

الفصل السادس

التطبيقات الخطية

سندرس في هذا الفصل نوعاً هاماً من التطبيقات بين الفراغات الشعاعية ، وهو الذي يضم ما نسميه بالتطبيقات الخطية ، هذه التطبيقات التي تعتبر من الدعامات الأساسية في الجبر الخطي .

١ - ٦ تعريف : ليكن V, W فراغين شعاعيين معرفين على الحقل التبادلي K (سيكون كل حقل يرد في هذا البحث تبادلياً إلا إذا ذكرنا خلاف ذلك) . نقول عن التطبيق :

$$T : V \rightarrow W$$

إنه تطبيق خطي فيما إذا حقق الشرطين التاليين :

$$\forall \vec{v}, \vec{v}' \in V : T(\vec{v} + \vec{v}') = T(\vec{v}) + T(\vec{v}') \quad (1)$$

$$\forall \vec{v} \in V, \forall \lambda \in K : T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) \quad (2)$$

يسمى هذا التطبيق أيضاً تحويلاً خطياً أو مؤثراً خطياً .

إن من الممكن تكرار هاتين العمليتين وضمها إلى بعضها واعتبار العلاقة

التالية تعريفاً للتطبيق الخطي :

$$\forall \lambda_i \in K, \forall \vec{v}_i \in V : T(\sum \lambda_i \vec{v}_i) = \sum \lambda_i f(\vec{v}_i)$$

إن عمليات الجمع الموجودة في الطرف الأيسر من هذه العلاقة تمثل الجمع المعروف على V أما عمليات الجمع الموجودة في الطرف الأيمن فهي تمثل الجمع المعروف على W .

٢ - ٦ أمثلة :

(١) إن التطبيق المطابق I للفراغ الشعاعي V على الحقل K المعروف بالعلاقة :

$$\forall \vec{v} \in V : I(\vec{v}) = \vec{v}$$

هو تطبيق خطي لأن :

$$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, I(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = I(\vec{v}_1) + I(\vec{v}_2)$$

$$\forall \vec{v} \in V, I(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{v} = \lambda I(\vec{v})$$

(٢) إن التطبيق الثابت لفراغ شعاعي V في الفراغ الشعاعي W

ليس بتطبيق خطي :

في الحقيقة إذا كان \vec{w}_0 شعاعاً ثابتاً من W فإننا نعرف تطبيقاً ثابتاً f لـ V من W بالعلاقة :

$$\forall \vec{v} \in V, f(\vec{v}) = \vec{w}_0$$

إن هذا التطبيق لا يحقق الشرط الأول من شرطي التطبيق الخطي

إذ أن :

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{w}_0 \neq f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) = \vec{w}_0 + \vec{w}_0$$

(٣) إذا طبقنا فواغاً شعاعياً بفراغ شعاعي جزئي منه عدد أبعاده أقل من عدد أبعاد الأول وبجيت نربط كل شعاع من الأول بشعاع من الثاني تقع مركباته ضمن مركبات الأول سمينا هذا التطبيق تطبيق إسقاط . فلو طبقنا مثلاً الفراغ R^3 بالفراغ R^2 بجيت يكون :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in R, \quad f : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$$

فإننا نقول إننا أسقطنا الفراغ R^3 على الفراغ R^2 .

لنبرهن أن مثل هذه التطبيقات خطية :

يمكننا أن نكتب من أجل الخاصة السابقة :

$$\begin{aligned} f[(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3')] &= f(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') \\ &= (x_1 + x_1', x_2 + x_2') = (x_1, x_2) + (x_1', x_2') \\ &= f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1', x_2', x_3') \end{aligned}$$

و :

$$\begin{aligned} f[\lambda (x_1, x_2, x_3)] &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \\ &= \lambda (x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

وهذا ما يبرهن أن f تطبيق خطي .

يمكن تعميم ما سبق وبرهان أن تطبيق الفراغ R^n في الفراغ R^p

($p \leq n$) وفق العلاقة :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f[(x_1, x_2, \dots, x_n)] = (x_1, x_2, \dots, x_p)$$

هو تطبيق خطي .

التمثيل التحليلي لتطبيق خطي : سنقصر كلامنا في هذا الموضوع على الفراغات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية .

٣ - حساب مركبات الخيال في تطبيق خطي :

ليكن F, E فواغين شعاعيين على الحقل K و f تطبيق خطي ل E في F ولنفرض أن ل E القاعدة $A(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ ول F القاعدة $B(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ وليكن $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ شعاعاً من E معروفاً بدلالة مركباته على القاعدة المفروضة أي :

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

إن التطبيق f يربط هذا الشعاع بشعاع \vec{w} من F وفق العلاقة :

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$$

يتعين هذا الخيال عندما نتمكن من تعيين مركبات الأشعة :

$$f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$$

من الفراغ F على القاعدة B .

لنفرض :

$$f(\vec{e}_i) = a_i^1 \vec{u}_1 + a_i^2 \vec{u}_2 + \dots + a_i^p \vec{u}_p, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

فنتجـد :

$$f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} \vec{u}_j \right)$$

وإذا ضمنا مختلف العوامل المضروبة بالشعاع u_j إلى بعضها فسوف نجد :

$$f(\vec{v}) = \sum_{j=1}^p \vec{u}_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right)$$

يمكن كتابة هذه العلاقة مفصلة بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= (a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \dots + a_n^1 x_n) \vec{u}_1 \\ &+ (a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_n^2 x_n) \vec{u}_2 \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &+ (a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \dots + a_n^p x_n) \vec{u}_p \end{aligned}$$

إذا فرضنا أن مركبات $\vec{w} = f(\vec{v})$ على القاعدة B هي y_1, y_2, \dots, y_p فإننا نستنتج من العلاقة السابقة المعادلات التالية :

$$y_1 = a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \dots + a_n^1 x_n$$

$$y_2 = a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_n^2 x_n$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$y_p = a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \dots + a_n^p x_n$$

تعطي هذه الدساتير المركبات على القاعدة B للشعاع $f(\vec{v})$ تخيال الشعاع \vec{v} وفق التطبيق الخطي f ، بتراكيب خطية بالنسبة لمركبات \vec{v} في القاعدة A .

٤ - ٦ اخاصة المميزة لتطبيق خطي : لقد بينا في الفقرة السابقة أنه يمكن تمثيل كل تطبيق خطي بعلاقات خطية بين مركبات شعاع وخياله وفق هذا التطبيق وسنبرهن فيما يلي أنه إذا عرف التطبيق بعلاقات خطية بين مركبات شعاع من منطلق التطبيق ومركبات خياله وفق هذا التطبيق فإن التطبيق المذكور خطي .

لنعتبر أن الفرضيات التي أوردناها في الفقرة السابقة تبقى صالحة من أجل هذه الفقرة ولنفرض تطبيقاً f يربط بين كل شعاع \vec{v} من E وشعاع \vec{w} من F بالشكل التالي :

$$f : \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \longrightarrow \vec{w} = \sum_{j=1}^p y_j \vec{u}_j$$

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

ولنبرهن أن هذا التطبيق خطي أي يحقق العلاقتين (١) و (٢) .
البرهان : من الواضح أن :

$$f(\vec{v}) = \vec{w} = \sum_{j=1}^p y_j \vec{u}_j = \sum_{j=1}^p \vec{u}_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right)$$

$$(3) \quad f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} \vec{u}_j \right)$$

لنفرض الأشعة \vec{q}_i من الفراغ F معرفة بالعلاقات :

$$\vec{q}_i = a_{i1} \vec{u}_1 + a_{i2} \vec{u}_2 + \dots + a_{ip} \vec{u}_p \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

فناخذ عندها العلاقة (٣) الشكل :

$$f(\vec{v}) = x_1 \vec{q}_1 + x_2 \vec{q}_2 + \dots + x_n \vec{q}_n$$

إن هذه العلاقة هي التعريف المعمم للتطبيق الخطي كما ورد في

الفقرة [١ - ٦]

نذكر هذه الفقرة والتي سبقتها بقولنا :

إن الشرط اللازم والكافي لأن يكون التطبيق $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً خطياً للفراغ الشعاعي E في الفراغ الشعاعي F هو أن يكون من الممكن تعريف مركبات خيال كل شعاع \vec{v} من E وفق f بعلاقات خطية بدلالة مركبات \vec{v} .

خواص التطبيقات الخطية :

إذا كان V و W فراغين شعاعيين على الحقل K وإذا كان $T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً فإنه يكون :

٥ - خيال الشعاع الصفري في V وفق T هو الشعاع الصفري في W لأن :

$$T(\vec{0}_V) = T(\vec{0} \cdot \vec{0}_V) = \vec{0} \cdot T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

حيث $\vec{0}_V$ و $\vec{0}_W$ شعاعا الصفر في V و W على الترتيب و $\vec{0}$ هو الصفر في K .

٦ - خيال نظير شعاع وفق T هو نظير خيال هذا الشعاع .

لأنه إذا كان \vec{v} نظير الشعاع \vec{v} من V أي $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}_V$ فإن :

$$T(\vec{v} + (-\vec{v})) = T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

ومن جهة ثانية فإن :

$$T(\vec{v} + (-\vec{v})) = T(\vec{v}) + T(-\vec{v})$$

ومنه :

$$T(\vec{v}) + T(-\vec{v}) = \vec{0}_W$$

أي أن $T(-\vec{v})$ هو نظير $T(\vec{v})$ من W .

ملاحظة : نهمل في الحالات التي لا نخشى فيها التباساً ، الدليل من شعاع الصفر لفراغ شعاعي .

٧ - ٦ إذا كان U فراغاً شعاعياً جزئياً من V فإن $T(U)$ خيال U وفق T والمعروف بالدستور :

$$T(U) = \{ T(\vec{v}) : \vec{v} \in U \}$$

بما أن U مجوي الشعاع الصفري وفق النظرية [٥ - ٧] فإن $T(U)$ مجوي حسب [٦ - ٥] الشعاع الصفري . إذن للبرهان على أن $T(U)$ فراغ شعاعي جزئي من W يكفي أن نتحقق من الخاصيتين التاليتين وفق [٥ - ٧] :

$$\forall \vec{w}, \vec{w}' \in T(U) , \vec{w} + \vec{w}' \in T(U)$$

$$\forall \lambda \in K , \lambda \vec{w} \in T(U)$$

نأخذ \vec{v} و \vec{v}' من U ولنفرض أن $T(\vec{v}) = \vec{w}$ و $T(\vec{v}') = \vec{w}'$.

بما أن $\vec{v} + \vec{v}' \in U$ فإن :

$$T(\vec{v} + \vec{v}') \in T(U)$$

$$T(\vec{v} + \vec{v}') = T(\vec{v}) + T(\vec{v}') = \vec{w} + \vec{w}'$$

وهذا يعني :

$$T(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{w} + \vec{w}' \in T(U)$$

مهما كان λ من K فإن $\lambda \vec{v} \in U$ وهذا يؤدي إلى أن

$$: T(\lambda \vec{v}) \in T(U)$$

$$T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) = \lambda \vec{w}$$

وهذا يعني أن : $T(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{w} \in T(U)$ وهو المطلوب .

ينتج عما سبق أن $T(V)$ فراغ شعاعي جزئي من W . ويسمى عادة خيال V وفق التطبيق الخطي T . ونسمي عدد أبعاد $T(V)$ رتبة التطبيق الخطي T .

٨ - ٦ أمثلة :

(١) إن \mathbb{R}^2 هو خيال التطبيق الخطي $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ المعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

وذلك لأن T غامر ، وبالتالي تكون رتبة التطبيق الخطي T

هي اثنان .

(٢) إن \mathbb{R} هو خيال التطبيق الخطي $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ المعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)$$

وبالتالي فإن رتبة التطبيق الخطي T هي واحد .

٩ - ٦ ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . لتكن مجموعة أشعة من V ، إذا كان $T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً وكان $T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_m)$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً من W فإن مجموعة الأشعة $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ من V مستقلة خطياً .
 إن الشرط اللازم والكافي لتكون $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ مستقلة خطياً هو أن تتحقق العلاقة :

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

حيث $a_1, \dots, a_m \in K$. في الحقيقة استناداً إلى [٥ - ٦] نجد :

$$T(a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_m \vec{v}_m) = T(\vec{0}) = \vec{0}$$

وبما أن T تطبيق خطي فإن الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة يكتب بالشكل :

$$a_1 T(\vec{v}_1) + \dots + a_m T(\vec{v}_m) = \vec{0}$$

وبما أننا فرضنا $T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_m)$ مستقلة خطياً فإن العلاقة الأخيرة تقتضي $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ وهو المطلوب .

(إن عكس هذه الخاصة معطى بالتمرين المحلول ٢٠٦) .

نحن الآن في وضع يمكننا من برهان النظرية التالية :

١٠ - نظرية : ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K .
 إذا كانت $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ قاعدة في V وإذا كانت $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ مجموعة
 جزئية من W فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $T: V \rightarrow W$ بحيث يكون :

$$T(\vec{e}_i) = \vec{w}_i \quad , \quad i=1, \dots, n$$

البرهان : لنبرهن أولاً وجود تطبيق خطي T يحقق العلاقات

$T(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$. إن من المعروف أنه يمكن كتابة كل شعاع v من V
 بشكل تركيب خطي وحيد بالنسبة لعناصر قاعدة V أي يوجد n عنصراً
 a_1, \dots, a_n من K وبشكل وحيد بحيث يكون :

$$\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_n \vec{e}_n$$

لنعرف تطبيقاً T يربط بين الشعاع \vec{v} ، والشعاع $T(\vec{v})$ من W حيث :

$$T(\vec{v}) = a_1 \vec{w}_1 + \dots + a_n \vec{w}_n \quad (1)$$

تعرف هذه العلاقة T تطبيقاً من V إلى W لأنها تقابل كل عنصر

\vec{v} من V بعنصر وحيد $T(\vec{v})$ من W . ومن الواضح أن :

$$T(\vec{e}_i) = \vec{w}_i \quad , \quad i=1, \dots, n$$

لائبات أن T هذا تطبيق خطي ، نأخذ الشعاع : $\vec{u} = b_1 \vec{e}_1 + \dots + b_n \vec{e}_n$
 من V فيكون وفق تعريف الفراغ الشعاعي :

$$\vec{v} + \vec{u} = (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + \dots + (a_n + b_n) \vec{e}_n$$

ومنه :

$$\begin{aligned}
T(\vec{v} + \vec{u}) &= (a_1 + b_1)\vec{w}_1 + \dots + (a_n + b_n)\vec{w}_n \\
&= a_1\vec{w}_1 + \dots + a_n\vec{w}_n + b_1\vec{w}_1 + \dots + b_n\vec{w}_n \\
&= T(\vec{v}) + T(\vec{u})
\end{aligned}$$

وإذا كان $\lambda \in K$ فان :

$$\lambda \vec{v} = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda a_n \vec{e}_n$$

ومنه :

$$\begin{aligned}
T(\lambda \vec{v}) &= \lambda a_1 \vec{w}_1 + \dots + \lambda a_n \vec{w}_n \\
&= \lambda (a_1 \vec{w}_1 + \dots + a_n \vec{w}_n) \\
&= \lambda T(\vec{v})
\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد برهننا أن T تطبيق خطي . بقي علينا أن نبرهن أن التطبيق الخطي T المعروف بالعلاقة (١) وحيد . من أجل هذا لنفرض أنه يوجد تطبيق خطي آخر F من الشكل :

$$F(\vec{e}_i) = \vec{w}_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

فيكون :

$$\begin{aligned}
\forall \vec{v} \in V \quad , \quad F(\vec{v}) &= F(a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_n \vec{e}_n) \\
&= a_1 F(\vec{e}_1) + \dots + a_n F(\vec{e}_n) \\
&= a_1 \vec{w}_1 + \dots + a_n \vec{w}_n = T(\vec{v})
\end{aligned}$$

إذن $F(\vec{v}) = T(\vec{v})$ منها كان \vec{v} من V وهذا ما يثبت أن F هو T نفسه أي أن التطبيق الخطي T وحيد وهذا ما يثبت صحة النظرية .

نواة تطبيق خطي :

ليكن V و W فراغين شعاعين على الحقل التبادلي K وليكن التطبيق $T: V \rightarrow W$. نسمي مجموعة الأشعة \vec{v} من W التي تحقق $T(\vec{v}) = \vec{0}$ نواة التطبيق الخطي T . نرمز للنواة هذه بـ $T^{-1}(\vec{0})$ أو $\text{Ker } T$:

$$\text{Ker } T = \{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0} \}$$

تتمتع نواة تطبيق خطي $T: V \rightarrow W$ بالخاصة التالية :

١١ - ٦ نظرية : $\text{Ker } T$ نواة التطبيق الخطي T فراغ شعاعي جزئي من V .

البهتان : أولاً - نحوي $\text{Ker } T$ الشعاع الصفري وذلك لأن خيال الشعاع الصفري وفق تطبيق خطي هو الشعاع الصفري . إذن لاثبات أن $\text{Ker } T$ فراغ شعاعي جزئي من V يجب أن نتحقق من الخاصتين التاليتين :

$$\forall \vec{v}, \vec{v}' \in \text{Ker } T \Rightarrow \vec{v} + \vec{v}' \in \text{Ker } T$$

$$\forall \lambda \in K, \vec{v} \in \text{Ker } T \Rightarrow \lambda \vec{v} \in \text{Ker } T$$

إذا كان \vec{v} و \vec{v}' من $\text{Ker } T$ فان :

$$\begin{aligned} T(\vec{v} + \vec{v}') &= T(\vec{v}) + T(\vec{v}') \\ &= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

إذنت : $\vec{v} + \vec{v}' \in \text{Ker } T$

وإذا كان : $\lambda \in K$ و $\vec{v} \in \text{Ker } T$ فان :

$$T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

إذنت $\lambda \vec{v} \in \text{Ker } T$ وبذلك يثبت المطلوب .

١٢ - نظرية : ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل التبديلي K ولنفرض أن عدد أبعاد كل من هذين الفراغين الشعاعيين محدود . ليكن T تطبيقاً خطياً لـ V في W . إن مجموع عدد أبعاد خيال V (رتبة التطبيق) مع عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V (انظر التمرين [٢١٦]) .

١٣ - أمثلة :

(١) إذا كان I التطبيق الخطي المطابق $I: V \rightarrow V$ فإنه :

$$\forall \vec{v} \in V , I(\vec{v}) = \vec{v}$$

إن نواة هذا التطبيق الخطي تتألف من الشعاع الصفري فقط وبالتالي فان عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي الصفر .

(٢) إذا رمزنا بـ O للتطبيق المعلوم $O: V \rightarrow V$ أي :

$$\forall \vec{v} \in V , O(\vec{v}) = \vec{0}$$

فإن هذا التطبيق خطي وإن نواته هي الفراغ الشعاعي V كله وبالتالي فان عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V .

(٣) إذا كان $T : R^2 \rightarrow R^2$ التطبيق الخطي المعروف بالعلاقة :

$$T(x, y) = (x, x + y)$$

حيث (x, y) مركبتا شعاع ما \vec{v} من R^2 بالنسبة لقاعدة مفروضة فإن نواة هذا التطبيق تتألف من الأشعة \vec{v} من R^2 حيث يكون $x = 0$ و $x + y = 0$ أي $x = 0$ و $y = 0$ وبالتالي فإن نواة هذا التطبيق تتألف من الشعاع الصفري فقط ، إذن عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي الصفر .

(٤) ليكن V الفراغ الشعاعي المؤلف من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق (لماذا ؟) . إذا كان $D : V \rightarrow V$ التطبيق المعروف بعملية الاشتقاق ، فإن D تطبيق خطي (لماذا ؟) وأن $\text{Ker } D$ نواة هذا التطبيق الخطي تتألف من جميع التوابع الثابتة . إن كل تابعين ثابتين من الشكل $f(x) = \alpha$ و $g(x) = \beta$ حيث α و β من R ومهما كانت x من R ، مرتبطان خطياً لأن $\beta f(x) - \alpha g(x) = 0$. إذن مجموعة التوابع الثابتة تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V ذا بعد واحد وبالتالي فإن عدد أبعاد نواة التطبيق الخطي D يساوي الواحد .

١٤ - ٦ تعريف : نقول عن تطبيق خطي أنه تطبيق خطي منتظم إذا كان متبايناً وغامراً أي إذا كان تقابلاً .

١٥ - ٦ نظرية : إذا كان V و W فراغين شعاعيين على الحقل التبادلي K وكان لهما العدد المحدود ذاته من الأبعاد فإن الشرط اللازم والكافي ليكون التطبيق الخطي $T : V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً منتظماً هو أن

تكون $\text{Ker } T$ نواة التطبيق الخطي T مؤلفة من عنصر وحيد هو الشعاع الصفري من V .

البرهان :

لنقوم بالشروط : T تطبيق خطي منتظم $\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{ \vec{0} \}$
 لنفرض وجود شعاع \vec{v} غير الشعاع الصفري في $\text{Ker } T$ ، فيكون $T(\vec{v}) = \vec{0}$. بما أن خيال الشعاع الصفري وفق تطبيق خطي هو الشعاع الصفري فان :

$$T(\vec{v}) = T(\vec{0}) = \vec{0}$$

نستنتج من هذه العلاقة واستناداً لكون التطبيق الخطي T متبايناً أن

$$\vec{v} = \vec{0} \text{ وهذا مخالف للفرض . إذن : } \text{Ker } T = \vec{0}$$

كفاية الشرط : $\text{Ker } T = \{ 0 \} \Leftrightarrow T$ تطبيق منتظم .

بما أن للفراغين الشعاعين V و W العدد ذاته من الأبعاد فيكفي أن نبرهن أن T تطبيق خطي متباين . أي أن نبرهن أنه إذا كان $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ فإن $T(\vec{v}_1) \neq T(\vec{v}_2)$ حيث $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. لنفرض أن :

$$T(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_2) \text{ فنجد أن :}$$

$$T(\vec{v}_1) - T(\vec{v}_2) \Rightarrow T(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}$$

أي أن :

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \text{Ker } T = \{ \vec{0} \}$$

وبالتالي فإن $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$ وهذا يخالف الفرض $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$. إذن يجب أن يكون $T(\vec{v}_1) \neq T(\vec{v}_2)$ وبذلك يتم المطلوب .

إن التطبيق الخطي المعطى بالمثال (١) من [١٣ - ٦] هو تطبيق خطي منتظم لـ V على V نفسه . وإن التطبيق الخطي المعطى بالمثال (٣) هو أيضاً تطبيق خطي منتظم لـ R^2 على R^2 نفسه ، أما التطبيق الخطي المعطى بالمثال (٢) فليس تطبيقاً خطياً منتظماً .

١٦ - ٦ نظرية : إذا كان T تطبيقاً خطياً منتظماً لـ V على W

فإن التطبيق العاكس $T^{-1}: W \rightarrow V$ هو تطبيق خطي أيضاً .

البرهان : إن من المعلوم أن T^{-1} تطبيق لأنه العلاقة العاكسة

لتقابل ولائبات أن T^{-1} تطبيق خطي نأخذ شعاعين كفيين \vec{w}_1, \vec{w}_2 من W وبما أن T تطبيق خطي منتظم فيوجد شعاعان \vec{v}_1, \vec{v}_2 من V بحيث يكون :

$$T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1 \quad , \quad T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$$

ومنه :

$$\begin{aligned} & \bullet \quad T^{-1}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = T^{-1}(T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)) \\ & = T^{-1}(T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) \quad (T \text{ تطبيق خطي}) \\ & = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (T^{-1} \circ T = I \text{ التطبيق المطابق}) \\ & = T^{-1}(\vec{w}_1) + T^{-1}(\vec{w}_2) \end{aligned}$$

ونجد كذلك من أجل كل $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned}
T^{-1}(\lambda \vec{w}_1) &= T^{-1}(\lambda T(\vec{v}_1)) \\
&= T^{-1}(T(\lambda \vec{v}_1)) \quad (T \text{ تطبيق خطي}) \\
&= \lambda \vec{v}_1 \\
&= \lambda T^{-1}(\vec{w}_1)
\end{aligned}$$

وهذا يثبت أن T^{-1} تطبيق خطي .

تركيب تطبيقات الخطية :

١٧ - ٦ نظرية . لتكن V و U و W ثلاثة فراغات شعاعية على الحقل K وليكن T تطبيقاً خطياً من V إلى U و F تطبيقاً خطياً من U إلى W . إن التطبيق المركب $F \circ T$ هو تطبيق خطي من V إلى W .

البرهان : إذا كان $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ فان :

$$\begin{aligned}
(F \circ T)(\vec{v} + \vec{v}') &= F(T(\vec{v} + \vec{v}')) \\
&= F(T(\vec{v}) + T(\vec{v}')) \quad (T \text{ تطبيق خطي}) \\
&= (F \circ T)(\vec{v}) + (F \circ T)(\vec{v}') \quad (F \text{ تطبيق خطي})
\end{aligned}$$

وإذا كان $\lambda \in K$ فان :

$$\begin{aligned}
(F \circ T)(\lambda \vec{v}) &= F(T(\lambda \vec{v})) \\
&= F(\lambda T(\vec{v})) \quad (T \text{ تطبيق خطي}) \\
&= \lambda (F \circ T)(\vec{v}) \quad (F \text{ تطبيق خطي})
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $F \circ T$ تطبيق خطي وهو المطلوب .
 ١٨ - ٦ مثال : ليكن T و F تطبيقين خطيين من R^3 إلى R^3
 معرفين بالشكل :

$$T(x, y, z) = (x, z, 0)$$

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

حيث (x, y, z) تمثل مركبات شعاع ما من R^3 .
 إن التطبيق المركب $F \circ T$ يعطى بالعلاقة :

$$\begin{aligned} (F \circ T)(x, y, z) &= F(T(x, y, z)) = F(x, z, 0) \\ &= (x, z, 0) \end{aligned}$$

وإن التطبيق المركب $T \circ F$ يعطى بالعلاقة :

$$\begin{aligned} (T \circ F)(x, y, z) &= T(F(x, y, z)) = T(x, y, 0) \\ &= (x, 0, 0) \end{aligned}$$

وهذا ما يذكرنا بأن تركيب التطبيقات غير تبديلي .

فراغ التطبيقات الخطية :

تتصف مجموعة التطبيقات الخطية من فراغ شعاعي V إلى فراغ شعاعي W ، معرفين على الحقل K ، بخاصة أساسية هامة هي أن لها بنية الفراغ الشعاعي . وأكثر من هذا ، تتصف مجموعة التطبيقات الخطية من فراغ شعاعي V إلى الفراغ V نفسه ببنية جبرية إضافية إذ أنه يعرف على مجموعة التطبيقات الخطية عملية ضرب سنأتي على ذكرها بعد قليل .

لنرمز بـ $\text{Hom}(V, W)$ لمجموعة التطبيقات الخطية من الفراغ الشعاعي V إلى الفراغ الشعاعي W المعرفين على الحقل التبادلي K . إذا كان $T, F \in \text{Hom}(V, W)$ فإن التطبيق $T + F$ المعرف بالعلاقة :

$$(I) \quad (T + F)(\vec{v}) = T(\vec{v}) + F(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V$$

تطبيق خطي من V إلى W . وبالتالي ينتمي لـ $\text{Hom}(V, W)$ لأنه إذا كان $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ فإن :

$$\begin{aligned} (T + F)(\vec{v} + \vec{v}') &= T(\vec{v} + \vec{v}') + F(\vec{v} + \vec{v}') \\ &= T(\vec{v}) + T(\vec{v}') + F(\vec{v}) + F(\vec{v}') \\ &= T(\vec{v}) + F(\vec{v}) + T(\vec{v}') + F(\vec{v}') \\ &= (T + F)(\vec{v}) + (T + F)(\vec{v}') \end{aligned}$$

وإذا كان $\lambda \in K$ فإن :

$$\begin{aligned} (T + F)(\lambda \vec{v}) &= T(\lambda \vec{v}) + F(\lambda \vec{v}) \\ &= \lambda T(\vec{v}) + \lambda F(\vec{v}) \\ &= \lambda (T + F)(\vec{v}) \end{aligned}$$

ونكون قد برهننا أن $T + F$ تطبيق خطي من V إلى W .

وإذا كان $\lambda \in K$ فإنه يبرهن بسهولة أن التطبيق λT المعرف بالعلاقة

$$(II) \quad (\lambda T)(\vec{v}) = \lambda T(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V$$

هو تطبيق خطي من V الى W . وهذا نكون قد عرفنا على $\text{Hom}(V, W)$ ، مجموعة التطبيقات الخطية من V الى W ، عملية داخلية هي الجمع التي رمزنا لها تجاوزاً بـ $+$ ، كما عرفنا عملية خارجية هي الضرب بعنصر من الحقل K . واذا اعتبرنا العنصر الصفري في $\text{Hom}(V, W)$ هو التطبيق المعلوم فإنه يمكن بسهولة (أو استناداً إلى [٢-٥] والتمرين المحلول [١٥٧]) برهان النظرية التالية :

١٩ - ٦ نظرية : تشكل المجموعة $\text{Hom}(V, W)$ المزودة بعملياتي الجمع والضرب بعنصر من الحقل K المعرفتين بالمعادلتين (I) و (II) ، فراغاً شعاعياً على الحقل K ، ندعوه فراغ التطبيقات الخطية . سنذكر فيما يلي حالتين خاصتين من فراغ التطبيقات الخطية . الأولى $\text{Hom}(V(R), R)$ والثانية $\text{Hom}(V, V)$.

بما أن الحقل التبادلي R ، استناداً إلى المثال (١) من [٣-٥] ، هو الفراغ الشعاعي $V_1(R)$ ذاته فإنه يمكننا أن نكتب الفراغ الشعاعي $\text{Hom}(V(R), V_1(R))$ بالشكل $\text{Hom}(V(R), R)$ ، ويمثل الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التطبيقات الخطية من الفراغ الشعاعي V على R إلى الفراغ الشعاعي R .

٢٠ - ٦ تعريف : نسمي الفراغ الشعاعي $\text{Hom}(V(R), R)$ الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V . ويرمز عادة لهذا الفراغ بـ V^* .

٢١ - ٦ نظرية : إذا كان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي $V(R)$ محدوداً ويساوي n فان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي الثنوي V^* يساوي أيضاً n (انظر التمرين ٢٢٢) .

القاعدة الثنوية لفراغ شعاعي :

إذا كان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي $V(R)$ يساوي n فإن هناك n شعاعاً مستقلاً v_1, \dots, v_n من $V(R)$ تشكل قاعدة فيه نوز لها بـ $\{v_i\}$. لتكن v_1^*, \dots, v_n^* جملة أشعة مستقلة خطياً من V^* ، الفراغ الشعاعي الثنوي (أو المرافق) ، بحيث تحقق العلاقات :

$$(III) \quad v_i^* (v_j) = \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & i=j \\ = 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n$$

إن v_i^* تطبيقات خطية من V إلى R ، أما $v_i^*(v_j)$ فهو خيال الشعاع v_j من $V(R)$ وفق التطبيق v_i^* . تشكل جملة الأشعة v_1^*, \dots, v_n^* استناداً إلى [٦ - ٢١] ، قاعدة في V^* . نوز لهذه القاعدة بالشكل $\{v_i^*\}$ ونسماها القاعدة الثنوية أو المرافقة في V^* للقاعدة $\{v_i\}$ في V .

٢٢ - ٦ نظرية : ليكن W, V فراغين شعاعيين على الحقل R . إذا كان $T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً فإن التطبيق $T^*: W^* \rightarrow V^*$ المعروف بالعلاقة :

$$\forall g \in W^* , \quad T^*(g) = g \circ T$$

تطبيق خطي . حيث $g \in W^*$ هو تطبيق خطي من W إلى R و $g \circ T$ هو التطبيق المركب وهو تطبيق خطي من V إلى R أي عنصر من V^* (انظر التمرين ٢٢٤) .

نسمي التطبيق T^* المعروف بالنظرية السابقة منقول التطبيق الخطي T

* الفراغ الشعاعي $\text{Hom}(V, V)$:

ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل التبادلي K . ان $\text{Hom}(V, V)$ مجموعة التطبيقات الخطية من V الى V ذاته تشكل ، كما برهنا ، فراغاً شعاعياً على الحقل K . نسمي كل عنصر من الفراغ الشعاعي $\text{Hom}(V, V)$ مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V وإن دراسة المؤثرات على فراغ شعاعي تحتل مكاناً هاماً في أبحاث الجبر الخطي العالية .

إن التطبيق الخطي D المعروف بعملية الاشتقاق المعطى بالمثال (٤) [١٣-٦] مؤثر خطي على الفراغ الشعاعي المؤلف من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق . يدعى هذا المؤثر المؤثر التفاضلي .

ان تركيب تطبيقين خطيين من V الى V ، كما رأينا ، هو تطبيق خطي وبالتالي فان عملية التركيب « \circ » هذه تعرف عملية «ضرب» نرمز لها بـ « \cdot » على الفراغ الشعاعي $\text{Hom}(V, V)$ من الشكل :

$$(IV) \quad \forall F, T \in \text{Hom}(V, V) : F \cdot T = F \circ T$$

تتمتع عملية الضرب هذه بالخواص التالية :

٢٣ - ٦ عملية الضرب عملية تجميعية وذلك لكون عملية تركيب التطبيقات تجميعية . ولكنها في الحالة العامة ليست تبديلية . انظر المثال [١٨-٦] .

٢٤ - ٦ اذا كان T مؤثراً خطياً على V فيرمز عادة بـ :

$T^0 = I$ كما يرمز أيضاً بـ $T^3 = T \cdot T \cdot T$ و $T^2 = T \cdot T$
 التطبيق المطابق والذي ندعوه المؤثر الجيادي ، ويكون :

$$\forall T \in \text{Hom}(V, V) : T^0 \cdot T = T \cdot T^0 = T$$

٢٥ - ٦ منها كانت T_2, T_1, F من $\text{Hom}(V, V)$ فان :

$$F \cdot (T_1 + T_2) = F \cdot T_1 + F \cdot T_2$$

$$(T_1 + T_2) \cdot F = T_1 \cdot F + T_2 \cdot F$$

أي أن عملية الضرب المعرفة آنفاً توزيعية بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على مجموعة التطبيقات ، لأنه منها كان الشعاع \vec{v} من V فان :

$$\begin{aligned} (F \cdot (T_1 + T_2))(\vec{v}) &= F((T_1 + T_2)(\vec{v})) \\ &= F(T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v})) \\ &= F(T_1(\vec{v})) + F(T_2(\vec{v})) \quad (F \text{ تطبيق خطي}) \\ &= (F \cdot T_1)(\vec{v}) + (F \cdot T_2)(\vec{v}) \\ &= (F \cdot T_1 + F \cdot T_2)(\vec{v}) \end{aligned}$$

ومننه :

$$F \cdot (T_1 + T_2) = F \cdot T_1 + F \cdot T_2$$

ونحصل بصورة مشابهة ، على العلاقة الثانية .

٢٦ - ٦ منها كان λ من K ومنها كان F, T من $\text{Hom}(V, V)$

فان :

$$\lambda (F . T) = (\lambda F) . T = F . (\lambda T)$$

لأنه مها كان الشعاع \vec{v} من V فإن :

$$\begin{aligned} (\lambda (F . T)) (\vec{v}) &= \lambda (F (T (\vec{v}))) \\ &= (\lambda F) (T (\vec{v})) = ((\lambda F) . T) (\vec{v}) \\ &= F (\lambda T (\vec{v})) \quad (F \text{ تطبيق خطي}) \\ &= (F . (\lambda T)) (\vec{v}) \end{aligned}$$

ومنه نجد العلاقة المطلوبة .

نستنتج مما سبق مايلي :

- (١) إن الخواص [٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ - ٢٦] تعرف الفراغ الشعاعي $\text{Hom}(V, V)$ كحلقة واحدة (ذات عنصر حيادي) . بينا الخاصة [٢٦ - ٢٦] تجعل من $\text{Hom}(V, V)$ فراغاً شعاعياً بالاضافة الى كونه حلقة . نسمي $\text{Hom}(V, V)$ المزود بهذه العمليات جبراً على الحقل $K^{(*)}$.
- (٢) إن مجموعة المؤثرات الخطية المنتظمة على الفراغ الشعاعي أي مجموعة التطبيقات الخطية المنتظمة من V على V ذاته ، تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من $\text{Hom}(V, V)$ (لماذا ؟) . أضف الى ذلك أن

« * » نقول عن حلقة S أنها تشكل جبراً على الحقل K إذا كانت S فراغاً شعاعياً على الحقل K وكان :

$$\forall u, v \in S, \forall \lambda \in K, \lambda (u v) = (\lambda u) v = u (\lambda v)$$

هذه المجموعة التي أنشئت عليها عملية الضرب المعروفة بالعلاقة (IV) تشكل زمرة غير تبديلية في الحالة العامة وأن العنصر النظير لكل مؤثر خطي منتظم T هو المؤثر الخطي المعاكس T^{-1} .



تمارين محلولة

١٩٩ - تمرين : لتكن (v_1, \dots, v_n) قاعدة في الفراغ الشعاعي ^(١)

V المعرف على الحقل K . ليكن $v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ شعاعاً ما من

V ، حيث $k_1, \dots, k_n \in K$ ولنعرف التطبيق $T : V \rightarrow K^n$

بالشكل :

$$T(v) = (k_1, \dots, k_n)$$

حيث K^n الفراغ الشعاعي $V_n(K)$. برهن أن T تطبيق خطي .

الحل : لنتحقق من شرطي التطبيق الخطي . إذا كان :

$$v' = k'_1 v_1 + \dots + k'_n v_n \quad , \quad k'_1, \dots, k'_n \in K$$

فإن :

$$v + v' = (k_1 + k'_1) v_1 + \dots + (k_n + k'_n) v_n$$

وبالتالي :

$$T(v + v') = (k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n)$$

$$= (k_1, \dots, k_n) + (k'_1, \dots, k'_n)$$

$$= T(v) + T(v')$$

(١) نذكر القارئ بما أوردناه سابقاً من أننا سنرمز للأشعة بأحرف

لاتينية والمقادير السلمية بأحرف يونانية لذا سنعمل في هذه التمارين الأسم من

فوق الأحرف الدالة على أشعة .

أي الشرط الأول محقق .

ومن أجل $\lambda \in K$ فان :

$$\begin{aligned}\lambda v &= \lambda (k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) = \lambda (k_1 v_1) + \dots + \lambda (k_n v_n) = \\ &= ((\lambda k_1) v_1 + \dots + (\lambda k_n) v_n)\end{aligned}$$

ومنه :

$$\begin{aligned}T(\lambda v) &= (\lambda k_1, \dots, \lambda k_n) \\ &= \lambda (k_1, \dots, k_n) \\ &= \lambda T(v)\end{aligned}$$

أي الشرط الثاني محقق وهو المطلوب .

٣٠٠ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K وليكن

$T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً . برهن أن خيال مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من V هو مجموعة أشعة مرتبطة من W .

الحل : إذا كانت v_1, \dots, v_n مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من V

فيوجد a_1, \dots, a_n من K ليست جميعها معدومة بحيث يكون :

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

ومنه :

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = T(0) = 0$$

وبما أن T تطبيق خطي فان :

$$a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0$$

وهذا يعني أن $T(v_1), \dots, T(v_n)$ مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من W .

٢٠١ - ليكن $T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً . إذا كان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V هو n فبرهن أن عدد أبعاد $T(V)$ هو أصغر أو يساوي n .

الحل : لتكن مجموعة أشعة من $T(V)$ ، يوجد مجموعة أشعة a_1, \dots, a_m من V بحيث يكون :

$$T(a_i) = w_i \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

إذا كان عدد أبعاد $T(V)$ أكبر من n فيمكن اختيار m أكبر من n بحيث تكون مجموعة الأشعة w_1, \dots, w_m مستقلة خطياً . عندها نجد استناداً الى الخاصة [٣-٥] من خواص التطبيق الخطي أن a_1, \dots, a_m مستقلة خطياً . وهذا يعني أن عدد أبعاد V أكبر من n وهذا يخالف للفرض . وبالتالي يجب أن تكون $m \leq n$ وهو المطلوب .

ملاحظة : نستنتج من التمرين السابق أن رتبة تطبيق خطي $T: V \rightarrow W$ تساوي على الأكثر عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V .

٢٠٢ - ليكن A شعاعاً مفروضاً من R^3 . نعرف التطبيق $T: R^3 \rightarrow R$ بالعلاقة :

$$T(v) = v \cdot A \quad (\forall v \in R^3)$$

حيث . تدل على عملية الضرب الداخلي (العددي) للشعاعين v و A برهن أن T تطبيق خطي .

الحل : إذا كان $v, v' \in R^3$ فإن :

$$\begin{aligned} T(v + v') &= (v + v') \cdot A \\ &= v \cdot A + v' \cdot A \quad (\text{حسب خواص الجداء الداخلي}) \\ &= T(v) + T(v') \end{aligned}$$

وكذلك إذا كان $\alpha \in R$ فإن :

$$\begin{aligned} T(\alpha v) &= (\alpha v) \cdot A \\ &= \alpha (v \cdot A) \quad (\text{حسب خواص الجداء الداخلي}) \\ &= \alpha T(v) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن T خطي .

٢٠٣ - ليكن الفراغ الشعاعي V على الحقل R . إذا كان f, g تطبيقين خطيين $f, g: V \rightarrow R$ فبرهن أن التطبيق $F: V \rightarrow R^2$ المعطى بالعلاقة $F(v) = (f(v), g(v))$, $\forall v \in V$ هو تطبيق خطي .

الحل : مهما كان $v, v' \in V$ فلدينا .

$$\begin{aligned} F(v + v') &= (f(v + v'), g(v + v')) \\ &= (f(v) + f(v'), g(v) + g(v')) \quad (\text{تطبيقان خطيان}) \\ &= (f(v), g(v)) + (f(v'), g(v')) \quad (\text{جمع الأشعة}) \\ &= F(v) + F(v') \end{aligned}$$

وكذلك مهما كان $\alpha \in R$ فإن :

$$F(\alpha v) = (f(\alpha v), g(\alpha v))$$

$$= (\alpha f(v), \alpha g(v)) \quad (g, f \text{ تطبيقان خطيان})$$

$$= \alpha (f(v), g(v)) \quad (\text{ضرب شعاع بعدد})$$

$$= \alpha F(v)$$

وبذلك يتم المطلوب .

٢٠٤ - ليكن V الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق . إذا كان D المؤثر التفاضلي على V و I التطبيق المطابق على V فبرهن أن التطبيق $T = D - I : V \rightarrow V$ هو تطبيق خطي . أوجد نواة ورتبة هذا التطبيق .

الحل : لاثبات أن T خطي نأخذ $a, u \in V$ فنجد :

$$T(a + u) = (D - I)(a + u)$$

$$= D(a + u) - I(a + u) \quad (\text{حسب تعريف مجموع تابعين})$$

$$= D(a) + D(u) - I(a) - I(u) \quad (\text{حسب خواص مشتق تابعين})$$

$$= [D(a) - I(a)] + [D(u) - I(u)] \quad (\text{عملية جمع التوابع تبديلية وتجميعية})$$

$$= T(a) + T(u)$$

وبصورة مشابهة نجد أنه إذا كان $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن :

$$T(\alpha a) = \alpha T(a)$$

وبالتالي فإن التطبيق T خطي وهو المطلوب .

إن نواة هذا التطبيق :

$$\text{Ker } T = \{ f \in V : T(f) = 0 \}$$

$$(D - I)(f) = 0 \Rightarrow Df - If = 0$$

$$\Rightarrow Df = If + O = f + O = f$$

وحل المعادلة التفاضلية الحاصلة $Df = f$ هو من الشكل :

$$f(x) = e^x + \lambda$$

حيث λ ثابت اختياري .

تشكل مجموعة هذه التوابع نواة التطبيق الخطي T ، وهي فراغ شعاعي جزئي من V ذو بعد يساوي 1 . رتبة التطبيق الخطي T إذن تساوي الواحد .

٢٠٥ - لنفترض أن الشعاعين e_1, e_2 يشكلان قاعدة في R^2 . وليكن $T: R^2 \rightarrow R^2$ تطبيقاً خطياً . برهن أنه إما أن يكون $T(e_1)$ ، $T(e_2)$ مستقلين خطياً أو أن يكون عدد أبعاد $T(R^2)$ يساوي الواحد أو الصفر .

الحل : إن الشعاعين e_1, e_2 مستقلان خطياً لكونها يشكلان قاعدة في R^2 . فليتنا إحدى الحالات الثلاث التالية :

١ - $T(e_1)$ و $T(e_2)$ مستقلان خطياً وبالتالي يولدان $T(R^2)$ لأن ، حسب التمرين [٢٠١] ، عدد أبعاد $T(R^2)$ يساوي 2 على الأكثر ، وفي هذه الحالة يساوي اثنين .

٢ - $T(e_1)$ و $T(e_2)$ مرتبطان خطياً ، عندها يوجد عدد $\lambda \neq 0$ بحيث يكون $T(e_2) = \lambda T(e_1)$. إذا كان $v \in R^2$ فيوجد عدنان α, β بحيث يكون $v = \alpha e_1 + \beta e_2$. ومنه :

$$T(v) = T(\alpha e_1 + \beta e_2)$$

$$T(v) = \alpha T(e_1) + \beta T(e_2) \quad (T \text{ تطبيق خطي})$$

$$= (\alpha + \beta \lambda) T(e_1)$$

أي أن كل شعاع من $T(\mathbb{R}^2)$ يمكن كتابته بدلالة الشعاع $T(e_1)$ ، وبالتالي فإن عدد أبعاد $T(\mathbb{R}^2)$ يساوي الواحد .

٣ - $T(e_1)$ ، يساويان شعاع الصفر . إن كل شعاع من $T(\mathbb{R}^2)$

هو الشعاع الصفر وبالتالي فإن $T(\mathbb{R}^2) = \{0\}$ وعدد أبعاده يساوي الصفر .

٢٠٦ - (عكس الخاصة ٩-٦) .

ليكن V و W فواعين شعاعين على الحقل K وليكن $T: V \rightarrow W$

تطبيقاً خطياً نواته $\{0\}$. إذا كانت مجموعة أشعة مستقلة

خطياً من V فان $T(v_1), \dots, T(v_n)$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً

من W .

الحل : لا كان T تطبيقاً خطياً فان :

$$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$$

وبالتالي فان :

$$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = 0 \Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \quad (\text{لأن } \text{Ker } T = \{0\})$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

لأن الأشعة v_1, \dots, v_n مستقلة خطياً . وهو المطلوب .

٢٠٧ - الدوران في المستوي هو تطبيق خطي لمجموعة نقاط المستوي

على نفسه .

(باختيار o مبدأ الاحداثيات في المستوي يمكن تمثيل كل نقطة P من هذا المستوي بشعاع طايق oP) .

الحل : ليكن ox, oy محورين متعامدين في المستوي π . وليكن (i, j) قاعدة طبيعية (قانونية) في π . لنعتبر التطبيق T هو الدوران بمقدار زاوية ثابتة α حول النقطة o ولنبرهن أن T تطبيق خطي . يمكن أن يمثل الشعاع $v = oP$ باحداثي النقطة $P = (x, y)$

إذا كانت ox_1y_1 الجملة الجديدة الناتجة عن دوران الجملة oxy فإن وضع P' بالنسبة للجملة الجديدة مشابه لوضع P بالنسبة للجملة القديمة . فإذا رمزنا ب (x'_1, y'_1) و (x', y') لاحداثيات P' بالنسبة للجملتين الجديدة والقديمة على الترتيب فإن :

$$x'_1 = x, \quad y'_1 = y$$

$$oP' = x'_1 i_1 + y'_1 j_1 \quad : \text{ومنه}$$

$$= x i + y j$$

: ومنه

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

وحسب [١-٦] نجد أن T تطبيق خطي . وهو المطلوب .

٢٠٨ - التحاكي في المستوي هو تطبيق خطي لنقاط المستوي في المستوي نفسه .

الحل : نقول ان النقطة P' تحاكي النقطة P بتحاك مركزه O ونسبته λ إذا تحقق الشرط :

$$\vec{OP'} = \lambda \vec{OP}$$

إذا كتبنا $\vec{v} = \vec{OP} = (x, y)$ ، $\vec{v'} = \vec{OP'} = (x', y')$ فان :

$$x' = \lambda x \quad , \quad y' = \lambda y$$

وبالتالي فان للتطبيق $T : \vec{v} \rightarrow \vec{v'}$ هو تطبيق خطي .

حالة خاصة : إذا كان $\lambda = -1$ فان $\vec{v'} = -\vec{v}$ وبالتالي $T : \vec{v} \rightarrow -\vec{v}$

يمثل تطبيق التناظر بالنسبة لـ O وهو تطبيق خطي .

٢٠٩ - إذا كان T و F مؤثرين خطيين على R^2 معرفين بالشكل :

$$T(x, y) = (y, x) \quad , \quad F(x, y) = (0, x)$$

فأوجد : $T - F$ ، T^2 ، F^2 ، $F \circ T$ ، $T \circ F$

الحل : حسب التعريف لدينا :

$$(T \circ F)(x, y) = T(F(x, y))$$

$$= T(0, x) = (x, 0)$$

$$(F \circ T)(x, y) = F(y, x) = (0, y)$$

$$F^2(x, y) = F(F(x, y)) = F(0, x) = (0, 0)$$

إذن $F^2 = O$ (التطبيق المعدوم)

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(y, x) = (x, y)$$

إذن $T^2 = I$ (التطبيق المطابق)

$$(T - F)(x, y) = T(x, y) - F(x, y) \\ = (y, x) - (0, x) = (y, 0)$$

٢١٠ - ليكن $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تطبيقين خطيين معرفين بالشكل :

$$T(x, y, z, w) = (x - y, z + w, x - y + z)$$

$$F(x, y, z) = (0, x + y, x + y + z)$$

والمطلوب إيجاد : ١ - رتبة و صفرية كل من T و F .

٢ - F^2 و $F \circ T$.

٣ - رتبة و صفرية F^2 .

الحل : ١ - إن نواة التطبيق الخطي T هي :

$$\text{Ker } T = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : T(x, y, z, w) = 0 \} \\ = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + w = 0, x - y + z = 0 \}$$

إذن تتعين $\text{ker } T$ بالمعادلات :

$$x - y = 0, z = 0, w = 0$$

وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً ذا بعد واحد . إذن صفرية T تساوي الواحد ورتبته اذن ثلاثة . (مستندين في ذلك على النظرية ١٢ - ٦) .

أما بالنسبة لـ F فان :

$$\text{Ker } F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0 \} \\ = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, x + y + z = 0 \}$$

إذن تتعين Ker T بالمعادلات :

$$x + y = 0 , z = 0$$

وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً من R^3 ذا بعد واحد . إذن صفرية F تساوي الواحد ورتبته تساوي اثنين .

$$\begin{aligned} F \circ T(x, y, z) &= F(x - y, z + w, x - y + z) \quad - ٢ \\ &= (0, x - y + z + w, 2x - 2y + 2z + w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2(x, y, z) &= F \circ F(x, y, z) = F(0, x + y, x + y + z) \\ &= (0, x + y, 2x + 2y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } F^2 &= \{ (x, y, z) \in R^3 : F^2(x, y, z) = 0 \} \quad - ٣ \\ &= \{ (x, y, z) \in R^3 : x + y = 0, 2x + 2y + z = 0 \} \end{aligned}$$

اذن تتعين $\text{ker } F^2$ بالمعادلات $x + y = 0, z = 0$ وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً ذا بعد واحد . إذن صفرية F^2 تساوي الواحد ورتبته تساوي اثنين .

٢١١ - ليكن V فراغ التطبيقات المستمرة من R الى R . إذا كان التطبيق $T: V \rightarrow V$ معطى بالعلاقة :

$$\forall f \in V, \forall x, t \in R, (Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

فان T مؤثر خطي على V نسميه المؤثر التكامل .

الحل : لاثبات أن T تطبيق خطي من V الى V وبالتالي مؤثر

خطي على V ، نأخذ $f, g \in V$ فيكون استناداً لخواص التكامل :

$$\begin{aligned}
(T(f+g))(x) &= \int_0^x (f+g)(t) dt \\
&= \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt \\
&= (Tf)(x) + (Tg)(x) \\
&= (Tf + Tg)(x)
\end{aligned}$$

ومنه :

$$T(f+g) = Tf + Tg$$

كذلك اذا كان $\lambda \in \mathbb{K}$ فإن .

$$\begin{aligned}
(T(\lambda f))(x) &= \int_0^x (\lambda f)(t) dt \\
&= \lambda \int_0^x f(t) dt = \lambda (Tf)(x)
\end{aligned}$$

ومنه :

$$T(\lambda f) = \lambda (Tf)$$

وهذا ما يثبت أن T مؤثر خطي على V .

٢١٣ - الفراغ الذاتي لمؤثر خطي : ليكن T مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V على الحقل التبادلي \mathbb{K} . نقول عن الشعاع غير المعدوم $v \in V$ أنه شعاع ذاتي بالنسبة لـ T اذا وجد $\lambda \in \mathbb{K}$ بحيث يكون :

$T(v) = \lambda v$ وتسمى λ القيمة الذاتية المرافقة ، برهن أن مجموعة الأشعة الذاتية ، V_λ ، بالنسبة لـ T والموافقة للقيمة الذاتية λ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V ، نسميه الفراغ (الجزئي) الذاتي لـ T الموافق للقيمة الذاتية λ .

الحل : للبرهان على أن V_λ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V يكفي أن نتحقق من الشرطين التاليين :

$$\forall v_1, v_2 \in V_\lambda \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\lambda$$

$$\forall v \in V_\lambda, k \in K \Rightarrow kv \in V_\lambda$$

إن v_1 و v_2 من V_λ يعني أن :

$$T(v_1) = \lambda v_1, \quad T(v_2) = \lambda v_2$$

ومنه :

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad (T \text{ تطبيق خطي})$$

$$= \lambda v_1 + \lambda v_2$$

$$= \lambda (v_1 + v_2)$$

وهذا يعني أن $v_1 + v_2 \in V_\lambda$ كذلك .

$$T(kv) = kT(v) \quad (T \text{ تطبيق خطي})$$

$$= k\lambda v = \lambda(kv) \quad (\text{عملية الجداء في } K \text{ تبديلية})$$

ومنه $kv \in V_\lambda$ وبذلك يتم المطلوب .

٢١٣ - ليكن T مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V ولتكن

v_1, \dots, v_m أشعة ذاتية بالنسبة لـ T على الترتيب مع القيم الذاتية $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (انظر التمرين ٢١٢) .
إذا كان :

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i, j = 1, \dots, m$$

فإن : v_1, \dots, v_m مجموعة أشعة مستقلة خطياً .

الحل : نتبع هنا طريقة البرهان بالتراجع . إذا كان $m = 1$ فإن $v_1 \in V$ وبما أن $v_1 \neq 0$ بالتعريف فإن v_1 مستقل خطياً . أما إذا كان $m = 2$ فإننا نفرض العلاقة :

$$(I) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0, \quad a_1, a_2 \in K$$

ولنتثبت أن $a_1 = a_2 = 0$. إذا ضربنا طرفي العلاقة (I) بـ λ_1 فنحصل على :

$$(II) \quad a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0$$

وإذا أخذنا التطبيق T على طرفي العلاقة (I) فنحصل على :

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = T(0) = 0$$

وبما أن T خطي فنجد :

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) = 0$$

وبالتالي :

$$(III) \quad a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

ومن العلاقتين (II) و (III) نجد :

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$$

بما أن $v_2 \neq 0$ بالتعريف و $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ فإن $a_2 = 0$ وبالرجوع لـ (I) نجد $a_1 = 0$.

(بصورة مشابهة نقيم البرهان من أجل $m > 2$).

٢١٤ - ليكن $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالعلاقة :

$$T(v) = T(x, y) = (x - 2y, -x + y)$$

حيث $v = (x, y)$ شعاع ما من \mathbb{R}^2 . أوجد الأشعة الذاتية والقيم الذاتية المرافقة بالنسبة لـ T .

الحل : إذا وجد شعاع ذاتي $v = (x, y)$ بالنسبة لـ T ورافق القيمة الذاتية λ فيجب أن يكون $T(v) = \lambda v$ أي :

$$\lambda x = x - 2y, \quad \lambda y = -x + y$$

ومنه نحصل على المعادلتين :

$$(*) \quad \begin{cases} (\lambda - 1)x + 2y = 0 \\ x + (\lambda - 1)y = 0 \end{cases}$$

وبما أن $v = (x, y) \neq 0$ فإنه يجب أن يكون معين الأمثال في مجموعة المعادلتين السابقتين صفراً أي :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 2 = 0$$

ومنه :

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$$

إذا عوضنا $\lambda = \lambda_1$ في المعادلتين (*) فنجد الفراغ الذاتي :

$$V_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \sqrt{2}y = 0 \}$$

الموافق للقيمة الذاتية λ_1 .

وإذا عوضنا $\lambda = \lambda_2$ في المعادلتين (*) نجد الفراغ الذاتي :

$$V_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - \sqrt{2}y = 0 \}$$

الموافق للقيمة الذاتية λ_2 .

٢١٥ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K عدد أبعاده محدود وليكن T و F تطبيقين خطيين من V الى V نفسه بحيث يكون $F \circ T = T \circ F$. اذا كان v شعاعاً ذاتياً لـ T مرافقاً للقيمة الذاتية λ فبرهن أن $F(v)$ شعاع ذاتي لـ T مرافق للقيمة الذاتية λ بشرط $F(v) \neq 0$.

الحل : ان فرض v شعاعاً ذاتياً لـ T مرافقاً للقيمة الذاتية λ يعني أن :

$$T(v) = \lambda v$$

وبأخذ التطبيق F على الطرفين نجد أن :

$$F(T(v)) = F(\lambda v)$$

$$F \circ T(v) = \lambda F(v) \quad (F \text{ خطي})$$

ومن العلاقة $F \circ T = T \circ F$ نجد أن :

$$T \circ F(v) = T(F(v)) = \lambda F(v)$$

وهذا يعني أن $F(v)$ شعاع ذاتي لـ T مرافق للقيمة الذاتية λ وهو المطلوب .

٢١٦ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . وليكن

$T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً . إذا كان p, q, n عدد أبعاد $V, \text{Ker}T$ و $T(V)$ على الترتيب فبرهن أن : $n = p + q$.

الحل : ليكن w_1, \dots, w_p قاعدة في $T(V)$. وليكن

v_1, \dots, v_p أشعة من V بحيث يكون : $T(v_i) = w_i$ و $i = 1, \dots, p$

وليكن u_1, \dots, u_q قاعدة في $\text{Ker} T$. إذا برهنا أن مجموعة الأشعة

$(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q)$ تصلح قاعدة في V فإننا نكون قد برهنا

أن $n = p + q$.

في الحقيقة إذا كان v شعاعاً من V فانه يوجد $a_1, \dots, a_p \in K$

بحيث يكون :

$$\begin{aligned} T(v) &= a_1 w_1 + \dots + a_p w_p \\ &= a_1 T(v_1) + \dots + a_p T(v_p) \\ &= T(a_1 v_1 + \dots + a_p v_p) \quad (T \text{ تطبيق خطي}) \end{aligned}$$

ومنه :

$$T(v) - T(a_1 v_1 + \dots + a_p v_p) = 0$$

$$T(v - a_1 v_1 - \dots - a_p v_p) = 0 \quad (T \text{ تطبيق خطي})$$

وبالتالي فإن $v - (a_1 v_1 + \dots + a_p v_p)$ ينتمي إلى $\text{Ker} T$. إذن

يوجد $b_1, \dots, b_q \in K$ بحيث يكون :

$$v - (a_1 v_1 + \dots + a_p v_p) = b_1 u_1 + \dots + b_q u_q$$

ومنه :

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + b_1 u_1 + \dots + b_q u_q$$

وهذا يعني أن كل شعاع v من V يمكن كتابته بعبارة خطية بالأشعة $u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_p$ ولكي نبرهن أنها قاعدة في V بقي أن نتحقق من كونها مستقلة خطياً . من أجل ذلك لنفرض أن :

$$(*) \quad a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + b_1 u_1 + \dots + b_q u_q = 0$$

فاذا طبقنا T على طرفي هذه العلاقة مع ملاحظة أن :

$$T(u_i) = 0, i = 1, \dots, q$$

$$(**) \quad a_1 T(v_1) + \dots + a_p T(v_p) = 0$$

ولدينا بالفرض $T(v_1), \dots, T(v_p)$ مستقلة خطياً لذلك فالعلاقة

(**) تفيد بأن $a_1 = \dots = a_p = 0$ وبالتالي تصبح العلاقة (*) بالشكل :

$$(***) \quad b_1 u_1 + \dots + b_q u_q = 0$$

وبما أن u_1, \dots, u_q مستقلة خطياً لكونها تشكل قاعدة في $\text{Ker } T$

فالعلاقة (***) تفيد بأن $b_1 = \dots = b_q = 0$. إذن العلاقة (*)

تؤدي الى كون $a_1 = \dots = a_p = b_1 = \dots = b_q = 0$ وبالتالي فان

الأشعة $u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_p$ مستقلة خطياً وهو المطلوب .

ملاحظة : يفيد الحل السابق بأن الفراغ الشعاعي V قد جرى الى

فواغين جزئيين . الأول U يتولد بالأشعة v_1, \dots, v_p والثاني $\text{Ker } T$

يتولد بالأشعة u_1, \dots, u_q . وأن كل شعاع من V يمكن كتابته كمجموع شعاعين الأول من U والثاني من $\text{Ker } T$. نقول في هذه الحالة أن V هو المجموع المباشر لـ U , $\text{Ker } T$ ونكتب ذلك بالشكل $V = U \dot{+} \text{Ker } T$ لاحظ أن $U \cap \text{Ker } T = \{0\}$ دوماً .

٢١٧ - ليكن $T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً نواته $\text{Ker } T = \{0\}$. إذا كان عدد أبعاد V يساوي عدد أبعاد W فبرهن أن $T(V) = W$.
الحل : إن $T(V)$ هو فراغ جزئي من W . وبما $\text{Ker } T = \{0\}$ فان عدد أبعاد $T(V)$ يساوي حسب التمرين ٢١٦ ، عدد أبعاد V وبالتالي يساوي عدد أبعاد W وهذا يعني أن $T(V)$ هو الفراغ W نفسه .

٢١٨ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K وليكن $T: V \rightarrow V$ تطبيقاً خطياً محققاً للعلاقة $T^2 = T \circ T = T$. إذا كان $T(V) = U$ و $\text{Ker } T = W$ فبرهن أن $V = U \dot{+} W$.

الحل : يمكن برهان المطلوب باتباع الطريقة التي برهن فيها التمرين ٢١٦ وتترك ذلك للقارئ . وستتبع الطريقة التالية : يمكن أن نكتب أي شعاع $a \neq 0$ من V بالشكل : $a = a - T(a) + T(a)$. إن القسم $a - T(a)$ ينتمي الى W وذلك لأن :

$$T(a - T(a)) = T(a) - T \circ T(a) = T(a) - T(a) = 0$$

وذلك لأن $T(a) \in V$.

أما القسم $T(a)$ فهو ينتمي الى U . ولیم المطلوب يجب أن نثبت أن الصفر هو الشعاع الوحيد المشترك بين U و W . من أجل هذا

نفرض أن $u \neq 0$ ينتمي الى $W \cap U$. إذا كان $u \in U$ فإنه يوجد
عصر a من V من الشكل $T(a) = u$ وإذا كان $u \in W$ فإن $T(u) = 0$
ومنه :

$$T \circ T(a) = T(u) = 0$$

وحسب الفرض :

$$T \circ T(a) = T(a) = u = 0$$

وهذا يخالف للفرض أي $W \cap U = \{0\}$ وبالتالي فإن $V = U \dot{+} W$.

٤١٩ - ليكن $F, T: V \rightarrow V$ تطبيقين خطيين محققين العلاقات

التالية :

$$\text{آ} - (\text{التطبيق المطابق }) \quad F + T = I .$$

$$\text{ب} - (\text{التطبيق المذموم }) \quad F \circ T = T \circ F = 0$$

$$\text{برهن أن : } \quad \text{Ker } T = F(V) \quad \text{و} \quad \text{Ker } F = T(V)$$

الحل : للبرهان على أن $\text{Ker } T = F(V)$ يجب أن نبرهن أن

$$F(V) \subseteq \text{Ker } T \quad \text{و} \quad \text{Ker } T \subseteq F(V) . \quad \text{إذا كان } u \in F(V) \text{ فإنه يوجد } a$$

من V يحقق العلاقة $F(a) = u$. باستخدام العلاقة ب نجد :

$$T \circ F(a) = T(u) = 0$$

أي أن $u \in \text{Ker } T$ وبالتالي فإن : $F(V) \subseteq \text{Ker } T$

لنفرض الان أن $u \in \text{Ker } T$ ينتج عن ذلك أن : $T(u) = 0$

وباستخدام العلاقة (آ) نجد أن :

$$I(u) = u = F(u) + T(u) = F(u)$$

أي أن $u \in F(V)$ وبالتالي فإن $\text{Ker } T \subseteq F(V)$ وبذلك نكون قد
برهنا أن $\text{Ker } T = F(V)$. وبصورة مشابهة نبرهن العلاقة $\text{Ker } F = T(V)$.

٢٢٠ - إذا كان التطبيق الخطي $P : V \rightarrow V$ محققاً للعلاقة :

$$(P^2 = P \circ P) , P^2 - P + I = 0$$

فبرهن أن التطبيق المعاكس P^{-1} موجود ويساري $I - P$.

الحل : لاثبات أن P^{-1} موجود علينا أن نثبت أن P متباين وغامر
أي منتظم . في الحقيقة :

$$a_1, a_2 \in V : a_1 \neq a_2 \Rightarrow P(a_1) \neq P(a_2)$$

لأن :

$$P(a_1) = P(a_2) \Rightarrow P^2(a_1) = P^2(a_2)$$

ومنه :

$$(P^2 - P)(a_1) = (P^2 - P)(a_2)$$

أو :

$$(P^2 - P)(a_1 - a_2) = 0$$

وبما أن $a_1 - a_2 \neq 0$ لأنه شعاع ما من V فإن العلاقة الأخيرة تؤدي
إلى أن $P^2 - P = 0$ التطبيق المعادوم وهذا يخالف الفرض حيث :

$P^2 - P = -I$. ولكي نبرهن على أنه غامر يجب أن نبرهن :

$$\forall a \in V , \exists u \in V : P(u) = a$$

مهما كان a من V فإن :

$$a = I(a) = (P - P^2)(a) \quad (\text{حسب الفرض})$$

$$= P \circ (I - P)(a)$$

$$= P(u)$$

حيث رمزنا بـ $u = (I - P)(a)$.

ونكون بذلك قد برهنا أن كل شعاع a من V خيال لشعاع u من V أي أن التطبيق المفروض غامر وقد برهنا سابقاً أنه متباين فهو قابل للعكس أي P^{-1} موجود .
ينتج من الفرض :

$$I = P - P^2 = P \circ (I - P)$$

وكذلك :

$$(I - P) \circ P = P - P^2 = I$$

وتفيد هذه العلاقات بأن التطبيق $I - P$ هو التطبيق P^{-1} ،
المعاكس للتطبيق P .

٢٢١ - ليكن التطبيقان الخطيان $A, B : V \rightarrow V$. برهن أن

$$\text{Ker } A = \text{Ker } B = 0 \quad \text{تؤدي إلى} \quad \text{Ker } (B \circ A) = 0$$

الحل : لنفرض b شعاعاً منتبياً إلى $\text{Ker } (B \circ A)$ فنجد $(B \circ A)(b) = 0$

ولكن $(B \circ A)(b) = B(A(b)) = 0$ وهذا يعني أن $A(b)$ ينتمي إلى $\text{Ker } B$

ويكون بحسب الفرض $A(b) = 0$. وتفيد هذه العلاقة بدورها أن b ينتمي

إلى $\text{Ker } A$ ويكون بحسب الفرض $b = 0$ إذ أن $\text{Ker } (B \circ A) = 0$

وهو المطلوب .

٢٢٢ - ليكن V فواعاً شعاعياً معروفاً على الحقل K عدد أبعاده

يساوي n . ليكن الفراغ الشعاعي الثنوي أي $V^* = \text{Hom}(V, K)$

برهن أن عدد أبعاد V^* هو أيضاً n .

الحل : ليكن (e_1, \dots, e_n) قاعدة في V . إن النظرية [١٠ - ٦] تفيد بأن أي تطبيق خطي من V إلى K يتعين بمعرفة خيال أشعة قاعدة V وفق هذا التطبيق . لتعرف التطبيقات الخطية f_1, \dots, f_n من V إلى K بالعلاقات :

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = 1 \quad , \quad i = j \\ = 0 \quad , \quad i \neq j$$

إذا برهننا أن f_1, \dots, f_n تشكل قاعدة في V^* فنكون بذلك قد برهننا أن عدد أبعاد V^* هو n ، عدد أشعة القاعدة ، من أجل ذلك يجب أن نبرهن أولاً أن f_1, \dots, f_n مستقلة خطياً أي أن :

$$a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

وهذا ينتج بأخذ قيمة التطبيق $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ من أجل e_j مع تغيير j من 1 إلى n .

$$(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n)(e_j) = 0(e_j) = 0$$

ولكن استناداً إلى تعريف f_i

$$(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n) e_j = a_j f_j(e_j)$$

ويكون :

$$a_j f_j(e_j) = a_j = 0$$

وذلك من أجل $j = 1, 2, \dots, n$ وهذا ما يبرهن على أن f_i مستقلة خطياً .

بقي علينا أن نبرهن أن f_1, \dots, f_n تولد الفراغ الشعاعي V^* أي أن كل عنصر F من V^* يمكن كتابته بعبارة خطية في f_1, \dots, f_n . أقول أنه إذا كان $F(e_i) = b_i$ فإن $F = b_1 f_1 + \dots + b_n f_n$ وذلك لأن قيمة التطبيق في الطرف الأيسر من أجل e_i هي $(b_1 f_1 + \dots + b_n f_n)(e_i) = b_i$ وهي نفسها قيمة F من أجل e_i و i متغير من 1 إلى n . أي أن قيمة التطبيقين متساوية من أجل جميع أشعة القاعدة e_1, \dots, e_n وبالتالي من أجل جميع عناصر الفراغ الشعاعي V (لماذا؟). وبالتالي فهي متساويان. بهذا نكون قد برهنا أن f_1, \dots, f_n تشكل قاعدة في V^* وبالتالي فعدد أبعاد V^* يساوي n .

ملاحظة: يطلق عادة على القاعدة f_1, \dots, f_n في V^* والمعرفة في التمرين السابق إسم القاعدة الثنوية للقاعدة e_1, \dots, e_n في V . وكثيراً من الأحيان يرمز لهذه القاعدة الثنوية برموز قاعدة V نفسها ويوضع فوقها نجمة * e_1^*, \dots, e_n^* .

٢٢٣ - ليكن V فراغاً شعاعياً عدد أبعاده n محدود معلوماً على الحقل K . وليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي لـ V . برهن أنه يوجد تطبيق خطي منتظم من V إلى V^* .

الحل: لتأخذ e_1, \dots, e_n قاعدة في الفراغ الشعاعي V . ليكن f_1, \dots, f_n القاعدة الثنوية للقاعدة المفروضة أي أن:

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

إن التطبيق $T: V \rightarrow V^*$ المعطى بالعلاقة:

$$T(e_i) = f_i$$

هو : ١ - تطبيق خطي (نظرية [١٠ - ٦]) .

٢ - تطبيق متباين (لماذا ؟) .

٣ - تطبيق غامر (ينتج من أن V , V^* نفس العدد

من الأبعاد) .

وبالتالي فإن T تطبيق خطي منتظم .

٢٢٤ - ليكن V و W فراغين شعاعين على الحقل K . إذا

كان $T : V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً فبرهن ان التطبيق $T^* : W^* \rightarrow V^*$ المعطى بالعلاقة :

$$(I) \quad \forall g \in W^* , \quad T^*(g) = g \circ T$$

خطي (نسمي T^* منقول « مرافق » التطبيق الخطي T) .

الحل : ان الشعاع g من W^* ليس إلا تطبيقاً خطياً من W الى

K . وبما أن مركب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي فان $g \circ T$

هو تطبيق خطي من V إلى K فهو عنصر من V^* . اذن العلاقة (I)

تعرف تطبيقاً T^* من W^* إلى V^* . نجد أن :

$$\forall f, g \in W^* , \quad T^*(g+f) = (g+f) \circ T$$

$$= g \circ T + f \circ T$$

(عملية تركيب التطبيقات توزيعية بالنسبة للجمع)

$$= T^*(g) + T^*(f)$$

ونجد أيضاً :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in K , T^*(\lambda g) &= (\lambda g) \circ T \\ &= \lambda (g \circ T) = \lambda T^*(g)\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن T^* تطبيق خطي..



تمارين غير محلولة

٢٢٥ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K . برهن أن التطبيق المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V, T(v) = -v$$

هو تطبيق خطي .

٢٢٦ - ليكن A شعاعاً مفروضاً من الفراغ الشعاعي V على الحقل K . ليكن التطبيق $F : V \rightarrow V$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V, F(v) = v + A$$

بين فيما إذا كان F خطياً أم لا ؟

٢٢٧ - إذا كان A شعاعاً مفروضاً من الفراغ الشعاعي R^3 . برهن أن التطبيق $T : R^3 \rightarrow R^3$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V, T(v) = v \wedge A$$

حيث \wedge تشير إلى الجداء الخارجي للشعاعين ، هو تطبيق خطي .

٢٢٨ - ليكن V الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق من أية رتبة . ليكن التطبيق $D : V \rightarrow V$ المعرف بعملية الاشتقاق . برهن ان التطبيق $D^2 = D \circ D$ خطي . أوجد نواة التطبيق D^2 ورتبته .

٢٢٩ - ليكن V و D كما في [التمرين ٢٢٨] . إذا كان I

التطبيق المطابق على V فبرهن أنه إذا كان $a \in R$ ، فإن $T = D - aI$ مؤثر خطي على V . أوجد نواة T .

٢٣٠ - برهن أن التناظر بالنسبة لمحور مار من مبدأ الاحداثيات في مستو هو تطبيق خطي لنقاط المستوي في المستوي نفسه.

٢٣١ - ليكن T تطبيقاً خطياً من R^2 الى R^2 معطى بالعلاقتين :

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$$

حيث $v' = (x', y')$ خيال $v = (x, y)$ وفق T و a, b, c, d ثوابت من R . ناقش وجود أشعة ذاتية للتطبيق T .

٢٣٢ ليكن $T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً وليكن عدد أبعاد V يساوي عدد أبعاد W . إذا كان $\text{Ker } T = \{0\}$ فبرهن أن T تطبيق منتظم.

٢٣٣ - ليكن W, V فراغين شعاعيين على الحقل K . وليكن عدد أبعاد V أصغر من عدد أبعاد W . برهن أن أي تطبيق خطي $T: V \rightarrow W$ لا يمكن أن يكون غامراً.

٢٣٤ - ليكن $T: V \rightarrow V \times V$ تطبيقاً معرفاً بالعلاقة :

$$\forall v \in V : T(v) = (v, v)$$

برهن أن T تطبيق خطي.

٢٣٥ - ليكن H, W فراغين شعاعيين جزئيين من الفراغ الشعاعي V .

ليكن $T: H \times W \rightarrow V$ التطبيق المعرف بالعلاقة :

$$\forall u \in H, \forall w \in W : T(u, w) = u - w$$

برهن أن T تطبيق خطي . وبرهن أن صورة T هو $H \cup W$ ونواته هي $H \cap W$.

٢٣٦ - ليكن $F, T: V \rightarrow V$ تطبيقين خطيين محققين العلاقات

التالية :

$$F + T = I \quad (I \text{ التطبيق المطابق}) \quad - ١$$

$$F \circ T = F \circ T = O \quad (O \text{ التطبيق المعدوم}) \quad - ٢$$

$$F \circ F = F, T \circ T = T \quad - ٣$$

برهن أن $V = F(V) \dot{+} T(V)$ (جمع مباشر) .

٢٣٧ - ليكن T تطبيقاً خطياً منتظماً من V الى U و F تطبيقاً

خطياً منتظماً من U الى W . برهن أن $F \circ T$ تطبيق خطي منتظم من

$$U \text{ الى } W \text{ وأن } (F \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ F^{-1} .$$

٢٣٨ - ليكن التطبيقان الخطيان $A: V \rightarrow U$, $B: U \rightarrow W$.

إذا كان $\text{Ker } A = \text{Ker } B = 0$ فبرهن أن $\text{Ker } (B \circ A) = 0$ (تعميم

للتمرين المحاول [٢٢١]) .

٢٣٩ - ليكن V فراغ كثيرات الحدود من الدرجة n (أي

$T: V \rightarrow V$ التطبيق $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ برهن أن

المعطى بالعلاقة :

$$\forall f(t) \in V : T(f(t)) = \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx$$

هو تطبيق خطي (مؤثر خطي) . وإذا كان D المؤثر التفاضلي على V فبرهن أن $D \circ T = T \circ D$.

٢٤٠ - إذا كان $n \neq m$ فبرهن أنه لا يمكن إيجاد تطبيق خطي منتظم من R^n على R^m .

٢٤١ - ليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ الشعاعي V . لتكن S مجموعة جزئية من V . ولتكن U المجموعة الجزئية من V^* المعرفة بالعلاقة :

$$U = \{ f \in V^* : f(v) = 0 , \forall v \in S \}$$

برهن : ١ - أن U فراغ شعاعي جزئي من V^* (يطلق عليه الفراغ الجزئي المتعامد مع S) .

٢ - عدد أبعاد $V =$ عدد أبعاد $S +$ عدد أبعاد U .

٢٤٢ - ليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V وليكن $(V^*)^*$ الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V^* . برهن أن التطبيق المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V , f \in V^* , (T(v))(f) = f(v)$$

هو تطبيق خطي منتظم .

[لاحظ أن $T(v)$ هو عنصر من $(V^*)^*$ وبالتالي فهو تطبيق خطي من V^* إلى الحقل K ، فالبعبارة $(T(v))(f)$ إذن ذات معنى وتمثل عنصراً من K يساوي بالتعريف $f(v)$] .

٢٤٣ - ليكن T تطبيقاً خطياً من V إلى W وليكن F تطبيقاً

خطياً من W الى V . بفرض أن عدد أبعاد V أكبر من عدد أبعاد W برهن أن مرتبة التطبيق $F \circ T$ أصغر من عدد أبعاد V .

٢٤٤ - ليكن T مؤثراً خطياً على R^2 بحيث $T \neq O$ (لايساوي التطبيق المعلوم) و $T^2 = O$ (التطبيق المعلوم) . برهن أنه يوجد قاعدة (v_1, v_2) في R^2 من الشكل :

$$T(v_1) = v_2 , T(v_2) = 0$$

٢٤٥ - ليكن T و F مؤثرين خطيين على R^3 ومعرّفين بالعلاقتين :

$$F(x, y, z) = (x - y, z + y, x)$$

$$T(x, y, z) = (y, -x, -z)$$

حيث (x, y, z) تمثل عناصر شعاع ما من R^3 . والمطلوب إيجاد :

$$١ - \text{العناصر } T(-1, 1, 0) \text{ و } F(1, 0, 2)$$

٢ - التطبيقات T^2 ، $F \circ T$ ، F^2 و $T \circ F$ ، $2T - 3F$ ومن ثم تعيين

رتبة وعدد أبعاد ونواة كل من هذه التطبيقات الخطية .

٢٤٦ - ليكن T مؤثراً خطياً على R^2 وبحقاً للعلاقات :

$$T^2 = T , (I \text{ التطبيق المطابق}) , T \neq I , (O \text{ التطبيق المعلوم}) , T \neq O$$

برهن أنه يوجد قاعدة (v_1, v_2) في R^2 من الشكل :

$$T(v_1) = v_1 , T(v_2) = 0$$

٢٤٧ - ليكن $T: V \rightarrow U$ و $F: U \rightarrow W$ تطبيقين خطيين .

إذا كان T^*, F^* منقولي T, F على الترتيب فبرهن أن $(FoT)^* = T^* \circ F^*$.

٢٤٨ - ليكن W^* , V^* الفراغين الشعاعيين الثنويين لـ W , V
على الترتيب . ليكن التطبيق :

$$P : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V^*, W^*)$$

المعطى بالعلاقة :

$$P(T) = T^*$$

حيث T عنصر ما من $\text{Hom}(V, W)$ و T^* منقول هذا التطبيق .
برهن أن P تطبيق خطي .

