الفصل الخامس

الفراغات الشعاعية

سنعالج في هذا الفصل نوعاً جديداً من البنى الجبرية نسميها الفراغات الشعاعية ، وسنجد في هذا النوع من البنى العمليتين الداخلية والخارجية .

ولهذا الموضوع أهمية كبيرة ، فهو أداة لاغنى عنها لدراسة الرياضيات في ثوبها المعاصر الجديد ، كما أن تطبيقاته في الفيزياء والميكانيك متنوعة وهامة .

ونود قبل كل شيء أن نؤكد أن مانسميه شعاعا فيما يلي ليس ذلك الشعاع المعروف في الفيزياء والميكانيك فحسب (قطعة مستقيمة موجهة) ، بل هو كائن جبري مجرد لا يحمل أي معنى فيزيائي . وسنرى أن الشعاع بمعناه الجبري المجرد يعتبر تعميماً وتجديداً للشعاع في الفيزياء والميكانيك .

وعلى هذا فإننا سنبدأ بدراسة موجزة للأشعة بمعناها الفيزيائي ثم نحاول بعد ذلك أن نعرف البنية الجبرية الجديدة بشكل مجرد .

١ ـ ٥ الأشعة : الشعاع في الفراغ العادي ، كما هو معلوم ، قطعة مستقيمة موجهة ، ولذا فإنه يتعين بعناصر أربعة : المبدأ ـ المنحى ـ الجهة ـ الطول ، ويرمز له عادة بحرف فوقه سهم مثل $\vec{a}$ أو بحرف غامق .

أو بحرف عادي إذا لم يخشى الالتباس . ونرمز لطول الشعاع $\vec{a}$ بـ $|\vec{a}|$.

إذا عينت العناصر الأربعة لشعاع سميناه شعاعاً مقيداً . نعرف على مجموعة الأشعة المقيدة في الفراغ العادي علاقة تساير نرمز لها بـ $\#$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متسايرين ($\overrightarrow{AB} \# \overrightarrow{CD}$) فيما إذا كانا متحدين في المنحى والجهة ومتساويين في الطول .

إن من الواضح أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ ، فهي تجزىء مجموعة الأشعة المقيدة في الفراغ العادي إلى أصناف تكافؤ . نسمي كل صنف من هذه الأصناف شعاعاً طليقاً يمثله أحد عناصر هذا الصنف .

سنقصد بكلمة شعاع في هذه الفقرة الشعاع الطليق حصراً .

من المعروف أن هناك تقابلا بين مجموعة الأشعة في الفراغ العادي ومجموعة الثلاثيات المرتبة من الأعداد الحقيقية . ولذا جرت العادة أن نرمز لكل شعاع من هذا النوع بثلاثية مرتبة تمثل احداثيات (مركبات) هذا الشعاع أي :

$$\vec{a} = (x , y , z)$$

يعرف ناتج جمع الشعاعين $\vec{a_1} = (x_1 , y_1 , z_1)$ و $\vec{a_2} = (x_2 , y_2 , z_1)$ بالشكل التالي :

$$\vec{a_1} + \vec{a_2} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2)$$

نرى أن ناتج هذه العملية هي ثلاثية مرتبة من الأعداد الحقيقية فهي شعاع من الفراغ العادي . وهذا يعني أن عملية جمع الأشعة عملية داخلية .

ينتج عن التعريف السابق أن عملية الجمع تبديلية وقابلة للدمج

(تجميعية) ولها عنصر محايد هو الشعاع $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

ولكل شعاع من الشكل $\vec{a} = (x, y, z)$ نظير هو الشعاع $\vec{a'} = (-x, -y, -z)$ ونرمز للأخير عادة بالشكل $-\vec{a} = (-x, -y, -z)$.

يمكننا بعد ما تقدم أن نقول إن لمجموعة الأشعة في الفراغ العادي بنية زمرة جمعية تبديلية V .

يعرف حاصل ضرب شعاع $\vec{a} = (x, y, z)$ بعدد حقيقي λ على أنه الشعاع :

$$\vec{c} = \lambda . \vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

إن عملية الضرب هذه عملية خارجية تتمتع بالخواص التالية والتي تصح مهما كان λ, μ من R و $\vec{b}, \vec{a}$ من V :

$$\lambda . (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda . \vec{a} + \lambda . \vec{b}$$

$$(\lambda + \mu) . \vec{a} = \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{a}$$

$$\lambda . (\mu . \vec{a}) = (\lambda . \mu) . \vec{a}$$

$$1 . \vec{a} = \vec{a}$$

نلخص ما قدمنا من خواص بقولنا ان لمجموعة الأشعة في الفراغ العادي بنية فراغ شعاعي .

إن مجموعة الأشعة في الفراغ العادي لا تنفرد وحدها بهذه الخواص المتعلقة بعمليتي الجمع والضرب الواردتين سابقاً ، بل تشترك معها في هذه الخواص كثير من البنى الرياضية . وبما أنه لا تهمنا طبيعة الأشعة نفسها

بقدر مانهمنا الخواص المعينة التي تتمتع بها هاتان العمليتان ، لذا سنعطي فيما يلي تعريفاً عاماً للفراغ الشعاعي يشمل الحالة الخاصة المذكورة سابقاً .

٢ ـ ٥ الفراغ الشعاعي :

إذا عرفنا على المجموعة V عمليتين الأولى داخلية ورمزنا لها بـ + والثانية خارجية ورمزنا لها بـ . وكانت مجموعة مؤثراتها حقلاً تبديلياً F ، فإننا نسمي البنية (V ، + ، .) فراغاً شعاعياً إذا تحققت الشروط التالية :

١ ـ (+ ، V) زمرة تبديلية ، أي مهما كانت $a , b , c \in V$ فإن :

ج١ : $a + b \in V$

ج٢ : $a + b = b + a$

ج٣ : $a + (b + c) = (a + b) + c$

ج٤ : يوجد عنصر $\mathbf{0} \in V$ بحيث

$$a + \mathbf{0} = a$$

ج٥ : لكل عنصر a نظيراً $-a$ أي :

$$a + (- a) = \mathbf{0}$$

٢ ـ عملية الضرب تتمتع بالخواص التالية :

ض١ : يقابل كل عنصر α من F وكل عنصر a من V عنصر جديد نرمز له بـ $\alpha . a$ أو αa بحيث يكون :

ض٢ : $(\alpha \beta) a = \alpha (\beta \alpha)$

ض٣ : $\alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b$

ض٤ : $(\alpha + \beta)\, a = \alpha\, a + \beta\, a$

ض٥ : $1\, a = a$

لقد رمزنا لعناصر V بحروف لاتينية نسمي كل منها شعاعاً ومثلنا عناصر الحقل F بحروف يونانية نسميها مقادير سلمية وحيث 1 هو العنصر الحايد للضرب المعرف على F .

٣ ـ ٥ أمثلة :

(١) ـ ليكن F حقلاً تبديلياً و n عدداً صحيحاً موجباً و $V_n(F)$ المجموعة التي يتكون كل عنصر منها من n عنصراً من F وفق ترتيب معين مثل :

$$a = (\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n) \;,\; \alpha_i \in F\, (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

لنعرف على $V_n(F)$ عملية الجمع بالشكل :

$$\begin{aligned} a + b &= (\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n) + (\beta_1 , \beta_2 , \ldots , \beta_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 , \alpha_2 + \beta_2 , \ldots , \alpha_n + \beta_n) \qquad (1) \end{aligned}$$

ونعرف عملية الضرب بعنصر من F بالشكل :

$$\lambda\, a = (\lambda\, \alpha_1 , \lambda\, \alpha_2 , \ldots , \lambda\, \alpha_n) \qquad (2)$$

ولنبرهن أن $V_n(F)$ تمثل فراغاً شعاعياً على الحقل F .

من الواضح أنه مهما كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ من $V_n(F)$ فإن $\vec{a} + \vec{b}$ هو عنصر من $V_n(F)$.

إن :
$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1 , \ldots , \alpha_n + \beta_n)$$

$$\vec{b} + \vec{a} = (\beta_1 + \alpha_1 , \ldots , \beta_n + \alpha_n)$$

ولكن بما أن α_i و β_i عناصر من الحقل F وعملية الجمع في هذا الحقل تبديلية فإن :

$$\alpha_i + \beta_i = \beta_i + \alpha_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

وبالتالي نجد : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

وبطريقة مماثلة نتحقق من أن العنصر :

$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

هو العنصر المحايد بالنسبة للجمع . وأن لكل عنصر $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ نظيراً هو $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

ويمكن أن نتحقق بسهولة (بالاعتماد على كون F حقلاً) أن عملية ضرب شعاع من $V_n(F)$ بعنصر من F المعرفة وفق (2) تحقق المبادىء الخمسة ض١ ـ ض٥ وبذلك يثبت المطلوب .

(٢) ـ لتكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين المتجانستين :

$$\begin{aligned} a x + b y &= 0 \\ c x + d y &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

في المجهولين x , y ، وحيث a , b , c , d أعداد حقيقية تحقق العلاقة $ad = bc$ (١) . لنكتب كل حل للجملة (3) على شكل زوج مرتب (x, y) تمثل المركبة الأولى فيه قيمة x والمركبة الثانية قيمة y .

---

(١) إن لهذه الجملة عدد غير منته من الحلول لأن معين أمثالها يساوي الصفر .

ولنعرف مجموع حلين بالشكل :

$$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

ونعرف حاصل ضرب حل بعدد حقيقي λ بالشكل :

$$\lambda (x , y) = (\lambda x , \lambda y) \quad , \quad \forall \lambda \in R$$

ولنبرهن أن مجموعة حلول الجملة (3) تشكل فراغاً شعاعياً .

من الواضح أن مجموع حلين هو حل لأنه (بالاعتماد على الخواص التوزيعية والتبديلية والتجميعية لحقل الأعداد R) يكون :

$$a (x_1 + x_2) + b (y_1 + y_2) = (a x_1 + b y_1) + (a x_2 + b y_2) = 0$$

$$c (x_1 + x_2) + d (y_1 + y_2) = (c x_1 + d y_1) + (c x_2 + d y_2) = 0$$

وإذا كان (x , y) حلًا فإن ($\lambda x , \lambda y$) حل كذلك ، لأنه حسب خواص الحقل R بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب :

$$a (\lambda x) + b (\lambda y) = \lambda (a x + b y) = \lambda (0) = 0$$

$$c (\lambda x) + d (\lambda y) = \lambda (c x + d y) = \lambda (0) = 0$$

وبالعودة إلى تعريف الفراغ الشعاعي نجد أن مجموعة الحل هـذه تمثل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي فراغاً شعاعياً .

ملاحظة : من المعلوم أنه إذا كان $ad \neq bc$ فالجملة المفروضة حل وحيد هو (0,0) والفراغ الشعاعي يتكون من عنصر واحد .

(٣) ـ لتكن V(R) مجموعة الأزواج المرتبة :

$$V = \{ (a , b) \ : \ a , b \in R\}$$

ولنبرهن أن $V(R)$ لا تمثل فراغاً شعاعياً على الحقل R إذا عرفنا عمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي وفق :

$$(a , b) + (c , d) = (a , b)$$

$$\lambda (a , b) = (\lambda a , \lambda b)$$

من الواضح أن :

$$(a , b) + (c , d) = (a , b)$$

$$(c , d) + (a , b) = (c , d)$$

فالخاصة التبديلية ج٢ غير محققة .

(٤) - لنفرض أن $U(F)$, $V(F)$ فراغان شعاعيان على حقل F .

لنفرض $W(F)$ مجموعة الأزواج (u , v) حيث $u \in U$ و $v \in V$.

لنعرف العملية + بالقاعدة :

$$(u , v) + (u' , v') = (u + u' , v + v')$$

ونعرف عملية الضرب بعنصر من F بالقاعدة :

$$\lambda (u , v) = (\lambda u , \lambda v) \quad , \quad \forall \lambda \in F$$

ولنبرهن أن $W(F)$ تمثل فراغاً شعاعياً على الحقل F . نسمي $W(F)$ المجموع المباشر لـ $U(F)$, $V(F)$ ونرمز له أحياناً بـ $U \dot{+} V$.

وفي الحقيقة :

١ - إن حاصل جمع شعاعين من $W(F)$ هو حسب التعريف شعاع من W .

٢ - إن الجمع المعرف على $W(F)$ تجميعي ويمكن برهان ذلك بسهولة

انطلاقاً من التعريف واستناداً إلى كون عمليتي الجمع المعرفتين على U(F) و V(F) تجميعيتين .

٣ ـ إن الجمع المعرف على W(F) تبديلي لأن عمليتي الجمع المعرفتين على U(F) , V(F) تبديليتان :

$$\begin{aligned}(u , v) + (u' , v') &= (u + u' , v + v') \\ &= (u' + u , v' + v) \\ &= (u' , v') + (u , v)\end{aligned}$$

٤ ـ إن العنصر (0 , 0) هو عنصر محايد لأن :

$$(u , v) + (0 , 0) = (u + 0 , v + 0) = (u , v)$$

٥ ـ العنصر النظير لـ (u , v) هو (−u , −v) حيث −u نظير u في الفراغ U , −v هو نظير v في الفراغ V .

٦ ـ إن جداء كل عنصر من W بعنصر من F هو عنصر من W كما ورد في مقدمة هذا المثال .

٧ ـ $\forall \lambda , \mu \in F$ فإن :

$$(\lambda \mu) (u , v) = (\lambda \mu u , \lambda \mu v)$$

$$\lambda (\mu (u , v)) = \lambda (\mu u , \mu v) = (\lambda \mu u , \lambda \mu v)$$

إذن :

$$(\lambda \mu) (u , v) = \lambda (\mu (u , v))$$

٨ ـ $\forall \lambda \in F$ فإن :

$$\lambda [(u , v) + (u' , v')] = \lambda (u + u' , v + v')$$

$$= (\lambda u + \lambda u', \lambda v + \lambda v')$$

$$= \lambda (u, v) + \lambda (u', v')$$

٩ - $\forall \lambda, \mu \in F$ فإن :

$$(\lambda + \mu)(u, v) = ((\lambda + \mu) u, (\lambda + \mu) v)$$

$$= (\lambda u + \mu u, \lambda v + \mu v)$$

$$= \lambda (u, v) + \mu (u, v)$$

١٠ - ومن الواضح أخيراً أن :

$$1 (u, v) = (u, v)$$

وبذلك يتم المطلوب .

٤ - ٥ نظرية : إذا كان V فراغاً شعاعياً على الحقل F فإن :

(١) $0 . \vec{u} = \vec{0} \quad , \quad 0 \in F \quad , \quad \vec{0} \in V \quad , \quad \forall \vec{u} \in V$

(٢) $\alpha . \vec{0} = \vec{0} \quad , \forall \alpha \in F$

(٣) $(-\alpha) . \vec{u} = \alpha . (-\vec{u}) = -(\alpha . \vec{u}) , \forall \alpha \in F , \forall \vec{u} \in V$

(٤) $\alpha . (\vec{u_1} + \vec{u_2} + \ldots + \vec{u_n}) = \alpha . \vec{u_1} + \alpha . \vec{u_2} + \ldots + \alpha . \vec{u_n}$

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) . \vec{u} = \alpha_1 . \vec{u} + \ldots + \alpha_m \vec{u}$$

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F \quad , \quad \forall \vec{u}, \vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n} \in V$$

البرهان : (١) لما كان $0 + 1 = 1$ في F فإنه حسب ض٤ و ض٥ من [٢ - ٥] :

$$\vec{u} = 1 . \vec{u} = (1+0) . \vec{u} = 1 . \vec{u} + 0 . \vec{u}$$

$$= \vec{u} + 0 . \vec{u}$$

وبما أن الجمع قابل للاختصار نجد : $0 . \vec{u} = \vec{0}$

٢ ـ لما كان (حسب ج٤ من [٢ - ٥]) . $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

نجد حسب ض٣ من [٢ - ٥] أن :

$$\alpha . \vec{u} = \alpha . (\vec{u} + \vec{0}) = \alpha . \vec{u} + \alpha . \vec{0}$$

ومنه نجد أن : $\alpha \ \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \alpha \in F$

(٣) نعلم أن : $\alpha + (-\alpha) = 0$

وبالتالي : $(\alpha + (-\alpha)) . \vec{u} = 0 . \vec{u} = \vec{0}$

وحسب ض٤ من [٢ - ٥] يكون :

$$\alpha . \vec{u} + (-\alpha) . \vec{u} = \vec{0}$$

وبما أن النظير وحيد يكون : $(-\alpha) \vec{u} = -(\alpha . \vec{u})$

ويتم برهان $\alpha . (-\vec{u}) = -(\alpha . \vec{u})$ بشكل مماثل .

(٤) يمكن برهان الجزء الأول اعتماداً على ض٣ والجزء الثاني اعتماداً على ض٤ من [٢ - ٥] بطريقة التراجع وهو المطلوب .

٥ ـ ٥ نتيجة : إذا كان $\alpha . \vec{u} = \vec{0}$ فإن $\alpha = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$ لأنه إذا كان $\alpha \neq 0$ فإن لـ α مقلوباً α^{-1} ويكون :

$$\alpha^{-1} . (\alpha . \vec{u}) = \alpha^{-1} . (\vec{0}) = \vec{0}$$

ولكن حسب ض٢ و ض٥ من [٢ - ٥] نجد :

$$\alpha^{-1}.(\alpha.\vec{u}) = (\alpha^{-1}.\alpha).\vec{u} = 1.\vec{u} = \vec{u} \quad \text{ومنه} \quad \vec{u} = \vec{0}$$

الفراغات الشعاعية الجزئية :

٦ - ٥ **تعريف** إذا كان V فراغاً شعاعياً على الحقل التبديلي F وإذا كانت U مجموعة جزئية من V غير خالية فإننا ندعو U فراغاً شعاعياً جزئياً من V إذا كانت U هي بحد ذاتها فراغاً شعاعياً على F بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بعنصر من F المعرفتين على V .

ومن هذا ينتج أنه إذا كان $\vec{u}, \vec{v}$ شعاعين من U , λ عنصراً من F فإنه يلزم أن يكون كل من $\vec{u}+\vec{v}$ و $\lambda\vec{u}$ من U . وبعبارة مختصرة إن عمليتي الجمع والضرب بعنصر من F مغلقتان (مستقرتان) في U . والعكس صحيح كما يتضح من النظرية التالية :

٧ -٥ **نظرية** : يكفي لكي تكون U المجموعة الجزئية غير الخالية من الفراغ الشعاعي V على الحقل التبديلي F فراغاً شعاعياً جزئياً على F أن تكون عمليتا الجمع والضرب بعنصر من F مغلقتين في U .

البرهان : من الواضح أن الخاصة ج١ من [٢ - ٥] محققة لأن عملية الجمع مغلقة في U كما أن الخاصتين ج٢ و ج٣ محققتان في U لأنهما محققتان في V . وإذا كان $\vec{u} \in U$ فإن $(-1)\vec{u} \in U$ لأن $-1 \in F$. ولكن $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ وهذا يعني أن لكل عنصر $\vec{u}$ من U نظيراً $-\vec{u}$

من U كذلك . وبالتالي فإن ج٥ محققة . وبما أن $\vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}$ فإن $U \ni \vec{0}$ والخاصة ج٤ محققة . ثم إن الخواص ض١ ـ ض٥ محققة في U لأنها صحيحة في V . وهكذا نجد أن U فراغ شعاعي على F فهو فراغ شعائي جزئي من V وهو المطلوب .

٨ ـ ٥ أمثـــلة :

(١) ـ ليكن لدينا الفراغ الشعاعي $V_3(F)$ الذي يتكون كل شعاع فيه من ثلاثية مرتبة من F أي :

$$V_3(F) = \left\{ \vec{a} = (\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3) \; : \; \begin{array}{l} \alpha_i \in F \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$$

إن جميع عناصر هذا الفراغ ذات الشكل :

$$(\alpha_1 , \alpha_2 , 0)$$

تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً U من $V_3(F)$ لأن U ، كما هو واضح ليست مجموعة خالية ، كما أنه إذا كان : $\vec{a} = (\alpha_1 , \alpha_2 , 0)$ و $\vec{b} = (\beta_1 , \beta_2 , 0)$ عنصرين كيفيين من U فإن مجموعهما :

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1 , \alpha_2 + \beta_2 , 0)$$

من U أيضاً . كما أنه $\forall \lambda \in F$ فإن :

$$\lambda . \vec{a} = (\lambda \alpha_1 , \lambda \alpha_2 , 0)$$

من U كذلك وهو المطلوب .

وتشكل جميع الأشعة $(\alpha, 0, 0)$ من $V_3(F)$ فراغاً جزئياً W من U ومن $V_3(F)$.

(٢) ـ إن المجموعة الجزئية U من $V_3(F)$ التي تتكون من العناصر ذات الشكل :

$$(x, y, z) \quad , \quad x, y, z \in Q$$

لا تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً لأنه إذا كان α عنصراً من R فإن :

$$\alpha (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

لا ينتمي إلى U عندما يكون α عدداً غير عادي لأن حاصل ضرب عدد غير عادي بعدد عادي هو غير عادي

(٣) ـ إن المجموعة الجزئية U من $V_3(R)$ التي تتكون من العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha, 2\alpha, \alpha + 1) \quad , \quad \alpha \in R$$

لا تشكل فراغاً جزئياً لأن مجموع عنصرين من U :

$$(\alpha, 2\alpha, \alpha + 1) + (\beta, 2\beta, \beta + 1) =$$
$$= (\alpha + \beta, 2(\alpha + \beta), \alpha + \beta + 2)$$

ليس عنصراً من U فالمركبة الثالثة تزيد 2 عن المركبة الأولى في حين يلزم أن تزيد 1 فقط .

٩ - ٥ نظرية : ليكن V فراغا شـــعاعيا على الحقل F ولتكن $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ جملة مكونة من m عنصراً معينا من الفراغ الشعاعي V

$(m > 0)$. إن المجموعة U المكونة من جميع العناصر :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{u}_m$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ عناصر كيفية من F ، تمثل فراغا شعاعيا جزئياً من V (ندعوه الفراغ المولد من الأشعة $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$) .

البرهان : من الواضح أن U ليست خالية فالعنصر $\vec{u}_1$ ينتمي لها، ثم أن :

$$(\alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{u}_m) + (\beta_1 \vec{u}_1 + \ldots + \beta_m \vec{u}_m) =$$
$$((\alpha_1 + \beta_1) \vec{u}_1 + \ldots + (\alpha_m + \beta_m) \vec{u}_m)$$

$$\lambda (\alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{u}_m) = (\lambda \alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \lambda \alpha_m \vec{u}_m)$$
$$\forall \lambda, \alpha_i, \beta_i \in F \quad , \quad (i, j = 1, \ldots, m)$$

يتضح مما سبق أن ناتج جمع عنصرين من U هو عنصر من U وناتج ضرب عنصر من U بعنصر من F هو عنصر من U وهذا يكفي وفق [٥ - ٧] .

سنرمز للفراغ المولد من الأشعة $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ بالشكل $[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m]$.

الاستقلال الخطي :

١٠ - ٥ **تعريف** نقول عن جملة الأشعة $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ من الفراغ V(F) أنها مرتبطة خطياً إذا وجدت في F عناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ليست جميعها معدومة بحيث يكون :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{u}_m = \vec{0}$$

أما إذا كان :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{u}_m = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

فإننا نقول إن هذه الأشعة مستقلة خطياً .

١١ - ٥ أمثلة :

(١) لتكن لدينا مجموعة الأشعة :

$$\vec{u}_1 = (2, 5, -6) \quad , \quad \vec{u}_2 = (1, 0, 2) \quad , \quad \vec{u}_3 = (-1, -2, 2)$$

من $V_3(R)$. إن هذه الأشعة مرتبطة خطياً لأن :

$$2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 5\vec{u}_3 = \vec{0}$$

في حين أن الشعاعين :

$$\vec{u}_1 = (1, 5) \quad , \quad \vec{u}_2 = (2, 3)$$

من $V_2(R)$ مستقلان خطياً لأن :

$$\alpha_1 (1, 5) + \alpha_2 (2, 3) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

وذلك لأنه يلزم ليكون هذان الشعاعان مستقلين خطياً :

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \quad , \quad 5\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$$

وليس لهاتين المعادلتين سوى الحل $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

(٢) إن كل جملة أشعة $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ من فراغ $V(F)$ مرتبطة خطياً

إذا كان أحدها هو الشعاع الصفري لأنه إذا كان $\vec{u}_1$ هذا الشعاع (إذا لم يكن $\vec{u}_1$ الشعاع الصفري فإننا نغير ترقيم الأشعة بحيث نجعل الشعاع الصفري هو الشعاع الأول) فإن :

$$1\,\vec{u}_1 + 0\,\vec{u}_2 + \ldots + 0\,\vec{u}_m = \vec{0}$$

وهذا يعني أن العناصر $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ التي ذكرناها في التعريف [١٠ - ٥] ليست معدومة جميعاً وهو المطلوب .

(٣) إذا كانت جملة الأشعة من $V(F)$ مكونة من شعاع واحد $\vec{u}$ غير الشعاعي الصفري فهي مســتقلة خطياً لأن $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}$ يقتضي وفق [٥ - ٥] أن يكون $\alpha = 0$.

١٢ - ٥ **ملاحظة** : لنفرض أن الأشعة $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ من $V(F)$ مرتبطة خطياً فعندئذ يوجد في F عناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ليست معدومة جميعاً بحيث يكون :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{u}_m = \vec{0}$$

لنفرض أن $\alpha_1 \neq 0$ مثلاً ، عندئذ يمكننا أن نضرب هـــذه المعادلة بـ α_1^{-1} فنجد :

$$\vec{u}_1 = -(\alpha_1^{-1}\alpha_2 \vec{u}_2 + \ldots + \alpha_1^{-1}\alpha_m \vec{u}_m)$$

وهكذا نجد أنه يلزم ويكفي لتكون جملة أشعة من الفراغ $V(F)$ مرتبطة خطياً أن نتمكن من التعبير عن أحدها بدلالة تركيب خطي من الأشعة المتبقية بأمثال من F .

١٣ - ٥ تعريف : نقول عن شعاع $\vec{w}$ من الفراغ $V(F)$ إنه مرتبط خطياً بالأشعة $\vec{u}_m , \dots , \vec{u}_1$ من الفراغ ذاته إذا أمكن كتابته على شكل تركيب خطي من هذه الأشعة بأمثال من F .

١٤ - ٥ نظرية : (١) إذا كانت جملة من الأشعة $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_m$ من فراغ شعاعي $V(F)$ مستقلة خطياً فإن أي مجموعة جزئية منها غير خالية مستقلة خطياً .

(٢) إذا كانت $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_m$ عناصر مستقلة خطياً من فراغ شعاعي $V(F)$ فعندئذ :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_m \vec{u}_m = \beta_1 \vec{u}_1 + \dots + \beta_m \vec{u}_m \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$$
$$(i = 1 , \dots , m)$$

(٣) إذا كانت : $\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \dots , \vec{u}_m \in V(F)$, $\beta_2 , \dots , \beta_m \in F$ بحيث تكون الأشعة :

$$\vec{u}_2 + \beta_2 \vec{u}_1 \; , \; \vec{u}_3 + \beta_3 \vec{u}_1 \; , \; \dots \; , \; \vec{u}_m + \beta_m \vec{u}_1$$

مرتبطة خطياً فعندئذ تكون الأشعة $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_m$ مرتبطة خطياً .

البرهان :

(١) لنفرض جدلاً أن مجموعة جزئية من $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_m$ مرتبطة خطياً ، ولتكن للتوضيح ، $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_r \; (1 \leqslant r < m)$ هذه المجموعة . عندئذ نتمكن من إيجاد العناصر $\alpha_1 , \dots , \alpha_r$ من F (ليست معدومة جميعاً) بحيث يكون : $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r = \vec{0}$.

فنجد عندئذ أن :

$$\alpha_1 \vec{u} + \ldots + \alpha_r \vec{u_r} + 0\ \vec{u}_{r+1} + \ldots + 0\ \vec{u_m} = \vec{0}$$

وهذا يعني أن جملة الأشعة $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_m}$ مرتبطة خطياً وهذا مخالف للفرض وهو المطلوب .

(٢) يمكن كتابة المساواة المذكورة بالشكل :

$$\alpha_1 \vec{u_1} + \ldots + \alpha_m \vec{u_m} - (\beta_1 \vec{u_1} + \ldots + \beta_m \vec{u_m}) = \vec{0}$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{u_1} + \ldots + (\alpha_m - \beta_m) \vec{u_m} = \vec{0}$$

وبما أن $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_m}$ مستقلة خطياً فان :

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad , \quad i = 1, \ldots, m$$

وهو المطلوب .

(٣) بما أن الأشعة المذكورة مرتبطة خطياً فإنه توجد في F عناصر $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ليست معدومة جميعاً بحيث يكون :

$$\alpha_2 (\vec{u_2} + \beta_2 \vec{u_1}) + \ldots + \alpha_m (\vec{u_m} + \beta_m \vec{u_1}) = \vec{0}$$

ومنه :

$$(\alpha_2 \beta_2 + \ldots + \alpha_m \beta_m) \vec{u_1} + \alpha_2 \vec{u_2} + \ldots \alpha_m \vec{u_m} = \vec{0}$$

وهذا يعني أن الأشعة $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_m}$ مرتبطة خطياً وذلك لأن عوامل هذا التركيب ليست كلها معدومة نتيجة لما فرضناه .

١٥ - ٥ نتيجة : إذا كانت الأشعة $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_m}$ من فراغ شعاعي

$V(F)$ مرتبطة خطياً فإن كل مجموعة $\vec{u}, \vec{u}_m, \ldots, \vec{u}_1$ مهما كان $\vec{u}$ من $V(F)$ مرتبطة خطياً . لأنه لو كانت هـــذه الأشعة مستقلة خطياً فإن $u_m, \ldots, u_1$ تكون وفق (١) من [٥ - ١٤] مستقلة خطياً وهـــذا مخالف للفرض .

١٦ ـ ٥ **تعريف** : نقول عن جملة أشعة من $V(F)$ عددها غير منته إنها مرتبطة خطياً فيما إذا حوت مجموعة جزئية منتهية مرتبطة خطياً . أما إذا كانت كل مجموعة جزئية منتهية مكونة من عناصر تقع في جملة الأشعة المفروضة مستقلة خطياً ، فاننا نقول إن هذه الجملة مستقلة خطياً .

أبعاد الفراغات الشعاعية :

١٧ ـ ٥ **تعريف** : نقول إن الفراغ الشـــعاعي V ذو n بعـداً $(n \geqslant 0)$ ونكتب $\dim V = n$ إذا وجد في V مجموعـــة مكونة من n شعاعاً مستقلة خطياً وإذا كانت كل مجموعة مكونة من أكثر من n شعاعاً مرتبطة خطياً .

أما إذا احتوى V مجموعة مستقلة خطياً مكونة من عدد غير منته من الأشعة فإن $\dim V = \infty$. وإذا كان $\dim V = 0$ فإن هذا يعني أن V يتكون من العنصر الصفري .

١٨ ـ ٥ **مثال** : إن $V_1(F)$ الذي يتكون من جميع الأشـــعة ذات الشكل :

$$(\alpha) \quad , \quad \alpha \in F$$

هو فراغ شعاعي وحيد البعد لأن المجموعة المكونة من الشعاع الوحيد (1) مستقلة خطياً (كل مجموعة مكونة من شعاع وحيد غير الشعاع الصفري مستقلة خطياً وفق (٣) [١١ - ٥] . ثم إن كل شعاعين من $V_1(F)$ مثل (α) و (β) مرتبطان خطياً . ولبرهان ذلك نلاحظ أنه إذا لم يكن أحد الشعاعين الشعاع الصفري فإننا نستطيع أن نكتب، بعد أن نذكر أن الحقل F تبديلي : $\beta\,(\alpha) - \alpha\,(\beta) = o$

وهذا يدل على الارتباط الخطي وهو المطلوب .

١٩ - ٥ **نظرية** : إذا كانت $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m$ أشعة من فراغ شعاعي $V(F)$ فان أية مجموعة مكونة من $m + 1$ شعاعاً من الفراغ الشعاعي الجزئي $[\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m]$ من V مرتبطة خطياً .

البرهان : إذا كان $m = 1$ فاننا نحتاج أن نبرهن أن أي شعاعين من $[\vec{u}_1]$ مرتبطان خطياً .

ليكن : $\vec{v}_1 = \alpha\,\vec{u}_1 \quad , \quad \vec{v}_2 = \beta\,\vec{u}_1 \quad , \quad \alpha , \beta \in F$

شعاعين من $[\vec{u}_1]$. فإذا كان $\alpha = 0$ فعندئذ يكون $\vec{v}_1 = 0$ والشعاعان مرتبطان خطياً وفق (٢) من [١١ - ٥] . أما إذا كان $\alpha \neq 0$ فانه استناداً إلى كون F تبديلي :

$$- \beta\,\vec{v}_1 + \alpha\,\vec{v}_2 = 0$$

مما يدل على الارتباط الخطي .

وعلى هذا يكفي أن نفرض أن النظرية صحيحة من أجل $m = k$ ونبرهن صحتها من أجل $m = k + 1$. لتكن : $\vec{v}_1 , \ldots , \vec{v}_{k+2}$ مجموعة

أشعة من $[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k+1}]$ عندئذ يمكننا أن نكتب :

$$\vec{v}_1 = \alpha_{1,1}\vec{u}_1 + \ldots + \alpha_{1,k+1}\vec{u}_{k+1}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (1)$$

$$\vec{v}_{k+2} = \alpha_{k+2,1}\vec{u}_1 + \ldots + \alpha_{k+2,k+1}\vec{u}_{k+1}$$

حيث :

$$j = 1, \ldots, k+1 \quad , \quad i = 1, \ldots, k+2 \quad , \quad \alpha_{i,j} \in F$$

فاذا كانت أمثال $\vec{u}_1$ في هذه المعادلات مساوية للصفر جميعاً فعندئذ تكون الأشعة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k+1}$ مولدة من k شعاعاً فقط $\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{k+1}$ فهي مرتبطـة خطياً لأن النظرية صحيحة من أجل $m = k$ كما افترضنا . وتكون بالتـــالي الأشعة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k+2}$ استناداً إلى [١٥ – ٥] مرتبطة خطياً .

أما إذا لم تكن جميع أمثال u_1 معدومـة ولنفرض على سبيل المثال $\alpha_{1,1}$ غير معدوم فعندئذ يكون :

$$\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \alpha_{1,1}^{-1}\alpha_{1,2}\vec{u}_2 + \ldots + \alpha_{1,1}^{-1}\alpha_{1,k+1}\vec{u}_{k+1}$$

وبالاستفادة من المعادلة الثانية من (١) نجد أن $\vec{v}_2 - \alpha_{2,1}\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1$ تركيب خطي من $\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{k+1}$ أي أنه عنصر من $[\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{k+1}]$ وهكذا بالطريقة ذاتها نجد أن جميع الأشعة :

$$\vec{v}_2 - \alpha_{2,1}\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1 \quad , \quad \vec{v}_3 - \alpha_{3,1}\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1 \quad , \quad \ldots \quad ,$$
$$\vec{v}_{k+2} - \alpha_{k+2,1}\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1$$

عناصر من $[\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{k+1}]$ فهي مرتبطـة خطياً وفق فرضنا أن

النظرية صحيحة من أجل $m = k$. وبالعودة إلى (٣) من [١٤ - ٥] نجد أن الأشعة $\vec{v}_1 , \ldots , \vec{v}_{k+2}$ مرتبطة خطياً وهو المطلوب .

نتـــائج :

٢٠ - ٥ إن $\dim V_n(F) = n$.

البرهان : إن $V_n(F)$ يتكون من جميع الأشعة ذات الشكل :

$$(\alpha_1 , \ldots , \alpha_n) \quad , \quad \alpha_i \in F \quad , \quad i = 1 , \ldots , n$$

ولكن الأشعة :

$$\vec{u}_1 = (1 , 0 , \ldots , 0) \; ; \; \vec{u}_2 = (0 , 1 , \ldots , 0) \; , \; \vec{u}_n = (0 , 0 , \ldots , 1)$$

مستقلة خطياً كما يتضح بسهولة :

$$\beta_1 (1 , 0 , \ldots , 0) + \beta_2 (0 , 1 , 0 , \ldots , 0) + \ldots + \beta_n (0 , 0 , \ldots , 1) = 0$$

تؤدي إلى كون : $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$

وبما أن كل شعاع من $V_n(F)$ يكتب بالشكل :

$$(\alpha_1 , \ldots , \alpha_n) = \alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{u}_n$$

أي أن $V_n(F)$ هو الفواغ المولد $[\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_n]$ وبالتالي استناداً إلى [١٩ - ٥] يكون كل $m + 1$ شعاعا من $V_n(F)$ مرتبطة خطيا وهو المطلوب .

٢١ - ٥ إذا كانت $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m$ عناصر من فراغ شعاعي V على حقل F . وإذا كان U فراغاً شعاعياً جزئياً من V مولداً من هـــذه الأشعة فان $\dim U \leqslant m$. ثم أنه يلزم ويكفي كي يكون $\dim U = m$

هو أن تكون الأشعة المذكورة مستقلة خطياً .

البرهان : بما أن كل $m+1$ شعاعاً من الفراغ المولد المذكور مرتبطة خطياً استناداً إلى [١٨ - ٥] فان عدد أبعاد هذا الفراغ أقل من $m+1$ حتماً ، أي أصغر أو يساوي m .

وإذا كانت الأشعة $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ مستقلة خطياً فعندئذ يكون وفق التعريف [١٦ - ٥] $\dim U = m$. أما إذا كانت الأشعة $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ مرتبطة خطياً فعندئذ يمكن التعبير عن أحدها بدلالة البقية . ومن هذا ينتج أن U يمكن أن يتولد من $m-1$ شعاعاً وبالتالي $\dim U \leqslant m-1 < m$ وهو المطلوب .

قاعدة (أساس) فراغ شعاعي :

٢١ - ٥ **تعريف** : إذا كان V فراغاً شعاعياً على الحقل F . وإذا كان $\dim V = n$ حيث n عدد محدود ، فاننا نسمي كل مجموعة مرتبة من الأشعة المستقلة خطياً $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n$ من V قاعدة (أساساً) لهذا الفراغ ونرمز لهذه القاعدة اختصاراً بـ $\{\vec{v}_i\}, i = 1, \ldots n$.

٢٢ - ٥ **نتيجة** : إذا كانت $\{\vec{v}_i\}$ قاعدة في فراغ شعاعي $V(F)$ فان كل شعاع $\vec{x}$ من V هو تركيب خطي من $\{\vec{v}_i\}$. وهذا واضح لأن الأشعة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{x}$ مرتبطة خطياً (إن $\dim V = n$) وبالتالي نستطيع أن نجد العناصر $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ من F التي ليست جميعها أصفاراً بحيث يكون :

$$\beta_0 \vec{x} + \beta_1 \vec{v}_1 + \ldots + \beta_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

إن $\beta_0 \neq 0$ وإلا لكانت الأشعة $\vec{v}_i \; (i = 1 , \ldots , n)$ مرتبطة خطياً وهذا يخالف الفرض ، وعلى هذا نجد أن :

$$(1) \qquad \vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n \quad (\alpha_i = - \beta_0^{-1} . \beta_i)$$

يمكن أن نرى بسهولة أن الصيغة الاخيرة في كتابة الشعاع $\vec{x}$ على شكل تركيب خطي في أشعة القاعدة وحيدة بالاستناد إلى (٢) من [١٣ – ٥] .

٢٣ ـ ٥ **تعريف** : نسمي الاعداد $\alpha_i \; (i = 1 , \ldots , n)$ الواردة في المساواة (١) من [٢٢ – ٥] مركبات الشعاع $\vec{x}$ في القاعدة $\{ \vec{v}_i \}$ للفراغ الشعاعي V .

٢٤ ـ ٥ **مثال** : تمثل مجموعة الاشعة :

$$(1) \qquad (1 , 0 , \ldots , 0) \quad , \quad (0 , 1 , \ldots , 0) , \ldots , (0 , 0 , \ldots , 1)$$

في الفراغ $V_n(F)$ قاعدة لان $\dim V_n(F) = n$ ولان هذه الاشعة مستقلة خطياً . وبما أن كل شعاع $(\alpha_1 , \ldots , \alpha_n)$ من $V_n(F)$ يكتب بالشكل :

$$\alpha_1 (1 , 0 , \ldots , 0) + \alpha_2 (0 , 1 , \ldots , 0) + \ldots + \alpha_n (0 , 0 , \ldots , 1)$$

فان مركبات هذا الشعاع بالنسبة للقاعدة هذه هي $\alpha_1 , \ldots , \alpha_n$.

نسمي القاعدة (1) القاعدة الطبيعية أو القانونية في $V_n(F)$.

٢٥ ـ ٥ **نظرية** : إذا كان لدينا في فراغ شعاعي $V(F)$ عدد أبعاده n , m شعاعاً مستقلاً خطياً :

$$\vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \ldots , \vec{v}_m \quad (1 \leqslant m < n)$$

فانه يوجد $m - n$ شعاعاً آخر في V مستقلاً خطياً :

$$\vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_n$$

وتجعل من $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ قاعدة في $V(F)$.

البرهان : بما أن $m < n$ فإنه يوجد في V شعاع واحد على الأقل $\vec{v}_{m+1}$ لا ينتمي إلى $[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m]$ وإلا لكان $\dim V = m < n$ ومن الواضح أن الأشعة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m+1}$ مستقلة خطياً . وإذا كان $m + 1 = n$ تم المطلوب وإلا ، أي إذا كان $m + 1 < n$ ، فعندئذ يمكننا أن نجد كذلك في V شعاعاً آخر $\vec{v}_{m+2}$ لاينتمي إلى $[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m+1}]$ وهكذا .

٢٦ - ٥ أثر تغيير القاعـــدة على مركبات شعاع $\vec{x}$: إذا كانت $\{\vec{v}_i\}$ و $\{\vec{v}_i'\}$ قاعدتين مختلفتين لفراغ شعاعي V ذي n بعداً (n عدد محدود) فإنه يمكننا وفق [٢٢ - ٥] أن نكتب :

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \alpha_1' \vec{v}_1' + \ldots + \alpha_n' \vec{v}_n' \qquad (1)$$

ويمكن ، بشكل خاص ، أن تمثل الأشعة $\vec{v}_1', \ldots, \vec{v}_n'$ بدلالة القاعدة القديمة $\{\vec{v}_i\}$:

$$\vec{v}_j' = \beta_{j1} \vec{v}_1 + \ldots + \beta_{jn} \vec{v}_n \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

بالتعويض في (١) نجد :

$$\sum_i \alpha_i \vec{v}_i = \sum_j \alpha_j' \vec{v}_j' = \sum_j \alpha_j' \sum_i \beta_{ji} \vec{v}_i$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_j' \beta_{ji} \vec{v}_i$$

ومنه نجد أن : $\qquad \alpha_i = \sum_j \beta_{ji} \alpha_j'$

تمارين محلولة

١٥٧ - لتكن V مجموعة التطبيقات المعرفة على مجموعة غير خالية X والتي تأخذ قيمها في حقل F . وإذا كان f , g تطبيقين كيفيين من V و α عنصراً كيفياً من F فاننا نعرف $f + g$ و αf بالشكل التالي :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in X$$

برهن أن V تمثل فراغاً شعاعياً على F .

البرهان : كي يكون V فراغاً شعاعياً على F يلزم أن تتحقق الشروط ج١ - ج٥ و ض١ - ض٥ التي مر ذكرها في [٢ - ٥] .

(١) من الواضح أنه إذا كان f, g من V فان $f + g$ ، وفق التعريف ، من V كذلك :

(٢) ثم إن :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall f, g \in V$$

وذلك لأن التطبيقين $f(x)$ و $g(x)$ عنصران من F حيث العملية + تبديلية . ومنه :

$$f + g = g + f$$

(٣) كذلك :

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$

$$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x)+h(x))$$

$$\forall x \in X \quad , \quad \forall f, g, h \in V$$

وبما أن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ عناصر من F حيث العملية + تجميعية فانه ينتج أن :

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

(٤) وإذا رمزنا بـ O للتطبيق الصفري المعرف بالشكل :

$$O(x) = 0 \qquad \forall x \in X$$

فعندئذ يكون :

$$(f+O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$\forall x \in X \quad , \quad \forall f \in V$$

ومنـــه :

$$f + O = f$$

وبالتالي فإن التطبيق O هو العنصر الحيادي في V .

(٥) وإذا عرفنا $-f$ بالشكل $(-f)(x) = -f(x)$ فعندئذ يكون :

$$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = O(x)$$

$$\forall x \in X$$

أي :

$$f + (-f) = O$$

(٦) ثم من الواضح أنـــه $\forall f \in V \quad , \quad \forall \alpha \in F$ فإن $\alpha f \in V$

وفق التعريف .

(٧)
$$((\alpha \beta) f)(x) = (\alpha \beta) f(x) = \alpha (\beta f(x))$$
$$= \alpha (\beta f)(x) = (\alpha (\beta f)(x))$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in F \quad , \quad \forall f \in V$$

أي :

$$(\alpha \beta) f = \alpha (\beta f)$$

(٨)

$$(\alpha (f+g))(x) = \alpha((f+g)(x)) = \alpha (f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$$
$$= (\alpha f + \alpha g)(x)$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in F \quad , \quad \forall f, g \in V$$

وذلك لأن الخاصة التوزيعية صحيحة في F ، ومنه :

$$\alpha (f+g) = \alpha f + \alpha g$$

(٩)
$$((\alpha + \beta) f)(x) = (\alpha + \beta) f(x)$$
$$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in F \quad , \quad \forall f \in V$$

ومنه :
$$(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$$

(١٠) وأخيراً إذا كان 1 العنصر الحيادي للعملية (٠) في F فان :

$$(1 f)(x) = 1 f(x) = f(x)$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall f \in V$$

أي : $1 f = f$

وهو المطلوب .

١٥٨ - ليكن V فراغاً شـــعاعياً على حقل F وليكن v_1 , v_2 شعاعين معينين في V . ولنفرض أن V' مجموعة جزئية من V تتكون من جميع العناصر $\alpha v_1 + \beta v_2$ حيث α , β عنصرين كيفيين من F . برهن أن مجموع أي عنصرين من V' هو عنصر من V' وأن حاصل ضرب أي عنصر من F بأي عنصر من V' هو عنصر من V' كذلك،ثم برهن أن V' يمثل فراغاً شعاعياً .

الحل :

ليكن u_1 , u_2 عنصرين من V . فبما أن كل عنصر من V' هو من الشكل $\alpha v_1 + \beta v_2$ فإنه يوجـــد في F العناصر β_1 , β_2 و α_1 , α_2 بحيث يكون :

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 \quad , \quad u_2 = \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2$$

بالجمع نجد :

$$u_1 + u_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) v_1 + (\beta_1 + \beta_2) v_2$$

وحيث أن هذا المجموع من الشكل $\alpha v_1 + \beta v_2$ فهو عنصر من V' .

كذلك نلاحظ بسهولة أن :

$$\lambda u_1 = \lambda \alpha_1 v_1 + \lambda \beta_1 v_2 \qquad \forall \lambda \in F$$

مما يدل أن λu_1 هو عنصر من V' .

كي نـبرهن أن V' يمثل فراغاً شعاعياً علينـــا أن نتحقق من شروط

الفراغ الشعاعي : لتكن من أجل ذلك u , u_1 , u_2 , u_3 عناصر كيفية من V' و $\lambda , \lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3$ عناصر كيفية من F .

(١) إن مجموع شعاعين من V' هو شعاع من V' كما برهنا قبل قليل .

(٢) إذا كان :

$$u_i = \alpha_i v_1 + \beta_i v_2 \qquad i = 1 , 2$$

فان (باعتبار عناصر الحقل F تخضع للخاصة التبديلية) :

$$u_1 + u_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) v_1 + (\beta_1 + \beta_2) v_2$$
$$= (\alpha_2 + \alpha_1) v_1 + (\beta_2 + \beta_1) v_2 = u_2 + u_1$$

(٣) إذا كان :

$$u_i = \alpha_i v_1 + \beta_i v_2 \qquad i = 1 , 2 , 3$$

فان (باعتبار عناصر الحقل F تخضع للخاصة التجميعية) :

$$u_1 + (u_2 + u_3) = (\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2) + ((\alpha_2 + \alpha_3) v_1 + (\beta_2 + \beta_3) v_2)$$
$$= (\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)) v_1 + (\beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)) v_2$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) v_1 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) v_2$$

وبشكل مماثل نجد :

$$(u_1 + u_2) + u_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) v_1 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) v_2$$

وبالتالي :

$$u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$$

(٤) إن العنصر الحيادي O بالنسبة للعملية + في V هو عنصر من V'

$O = 0\,u_1 + 0\,u_2$ كما أنه حيادي في V' لأن :

$$u + O = u$$

(٥) إن نظير $u = \alpha\ v_1 + \beta\ v_2$ هو $-u = (-\alpha)\, v_1 + (-\beta)\, v_2$ لأن:

$$u + (-u) = O$$

(٦) إن حاصل ضرب كل عنصر من V' بعنصر من F هو عنصر من V' كما مر معنا قبل قليل .

(٧) $$(\lambda_1\, \lambda_2)\, u = \lambda_1\, (\lambda_2\, u)$$

لأن كلا من الطرفين يساوي :

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \alpha\ v_1 + \lambda_1\, \lambda_2\, \beta\ v_2$$

(٨) $$\lambda\, (u_1 + u_2) = \lambda\, [\, (\alpha_1 + \alpha_2)\, v_1 + (\beta_1 + \beta_2)\, v_2\,]$$

$$= \lambda\, [\, (\alpha_1 + \alpha_2) v_1 + \lambda\, (\beta_1 + \beta_2)\, v_2$$

وحيث أن عناصر F تخضع للخاصة التوزيعية فإن :

$$\lambda\, (u_1 + u_2) = \lambda\, (\alpha_1\, v_1 + \beta\ v_2) + \lambda\, (\alpha_2\, v_1 + \beta_2\, v_2)$$

$$= \lambda\, u_1 + \lambda\, u_2$$

(٩) $$(\lambda_1 + \lambda_2)\, u = \lambda_1\, \alpha\ v_1 + \lambda_1\, \beta\ v_2 + \lambda_2\, \alpha\ v_1 + \lambda_2\, \beta\ v_2$$

$$= \lambda_1\, u + \lambda_2\, u$$

(١٠) ومن الواضح أن :

$$1\,.\,u = u$$

وهو المطلوب .

ملاحظة : كان بالامكان أن نتجاوز هذا البرهان الطويل على أن V' فراغ شعاعي إذا لاحظنا أن V' فراغ شعاعي جزئي وبالتالي فهو فراغ شعاعي . غير أننا أوردنا البرهان مفصلاً ليعتاد القارىء على مثل هذه البراهين .

١٥٩ - ليكن :

$$V = \{ (\alpha, \beta) : \alpha , \beta \in R\}$$

برهن أن V لا تمثل فراغاً شعاعياً على R إذا عرفنا العملية + وعملية الضرب بعدد وفق مايلي :

$$(\alpha , \beta) + (\gamma , \delta) = (\alpha + \gamma , \beta + \delta)$$
$$\lambda (\alpha , \beta) = (\lambda^2 \alpha , \lambda^2 \beta)$$

الحل : إن

$$(\lambda_1 + \lambda_2) (\alpha , \beta) = ((\lambda_1 + \lambda_2)^2 \alpha , (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \beta)$$
$$\neq ((\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \alpha , (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \beta)$$
$$= \lambda_1 (\alpha , \beta) + \lambda_2 (\alpha , \beta)$$

أي أن :

$$(\lambda_1 + \lambda_2) (\alpha , \beta) \neq \lambda_1(\alpha , \beta) + \lambda_2(\alpha , \beta)$$

فالخاصة ض٤ من [٢ - ٥] غير محققة وهو المطلوب .

١٦٠ - برهن أنه إذا كان α , β عنصرين من R وكان :
$(-1 , 1 , 3) \in V_3(R)$ و $(2 , -1 , 1)$ فانه لا يمكن أن يكون :

$$\alpha\,(2\,,-1\,;1) + \beta\,(-1\,,1\,,3) = 0 \qquad (1)$$

مالم يكن $\alpha = \beta = 0$.

الحل : من (1) نجد :

$$(2\alpha\,,-\alpha\,,\alpha) + (-\beta\,,\beta\,,3\beta) = 0$$

وبالتـــالي :

$$2\alpha - \beta = 0 \qquad -\alpha + \beta = 0 \qquad \alpha + 3\beta = 0$$

من المعادلة الثانية نجد $\beta = \alpha$. وبالتعويض في كل من الأولى والثانية نجد $\alpha = \beta = 0$.

١٦١ – لتكن $\mathcal{P}$ مجموعة كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقية المعروف عليها عملية الجمع كما في [٢٧ - ٤] . نعرف عملية ضرب عنصر λ من R بعنصر : $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ من $\mathcal{P}$ بالشكل :

$$\lambda p = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \ldots + \lambda a_n x^n \qquad (1)$$

برهن أن $\mathcal{P}$ فراغ شعاعي بالنسبة لعملية جمع كثيرات الحدود ولعملية الضرب بعدد المعرفة بـ (١) .

البرهان :

لما كنا برهنا في [٢٧ - ٤] أن $\mathcal{P}$ زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع كثيرات الحدود . فيبقى إثبات الخواص ض١ - ض٥ التي تبرهن بسهولة .

١٦٢ - ليكن V فراغاً شعاعياً على حقل F ولتكن $u_1 , \ldots , u_m$ أشعة معينة في V . برهن أن U ، المجموعة الجزئية من الفراغ الشعاعي

$V_m(F)$ المعرفة بالمثال (١) [٣ - ٥] ، المكونة من العناصر :

$$(\alpha_1 , \dots , \alpha_m) \qquad \alpha_i \in F \quad (i = 1 , \dots , m)$$

بحيث يكون :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0 \tag{1}$$

تشكل فراغاً جزئياً من $V_m(F)$. عين هذا الفراغ الجزئي في الحالة التي يكون فيها $m = 3$ و

$$u_1 = (1 , 0 , 0 , 0) \quad u_2 = (1 , 1 , 0 , 0) \quad u_3 = (0 , -1 , 0 , 0)$$

الحل : لنلاحظ أن العنصر $(0 , \dots , 0)$ يحقق (1) فهو من U وبالتالي فان U غير خالية وإذا كان :

$$x = (\alpha_1 , \dots , \alpha_m)$$

$$y = (\beta_1 , \dots , \beta_m)$$

عنصرين من U أي :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0$$

$$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0$$

فإن :

$$(\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_m + \beta_m) u_m = 0$$

وهذا يعني أن : $x + y \in U$

وبطريقة مماثلة نبرهن أنه إذا كان $x \in U$, $\lambda \in F$ فان λx من U وهو المطلوب

وفي الحالة الخاصة نجد أن الشرط (1) يأخذ الشكل :

$$\alpha_1 (1 , 0 , 0 , 0) + \alpha_2 (1 , 1 , 0 , 0) + \alpha_3 (0 , -1 , 0 , 0) = (0 , 0 , 0 , 0)$$

وبالتالي :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

ومنه نجد :

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

وبالتالي :

$$(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3) = \alpha_1 (1 , -1 , -1)$$

فالفراغ الجزئي المطلوب هو الفراغ المولد من الشعاع (1- , 1- , 1)

* ١٦٢ - ليكن V فراغاً شعاعياً على حقل F ولتكن M مجموعة جزئية من V تحوي على الأقل عنصراً واحـــداً ، ولتكن U مجموعة جزئية من V مكونة من جميع العناصر التي يمكن كتابتها على شكل تركيب خطي في عناصر M بأمثال من F . برهن أن U فراغ جزئي من V (ندعـوه الفراغ الجزئي المتولد بـ M) . ثم برهن أنه إذا كانت M مكونة من عـــدد منته من أشعة V مثل $u_1 , \dots , u_m$ فان U هو الفراغ الجزئي المعرف بالنظرية [٩ - ٥] .

الحل :

لما كانت M تحوي على الأقل عنصراً واحداً مثل u_1 فان λu_1 (حيث λ من F) ينتمي لـ U فالمجموعة U غير خالية .

وبما أن كل عنصر من U يمكن كتابته على شكل تركيب خطي في عناصر من M بأمثال من F فان مجموع كل عنصرين يمكن كتابته كذلك على شكل تركيب خطي في عناصر من M بأمثال من F فهو عنصر من U . والأمر نفسه يصح من أجل حاصل ضرب كل عنصر من U بعنصر كيفي من F . وهذا يدل على أن U فراغ جزئي من V وإذا كانت M مكونة من عدد منته من أشعة V مثل $u_1 , u_2 , \ldots , u_m$ فان كل عنصر من U يكتب بالشكل :

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m$$

ويكون U هو الفراغ الجزئي المولد من هذه الأشعة المفروضة [٩ - ٥]

١٦٣ - اكتب الشعاع $u = (1 , -2 , 5)$ على شكل تركيب خطي في الأشعة :

$$e_1 = (1 , 1 , 1) \qquad e_2 = (1 , 2 , 3) \qquad e_3 = (2 , -1 , 1)$$

الحل : لنبحث عن $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$ على شكل يكون فيه :

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

أي :

$$(1 , -2 , 5) = \alpha_1 (1 , 1 , 1) + \alpha_2 (1 , 2 , 3) + \alpha_3 (2 , -1 , 1)$$

ومنه :

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2 \alpha_3$$

$$-2 = \alpha_1 + 2 \alpha_2 - \alpha_3$$

$$5 = \alpha_1 + 3 \alpha_2 + \alpha_3$$

وبحل هذه المجموعة من المعادلات نجد :

$$\alpha_1 = -6 \quad : \quad \alpha_2 = 3 \quad ; \quad \alpha_3 = 2$$

وبالتالي :

$$u = -6\, e_1 + 3\, e_2 + 2\, e_3$$

١٦٤ - لنفرض أن F هو حقل الأعداد العادية Q . جـد حلاً غير الحل البدهي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ في Q للجملة :

$$2\,\xi_1 - 3\,\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0$$

$$\xi_1 + 5\,\xi_2 - 2\,\xi_3 + 3\,\xi_4 = 0$$

$$\xi_2 + \xi_3 - 5\,\xi_4 = 0$$

عين بعد ذلك مجموعـة جميع الحلول $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ في Q لهذه المجموعة .

الحل : من المعادلتين الأولى والثانية نجد :

$$13\,\xi_2 - 5\,\xi_3 + 7\,\xi_4 = 0 \qquad (1)$$

من هذه مع المعادلة الثالثة نحصل على :

$$\xi_3 = 4\,\xi_4$$

بالتعويض في (1) ينتج :

$$\xi_2 = \xi_4$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى من المجموعة المفروضة نجد : $\xi_1 = 0$

فاذا جعلنا $\xi_4 = 1$ مثلاً فإننا نجد الحل :

$$(0 , 1 , 4 , 1)$$

ولايجاد جميع الحلول نلاحظ أن كل حل المجموعة المذكورة هو من الشكل :

$$(0 , \xi_4 , 4 \xi_4 , \xi_4) = \xi_4 (0 , 1 , 4 , 1)$$

حيث ξ_4 عنصر كيفي من Q .

١٦٥ - ليكن U فراغاً جزئيـاً من فراغ شعاعي V منتهي الأبعـاد . برهن أن $\dim U \leqslant \dim V$ وأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\dim U = \dim V$ هو أن يكون $U = V$.

الحل : إذا كان عدد أبعاد U يساوي m فهنالك m شعاعاً في U تشكل مجموعة مستقلة خطياً من الأشعة . وبما أن هذه الأشعة تنتمي لـ V كذلك فهذا يعني أن V تحوي مجموعة من الأشعة المستقلة خطياً تتكون من m شعاعاً على الأقل وهذا يعني أن $\dim V \geqslant m = \dim U$ لننتقل إلى برهان القسم الثاني .

إذا كان $U = V$ فيكون $\dim U = \dim V$. لبرهان العكس نفرض أن $\dim U = m$. وهذا يعني وجود مجموعة مستقلة من الأشعة في U عددها m شعاعاً . لتكن $u_1 , \ldots , u_m$ هذه الأشعة . إن كل شعاع من U هو تركيب خطي من هذه الأشعة ، كما أن كل تركيب خطي من هذه الأشعة هو شعاع من U . وبما أن $V \supseteq U$ فان الأشعة المذكورة تنتمي لـ V . وحيث أن $\dim V = m$ فانه لايمكن لاي شعاع من V أن يكون مستقلاً عن $u_1 , \ldots , u_m$ أي أن كل شعاع من V هو تركيب خطي منها وبالتالي فهو ينتمي لـ U وهو المطلوب .

١٦٦ - لتكن $v_1 , \dots , v_r$ و $w_1 , \dots , w_s$ عناصر من الفراغ الشعاعي V . برهن أن الفراغ الجزئي U من V المتولد من $v_1 , \dots , v_r$ هو الفراغ الجزئي W المتولد من $w_1 , \dots , w_s$ و $v_1 , \dots , v_r$ ذاته إذا وإذا فقط كان كل عنصر $w_i \ (i = 1 , \dots , s)$ مرتبطاً خطياً بالاشعة $v_1 , \dots , v_r$.

الحل : إذا كان الفراغ الجزئي U المتولد من $v_1 , \dots , v_r$ هو ذات الفراغ الجزئي W المتولد من $w_1 , \dots , w_s$ ، $v_1 , \dots , v_r$ فان كل شعاع من W مرتبط خطياً بالأشعة $v_1 , \dots , v_r$ ، وبما أن كل $w_i (i = 1 , \dots , s)$ ينتمي إلى W وذلك لأنه يمكننا أن نكتب مثلاً:

$$w_i = 0 \, v_1 + \dots + 0 \, v_r + 0 \, w_1 + \dots + 1 \, w_i + \dots + 0 \, w_s$$

فهو ينتمي إلى V لأن $W = V$ وبالتالي يكون w_i مرتبطاً خطياً بالأشعة $v_1 , \dots , v_r$.

وبالعكس اذا كان كل عنصر w_i مرتبطاً خطياً بالاشعة $v_1 , \dots , v_r$ فعندئذ يمكن كتابة كل شعاع ينتمي لـ W على شكل تركيب خطي للأشعة $v_1 , \dots , v_r$ فهو ينتمي لـ U وهو المطلوب .

١٦٧ - لتكن $u_1 , \dots , u_m$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً من فراغ V ولتكن $v_1 , \dots , v_s$ مجموعة أخرى من الأشعة المستقلة خطياً ولنفرض أن :

$$[u_1 , \dots , u_m] \cap [v_1 , \dots , v_s] = 0$$

برهن أن الأشعة $u_1 , \dots , u_m$ ، $v_1 , \dots , v_s$ مستقلة خطياً .

البرهان : لو كانت الأشعة $u_1 , \dots , u_m$ ، $v_1 , \dots , v_s$ مرتبطة خطياً لاستطعنا الحصول على العناصر $\alpha_1 , \dots , \alpha_{m+s}$ من الحقل F ليست معدومة

جميعاً بحيث يكون :

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \alpha_{m+1} v_1 + \ldots + \alpha_{m+s} v_s = 0$$

ومنه نجد :

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = -(\alpha_{m+1} v_1 + \ldots + \alpha_{m+s} v_s)$$

ولكن الطرف الأيسر يمثل عنصراً من $[u_1, \ldots, u_m]$ والطرف الأيمن يمثل عنصراً من $[v_1, \ldots, v_s]$ وبالتالي يجب أن يكون كل من العنصرين هو العنصر الصفري لأنه العنصر المشترك الوحيد . وهـذا يعني أن :

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$$

$$\alpha_{m+1} v_1 + \ldots + \alpha_{m+s} v_s = 0$$

وبما أن أحد العناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+s}$ على الأقل غير معدوم فان إحدى المجموعتين $u_1, \ldots, u_m$ و $v_1, \ldots, v_s$ على الأقل مرتبطة خطياً وهذا خلاف الفرض .

١٦٨ - إذا كان V_1 و V_2 فراغين شعاعـيين جزئيين من فراغ شعاعي V على الحقل F .

(١) برهن أن $U_1 = V_1 \cap V_2$ هو فراغ جزئي من V .

(٢) إذا عرفنا $U_2 = V_1 + V_2$ بالشكل :

$$U_2 = \{ x + y \ , \ x \in V_1 \ , \ y \in V_2 \}$$

فبرهن أن $V_1 + V_2$ فراغ جزئي من V .

(٣) إذا كان V منتهي الأبعاد فان :

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

الحل :

(١) بما أن العنصر 0 ينتمي لكل من الفراغين الجزئيين V_1 و V_2 (كل فراغ جزئي يحوي العنصر الصفري) فهو ينتمي لتقاطعهما U_1 ومنه ينتج أن U_1 ليست مجموعة خالية .

ثم إن مجموع كل عنصرين من U_1 هو عنصر من U_1 لأن كل عنصرين ينتميان إلى V_1 و V_2 ينتمي مجموعها كذلك إلى V_1 و V_2 فهو ينتمي لـ U_1 .

وإذا كان u_1 عنصراً ما من U_1 فهو عنصر من V_1 ومن V_2 وبالتالي فان λu_1 مهما كانت λ من F ينتمي لكل من V_1 و V_2 فهو من U_1 .
وبالعودة إلى [٧ - ٥] نجد أن U_1 هي فراغ جزئي من V .

(٢) يترك برهان هذا القسم للقارىء لسهولته ولكونه مماثلاً لبرهان القسم الأول .

(٣) لنفرض أن أبعاد الفراغات : V_1 , V_2 و $V_1 + V_2$ و $V_1 \cap V_2$ هي p , t , s , r على الترتيب .

ولنفرض أن $\{ u_i \}$ قاعـدة $V_1 \cap V_2$. إن أشعة القاعـدة هذه تتكون من p شعاعاً مستقلاً خطياً . وهـذه الأشعة تنتمي لكل من V_1 و V_2 . وهذا يعني أن $r \geqslant p$ و $s \geqslant p$. لنضف إلى $\{ u_i \}$ مجموعة مستقلة من الأشعة $v_1, \ldots , v_{r-p}$ بحيث نحصل على قاعدة في V_1 [٢٥ - ٥] .

ولنضف كذلك إلى $\{ u_i \}$ مجموعة مستقلة من الاشعة $w_1 , \ldots , w_{s-r}$

بحيث نحصل على قاعـــدة لـ V_2 . ومن الواضح أن الفراغ المولد من $v_1 , \ldots , v_{r-p}$ ، وليكن V_3 ، لا يشـــترك مع الفراغ المولد من $w_1, \ldots , w_{s-r}$ وليكن V_4 ، إلا بالعنصر الصفري . وبما أن $V_1 + V_2$ يحوي جميع عناصر V_1 وجميع عناصر V_2 كما أن كل شعاع منـــه هو تركيب خطي من عناصر القاعدة في V_1 وعناصر القاعدة في V_2 وحيث أن هنالك p شعاعاً مشتركا بين قاعـــدتي V_1 و V_2 فان كل شعاع من $V_1 + V_2$ تركـيب خطي من :

$$u_1 , \ldots , u_p , v_1 , \ldots , v_{r-p} , w_1 , \ldots , w_{s-p}$$

وهذه أشعة مستقلة خطياً وفق التمرين ١٦٧. إذن :

$$t = p + (r - p) + (s - p)$$

$$= r + s - p$$

أي أن :

$$\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2)$$

وهو المطلوب .

١٦٩ ـ تشكل الأشعة : $(0 , 2 , 4)$; $(-1 , 1 , 3)$; $(1 , 2 , 0)$ قاعدةفي $V_3(Q)$. ماهي مركبات كل من الشعاعين $(6 , 0 , 1)$ و $(2 , 4 , 2)$ بالنسبة لهذه القاعدة .

الحل : لنكتب :

$$(6 , 0 , 1) = \alpha_1(1 , 2 , 0) + \alpha_2(-1 , 1 , 3) + \alpha_3(0 , 2 , 4)$$

ومنه نجـــد :

$$6 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad ; \quad 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \quad ; \quad 1 = 3\alpha_2 + 4\alpha_3$$

وبحل هذه المجموعة من المعادلات نجد :

$$\alpha_1 = -\frac{7}{3} \quad ; \quad \alpha_2 = -\frac{25}{3} \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{13}{2}$$

وهذه مركبات الشعاع (6 , 0 , 1) وفق القاعدة المفروضة . بطريقة مماثلة نجد مركبات الشعاع (2 , 4 , 2) .

* ١٧٠ - إذا كانت $U_1, \ldots, U_n$ فراغات جزئيـــة من فراغ شعاعي V فإننا نقول عن V أنه مجموع مباشر لهذه الفراغات الجزئية إذا أمكن تمثيل كل عنصر v من V على شكل مجموع :

$$v = u_1 + \ldots + u_n$$

حيث $u_i \in U_i$ وبفرض أن هذا التمثيل لا يتم إلا بشكل وحيد . نكتب في هذه الحالة :

$$V = U_1 \dotplus U_2 \dotplus \ldots \dotplus U_n$$

برهن أن :

$$\dim V = \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$$

الحل : بما أن كل شعاع u_i من U_i يكتب على شكل تركيب خطي من أشعة القاعدة في U_i فان كل شعاع v من V :

$$v = u_1 + \ldots + u_n \qquad (1)$$

يكتب على شكل تركيب خطي من مجموعـــة الأشعة w التي هي اجتماع مجموعات أشعة القواعد لـ $U_1 , \dots , U_n$ من هذا نستنتج أن :

$$\dim V \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_n$$

ولكن لا تشترك أية قاعدتين من قواعد Ui بأي شعاع لأن هذا يعني أن هذا الشعاع يمثل بشكلين مختلفين من الشكل (١) الأمر الذي يتنافى مع كون الشكل (١) وحيداً ، وعلى هذا نجد أن :

$$\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$$

وهو المطلوب :

١٧١ - برهن أن الأشعة :

$$(1 , 1 , 1 , 1) \quad , \quad (0 , 1 , 1 , 1) \quad , \quad (0 , 0 , 1 , 1) \quad , \quad (0 , 0 , 0 , 1)$$

تشكل قاعدة في الفراغ $V_4(F)$.

الحل : من الواضح أن الأشعة المذكورة مستقلة خطياً ، لأن المعادلة التالية :

$$\alpha_1(1 , 1 , 1 , 1) + \alpha_2(0 , 1 , 1 , 1) + \alpha_3(0 , 0 , 1 , 1) +$$
$$+ \alpha_4(0 , 0 , 0 , 1) = (0 , 0 , 0 , 0)$$

لا تتحقق إلا إذا كان :

$$(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4) = (0 , 0 , 0 , 0)$$

وبما أن عدد أبعاد V_4 هي 4 فان الأشعة المذكورة تشكل قاعـدة في V_4 وهو المطلوب .

تمارين غير محلولة

١٧٢ - إذكر ما إذا كان كل مما يلي فراغاً شعاعياً على الحقل المذكور بجانبه وذلك باستعمال التعاريف المعتادة للجمع وللضرب بعنصر من الحقل :

– مجموعة الأعداد الحقيقية من الشكل $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt[3]{3}$ حيث α , β , γ عناصر من Q . الحقل هو Q .

– مجموعة كثيرات الحدود من درجة أكبر من الدرجة 5 على حقل F . الحقل F .

– مجموعة كثيرات الحدود على حقل F ، حيث الحد الثابت يساوي الصفر . الحقل F .

١٧٣ - بين أن المجموعة C المكونة من جميع الأعداد المركبة هي فراغ شعاعي على R بالنسبة لعملية الجمع المعروفة للأعداد المركبة ولعملية ضرب عدد مركب بعدد حقيقي .

١٧٤ - بين أن المجموعة C المكونة من جميع الأعداد المركبة هي فراغ شعاعي على C بالنسبة لعملية جمع الأعداد المركبة وضربها المعروفتين .

- ليكن V مجموعة الازواج المرتبة للأعداد الحقيقية :

$$V = \{ (\alpha , \beta) : \alpha , \beta \in R \}$$

برهن أن V لا تمثل فراغاً شعاعياً على R وذلك إذا عرفنا العملية + وعملية الضرب بعدد كما يلي :

$$(\alpha , \beta) + (\gamma , \delta) = (\alpha + \gamma , \beta + \delta)$$

$$\lambda (\alpha , \beta) = (\lambda \alpha , \beta)$$

١٧٥ - ليكن V فراغاً شعاعياً على حقل F برهن القانونين التاليين :

(١) إذا كان $\alpha , \beta \in F$ و x عنصراً غير صفري من V بحيث :

$$\alpha x = \beta x$$

فعندئذ يكون $\alpha = \beta$.

(٢) إذا كان $x , y \in V$ و α عنصراً غير صفري من F بحيث :

$$\alpha x = \alpha y$$

برهن أن $x = y$.

١٧٦ - أجر العملية التالية في $V_3(Q)$:

$$3(1 , 0 , 0) + 4(0 , 1 , 0) - \tfrac{1}{2}(0 , 0 , 1)$$

وحدد الفراغات الشعاعية الجزئية من $V_3(R)$ مما يلي .

- مجموعة جميع العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha , 2\beta , 3\gamma) \qquad \alpha , \beta , \gamma \in R$$

- مجموعة العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha , 0 , \gamma) \qquad \alpha , \gamma \in R$$

- مجموعة جميع العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha, \beta, 3) \qquad \alpha, \beta \in R$$

– مجموعة جميع العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha + 2\beta, \alpha - 3\gamma, 2\alpha + \beta + \gamma) \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R$$

١٧٧ – ليكن V فراغاً شعاعياً وليكن U_1 و U_2 مجموعتين جزئيتين من V على شكل تكون فيه U_2 محتواة في U_1 . برهن أنه إذا كان U_1 فراغاً جزئياً من V و U_2 فراغاً جزئياً من U_1 فعندئذ يكون U_2 فراغا جزئيا من V . برهن كذلك أنه إذا كان U_1 و U_2 فراغين جزئيين من V فعندئذ يكون U_2 فراغا جزئيا من U_1

١٧٨ – برهن أنه إذا كان $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ، حيث n عدد محدود ، فراغات جزئية من V فان المجموعة $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ تشكل فراغا جزئيا من V ومن كل من Ui .

١٧٩ – ميز في مجموعات الأشعة التالية في $V_3(R)$ المرتبطة منها خطياً عن المستقلة خطيا .

$$\{(-1, 2, 1) \ , \ (3, 1, -2)\}$$

$$\{(2, -1, 1) \ , \ (1, 2, 3) \ , \ (0, 1, 2)\}$$

$$\{(1, 0, -1) \ , \ (2, 1, 3) \ , \ (-1, 0, 0) \ , \ (1, 0, 1)\}$$

١٨٠ – يعاد السؤال السابق حيث الاشعة فيما يلي عناصر من $V_4(R)$

$$\{(1, 2, 1, 2) \ , \ (0, 1, 1, 0) \ , \ (1, 4, 3, 2)\}$$

$$\{(1, 2, -1, 1) \ , \ (0, 1, -1, 2) \ , \ (2, 1, 0, 3) \ , \ (1, 1, 0, 0)\}$$

١٨١ - إذا كان x و y شعاعين من فراغ شعاعي على حقل F و $\alpha , \beta \in F$ برهن أن المجموعة :

$$\{ x , y , \alpha x + \beta y \}$$

مرتبطة خطيا .

١٨٢ - ليكن x و y شعاعين مستقلين خطيا من فراغ شعاعي على حقل F . ولتكن $\alpha , \beta , \gamma , \delta$ عناصر من F برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون الشعاعان .

$$\alpha x + \beta y \quad ; \quad \gamma x + \delta y$$

مستقلين خطيا هو $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$

١٨٣ - برهن أنه إذا كان لمجموعة المعادلتين :

$$\begin{aligned} \alpha \xi + \beta \eta &= 0 \\ \gamma \xi + \delta \eta &= 0 \end{aligned} \qquad \alpha , \beta , \gamma , \delta \in F$$

حل غير الحل البدهي فعندئذ يكون الشعاعان (α , β) و (γ , δ) من $V_2(F)$ مرتبطين خطيا .

١٨٤ - برهن أنه إذا كانت مجموعة الاشعة $\{ u_1 , u_2 , \ldots , u_m \}$ ، حيث $m > 1$ ، مرتبطة خطيا فإن بعض هذه الاشعة تركيب خطي للبعض الآخر .

١٨٥ - برهن أنه إذا كان : $m > 1$ و $u \in [u_1 , u_2 , \ldots , u_m]$ و $u \notin [u_1 , u_2 , \ldots u_{m-1}]$ فإن : $u_m \in [u_1 , u_2 , \ldots , u_{m-1} , u]$.

١٨٦ - برهن أنه إذا كان :

$$[u_1, u_2, \ldots, u_m] = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

وإذا كان $m \neq n$ فان واحدة على الاقل من المجموعتين :

$$[u_1, u_2, \ldots, u_m] \quad ; \quad [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

مرتبطة خطيا .

١٨٧ - أوجد قاعدة لـ $V_3(R)$ تحوي الشعاعين :

$$(2, 1, 3) \text{ و } (1, -1, 0)$$

١٨٨ - أوجد عدد أبعاد الفراغ الجزئي :

$$[(1, 2, 1, 0), (-1, 1, -4, 3), (2, 3, 3, -1), (0, 1, -1, 1)]$$

من $V_4(R)$.

١٨٩ - ليكن U_1 و U_2 فراغين جزئيين من $V_4(R)$:

$$U_1 = [(1, 2, -1, 0), (2, 0, 1, 1)]$$

$$U_2 = [(0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 4, -3, -1)]$$

أوجـــد : $\dim U_1$, $\dim U_2$, $\dim U_1 \cap U_2$, $\dim (U_1 + U_2)$

ثم تحقق من صحة العلاقة :

$$\dim U_1 + U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$$

١٩٠ - أعط مثالاً تثبت فيه خطأ ما يلي .

إذا كانت $\{v_1, \ldots, v_n\}$ قاعدة في V وإذا كان U فراغاً جزئيـاً من V فإن مجموعة جزئية من $\{v_1, \ldots, v_n\}$ هي قاعدة U .

١٩٠ - لنكن T مجموعة جميع الفراغات الجزئية لفراغ شعاعي

غير صفري V . ولنعرف عملية الجمع في T كما في القسم الثاني من التمرين ١٦٨ . تحقق من أن T لا تمثل زمرة بالنسبة لعملية الجمع هذه .

وبرهن أنه يمكن اعتبار الحقل فراغاً شعاعياً على أي حقل جزئي منه . ثم برهن أنه إذا كانت F_1 , F_2 , F_3 حقولاً بحيث $F_1 \subset F_2 \subset F_3$ وأنه إذا كانت $\{ u_1 , \ldots , u_m \}$ قاعدة F_2 على F_1 و $\{ v_1 , \ldots , v_n \}$ قاعدة F_3 على F_2 فإن العناصر : $u_i v_j \ (i = 1 , \ldots , m, \ j = 1 , \ldots , n)$ هي قاعدة F_3 على F_1 .

١٩٢ - جد قاعدة لحقل الأعداد المركبة C باعتباره فراغاً شعاعياً على حقل الأعداد الحقيقية C .

١٩٣ - ليكن V فراغاً شعاعياً ثلاثي البعد على حقل F . ولتكن v_1 , v_2 , v_3 قاعدة هذا الفراغ وليكن $(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3) \in V_3(F)$ مغايراً للصفر . ولنفرض أن V' فراغاً جزئياً من V يتكون من جميع الأشعة

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \qquad \lambda_i \in F$$

التي تحقق مركباتها الشرط :

$$\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0$$

برهن أن V فراغ جزئي ثنائي البعد .

١٩٤ - لتكن P_3 مجموعة كثيرات الحدود على الحقل R والتي لا تزيد درجاتها عن 3 . برهن أن P_3 فراغ شعاعي . بين ما إذا كانت الأشعة الثلاثة التالية مستقلة خطياً :

$t^3 - 3t^2 + 5t + 1 \quad ; \quad t^3 - t^2 + 8t + 2 \quad ; \quad 2t^3 - 4t^2 + 9t + 5$

١٩٥ - برهن أنه إذا كانت الأشعة الثلاثة u , v , w من فراغ شعاعي $V(R)$ مستقلة خطياً فان الأشـعة $u + v , u - v , u - 2v + w$ مستقلة خطياً .

١٩٦ - ليكن : $f = (1 - i)\, x + 3i$ و $g = i\,x - \frac{3}{2}(1 + i)$ حيث $i^2 = -1$. برهن أن f و g مستقلان خطياً على حقل الأعـــداد الحقيقية ، ومرتبطان خطياً على حقل الأعداد الموكبة .

١٩٧ - لتكن الأشعة :

$$e_1 = (1 , 1 , -2 , 1) \quad , \quad e_2 = (3 , 0 , 4 , -1) \quad , \quad e_3 = (-1 , 2 , 5 , 2)$$

$$v_1 = (4 , -5 , 9 , -7) \quad , \quad v_2 = (3 , 1 , -4 , 4) \quad , \quad v_3 = (-1 , 1 , 0 , 1)$$

من الفراغ الشعاعي $V_4(R)$.

١ - أوجد الاشعة من v_1 , v_2 , v_3 المنتمية للفراغ الجزئي من $V_4(R)$ والمولد بالاشعة e_1 , e_2 , e_3 .

٢ - أوجـــد الاشعة من e_1 , e_2 , e_3 المنتمية للفراغ الجزئي من $V_4(R)$ والمولد بالاشعة v_1 , v_2 , v_3 .

١٩٨ - ليكن V الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التطبيقات المعرفة R والتي تأخذ قيمتها في R نفسه .

١ - برهن أن أزواج التطبيقات التالية مستقلة خطياً :

$1, x$, $x ; x^2$, $x ; e^x$; $x e^x, e^{2x}$; $\sin x, \cos x$

* ٢ - برهن أن التطبيقات : $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ مستقلة خطياً مهما كان $n \geqslant 1$.