad (٣)$$

فان الزمرة (G, o) تكون أبلية .

الحل : لنفرض تحقق المساواة الأولى . عندها نجد :

$$(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2 \Rightarrow (a \circ b) \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ (b \circ b)$$

$$\Rightarrow a \circ (b \circ (a \circ b)) = a \circ (a \circ (b \circ b)) \quad (o \text{ تجميعية})$$

$$\Rightarrow b \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ b) \quad (\text{نظرية [٣-١٤]})$$

$$\Rightarrow (b \circ a) \circ b = (a \circ b) \circ b \quad (o \text{ تجميعية})$$

$$\Rightarrow b \circ a = a \circ b \quad (\text{نظرية [٣-١٤]})$$

ولما كانت المساواة الأخيرة صحيحة أياً كان a, b من G ، فان (G, o) زمرة أبلية .

(٢) إذا كانت العلاقة الثانية صحيحة ، فانه أياً كان العنصران a, b من G نجد :

$$a^2 = e , b^2 = e , (a \circ b)^2 = e \Rightarrow a^2 \circ b^2 = e , (a \circ b)^2 = e$$

$$\Rightarrow a^2 \circ b^2 = (a \circ b)^2$$

وبتطبيق نتيجة الشق (١) من هذه المسألة نجد المطلوب .

(٣) لنفرض أخيراً تحقق العلاقة الثالثة . عندئذ أياً كان العنصران

a, b من G فان $(a \circ b)' = a \circ b$ ليكن $(a \circ b)' = b' \circ a'$

استناداً إلى [٣-١٧] . إذن $a \circ b = b' \circ a'$. ولما كان $b' = b$

و $a' = a$ ، فان $a \circ b = b \circ a$ وبما أن هذه المساواة صحيحة أياً كان

a, b من G ، فان (G, o) زمرة تبديلية .

٨٨ - لتكن (E, \top) زمرة أبيلية ، وليكن α عنصراً مثبتاً من E مغايراً للعنصر المحايد e . والمطلوب إثبات أن زمرة أبيلية كذلك بالنسبة للعملية الداخلية \perp المعرفة بالقاعدة :

$$\forall a, b \in E : a \perp b = a \top b \top \alpha \quad (*)$$

الحل : (١) \parallel كانت \top عملية داخلية ، فانه أياً كان a, b من E ، فان $a \top b \top \alpha$ عنصر من E أيضاً . وبالتالي فان E مغلقة بالنسبة للعملية \perp ، أي أن \perp عملية داخلية على E .
 (٢) العملية الداخلية \perp تجميعية ، ذلك أنه أياً كانت العناصر a, b, c من E فان :

$$\begin{aligned} (a \perp b) \perp c &= (a \top b \top \alpha) \perp c = (a \top b \top \alpha) \top c \top \alpha \\ &= a \top b \top \alpha \top c \top \alpha \quad (\text{لا ضرورة للأقواس لأن } \top \text{ تجميعية}) \\ &= a \top b \top c \top \alpha \top \alpha \quad (\top \text{ تبديلية}) \end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$\begin{aligned} a \perp (b \perp c) &= a \perp (b \top c \top \alpha) = a \top (b \top c \top \alpha) \top \alpha \\ &= a \top b \top c \top \alpha \top \alpha \quad (\text{لا ضرورة للأقواس لأن } \top \text{ تجميعية}) \end{aligned}$$

وبالتالي فان العملية \perp تجميعية لأننا وجدنا أن :

$$\forall a, b, c \in E : (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$$

(٣) العملية \perp تبديلية ، ذلك أن \top تبديلية وبالتالي فلا فرق بين الناتج $a \top b \top \alpha$ (الذي يساوي $a \perp b$) وبين الناتج $b \top a \top \alpha$ (الذي

يساوي $(b \perp a)$ ، وذلك أياً كان a, b من E .

(٤) إذا وجد عنصر محايد $u \perp l$ ، فأياً كان a من E يكون :

$$a \perp u = a \Leftrightarrow a \top u \top \alpha = a \Leftrightarrow a \top (u \top \alpha) = a \\ \Leftrightarrow u \top \alpha = e$$

واستناداً إلى وجود نظير واحد لكل عنصر من زمرة ،
فإن u موجود ووحيد ويساوي α' نظير α بالنسبة للعملية \top (تحقق
من أن $(\forall a \in E : a \perp \alpha' = \alpha' \perp a = a)$)

(٥) كي يوجد لأي عنصر a من E نظير \bar{a} بالنسبة للعملية \perp ،
فانه يجب أن يتحقق الشرط :

$$\bar{a} \perp a = \alpha' \Leftrightarrow \bar{a} \top a \top \alpha = \alpha'$$

واستناداً إلى [١٨ - ٣] نرى أن \bar{a} موجود ووحيد ويساوي
 $\alpha' \top (a \top \alpha)$ أو $\alpha' \top \alpha' \top a$. (تحقق من أن

$$(\forall a \in E : \bar{a} \perp a = a \perp \bar{a} = \bar{\alpha})$$

إن توفر الشروط (١) - (٥) يعني أن (E, \perp) زمرة تبديلية
وهو المطلوب .

٨٩ - لتكن S زمرة ضربية غير أبلية عنصرها المحايد e ، ولتكن
 a, b, c, d أربعة عناصر من S ناتجها $abcd$ يساوي e .
(١) برهن أن كلا من النواتج التالية يساوي e أيضاً :

$$bcda , cdab , dabc$$

(٢) عبر عن d^{-1} نظير d بدلالة a, b, c ، ثم عين $d^{-1}c^{-1}$ بدلالة a, b .

الحل : (١) لدينا :

$$a b c d = e \Leftrightarrow a^{-1} (a b c d) a = a^{-1} e a$$

$$\Rightarrow (a^{-1} a) (b c d a) = a^{-1} e a \quad (\text{عملية الضرب تجميعية})$$

$$\Rightarrow b c d a = e \quad (\text{لأن } a^{-1} a = e)$$

$$\Rightarrow b^{-1} (b c d a) b = b^{-1} e b \Rightarrow (b^{-1} b) (c d a b) = b^{-1} e b$$

(عملية الضرب تجميعية)

$$\Rightarrow c d a b = e \quad (\text{لأن } b^{-1} b = e)$$

$$\Rightarrow c^{-1} (c d a b) c = c^{-1} e c \Rightarrow (c^{-1} c) (d a b c) = c^{-1} e c$$

(عملية الضرب تجميعية)

$$\Rightarrow d a b c = e \quad (\text{لأن } c^{-1} c = e)$$

(٢) وجدنا الآن أن $d a b c = e$. إذن $d d^{-1} = d d^{-1} a b c = e$. وتقتضي

هذه المساواة [١٤ - ٣] المساواة $a b c = d^{-1}$ ، ونكون بهذا قد عبرنا عن d^{-1} بدلالة a, b, c .

هذا ومن الواضح أن المساواة $a b c = d^{-1}$ تقتضي $(a b c) c^{-1} = d^{-1} c^{-1}$.

ولما كانت عملية الضرب تجميعية فإن : $ab(cc^{-1}) = d^{-1}c^{-1}$. لكن

$$ab = d^{-1}c^{-1} \text{ إذن } cc^{-1} = e$$

٩٠ - لتكن G مجموعة كل الأزواج المرتبة (a, b) من الأعداد

الحقيقية بفرض $a \neq 0$ ، ولنعرف على G عملية الضرب التالية :

$$(a, b) (c, d) = (ac, bc + d) \quad (*)$$

أولاً : برهن أن G زمرة غير تبديلية بالنسبة لعملية الضرب هذه .

ثانياً : برهن أن مجموعة العناصر $(a, 0)$ تشكل زمرة جزئية H من الزمرة G ، وأن H إيزومورفية للزمرة (R^*, \cdot) (أي زمرة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر بالنسبة لعملية الضرب العادية) .

ثالثاً : لنعرف تطبيقاً $\varphi : G \rightarrow R$ بالقاعدة $\varphi((a, b)) = a$.
بين أن $\varphi^{-1}(1)$ (أي مجموعة العناصر من G التي خيال كل منها هو العدد الحقيقي 1) تشكل زمرة جزئية من G ، وأن هذه الزمرة الجزئية إيزومورفية للزمرة $(R, +)$ (أي زمرة الأعداد الحقيقية بالنسبة لعملية الجمع العادية) .

الحل :

أولاً : (١) إن عملية الضرب المعرفة بالقاعدة (*) هي عملية داخلية على G ، ذلك أن $(ac, bc + d)$ ناتج ضرب العنصرين الاختياريين (a, b) و (c, d) من G هو زوج مرتب أيضاً مسقطه الأول ac مغاير للصفر .

(٢) إن عملية الضرب على G تجميعية ، ذلك أنه لو افترضنا (f, g) عنصراً اختيارياً ثالثاً من G فإن :

$$\begin{aligned} ((a, b) (c, d)) (f, g) &= (ac, bc + d) (f, g) = \\ &= (acf, bcf + df + g) \end{aligned}$$

$$(a, b) ((c, d)(f, g)) = (a, b) (cf, df + g) = (acf, bcf + df + g)$$

(٣) إذا وجد عنصر محايد (x, y) في G ، فيجب أن تتحقق العلاقات :

$$\forall (a, b) \in G : (a, b)(x, y) = (a, b) \text{ و } (x, y)(a, b) = (a, b)$$

إن هاتين العلاقتين تكافئان جملة المعادلات الخطية التالية :

$$ax = a \quad , \quad bx + y = b$$

$$xa = a \quad , \quad ya + b = b$$

ومن الواضح أنه يوجد لهذه الجملة الحل الوحيد $(x=1(\neq 0), y=0)$ (*) .

وبالتالي فإن العنصر المحايد في G هو $(1, 0)$.

(٤) إذا كان العنصر (ξ, η) مقلوباً (أي نظيراً بالنسبة للضرب)

للعنصر الاختياري (a, b) ، فيجب أن يحقق المعادلتين :

$$(a, b)(\xi, \eta) = (1, 0) \text{ و } (\xi, \eta)(a, b) = (1, 0)$$

التي تكافئان جملة المعادلات الأربع التالية :

$$a\xi = 1 \quad , \quad b\xi + \eta = 0$$

$$\xi a = 1 \quad \eta a + b = 0$$

(*) يكفي أن يكون هذا الحل موجوداً حتى يكون وحيداً (النظرية

[١٣ - ٣] .

ومن الواضح أنه يوجد لهذه العملية الحل الوحيد (*)
 وبالتالي فإن للعنصر (a, b) الاختياري من G
 المقلوب الوحيد $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$.

نستخلص مما سبق أن G تشكل زمرة (ضربية). لكن هذه
 الزمرة غير أبيلية، ذلك أنه مثلاً :

$$(4, 3) (-\frac{1}{2}, 0) = (-2, -\frac{3}{2}) \neq (-\frac{1}{2}, 0) (4, 3) = (-2, 3)$$

ثانياً : (١) من الواضح أن $H \neq \emptyset$.

(٢) أياً كان العنصران $(b, 0)$ ، $(a, 0)$ من H ، فإن

$$(a, 0) (b, 0)^{-1} = (a, 0) (\frac{1}{b}, -\frac{0}{b}) = \text{(استناداً إلى (٤))}$$

$$= (\frac{a}{b}, 0 \frac{1}{b} - \frac{0}{b}) = (\frac{a}{b}, 0) \in H$$

وبالتالي فإننا نحكم [٣٣-٣] أن H زمرة جزئية من الزمرة G .

لنعرف الآن التابع $f: H \rightarrow R^*$ بالدستور $f((a, 0)) = a$ ،

ولنبرهن أن f إيزومورفيزم للزمرة الجزئية H من G على الزمرة الضربية

(R^*, \cdot) .

في الحقيقة :

(*) يكفي أن يكون الحل موجوداً حتى يكون وحيداً (النظرية

[٣٣-١٣].

$$\forall (a, 0), (b, 0) \in H : f((a, 0)(b, 0)) = f((a, 0) + (b, 0)) =$$

$$a + b = f(a, 0) + f(b, 0)$$

فاذا أضفنا إلى ذلك أن f تقابل ، أي تطبيق متباين وغامر ،
(لماذا ؟) حصلنا على المطلوب .

ثالثاً : نلاحظ أولاً أن φ هو مورفيزم للزمرة الضربية G في الزمرة
(R^*, \cdot) ، ذلك أن :

$$\forall (a, b), (c, d) \in G : \varphi((a, b)(c, d)) = \varphi((ac, bc + d)) \\ = ac = \varphi(a, b) \varphi(c, d)$$

ولما كان العدد 1 هو العنصر المحايد في الزمرة الضربية (R^*, \cdot) فإن
المجموعة $\varphi^{-1}(1)$ زمرة جزئية من G (النظرية [٤٢ - ٣]) .
سنبين الآن وجود إيزومورفيزم للزمرة الجزئية $\varphi^{-1}(1)$ والتي دعامتها
المجموعة $\{(1, b) : b \in R\}$ على الزمرة ($R, +$) . من الواضح أن
التطبيق $\psi : \varphi^{-1}(1) \rightarrow R$ المعروف بالقاعدة :

$$\psi((1, b)) = b$$

هو تطبيق غامر ومتباين (تحقق من هذا) . فاذا لاحظنا بالإضافة
إلى ذلك أن :

$$\psi((1, b)(1, d)) = \psi((1, b + d)) = b + d = \\ = \psi(1, b) + \psi(1, d)$$

فاننا نحكم بأن ψ إيزومورفيزم للزمرة الجزئية $\varphi^{-1}(1)$ من G على
الزمرة الجمعية لـ R .

٩١ - لقد عرف الرومي كوروش Kurosh الزمرة على النحو التالي : نقول عن مجموعة G عليها عملية داخلية \circ إنها زمرة بالنسبة للعملية \circ ، إذا كانت G غير خالية ، وكانت \circ تجميعية ، وكان لكل من المعادلتين :

$$a \circ x = b , y \circ a = b$$

حل وحيد في G أبا كان العنصران a, b من G برهن أن تعريف كوروش للزمرة يكافئ التعريف الشائع [١ - ٣] للزمرة .

أولاً : إن التعريف [١ - ٣] يقتضي تعريف كوروش ، ذلك أنه وفق التعريف [١ - ٣] تكون G غير خالية (لاحتوائها على العنصر المحايد e) ، وتكون \circ تجميعية ، ويكون أخيراً للمعادلتين حل وحيد في G وذلك استناداً إلى النظرية [١٨ - ٣] .

ثانياً : سنثبت الآن أن تعريف كوروش يقتضي [١ - ٣] . لما كانت $G \neq \Phi$ وفق كوروش ، فهناك عنصر b على الأقل ينتمي إلى G . لنفترض (استناداً إلى (١)) أن u هو العنصر الوحيد الذي يحقق المعادلة $b \circ u = b$ ، وأن y هو العنصر الوحيد الذي يحقق المعادلة $y \circ b = a$ ، حيث a أي عنصر آخر من G (قد يكون a مساوياً b) . عندئذ ، لما كانت \circ تجميعية فإن :

$$a \circ u = (y \circ b) \circ u = y \circ (b \circ u) = y \circ b = a$$

ولما كانت هذه العلاقة صحيحة أيا كان a من G ، فإن u هو
هو عنصر محايد أيمن لـ o . وبنفس الطريقة نبهن على وجود عنصر محايد
أيسر لـ o ، أي عنصر e من G بحيث تحقق المساواة :

$$e o a = a$$

أيا كان a من G . لكن $e = u$. استناداً إلى [٢٧ - ١] ، إذن
نجد أن :

$$\forall a \in G : e o a = a o e = a$$

ونكون بهذا قد أثبتنا وجود عنصر محايد (وحيد) e في G لـ o .

لنفترض الآن أن a عنصر اختياري من G . عندئذ يتوجب على (١)
وجود عنصرين a' و a'' وحيدين بحيث :

$$a o a' = e , a'' o a = e$$

لكن $a' = a''$ [٢٨ - ١] ، إذن لكل عنصر a نظير a' بالنسبة
لـ o يحقق :

$$a o a' = a' o a = e$$

وهكذا نرى أن تعريف كوروش يقتضي (بالإضافة إلى تجميعية
العملية الداخلية o) وجود عنصر محايد لـ o ووجود نظير لكل عنصر
من G ، أي أن تعريف كوروش يقتضي التعريف [٣ - ١] .

ولما كنا قد أثبتنا العكس ، أي أن التعريف [٣ - ١] يقتضي
تعريف كوروش ، فإن هذين التعريفين متكافئان وهو المطلوب .

* ٩٢- لتكن $G = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ زمرة ضربية منتهية (مرتبتها $n+1$) وعنصرها المحايد a_0 . برهن أنه أيا كان العنصر a_i من G ، فهناك عدد صحيح موجب m بحيث $a_i^m = a_0$.

الحل : لما كان $a_1^0 = a_0$ [٣-١٩] فالمسألة محلولة من أجل العنصر المحايد a_0 .

لنأخذ الآن عنصراً اختيارياً a_i من G حيث $a_i \neq a_0$. فاذا رمزنا ب a_j من G لمقلوب a_i ، فان $a_i a_j = a_0$. إن $j \neq 0$ لأنه في الحالة المعاكسة يكون $a_i = a_0$. فاذا كان $j = i$ ، نجد $a_i^2 = a_0$. ولكن إذا كان $j \neq i$ ، فان :

$$a_i a_j = a_0 \quad (j \neq 0, j \neq i)$$

فاذا رمزنا ب a_k للعنصر الوحيد الذي يحقق $a_i a_k = a_0$ فانه يكون :

$$a_i a_j = a_0 \Rightarrow a_i (a_i a_k) = a_0 \Rightarrow (a_i a_i) a_k = a_0 \Rightarrow a_i^2 a_k = a_0$$

إن $k \neq 0$ لأنه لو صح العكس لكان $a_i a_0 = a_j$ أو $a_i = a_j$ أي $i = j$ ، الأمر الذي استبعدناه. وهنا نقول ثانية : إما أن يكون $k = i$ ، وعندها يكون $a_i^3 = a_0$ ، ولكن إذا كان $k \neq i$ فاننا نجد :

$$a_i^2 a_k = a_0 \quad (k \neq 0, k \neq i)$$

وهكذا فلو سرنا بهذا الطريق لوجدنا حالتين لا ثالث لهما :

(١) فإما أن نجد عدداً صحيحاً موجباً m بحيث يكون $a_i^m = a_0$.

(٢) وإما أن لا يتم ذلك ، وعندها نحصل على مجموعة المساويات :

$$a_i a_j = a_0 , a_i^2 a_k = a_0 , \dots , a_i^n a_h = a_0 \quad (**)$$

حيث كل من العناصر a_j, a_k, \dots, a_h مغاير لـ a_0 ولـ a_i . ولما كان كل من العناصر a_j, a_k, \dots, a_h منتبياً إلى G ، فإن عددها هو على الأكثر $n-1$ (لاستبعاد العنصرين a_0, a_i) . ولكن إذا لاحظنا أن العناصر a_j, a_k, \dots, a_h الواردة كمضارب في مجموعة المساويات (***) مختلفة (لماذا ؟) ، وأنه من الواضح بأن عدد المساويات (***) يساوي n فإننا نستنتج أن عدد العناصر a_j, a_k, \dots, a_h يساوي n . وهذا تناقض . وبالتالي فإن الحالة (٢) غير صحيحة . لذا فإن الحالة (١) هي الحالة الصحيحة وهو المطلوب .

٩٣ - برهن أن مجموعة الأعداد $H = \{ 2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$ تشكل زمرة جزئية من زمرة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر بالنسبة لعملية الضرب العادية .

الحل : (١) من الواضح أن $H \neq \emptyset$.

(٢) ليكن $2^m 3^n, 2^{m'} 3^{n'}$ أي عنصرين من H . إن مقلوب العنصر $2^{m'} 3^{n'}$ (أي نظير 0 بالنسبة لعملية الضرب) هو $2^{-m'} 3^{-n'}$ (لأن حاصل ضرب أحد هذين العنصرين بالعنصر الآخر من اليمين ومن اليسار يساوي العنصر المحايد 1) . وإذا لاحظنا أن :

$$(2^m 3^n) (2^{-m'} 3^{-n'}) = (2^{-m'} 3^{-n'}) (2^m 3^n) = 2^{m-m'} 3^{n-n'}$$

وأن $m - m'$ و $n - n'$ ينتميان إلى Z ، فإن حاصل الضرب في الطرف الأيمن عنصر من H . وبالتالي فإن زمرة جزئية من (R^*, \cdot) حسب [٣ - ٣٣] .

* ٩٤ - لتكن (G, o) زمرة عنصرها المحايد e . تسمى المجموعة الجزئية Z_G من عناصر G التي كل عنصر منها قابل للمبادلة مع جميع عناصر G مركزاً للزمرة G أي أن :

$$Z_G = \{ z \in G \mid z \circ x = x \circ z , \forall x \in G \}$$

برهن أن زمرة Z_G جزئية من الزمرة G .

الحل : (١) إن $Z_G \neq \Phi$ ، ذلك أن $e \circ x = x \circ e$ أيا كان x من G

وبالتالي فإن $e \in Z_G$.

(٢) ليكن z_1, z_2 أي عنصرين من Z_G . عندئذ ، أيا كان x من

G فإن :

$$z_1 \circ x = x \circ z_1 \Rightarrow z_2 \circ (z_1 \circ x) = z_2 \circ (x \circ z_1)$$

(\circ هي عملية وحيدة القيمة)

$$\Rightarrow (z_2 \circ z_1) \circ x = (z_2 \circ x) \circ z_1 \quad (\circ \text{ تجميعية })$$

$$\Rightarrow (z_2 \circ z_1) \circ x = (x \circ z_2) \circ z_1 \quad (\circ \text{ تجميعية })$$

ولما كانت المساواة الأخيرة صحيحة أيا كان x من G فإن $z_2 \circ z_1$ عنصر من Z_G . وبالتالي فإن المجموعة الجزئية Z_G مغلقة بالنسبة لـ \circ .

(٣) من الواضح أنه أيا كان x من G و z من Z_G فإن :

$$z \circ x' = x' \circ z \quad \text{ليكن}$$

$$z \circ x' = x' \circ z \Rightarrow (z \circ x') = (x' \circ z) \Rightarrow (x') \circ z' = z' \circ (x')$$

$$\Rightarrow x \circ z' = z' \circ x \quad ([٣ - ١٦])$$

وهكذا نرى أنه إذا كان 'z' أي عنصر من Z_G ، فإن 'z' (نظيره بالنسبة لـ o) عنصر من Z_G .

إن تحقق الشروط (١) - (٣) كافٍ للحكم بأن Z_G زمرة جزئية من الزمرة G (نظرية [٣ - ٢٩]) .

* ٩٥ - لتكن (G, o) زمرة دوارة منتهية مرتبتها n ومولدها a .
برهن أن $a^n = e$ ، كما أن العناصر المختلفة في G هي :

$$\{ a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n = e \}$$

الحل : لنفرض أن $a^m = e$ حيث $m < n$. عندئذ إذا كان k أي عدد صحيح ، فهناك عدنان صحيحان q, r ($0 \leq r < m$) بحيث يكون $k = qm + r$. عندها نرى أن :

$$a^k = a^{qm+r} = (a^m)^q \circ a^r = e^q \circ a^r = a^r$$

وهذا يعني أن a^k هو أحد العناصر $a^0, a, a^2, \dots, a^{m-1}$ ، أي أن G تحتوي على m من العناصر على الأكثر . ولما كانت G تحتوي على n من العناصر ، فاننا نقع في تناقض . وبالتالي فإن افتراضنا أن $a^m = e$ حيث $m < n$ خاطيء .

لنفترض بعد ذلك أن $a^i = a^j$ حيث $0 < i < j \leq n$. عندها يكون $a^i \circ a^{-i} = a^j \circ a^{-i} = a^{j-i}$ ، أي $a^{i-i} = a^{j-i}$ ، أو $e = a^{j-i}$. ولما كان

فان هذه النتيجة خاطئة استناداً إلى ما سبق ، وبالتالي
 فان a, a^2, \dots, a^n عناصر مختلفة . ولما كانت G تحتوي على n من
 العناصر تماماً ، فان هذه المجموعة من العناصر يجب أن تحوي جميع عناصر
 G . ولما كان العنصر e من G ، فان e هو أحد هذه العناصر a^i
 ($1 \leq i \leq n$) . وبما أننا وجدنا أن $a^m \neq e$ عندما $m < n$ فان $a^n = e$
 ونكون بذلك قد أتممنا البرهان .

٩٦- لكن G زمرة ضربية أبلية ، H زمرة جزئية من G . برهن
 أن العلاقة R المعرفة على G :

$$x R y \Leftrightarrow x y^{-1} \in H$$

هي علاقة تكافؤ في G ، وأن هذه العلاقة منسجمة مع عملية الضرب
 أي أن :

$$x R y \Rightarrow (x z) R (y z)$$

ما هو صنف تكافؤ عنصر من H ؟

الحل : (١) لما كانت أي زمرة جزئية من زمرة G تحتوي على
 العنصر المحايد e في G ، فان $e \in H$. ولكن $xx^{-1} = e$
 أبا كان x من G ، لذا فإننا نجد :

$$\forall x \in G : x R x$$

أي أن العلاقة R منعكسة .

(٢) لنفرض أن $x R y$. إن هذا يعني أن $x y^{-1} \in H$. ولما

كانت H زمرة (لأنها زمرة جزئية) ، فان H تحوي نظير العنصر $x y^{-1}$ ، أي العنصر $(x y^{-1})^{-1}$ الذي يساوي كما نعلم $y x^{-1}$ (لأن $(y^{-1})^{-1} = y$) . ولكن $y x^{-1} \in H$ تعني أن $y R x$. وهكذا فإننا نرى أن :

$$x R y \Rightarrow y R x$$

أي أن العلاقة R متناظرة .

(٣) لنفرض $x R z$ ، $x R y$. إن هذا يعني أن $y z^{-1} \in H$ و $x y^{-1} \in H$. ولما كانت H مغلقة بالنسبة لعملية الضرب (لأنها زمرة تعريفياً) فان :

$$(x y^{-1}) (y z^{-1}) = x (y^{-1} y) z^{-1} = x e z^{-1} = x z^{-1}$$

عنصر من H . ولكن $x z^{-1} \in H$ تعني $x R z$. وبالتالي فقد وجدنا أن :

$$x R y \text{ و } y R z \Rightarrow x R z$$

أي أن العلاقة R متعدية .

وهكذا نرى بما تقدم أن العلاقة R منعكسة ومتناظرة ومتعدية ، إذن R علاقة تكافؤ في G .

(٤) إن :

$$x R y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H \Leftrightarrow x (z^{-1} z) y^{-1} \in H \quad (\text{لأن } z^{-1} z = e)$$

$$\Leftrightarrow (x z^{-1}) (z y^{-1}) \in H \quad (\text{لأن عملية الضرب تجميعية})$$

$$\Leftrightarrow (x z^{-1}) (y z^{-1})^{-1} \in H \quad (\text{حسب [٣-١٧]})$$

$$\Leftrightarrow (x z) R (y z)$$

(٥) لنفرض a عنصراً من H . إن صنف تكافؤ هذا العنصر هو مجموعة كل العناصر y من G التي تكافئ a أي التي تربط b بـ a بالعلاقة $a R y$ أي بالعلاقة $ay^{-1} \in H$. ونترك للقارئ التأكد من أن مجموعة العناصر هذه هي H نفسها . وبالتالي فإن صنف تكافؤ عنصر a من H هو H نفسها .

٩٧ - لتكن (G, o) زمرة ، H مجموعة جزئية منتهية منها . برهن أنه إذا كانت H غير خالية ومغلقة بالنسبة لـ o فإن H زمرة جزئية من الزمرة G .

الحل : يكفي أن نبرهن بأن نظير أي عنصر a من H ينتمي إلى H . ليكن a عنصراً من H . لما كانت H مغلقة بالنسبة لـ o ، فإن $a^2, a^3, \dots, a^m, \dots$ ، $a^2 = a \circ a$ ، $a^3 = a^2 \circ a$ ، \dots ، a^m, \dots من H . ولكن العناصر المختلفة من هذه المجموعة غير المنتهية من العناصر $a, a^2, \dots, a^m, \dots$ يجب أن تكون منتهية ، لأن H منتهية فرضاً . وهذا يعني أن هنالك عددين طبيعيين h, k حيث $k > h > 0$ يكون من أجلها $a^k = a^h$. ويترتب على هذا أن $a^{k-h-1} = a^{-1}$. ولما كان $k-h-1 \geq 0$ ، فإن a^{k-h-1} هو العنصر المحايد e ($e \in H$) أو أحد العناصر $a, a^2, \dots, a^m, \dots$ التي كل منها ينتمي إلى H . وبالتالي فإن a^{-1} عنصر من H . وهو المطلوب .

٩٨ - ليكن Ox, Oy مستقيمين متعامدين في مستو Π ، ولتكن لدينا التطبيقات الأربعة التالية للمستوي Π على نفسه : f_1 التطبيق المطابق و f_2 التناظر بالنسبة لـ Oy ، f_3 التناظر بالنسبة لـ Ox ، f_4 التناظر بالنسبة لـ O . برهن أن مجموعة هذه التطبيقات الأربعة المزودة بعملية تركيب التطبيقات هي زمرة آبلية .

الحل : وجدنا عند دراستنا للزمر التناظرية أن مجموعة التطبيقات المتباينة لمجموعة E على نفسها تشكل زمرة S_E بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات وعلى هذا الأساس فإن مجموعة كل التطبيقات المتباينة والغامرة للمستوي π (أي المجموعة $R \times R$) على نفسه تشكل زمرة بالنسبة لتركيب التطبيقات .

إن التطبيقات الأربعة المفروضة يمكن التعبير عنها بالشكل :

$$f_1(x, y) = (x, y) \quad , \quad f_2(x, y) = (-x, y)$$

$$f_3(x, y) = (x, -y) \quad , \quad f_4(x, y) = (-x, -y)$$

من السهل التأكد من أن كلا من التطبيقات هذه متباين وغامر .
وبالتالي فإن المجموعة $H = \{ f_1, f_2, f_3, f_4 \}$ هي مجموعة جزئية من $S_{R \times R}$. ويمكن التأكد كذلك من صحة الجدول التالي :

o	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

ولما كانت المجموعة الجزئية (غير الخالية) H منتهية ، فان كون H مغلقة بالنسبة لـ \circ (انظر الجدول) كاف للحكم بأن H زمرة جزئية من الزمر التناظرية $S_{R \times R}$ (انظر المثال السابق) . وبما أن الزمرة الجزئية هي زمرة تعريفاً ، فإن H هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات . وهذه الزمرة تبديلية لأن الجدول السابق متناظر بالنسبة للقطر الرئيسي للجدول (أي القطر المار بالجهة العلوية اليسرى من الجدول) .

٩٩ - برهن أن أية زمرة جزئية من زمرة أبيلية هي زمرة جزئية ناظمية .

الحل : لتكن (G, \top) زمرة أبيلية ، H زمرة جزئية منها . عندئذ
 أيا كان h من H و g من G :

$$g \top h \top g' = (g \top g') \top h$$
 (لأن العملية \top تجميعية وتبديلية)

$$= e \top h = h \in H$$

وبالتالي فإن H زمرة جزئية ناظمية من G .

* ١٠٠ - لتكن H, K زمرتين جزئيتين من الزمرة الضربية G
 بفرض الزمرة الجزئية K ناظمية ، برهن مايلي :

أولاً : إن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظمية من H .

ثانياً : إذا رمزنا بـ $HK = \{ hk \mid h \in H, k \in K \}$ ، فان HK
 زمرة جزئية من الزمرة G .

الحل : أولاً : لما كانت H زمرة جزئية من الزمرة الضربية G

فهي زمرة ضربية . إن $H \cap K$ زمرة جزئية من الزمرة H لأن :

$$(1) \quad H \cap K \text{ مجموعة جزئية من } H .$$

(2) $H \cap K \neq \Phi$ لأن كلا من المجموعتين الجزئيتين H, K تحتوي

على العنصر المحايد e في G .

(3) إذا كان a, b أي عنصرين من $H \cap K$ فإن ab^{-1} عنصر من

$$H \cap K \text{ (لذا ؟)}$$

ان الشروط (1) - (3) تبين أن $H \cap K$ زمرة جزئية من H .

ولبرهان أن الزمرة الجزئية $H \cap K$ من H ناظمية يجب إثبات أن

$$\forall h \in H, \forall l \in H \cap K : h l h^{-1} \in H \cap K \quad (1)$$

في الحقيقة ، لما كانت K زمرة جزئية ناظمية من G فإن :

$$\forall g \in G, \forall k \in K : g k g^{-1} \in K \quad (2)$$

وبما أن $H \subseteq G$ ، $H \cap K \subseteq K$ ، فإن (2) تقتضي :

$$\forall h \in H, \forall l \in H \cap K : h l h^{-1} \in K \quad (3)$$

كذلك ، لما كانت H زمرة (جزئية) فإن :

$$\forall h, k \in H : h k h^{-1} \in H \quad (4)$$

وبما أن $H \cap K \subseteq H$ ، فإن (4) يقتضي :

$$\forall h \in H, \forall l \in H \cap K : h l h^{-1} \in H \quad (5)$$

ومن الواضح أنه يترتب على الشرطين (5) و (3) :

$$\forall h \in H, \forall l \in H \cap K : h l h^{-1} \in H \cap K$$

أي أن الزمرة الجزئية $H \cap K$ من الزمرة H ناظمية .

ثانياً : (١) من الواضح أن HK مجموعة جزئية من G .

(٢) إن $HK \neq \Phi$ ، ذلك أن كلا من الزمرتين الجزئيتين

H, K من G تحتوي على العنصر المحايد e في G ، لذا فإن :

$$e e = e \in HK$$

(٣) ليكن $h_1 k_1, h_2 k_2$ اي عنصرين من HK . ولو أدخلنا في

اعتبارنا تجميعية عملية الضرب نجد :

$$(h_1 k_1) (h_2 k_2)^{-1} = (h_1 k_1) (k_2^{-1} h_2^{-1}) = h_1 (h_2^{-1} h_2) k_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$$

$$(\text{لأن } h_2^{-1} h_2 = e)$$

$$= (h_1 h_2^{-1}) [h_2 (k_1 k_2^{-1}) h_2^{-1}] \quad (6)$$

ولما كان $h_1 h_2^{-1} \in H$ (لأن H زمرة جزئية) وكان الناتج الموجود

داخل القوسين [] عنصراً من K لأن $h_2 \in H, k_1 k_2^{-1} \in K$ ، ولأن

K زمرة جزئية ناظمية ، فإن الطرف الأيمن من (6) هو حاصل ضرب

العنصر $h_1 h_2^{-1}$ من H بالعنصر [] من K ، أي أن ينتمي

إلى HK .

وهكذا نرى أن (٢) تعني التالي :

$$\forall h_1 k_1, h_2 k_2 \in HK : (h_1 k_1) (h_2 k_2)^{-1} \in HK$$

إن (١) - (٣) تعنيان استناداً إلى [٣ - ٣٣] ، أن HK زمرة

جزئية من الزمرة G .

١٠١ - ألا يمكن أن تكون زمرة أبيلية إيزومورفية لزمرة غير

أبيلية ؟ ولماذا ؟

الحل : كلا . لنفترض جدلاً وجود إيزومورفيزم f للزمرة الأبيلية

(G, \top) على الزمرة غير الأبيلية (E, o) . فبما أن الزمرة E غير

أبيلية ، هنالك عنصران (c, d) (على الأقل) بحيث $cod \neq doc$.

وبما أن الإيزومورفيزم تقابل ، فهناك عنصران (a, b) (وحيضان) من

G بحيث $f(a) = c$ ، $f(b) = d$. ولكن الزمرة G أبيلية ، إذن

$a \top b = b \top a$ ، وبالتالي فإن $f(a \top b) = f(b \top a)$. وعندها

$$f(a \top b) = f(b \top a) \Rightarrow f(a) \circ f(b) = f(b) \circ f(a)$$

$$\Rightarrow cod = doc$$

ولما كان $cod \neq doc$ ، فإننا نصل إلى تناقض ، وبالتالي فإن

انطلاقاً من فرضية وجود الإيزومورفيزم بين (G, \top) و (E, o) خاطئة .

١٠٢ - ليكن ψ هومومورفيزماً للزمرة الدوارة G التي مولدها g

على الزمرة E^* . برهن أن الزمرة E دوارة ومولدها $\psi(g)$.

الحل : إذا كان b عنصراً اختيارياً من E ، فهناك عنصر (a) على

الأقل (a) من G بحيث $\psi(a) = b$. (وجود a ناتج عن كون ψ

(*) إذن ψ إيزومورفيزم .

تطبيقاً غامراً) . ولما كانت G زمرة دوارة مولدها g ، فهناك عدد صحيح m بحيث : $a = g^m$ ، أي أن $b = \psi(g^m)$. لكن $\psi : G \rightarrow E$ هو مورفيزم إذن $\psi(g^m) = [\psi(g)]^m$ (لماذا ؟) . لذا فهناك عنصر $\psi(g)$ من E يحقق مايلي : أيا كان العنصر b من E ، فإن $b = [\psi(g)]^m$ حيث m عدد صحيح . وهذا يعني أن الزمرة E دوارة مولدها $\psi(g)$ ، وهو المطلوب .

* ١٠٣ - لتكن (H, \circ) و (G, \top) زمرتين دوارتين من مرتبة واحدة ، وليكن g مولداً اختيارياً من G و h مولداً اختيارياً من H . برهن على وجود إيزومورفيزم $\varphi : G \rightarrow H$ بحيث $\varphi(g) = h$.

الحل : لنفرض أن مرتبة كل من الزمرتين n ، وأن e, u هما العنصران المحايدان في G, H على الترتيب . عندها نجد استناداً إلى التمرين (٩٥) :

$$G = \{ g, g^2, \dots, g^n = e \} , H = \{ h, h^2, \dots, h^n = u \}$$

مع ملاحظة أن العناصر الداخلة في كل من G, H مختلفة .

سنبرهن الآن على أن التطبيق $\varphi : G \rightarrow H$ المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(g^m) = h^m \quad (1 \leq m \leq n) \quad (*)$$

هو إيزومورفيزم لـ G على H .

في الحقيقة ، إن التطبيق φ غامر ، لأنه أيا كان العنصر h^m من H ، فانه خيال للعنصر g^m ، كذلك فان التطبيق φ متباين ، ذلك أن :

$$\varphi(g^{m'}) = \varphi(g^{m''}) \Rightarrow h^{m'} = h^{m''} \Rightarrow m' = m'' \Rightarrow g^{m'} = g^{m''}$$

ولاثبات أن φ هو مورفيزم نفرق بين حالتين :

(١) فإذا كان $m' + m'' \leq n$ ($1 < m' + m''$) فيمكن عندئذ تطبيق القاعدة

(*) ونجد :

$$\begin{aligned}\varphi(g^{m'} \top g^{m''}) &= \varphi(g^{m'+m''}) \\ &= h^{m'+m''} \quad (\text{وفق } (*)) \\ &= h^{m'} \circ h^{m''} = \varphi(g^{m'}) \circ \varphi(g^{m''})\end{aligned}$$

(٢) وإذا كان $m' + m'' > n$ ، فإن العدد الصحيح $p = m' + m'' - n$

موجب من جهة ، كما أن $p \leq n$ (لأن $m' + m'' \leq 2n$) . وعندها نجد استناداً إلى (*) :

$$\begin{aligned}\varphi(g^{m'} \top g^{m''}) &= \varphi(g^{m'+m''}) = \varphi(g^{n+p}) = \varphi(g^n \top g^p) \\ &= \varphi(e \top g^p) = \varphi(g^p) = h^p = h^{m'+m''-n} = \\ &= h^{m'} \circ h^{m''} \circ h^{-n} \\ &= h^{m'} \circ h^{m''}\end{aligned}$$

(لأن $h^{-n} = h^{-n} \circ u = h^{-n} \circ h^n = h^{n-n} = h^0 = u$)

$$= \varphi(g^{m'}) \circ \varphi(g^{m''})$$

وهكذا فإن (١) - (٢) يبينان أن :

$$\forall g^{m'}, g^{m''} \in G : \varphi(g^{m'} \top g^{m''}) = \varphi(g^{m'}) \circ \varphi(g^{m''})$$

وبالتالي فإن φ همومورفيزم لـ G في H وإذا أضفنا إلى ذلك ما وجدناه بأن φ تقابل بين G و H ، استنتجنا أن φ إيزومورفيزم لـ G على H ، وأن هذا الإيزومورفيزم يحقق استناداً إلى القاعدة (*):

$$\varphi(g) = h$$



تمارين غير محلولة

٤٠١ - بين ما إذا كان كل من المجموعات التالية تشكل زمرة بالنسبة للعملية الداخلية المجاورة أم لا . برر جوابك في كل من هذه الحالات .

(أ) مجموعة الأعداد الحقيقية $a + b\sqrt{2}$ ، حيث a, b عددان صحيحان ، والعملية الداخلية هي عملية الجمع العادية .

(ب) مجموعة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر $a + b\sqrt{2}$ ، حيث a, b عددان عاديان (عقليان) والعملية هي عملية الضرب العادية . (العدد العقلي هو العدد الذي يمكن كتابته على شكل كسر صورته عدد صحيح ونخرجه عدد صحيح مغاير للصفر) .

(ج) مجموعة التباديل :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات .

(د) المجموعة $U = \{x, y\}$ بالنسبة للعملية \circ المعرفة بالجدول

o	x	y
x	x	y
y	y	x

١٠٥ - هل تشكل مجموعة الأعداد الصحيحة زمرة بالنسبة لعملية الطرح العادية ، ولماذا ؟

١٠٦ - إن مجموعة الأعداد الصحيحة Z تشكل زمرة بالنسبة للعملية $*$ المعرفة بالقاعدة :

$$\forall a, b \in Z : a * b = a + b - 5$$

أوجد العنصر المحايد ل $*$ ، ثم أوجد الدستور الذي يعين نظير أي عنصر من هذه الزمرة بالنسبة ل $*$.

١٠٧ - لتكن G زمرة جمعية أبيلية . برهن (إما مباشرة أو بالاعتماد على النظريات الخاصة بالزمرة) صحة المتطابقات التالية أياً كانت العناصر a, b, c من G :

1) $-(-a - b) = a + b$

2) $a - 0 = a$

3) $(c - b) - (a - b) = c - a$

4) $-(a - b) = -a + b = b - a$

5) $(c - b) + (b - a) = c - a$

١٠٨ - اكتب التطبيقات الواردة في التمرين السابق بفرض الزمرة G ضربية .

١٠٩ - لتكن S مجموعة مزودة بعملية داخلية تجميعية \square . برهن أنه إذا كان كل عنصر في S منتظماً فإن (S, \square) تشكل زمرة .

* ١١٠ - برهن أنه إذا تحققت الشروط التالية في مجموعة عليها عملية داخلية \circ :

- (١) أن تكون o تجميعية .
 (٢) أن يوجد في G عنصر محايد أيسر لـ o .
 (٣) أن يوجد لكل عنصر من G نظير أيسر بالنسبة لـ o .
 فإن (G, o) تشكل زمرة .

١١١ - برهن أن كل زمرة جزئية من زمرة أبلية هي أبلية أيضاً أورد مثلاً تبين فيه أن العكس غير صحيح .

١١٢ - بين أن المجموعة $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5 \mid x\}$ هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} بالنسبة لعملية الجمع العادية . (الرمز $5 \mid x$ يعني أن العدد 5 يقسم العدد x) .

١١٣ - برهن أن مجموعة الأشعة المقيدة على الفراغ الإقليدي ذي الأبعاد الثلاثة والمنبعثة من النقطة O تشكل زمرة بالنسبة لعملية جمع الأشعة (وفق قاعدة متوازي الأضلاع) هل تشكل مجموعة الأشعة المقيدة الصادرة عن O والتي تقع نهاياتها على مستقيم في الفراغ زمرة جزئية من الزمرة السابقة ؟

١١٤ - برهن أن كل زمرة جزئية من زمرة دوارة هي زمرة دوارة كذلك .

١١٥ - ما هو عدد مولدات الزمرة الدوارة من المرتبة n ؟

١١٦ - لتكن $(G, *)$ زمرة ، H مجموعة جزئية غير خالية من G . برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية من

الزمرة G هو :

$$\forall a, b \in H : a^{-1}b \in H$$

١١٧ - لتكن H, K زمرتين جزئيتين من الزمرة G . برهن

أن $H \cap K$ زمرة جزئية من كل من G, H, K .

١١٨ - برهن أنه إذا كانت كل من H, K زمرة جزئية ناظمية

من الزمرة G ، فإن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظمية من G كذلك .

$$(HK = \{hk : h \in H, k \in K\})$$

* ١١٩ - لتكن (G, o) زمرة عنصرها المحايد e ، (S, \sqsupset)

زمرة عنصرها المحايد u ، وليكن :

$$J = G \times S = \{(g, s) \mid g \in G, s \in S\}$$

لتعرف « حاصل ضرب » الزوجين (g_1, s_1) و (g, s) من

J بالقاعدة .

$$(g, s) (g_1, s_1) = (g \circ g_1, s \sqsupset s_1)$$

(أ) برهن أن J زمرة بالنسبة لعملية الضرب هذه .

(ب) برهن أن $H = \{(g, u) \mid g \in G\}$ ، $K = \{(e, s) \mid s \in S\}$

زمرتان جزئيتان من J .

(ج) برهن أن كلا من التطبيقين :

$$H \rightarrow G : (g, u) \rightarrow g \quad \text{و} \quad K \rightarrow S : (e, s) \rightarrow s$$

إيزومورفيزم .

١٢٠ - لتكن G زمرة ضربية ، a, b عنصران من G . فإذا
فرضنا أن H زمرة جزئية من G وعرفنا :

$$H a = \{ h a \mid h \in H \} , H b = \{ h b \mid h \in H \}$$

فبرهن أن :

$$a \in H b \Rightarrow H a = H b$$

١٢١ - لتكن لدينا الزمرتان $(Z, +)$ و (R^*, \cdot) . برهن
أن التطبيق $f: Z \rightarrow R^*$ المعرف بالقاعدة $f(n) = a^n$ ، حيث a عنصر
مثبت من R^* هو هومومورفيزم .

١٢٢ - برهن أن زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع
العادية ، و زمرة الأعداد الصحيحة الزوجية بالنسبة للعملية نفسها
إيزومورفيتان ؟

١٢٣ - هل التطبيق $\varphi(x) = e^x$ إيزومورفيزم لزمرة الأعداد الحقيقية
بالنسبة لعملية الجمع على زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة بالنسبة لعملية الضرب ؟
١٢٤ - لتكن $(V, +)$ زمرة الأشعة المنبثقة من نقطة ثابتة
○ في الفراغ الاقليدي العادي بالنسبة لعملية جمع الأشعة ، وليكن
 Π مستويًا ماراً من ○ . برهن أن التناظر بالنسبة لهذا المستوي هو
أرتومورفيزم .

١٢٥ - برهن أن الحبال الهومومورفي لأي زمرة دوارة هو
زمرة دوارة .

١٢٦ - لتكن G زمرة ضربية ، g عنصراً مثبتاً من G . لتعرف

تابعاً $\Phi : G \rightarrow G$ بالقاعدة $\Phi(x) = gxg^{-1}$. برهن أن Φ هو إيزومورفيزم
لـ G على G .

١٢٧ - لتكن V مجموعة الأشعة الصادرة عن نقطة ثابتة من الفراغ
الاقليدي R^3 . نقول عن التابع :

$$f_{\vec{a}} : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$$

إنه انسحاب في R^3 موافق للشعاع \vec{a} . برهن أن مجموعة الانسحابات
تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات .

