الفصل السابع

المصفوفات والمعينات

سندرس في هذا الفصل كائناً رياضياً جديداً ندعوه مصفوفة ، ذا صلة وثيقة بالتطبيقات الخطية على الفراغات الشعاعية والتي درسناها في الفصل السابق .

نبدأ أولاً باعطاء تعريف مباشر للمصفوفة . ليكن F حقلاً تبديلياً وليكن m و n عددين طبيعيين . نقول عن جدول مكون من عناصر من F مرتبة بالشكل (*) :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & & & \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{bmatrix} \qquad (1)$$

إنه مصفوفة على الحقل F . نسمي العناصر الموجودة في خط أفقي واحد سطراً ونرقم هذه الأسطر من أعلى الى أسفل ، ونسمي العناصر

(*) يستخدم الرمزان $\| \; : \; : \; : \; \|$ و $(\; : \; : \; : \;)$ للدلالة على المصفوفة أيضاً .

الموجودة في خط شاقولي واحد عموداً ونرقم هذه الأعمدة من اليسار الى اليمين . كما نسمي عناصر F المشكلة للمصفوفة (1) عناصر أو مركبات المصفوفة . وبصورة خاصة نقول عن المركبة α_j^i المركبة ال i j للمصفوفة ونختزل كتابة المصفوفة (1) بالشكل :

$$[\alpha_j{}^i] \quad , \quad \begin{matrix} i = 1 , \ldots , m \\ j = 1 , \ldots , n \end{matrix}$$

حيث وضعنا الدليل في الأعلى للدلالة على رقم السطر والدليل في الأسفل للدلالة على رقم العمود . ففي المصفوفة (1) لدينا m سطراً و n عموداً ولذلك نقول أن لدينا مصفوفة من الشكل $m \times n$ أو مصفوفة من السعة $m \times n$.

(نصطلح على أن العدد الأيسر يدل على عدد الأسطر والعدد الأيمن يدل على عدد الأعمدة) . ونرمز للمصفوفة (1) بحرف واحد ، A مثلاً ، أو $A(m , n)$ لاظهار عدد الأسطر والأعمدة في المصفوفة المعينة .

ونرمز عادة بـ A^i للسطر ذي الرقم i من المصفوفة A أي :

$$A^i = [\alpha_1{}^i \;\; \alpha_2{}^i \; \ldots \; \alpha_n{}^i]$$

كما نرمز بـ A_j للعمود ذي الرقم j من هذه المصفوفة أي :

$$A_j = \begin{bmatrix} \alpha_j{}^1 \\ \alpha_j{}^2 \\ \vdots \\ \alpha_j{}^m \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أنه يمكن اعتبار A^i مصفوفة من السعة $n \times 1$ واعتبار A_j مصفوفة من السعة $1 \times m$. كما ويمكن اعتبار كل عنصر من A مصفوفة من السعة 1×1 .

مثال : إن المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة من السعة 3×2 على الحقل R . سطرها الأول $(2 \ -1 \ 3)$ وسطرها الثاني $(5 \ 0 \ 4)$. وعمودها الأول $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ وعمودها الثاني $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ وعمودها الثالث $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

١ - ٧ تعاريف :

(١) نقول عن مصفوفة $A = [\alpha_j^i]$ أنها مصفوفة صفرية إذا كان كل عنصر من عناصرها يساوي الصفر . أي $\alpha_j^i = 0$ من أجل جميع القيم الممكنة لـ i و j .

(٢) نسمي كل مصفوفة ناتجة عن مصفوفة مفروضة A بحذف عدد من أسطرها وعدد من أعمدتها مصفوفة جزئية من A .

(٣) لتكن المصفوفة $A = [\alpha_j^i]$ من السعة $m \times n$. نسمي منقول المصفوفة A ، ونرمز لذلك بـ A_t ، [أو A^t] المصفوفة ذات السعة $n \times m$ التي تحقق :

$$A_t = [\beta_i{}^j] \quad : \quad \beta_i{}^j = \alpha_j{}^i \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

ونلاحظ أن A_t تنتج عن A بجعل أسطرها أعمدة وأعمدتها أسطراً مع المحافظة على الترتيب .

مثال : إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{فإن :} \qquad A_t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(٤) نقول عن مصفوفة أنها مربعة إذا كان عدد أسطرها مساوياً عدد أعمدتها . فإذا كانت المصفوفة المربعة A من السعة $[n \times n]$:

$$A = [\alpha_j^i] = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{bmatrix}$$

فإننا نسمي العناصر $\alpha_1^1, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_n^n$ العناصر القطرية للمصفوفة A . يسمى مجموع العناصر القطرية لمصفوفة مربعة A أثر المصفوفة ويرمز له بـ tr(A) . هكذا لدينا في المصفوفة الأخيرة :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i$$

إذا كانت جميع عناصر المصفوفة المربعة A تساوي الصفر عدا العناصر القطرية فنسمي A مصفوفة قطرية. بالاضافة الى ذلك إذا كانت جميع العناصر القطرية مساوية الواحد ، فإننا نسمي عندئذ المصفوفة A المصفوفة الواحدية ونرمز لها بـ I أو I_n للدلالة على عدد الاسطر والاعمدة :

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أما إذا كانت جميع عناصر المصفوفة المربعة A والواقعة تحت (فوق) العناصر القطرية مساوية الصفر فعندئذ نسمي المصفوفة مصفوفة مثلثية الشكل من الاعلى (الاسفل) .

مثال :

المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية من الاعلى

والمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية (مثلثية من الاعلى ومن الاسفل)

والمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة واحدية من السعة 2×2

العمليات على المصفوفات :

سنبرهن فيما يلي وجود تقابل بين مجموعة مصفوفات على حقل تبديلي F وبين مجموعة تطبيقات خطية بين فراغات شعاعية على الحقل F . ومن

هذا التقابل نستنتج العمليات المختلفة على مجموعة المصفوفات .

لتكن المصفوفة A من السعة $m \times n$ على الحقل F .

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1{}^1 & \cdots & \alpha_n{}^1 \\ \vdots & & \\ \alpha_1{}^m & \cdots & \alpha_n{}^m \end{bmatrix} = [\alpha_j{}^i] \quad , \quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

ليكن V , W فراغين شعاعيين على الحقل F ، عدد ابعادهما m , n على الترتيب . لنفرض أن جملة الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ تشكل قاعدة في V وأن جملة الاشعة $w_1, \ldots, w_m$ تشكل قاعدة في W . ولنبرهن أن المصفوفة A تعرف تطبيقاً خطياً من V الى W .

إن كل سطر A^i من أسطر A مؤلف من n عنصراً مرتباً من F وبالتالي يمكن اعتبارها مركبات شعاع من V نرمز له أيضاً بـ A^i أي :

$$A^i = [\alpha_1{}^i \ , \ \alpha_2{}^i \ , \ \ldots \ , \ \alpha_n{}^i] \quad , \quad i = 1, \ldots, m$$

نعرف التطبيق $T : V \to W$ بالشكل التالي :

$$\forall\, v = \lambda^1 v_1 + \ldots + \lambda^n v_n \in V \quad :$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{m} (A^i \cdot v) w_i$$

حيث: $A^i \cdot v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j{}^i \lambda^j$ (الجداء الداخلي للشعاعين)

ولنبرهن أن التطبيق T (تطبيق خطي) .

$$\forall\, v = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)^{(*)},\ u = (\beta^1, \ldots, \beta^n) \in V$$

$$T(v+u) = \sum_{i=1}^{n} (A^i \,.\, (v+u))\, w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (A^i \,.\, v + A^i\, u)\, w_i$$

(الجداء الداخلي توزيعي بالنسبة لعملية جمع الاشعة)

$$= \sum_{i=1}^{m} (A^i \,.\, v) \,.\, w_i + \sum_{i=1}^{m} (A^i \,.\, u)\, w_i$$

$$= T(v) + T(u)$$

$$\forall\, \mu \in F\ :$$

$$T(\mu\, x) = \sum_{i=1}^{m} (A^i \,.\, (\mu\, v))\, w_i$$

(حسب خواص الجداء الداخلي)

$$= \mu \sum_{i} (A^i \,.\, v)\, w_i$$

$$= \mu\, T(v)$$

وبذلك نكون قد برهنا أن T تطبيق خطي نسميه التطبيق الخطي الموافق للمصفوفة A ونرمز له بـ T_A . لنبرهن الان العكس . إذا كان $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً وكان n عدد أبعاد V و m عدد أبعاد W فانه يرافق هذا التطبيق الخطي مصفوفة من السعة $m \times n$ ، وذلك لان

(*) سنصطلح دوماً على وضع الدليل من الأعلى لمركبات شعاع بالنسبة لقاعدة مفروضة .

خيال أشعة القاعدة $\{v_i\}$ من V وفق التطبيق الخطي T ، تراكيب خطية بأشعة القاعدة $\{w_i\}$ من W وبعناصر من الحقل F . فاذا كتبنا :

$$T(v_1) = \alpha_1^1 w_1 + \ldots + \alpha_1^m w_m$$
$$T(v_2) = \alpha_2^1 w_1 + \ldots + \alpha_2^m w_m$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = \alpha_n^1 w_1 + \ldots + \alpha_n^m w_m$$

فان عوامل هذه العلاقات تشكل مصفوفة من الشكل :

$$A = [\alpha_j^i] \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

وهي مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل F . نسمي هذه المصفوفة المصفوفة الموافقة للتطبيق الخطي T أو مصفوفة التطبيق الخطي $\mathbf{T}$.

والتطبيق الخطي T هو التطبيق الموافق T_A لهذه المصفوفة لانه :

$$\forall \mathbf{v} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n) \in V \; :$$

$$T(v) = T(\lambda^1 v_1 + \ldots + \lambda^n v_n)$$

$$= \lambda^1 T(v_1) + \ldots + \lambda^n T(v_n) \qquad (\text{تطبيق خطي } T)$$

$$= \lambda^1 (\alpha_1^1 w_1 + \ldots + \alpha_1^m w_m) + \ldots + \lambda^n (\alpha_n^1 w_1 + \ldots + \alpha_n^m w_m)$$

$$= (\lambda^1 \alpha_1^1 + \lambda^2 \alpha_2^1 + \ldots + \lambda^n \alpha_n^1) w_1 + \ldots + (\lambda^1 \alpha_1^m + \ldots + \lambda^n \alpha_n^m) w_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (A^i \cdot v) w_i = T_A(v)$$

٢ - ٧ **نظرية** : ليكن W, V فراغين شعاعيين على الحقل التبديلي K ، عـدد أبعادهما m, n على الترتيب . ولتكن $\{v_i\}$ قاعـدة في V و $\{w_i\}$ قاعدة في W . يرافق كل مصفوفة A من السعة $m \times n$ على الحقل K تطبيق خطي $T_A : V \to W$ بالنسبة للقاعـــدتين المفروضتين في W, V . وبالعكس يرافق كل تطبيق خطي $T : V \to W$ مصفوفة A من السعة $m \times n$ على الحقل K وبحيث يكون $T = T_A$.

٣ - ٧ **مثال** : لتكن (v_1, v_2) قاعدة في $V_2(R)$ و (w_1, w_2, w_3) قاعـــدة في $W_3(R)$. يرافق المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ التطبيق الخطي $T : V_2(R) \to W_3(R)$ المعرف بالشكل :

$$T(v_1) = 3w_1 - w_2 + 5w_3$$

$$T(v_2) = w_1 + w_2 + 2w_3$$

نستنتج من النظرية [٢ - ٧] أن التطبيق $T_A \leftarrow A$ تقابل بـــين مجموعة المصفوفات من السعة $m \times n$ وبين مجموعة التطبيقات الخطية من V الى W بالنسبة لقاعدتين مفروضتين في V و W .

بصورة عامـــة ، للوصول الى التطبيق الخطي T_A الموافق لمصفوفة مفروضة $A = (\alpha_j^i)$ من السعة $m \times n$ على الحقل K يكفي أن نختار فراغين شعاعين عدد أبعاد الأول n وعدد أبعاد الثاني m ، كأن نختار هـــذين الفراغين $V_n(K) = K^n$ و $V_m(K) = K^m$ مثلاً . نأخذ قاعدة $\{v_j\}$ في الفراغ الشعاعي الأول وقاعدة $\{w_i\}$ في الفراغ الشعاعي الثـــاني .

فالتطبيق $T : K^n \longrightarrow K^m$ المعرف بالعلاقة :

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j{}^i w_i \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

هو تطبيق خطي وحيد ، استناداً للنظرية [٢ - ٧] ، والمصفوفة الموافقة له هي المصفوفة المفروضة A .

٤ - ٧ **تساوي المصفوفات** : ليكن W , V فراغين شعاعين على الحقل K ، عدد أبعادهما m , n على الترتيب . ليكن F , T تطبيقين خطيين من V الى W . لنفرض أن $A = (\alpha_j{}^i)$ و $B = (\beta_j{}^i)$ المصفوفتان الموافقتان لـ T و F بالنسبة لقاعدتين مفروضتين $\{ v_j \}$ و $\{ w_i \}$ في W , V على الترتيب .

نقول عن المصفوفتين A و B أنهما متساويتان إذا كان التطبيقان الموافقان T و F متساويين .

نعلم أن $T = F$ تعني أن :

$$\forall v \in V \quad : \quad T(v) = F(v)$$

وبصورة خاصة من أجل أشعة القاعدة $\{ v_j \}$ في V يكون :

$$T(v_j) = F(v_j) \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

ولما كان :

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j{}^i w_i$$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_j{}^i w_i$$

فإننا نجد أن :

$$\alpha_j^i = \beta_j^i \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

ومنه نقول : إن مصفوفتين من سعة واحدة متساويتان إذا كانت العناصر المتشابهة في الموضع في المصفوفتين متساوية .

٥ - ٧ جمع المصفوفات : لتكن $A = (\alpha_j^i)$ و $B = (\beta_j^i)$ المصفوفتين الموافقتين للتطبيقين الخطيين T و F من V الى W بالنسبة للقاعدتين $\{v_j\}$ ، $\{w_i\}$ في V و W على الترتيب . نعرف مجموع المصفوفتين A و B ونرمز له بـ $A + B$ ، على أنه المصفوفة $C = (\gamma_j^i)$ الموافقة للتطبيق الخطي $T + F : V \longrightarrow W$ بالنسبة للقاعدتين المفروضتين أي :

$$(T + F)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_j^i \, w_i$$

إن مجموع التطبيقين الخطيين $T + F$ يعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \ : \ (T + F)(v) = T(v) + F(v)$$

وبصورة خاصة من أجل أشعة القاعدة $\{v_j\}$ في V نجد :

$$\begin{aligned} (T + F)(v_j) &= T(v_j) + F(v_j) \\ &= \sum_i \alpha_j^i w_i + \sum_i \beta_j^i w_i \\ &= \sum (\alpha_j^i + \beta_j^i) w_i \end{aligned}$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$\gamma_j^i = \alpha_j^i + \beta_j^i$$

ومنه : مجموع مصفوفتين من سعة واحدة هو مصفوفة من السعة ذاتها وعناصرها مؤلفة من مجموع عناصر المصفوفتين المتشابهة في الموضع .

نستنتج من التعريف السابق ما يلي :

(١) عملية جمع المصفوفات تبديلية . إذا كانت **A** و B مصفوفتين من سعة واحدة فان :

$$A + B = B + A$$

(٢) عملية جمع المصفوفات تجميعية . إذا كانت A و B و C ثلاث مصفوفات من سعة واحدة فان :

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

(٣) إذا كانت A و B مصفوفتين من سعة واحدة فاستناداً الى تعريف منقول مصفوفة نجد :

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

أي منقول مصفوفتين يساوي مجموع منقولي المصفوفتين .

(٤) إذا رمزنا بـ O للمصفوفة الصفرية فإن :

$$\forall A \quad , \quad A + O = O + A = A$$

أي أن المصفوفة الصفرية تمثل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع على المصفوفات .

مثال : إذا كانت :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$A + B = B + A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

وأن :

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B^t = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد :

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = [A + B]^t$$

وإذا كانت $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ فإن :

$$B + C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد :

$$(A + B) + C = A + (B + C) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

٦ ـ ٧ ضرب مصفوفة بعنصر من الحقل : لتكن $A = (\alpha_j^i)$

مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل K مرافقة للتطبيق الخطي $T : V \to W$ بالنسبة للقاعدتين $\{v_j\}$ و $\{w_i\}$ في V و W على الترتيب . إذا كان $\lambda \in K$ ، فإننا نرمز بـ λA للمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي λT بالنسبة للقاعدتين المفروضتين . إن λT معروف ، كما نعلم ، بالعلاقة :

$$\forall v \in V \quad : \quad (\lambda T)(v) = \lambda (T(v))$$

ومن أجل أشعة القاعدة $\{v_j\}$ نجد :

$$(\lambda T)(v_j) = \lambda (T(v_j)) = \lambda \sum_i \alpha_j^i w_i$$

$$= \sum_i (\lambda \alpha_j^i) w_i$$

ومنه نجد :

$$\forall \lambda \in K \quad , \quad \lambda A = \lambda (\alpha_j^i) = (\lambda \alpha_j^i)$$

أي أن جداء مصفوفة A على الحقل K بعنصر كيفي λ من K هو مصفوفة تنتج عناصرها عن عناصر المصفوفة A بضربها بالعنصر λ .

في الحالة $\lambda = -1$ نحصل على المصفوفة $(-1)A = (-\alpha_j^i)$ ولو رمزنا لهذه المصفوفة بـ $-A$ فإننا نسميها نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية جمع المصفوفات لأن $A + (-A) = O$ المصفوفة الصفرية .

نجد من تعريف منقول المصفوفة :

$$\forall \lambda \in K \, , \, \forall A \quad : \quad (\lambda A)^t = \lambda A^t$$

مثال : لتكن المصفوفة A على الحقل C (حقل الأعداد المركبة)

المعرفة بالشكل :

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ -i & 2-i \end{bmatrix} , \quad i^2 = -1$$

إذا كان $\lambda = 1 - i$ من C فإن :

$$\lambda A = \begin{bmatrix} (1-i)(1+i) & (1-i)\,2i \\ -(1-i)\,i & (1-i)(2-i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2+2i \\ -1-i & 1-3i \end{bmatrix}$$

إن منقول المصفوفة A هي المصفوفة :

$$A^t = \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 2i & 2-i \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\lambda A^t = \begin{bmatrix} (1-i)(1+i) & -(1-i)\,i \\ 2(1-i)\,i & (1-i)(2-i) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1-i \\ 2+2i & 1-3i \end{bmatrix} = (\lambda A)^t$$

إذا رمزنا بـ $L(m, n)$ لمجموعة المصفوفات من السعة $m \times n$ على الحقل التبديلي K فان [٥ - ٧] و [٦ - ٧] تعرفان عمليتي جمع وضرب بعنصر من الحقل K على المجموعة $L(m, n)$. ويمكن بسهولة التحقق من أن الخواص ج١ - ج٥ و ض١ - ض٥ من [٢ - ٥] محققة وبالتالي نحصل على النظرية :

٧ - ٧ نظرية : تشكل المجموعة $L(m, n)$ المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعنصر من K المعرفتين في [٧ - ٥] و [٧ - ٦] فراغاً شعاعياً على الحقل K .

٧ - ٨ جداء المصفوفات : ليكن U و V و W ثلاثة فراغات شعاعية على الحقل K ، عدد أبعادها p و n و m على الترتيب . ليكن التطبيقان الخطيان $T : U \longrightarrow V$ و $F : V \longrightarrow W$. إذا كانت $\{ u_i \}$ قاعدة في U و $\{ v_j \}$ قاعدة في V و $\{ w_k \}$ قاعدة في W ، حيث $i = 1, \ldots, p$ و $j = 1, \ldots, n$ و $k = 1, \ldots, m$ ، فيوجد مصفوفتان استناداً للنظرية [٧ - ٢] ، $A = [\alpha_i^j]$ من السعة $n \times p$ و $B = [\beta_j^k]$ من السعة $m \times n$ على الحقل K مرافقتين لـ T و F على الترتيب ، أي :

$$T (u_i) = \sum_j \alpha_i^j v_j \quad , \quad i = 1, \ldots, p$$

$$F (v_j) = \sum_k \beta_j^k w_k \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

إن التطبيق المركب $F o T$ ، استناداً لخواص تركيب التطبيقات الخطية ، تطبيق خطي من U الى W وبالتالي يوجد مصفوفة $C = [\gamma_i^k]$ من السعة $m \times p$ على K مرافقة للتطبيق المركب $F o T$ أي :

$$(F o T) (u_i) = \sum_k \gamma_i^k w_k$$

نسمي هذه المصفوفة $C = [\gamma_i^k]$ بمصفوفة حاصل الضرب $B . A$ للمصفوفة A بالمصفوفة B . ولكتابة عناصر المصفوفة C بدلالة عناصر المصفوفتين A و B ، نكتب :

$$(F \circ T)(u_i) = F(T(u_i))$$ (حسب تعريف تركيب التطبيقات)

$$= F\left(\sum_j \alpha_i^j v_j\right)$$

$$= \sum_j \alpha_i^j F(v_j)$$ (F تطبيق خطي)

$$= \sum_j \alpha_i^j \sum_k \beta_j^k w_k$$

$$= \sum_{j,k} \alpha_i^j \beta_j^k w_k$$

$$= \sum_k \left(\sum_j \beta_j^k \alpha_i^j\right) w_k$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$\gamma_i^k = \sum \beta_j^k \alpha_i^j$$

وإذا رمزنا بـ B^k لأشعة أسطر المصفوفة B و بـ A_i لأشعة أعمدة المصفوفة A فإننا نجد أن $\gamma_i^k = B^k . A_i$ (الجـــداء العددي للشعاعين) وبالتالي لامكن كتابة :

$$C = B . A = \begin{bmatrix} B^1 A_1 & B^1 A_2 & \dots & B^1 A_p \\ B^2 A_1 & B^2 A_2 & \dots & B^2 A_p \\ \vdots & & & \\ B^m A_1 & B^m A_2 & \dots & B^m A_p \end{bmatrix}$$

مثال : ليكن U و V و W ثلاثة فراغات شعاعية على الحقل R ، عدد أبعادها 2 , 3 , 4 على الترتيب . لتكن (u_1 , u_2) قاعدة في U و (v_1 , v_2 , v_3) قاعدة في V و (w_1 , w_2 , w_3 , w_4) قاعدة في W .

ليكن $T : U \longrightarrow V$ تطبيقاً خطياً معطى بالشكل :

$$T(u_1) = 3\,v_1 - 2\,v_2 + v_3$$

$$T(u_2) = 4\,v_1 + v_2$$

وليكن $F : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً معطى بالشكل :

$$F(v_1) = w_1 + w_2 + w_3 - w_4$$

$$F(v_2) = 2\,w_1 - w_2 + w_3$$

$$F(v_3) = 2\,w_1 - w_3 + 4\,w_4$$

إن المصفوفة الموافقة لـ T هي :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الموافقة لـ F هي :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة الجداء :

$$B\,.\,A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 3 \\ 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ويمكن التحقق مباشرة من أن هذه المصفوفة هي المصفوفة الموافقة للتطبيق الخطي المركب FoT .

نورد ، استناداً الى التعريف السابق ، الخواص التالية تاركين البرهان عليها للقارىء لسهولتها .

٩ - ٧ إن عملية الجداء BA للمصفوفتين A و B غير معرفة إلا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد أسطر المصفوفة A .

١٠ - ٧ إن عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية . ففي المثال السابق نلاحظ أن AB غير معرفة لان عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد أسطر B . وحتى في حالة كون AB معرفة فان $AB \neq BA$ في الحالة العامة .

مثال : إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$ فإن :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

ومن الواضح أن $AB \neq BA$.

١١ - ٧ عملية ضرب المصفوفات تجميعية . اذا كانت A و B و C ثلاث مصفوفات على الحقل K والجداءان AB و BC معرفين فإن

الجداءين $(AB)C$ و $A(BC)$ معرفان ويكون :

$$(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$$

١٢ - ٧ عملية الضرب توزيعية بالنسبة لعملية الجمع على المصفوفات .
إذا كانت A و B و C ثلاث مصفوفات وكانت $B+C$ و AB معرفة فان :

$$A\,(B + C) = A\,B + A\,C$$

وإذا كانت D مصفوفة أخرى بحيث يكون BD معرفاً فان :

$$(B + C)\,D = B\,D + C\,D$$

١٣ - ٧ إذا كان الجداء AB معرفاً فان ، إستناداً لتعريف منقول مصفوفة ، الجداء B^tA^t معرفاً ويكون :

$$(A\,B)^t = B^t\,A^t$$

١٤ - ٧ **ملاحظة** : يمكن أن يكون جداء مصفوفتين هي المصفوفة الصفرية دون أن تكون أي من هاتين المصفوفتين المصفوفة الصفرية . وعلى سبيل المثال الجداء :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فراغ المصفوفات المربعة :

لتكن $L(n\,,\,n)$ مجموعة المصفوفات المربعة ذات السعة $n \times n$ على

الحقل **K** والمزودة بعمليتي الجمـــع والضرب بعنصر من K المعرفتين في [٧ - ٥] و [٧ - ٦] .

يمكن أن نعتـبر أن كل عنصر من $L(n\times n)$ (أي كل مصفوفة من السعة $n\times n$) هو المصفوفة الموافقة لتطبيق خطي من فراغ شعاعي $V(K)$ عدد أبعاده n الى الفراغ $V(K)$ ذاته بالنسبة لقاعدة مختـارة في $V(K)$. إذا كانت $I\in L(n,n)$ المصفوفة الواحدة فإننا نجد ، استناداً لتعريف جداء المصفوفات ، ما يلي :

$$\forall A\in L(n,n) \quad , \quad IA=AI=A \qquad (١)$$

$$\forall A,B\in L(n,n) \quad , \quad AB\in L(n,n) \qquad (٢)$$

نستنتج أن عملية ضرب المصفوفات عملية داخلية على $L(n,n)$ ولهـا عنصر محايد I . إذن $L(n,n)$ المزودة بعمليتي جمع وضرب المصفوفات تشكل حلقة واحدية . أضف الى ذلك أنه يمكن بسهولة إثبات العلاقة :

$$\forall \lambda\in K \quad , \quad \forall A,B\in L(n,n) \quad ,$$
$$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$$

ومنه :

١٥ - ٧ نظرية : تشكل $L(n,n)$ مجموعة المصفوفات المربعة من السعة $n\times n$ والمزودة بعمليتي جمع وضرب المصفوفات ، جـــبراً على الحقل K .

١٦ - ٧ تعريف : نقول عن مصفوفة مربعـة $A=[\alpha_j^i]$ أنهـــا متناظرة إذا كانت $A^t=A$ أي إذا كان :

$$\alpha_j{}^i = \alpha_i{}^j \quad , \quad i , j = 1 , \ldots , n$$

فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ متناظرة لأن $A = A^t$.

١٧ - ٧ **تعريف** : نقول عن مصفوفة مربعة A أنها منتظمة أو غير شاذة) إذا كان التطبيق الخطي الموافق لها T_A تطبيقاً منتظماً . وإلا نقول عن A أنها شاذة .

ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K عـــدد أبعاده n . لتكن $\{ v_i \}$ و $\{ v_i' \}$ قاعدتين في V . يوجد ، استناداً للنظرية [١٠ - ٦] تطبيق خطي وحيد $T : V \to V$ بحيث يكون :

$$T (v_i) = v_i' \quad , \quad i = 1 , \ldots , n$$

ويمكن بسهولة إثبات أن T هذا تطبيق منتظم (متباين وغامر) .

إن كل عنصر من إحدى القاعدتين المفروضتين في V يمكن أن يمثل بشكل وحيد بتركيب خطي في عناصر القاعدة الثانية . فإذا كتبنا :

$$\text{(I)} \qquad v_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i{}^j v_j \quad , \quad i = 1 , \ldots , n$$

$$\left(v_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_i{}^j v_j \right)$$

فنجد أن المصفوفة $A = [\alpha_j{}^i]$ هي المصفوفة الموافقة للتطبيق الخطي المنتظم T بالنسبة للقاعدة $\{ v_i \}$ وذلك لأن : $T(v_i) = \sum_j \alpha_i{}^j v_j$.

إذن المصفوفة A منتظمة ونسميها مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{ v_i \}$ الى القاعدة $\{ v_i' \}$.

بصورة مشابهة ، يوجد تطبيق خطي وحيد $F : V \rightarrow V$ من الشكل

$$F(v_i') = v_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

وأن هذا التطبيق منتظم (لماذا ؟) وأن المصفوفة $B = [\beta_i^j]$ هي المصفوفة الموافقة لـ F (لماذا ؟) وبالتالي فإن B مصفوفة منتظمة نسميها مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{v_i'\}$ الى القاعدة $\{v_i\}$. ومن الواضح أن :

$$F \circ T = T \circ F = I \qquad \text{(التطبيق المطابق)}$$

وبالتالي فان F هو التطبيق الخطي المعاكس للتطبيق الخطي T .

ونجد أيضاً أن الجداء :

$$AB = BA = I \qquad \text{(مصفوفة الواحدي)}$$

المعينـــات :

نتج مفهوم المعين عن دراسة جمل المعادلات الخطية ثم تطور بعد ذلك حتى شملت تطبيقاته مواضيع رياضية عديدة ، فلم يقتصر المعين على كونه وسيلة سريعة ومريحة في مناقشة حلول جمل المعادلات الخطية بل يعيننا في دراسة الاستقلال الخطي للأشعة وفي رتب المصفوفات وغيرها .

١٨ ـ ٧ تمهيد : لنذكر القارىء قبل البدء في بحث المعينات بالتبديل [١٢ ـ ٣] الذي نقابل فيه بين مجموعة ونفسها مثال ذلك :

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 1, 2\}$$

حيث نقابل 1 بـ 3 و 2 بـ 1 و 3 بـ 2 .

سنقصر اهتمامنا فيما يلي على تباديل المجموعة :

$$\{ 1 , 2 , \ldots , n \}$$

لنفرض أننا بادلنا بين مواقع هذه الأعداد فأخذت هذه المجموعة شكلاً نمثله بـ :

$$\{ i_1 , i_2 , \ldots , i_n \}$$

من الممكن أن نعتبر بأن هناك تطبيقاً S نسميه تبديلاً بحيث يكون :

$$S : \{ 1 , 2 , \ldots , n \} \rightarrow \{ i_1 ; i_2 , \ldots , i_n \}$$

وهو يقابل 1 بـ i_1 و 2 بـ i_2 و ... n بـ i_n .

نسمي $\{ i_1 , i_2 , \ldots , i_n \}$ متبادلة للمجموعة المرتبة $A = \{ 1 , 2 , \ldots , n \}$ التي نسميها بالمتبادلة الرئيسية . ومن المعلوم أن عدد متبادلات A هو $n!$.

إذا بادلنا بين موقعي عنصرين من متبادلة ما فإننا نقول إننا أجرينا مناقلة ونقول عن مناقلة إنها بسيطة إذا كان العنصران متجاورين في المتبادلة المفروضة ومن الواضح أنه يمكن تركيب أي مناقلة من جملة من المناقلات البسيطة وأن كل متبادلة تنتج عن المتبادلة الأساسية بعدد من المناقلات البسيطـــة .

إذا كانت لدينا المتبادلة $\{ i_1 , i_2 , \ldots , i_n \}$ ، وإذا وجد فيها عددان i_j و i_k بحيث يكون : $j < k$ و $i_j > i_k$ قلنا أن في هـــذه المتبادلة انقلاباً ومن الواضح أن كل متبادلة تحوي عـدداً معيناً من الانقلابات .

فمثلاً تحوي المتبادلة $\{ 2 , 1 , 3 , 4 \}$ خمسة انقلابات هي :

$4,3 - ,4,1 - 4,2 - 3,1 - ,3,2$

أما المتبادلة $\{1,2,\ldots,n\}$ التي نسميها المتبـــادلة الرئيسية فهي لا تحوي أي انقلاب .

إن كل مناقلة في مجموعة تغير عدد الانقلابات التي تحويها .

نقول عن متبادلة إنها فردية إذا كان عدد انقلاباتها فردياً ونقول عنها إنها زوجية إذا كان عدد انقلاباتها زوجياً . إن المتبادلة $\{1,2,3\}$ فردية والمتبادلة $\{2,1,3\}$ زوجية .

إذا كانت المتبادلة $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ فردية (زوجيـة) وأجرينا فيها مناقلة فإنها تصبح زوجية (فردية) . لبرهان ذلك نفرض أننــا بادلنا بين العنصرين i_j, i_{j+k} وذلك بأن ننقل i_{j+k} لنضعه على يســار i_j ونحتاج من أجل هذا الى k مناقلة بسيطة ثم ننقل i_j ليقع في الموضـع الذي كان يشغله i_{j+k} ونحتاج من أجل هذا الى $k-1$ مناقــلة بسيطة ويكون مجموع المناقلات البسيطة الضرورية لهذا الانتقال هو $2k-1$ وهو عدد فردي .

يمكننا أن ننتقل من متبادلة الى المتبادلة الأساسية بعدد من المناقلات البسيطة ويتم هذا الأمر بأشكال مختلفة : فيمكننا مثلاً أن ننتقل من $\{2,3,1\}$ الى $\{3,2,1\}$ بمناقلة بسيطة واحدة وهي أن نبادل بين موضعي $3,2$ كما يمكننا أن نقوم بذلك بخمس مناقلات بسيطة وفق الشكل :

$$\{2,3,1\} \rightarrow \{1,3,2\} \rightarrow \{2,1,3\} \rightarrow \{2,1,3\}$$

$$\rightarrow \{3,1,2\} \rightarrow \{3,2,1\}$$

غير أنه من الواضح أن هـذا العدد فردي دوماً إذا كانت المتبادلة فردية وهو زوجي دوماً إذا كانت المتبادلة زوجية ، لأنه لو كانت المتبادلة فردية واحتجنا الى عدد زوجي من المناقلات البسيطة لنجعل هذه المتبادلة المتبادلة الأساسية فإن المتبادلة الناتجة (المتبادلة الأساسية) تصبح فردية وهذا ينافي كون المتبادلة الاساسية لاتحوي أي انقلاب وهي متبادلة زوجية .

١٩ - ٧ **التطبيق المتعدد الخطية** : ليكن E فراغاً شعاعياً معرفاً على الحقل التبديلي K و f تطبيقاً لـ E^p في K يربط بين كل عنصر من E^p مثل $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ بعنصر من K نرمز له بـ :

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

نقول عن هذا التطبيق f إنه متعدد الخطية من المرتبة p فيما إذا كان خطياً بالنسبة لكل شعاع من الأشعة $a_1, a_2, \ldots, a_p$ أي إذا فرضنا $a_J = a'_J + a''_J$ فإنه يكون :

$$f(a_1, a_2, \ldots, a'_J + a''_J, \ldots, a_p) = f(a_1, a_2, \ldots, a'_J, \ldots, a_p) + f(a_1, a_2, \ldots, a''_J, \ldots, a_p)$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, \lambda a_J, \ldots, a_p) = \lambda f(a_1, a_2, \ldots, a_J, \ldots, a_p)$$

وذلك مهما كان $\lambda \in K$.

لحساب $f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ نفرض $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ قاعدة قانونيـــة للفراغ الشعاعي E وأن a_k معرف بمركباته على هـذه القاعدة بالشكل :

$$a_j = (\alpha_j^1, \alpha_j^2, \ldots, \alpha_j^n) = \sum_{i_j = 1}^{n} \alpha_j^{i_j} e_{i_j}$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_p) = \sum_{i_1=1}^{n} \alpha_1^{i_1} f(e_{i_1}, a_2, \ldots, a_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} \alpha_2^{i_2} f(e_{i_1}, e_{i_2}, a_3, \ldots, a_p)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \alpha_1^{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} \alpha_2^{i_2} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \alpha_p^{i_p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p})$$

٢٠ - ٧ التطبيق المتعدد الخطية المتناوب : نقول عن التطبيـــق المتعدد الخطية :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p) \to f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

إنه متناوب فيما إذا كان :

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_p) = 0$$

إذا وجد عددان غير متساويين i, j بحيث يكون $a_i = a_j$.

إذا فرضنا $a_j = a_i = x + y$ فسوف يكون استناداً الى كون f تطبيقاً خطيـــاً .

$$f(a_1, \ldots, x+y, \ldots, x+y, \ldots, a_p) = f(a_1, \ldots, x, \ldots, x, \ldots, a_p)$$
$$+ f(a_1, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, a_p) + f(a_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, a_p)$$
$$+ f(a_1, \ldots, y, \ldots, y, \ldots, a_p)$$

إن القيمتين الأولى والأخيرة من القيم الأربعة السـابقة معدومتان لأنهما تحويان متحولين متساويين ويبقى لدينا :

$$f(a_1, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, a_p) + f(a_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, a_p) = 0$$

وهذا يعني أنه إذا بادلنا بين متحولين من متحولات تطبيق متعـدد الخطية ومتناوب فإن قيمة هذا التطبيق تغير إشارتها .

٢١ - ٧ **تعريف المعين** : لتكن A مصفوفة مربعة من السعة n نرمز لأشعة أعمدتها بـ A_i ونكتبها بدلالة هذه الاعمدة بالشكل :

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \tag{3}$$

لنعرف تطبيقاً نرمز له بـ det على مجموعة المصفوفات المربعـــة ذات السعة n بحيث نقابل كل مصفوفة A بعنصر من K ، الحقل الذي عرفت عليه مجموعة المصفوفات المذكورة ، أي :

$$\det(A) = \Delta(A) \quad , \quad \Delta(A) \in K$$

ونشترط أن يحقق هذا التطبيق الشروط التالية :

(آ) - إن التطبيق det متعدد الخطية ومتناوب .

(ب) - إذا رمزنا بـ I_n لمصفوفة الواحدةفي مجموعة المصفوفات المربعة ذات السعة n فإن :

$$\det(e_1, e_2, \ldots e_n) = \Delta(I_n) = 1 \tag{4}$$

٢٢ - ٧ **نظرية** : إن التطبيق المعرف سابقاً موجود وهـذا يعني أنه يربط كل مصفوفـــة مربعة من السعة n بعنصر من K وهـذا العنصر وحيد .

في الحقيقة لتكن المصفوفة :

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

ولنفرض :

$$A_1 = (\alpha_1{}^1 , \alpha_1{}^2 , \dots , \alpha_1{}^n)$$
$$A_2 = (\alpha_2{}^1 , \alpha_2{}^2 , \dots , \alpha_2{}^n)$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad .$$
$$A_n = (\alpha_n{}^1 , \alpha_n{}^2 , \dots , \alpha_n{}^n)$$

وإذا فرضنا $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ قاعدة في الفراغ الشعاعي E الذي عرفت عليه المصفوفة A فانه يكون :

$$\det (A) = \det (\alpha_1{}^1 e_1 + \alpha_1{}^2 e_2 + \dots + \alpha_1{}^n e_n , \dots , \alpha_n{}^1 e_1 + \alpha_n{}^2 e_2 + \dots + \alpha_n{}^n e_n)$$

إذا نشرنا هذا التركيب باعتبار det تطبيقاً متعدد الخطية فاننا نجد شكلا يشبه التركيب (2) . يتكون هـذا التركيب من n^n حـــداً من الشكل :

$$\alpha_{i_1}{}^1 \alpha_{i_2}{}^2 \dots \alpha_{i_n}{}^n \det (e_{i_1} , e_{i_2} , \dots , e_{i_n})$$

حيث $(i_1 , i_2 , \dots , i_n)$ عناصر كيفية من المجموعة $\{ 1 , 2 , \dots , n \}$ بما أننا فرضنا det متناوب فان كل هذه الحدود معدومة إلا الحدود التي تكون فيها العناصر $(i_1 , i_2 , \dots , i_n)$ متباينة مثنى مثنى أي فيما إذا كانت إحدى متبادلات المجموعة $\{ 1 , 2 , \dots , n \}$.

وإذا لاحظنا ان المتبادلة $\{ i_1 , i_2 , \dots , i_n \}$ تنتج عن المتبادلة الاساسية $\{ 1 , 2 , \dots , n \}$ بعدد من الانقلابات نرمز له بـ ν فإنه يكون :

$$\det (e_{i_1} , e_{i_2} , \dots , e_{i_n}) = (-1)^\nu \det (e_1 , e_2 , \dots , e_n) = (-1)^\nu$$

إذا فرضنا $\sigma(1) = i_1 , \sigma(2) = i_2 , \dots , \sigma(n) = i_n$ واعتبرنا σ ممثلاً لعنصر من G_n مجموعة متبادلات $(1 , 2 , \dots , n)$ وإذا فرضنا $\varepsilon_\sigma = (-1)^v$ فإنه يكون :

$$\det A = \left[\sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_\sigma \alpha_{\sigma(1)}^{1} \alpha_{\sigma(2)}^{2} \cdots \alpha_{\sigma(n)}^{n} \right] \tag{5}$$

وبما الطرف الايمن معين تماماً والمصفوفة A مصفوفة كيفية من مجموعة المصفوفات المربعة من السعة n فان التطبيق det موجود . ويمكننا أن نبرهن بسهولة أن التطبيق det بالشكل (5) متعدد الخطية ومتناوب .

كما يمكننا أن نبرهن أن :

$$g(e_1 , e_2 , \dots , e_n) = \mu \Rightarrow g(A_1 , A_2 , \dots , A_n) = \mu \det (A_1 , A_2 , \dots , A_n)$$

وهذا يؤدي الى أنه إذا كان g تطبيقاً متعدد الخطية يحقق العلاقة :

$$g(e_1 , e_2 , \dots , e_n) = 1$$

فإن $g = \det$ وهذا مايبرهن على أن التطبيق det وحيد .

ننسب عادة المعين الى رتبة مصفوفته فنقول معين من الدرجة n عندما يتعلق بمصفوفة مربعة منتظمة من السعة $n \times n$.

٢٣ - ٧ أمثلة : (١) إذا كانت المصفوفة A من السعة 2×2 فإننا نستنتج من (5) أن :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \alpha_1^1 \cdot \alpha_2^2 - \alpha_2^1 \cdot \alpha_1^2$$

وذلك لان G_2 تحوي متبادلتين فقط هما (1 , 2) ، (2 , 1) الاولى زوجية والثانية فردية .

نرمز عادة لمعين المصفوفة A بجدول المصفوفة ذاته موضوعاً بين قطعتين مستقيمتين شاقولتين أي :

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_2^{\ 1} \\ \alpha_1^{\ 2} & \alpha_2^{\ 2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_2^{\ 1} \\ \alpha_1^{\ 2} & \alpha_2^{\ 2} \end{vmatrix} = \alpha_1^{\ 1} \cdot \alpha_2^{\ 2} - \alpha_2^{\ 1} \cdot \alpha_1^{\ 2}$$

(٢) إذا كانت المصفوفة A من السعة 3×3 ورمزنا لعنصر منها بـ $\alpha_J^{\ I}$ فإنه يكون للمجموعة { 1 , 2 , 3 } ست متبادلات ثلاث منها زوجية وهي :

$$\{1, 2, 3\} \quad , \quad \{2, 3, 1\} \quad , \quad \{3, 1, 2\}$$

وثلاث منها فردية وهي :

$$\{1, 3, 2\} \quad , \quad \{2, 1, 3\} \quad , \quad \{3, 2, 1\}$$

وتكون عندها قيمة المعين من الدرجة الثالثة :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_2^{\ 1} & \alpha_3^{\ 1} \\ \alpha_1^{\ 2} & \alpha_2^{\ 2} & \alpha_3^{\ 2} \\ \alpha_1^{\ 3} & \alpha_2^{\ 3} & \alpha_3^{\ 3} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 \cdot \alpha_1^{\ 1}\, \alpha_2^{\ 2}\, \alpha_3^{\ 3} + (-1)^2 \cdot \alpha_2^{\ 1}\, \alpha_3^{\ 2}\, \alpha_1^{\ 3} + (-1)^2 \cdot \alpha_3^{\ 1}\, \alpha_1^{\ 2}\, \alpha_2^{\ 3}$$

$$+ (-1)^1 \cdot \alpha_1^{\ 1}\, \alpha_3^{\ 2}\, \alpha_2^{\ 3} + (-1)^3 \cdot \alpha_2^{\ 1}\, \alpha_1^{\ 2}\, \alpha_3^{\ 3} + (-1)^3 \cdot \alpha_3^{\ 1} \alpha_2^{\ 2}\, \alpha_1^{\ 3}$$

$$= \alpha_1^{\ 1}\, \alpha_2^{\ 2}\, \alpha_3^{\ 3} + \alpha_2^{\ 1}\, \alpha_3^{\ 2}\, \alpha_1^{\ 3} + \alpha_3^{\ 1}\, \alpha_1^{\ 2}\, \alpha_2^{\ 3}$$

$$- \alpha_1^{\ 1}\, \alpha_3^{\ 2}\, \alpha_2^{\ 3} - \alpha_2^{\ 1}\, \alpha_1^{\ 2}\, \alpha_3^{\ 3} - \alpha_3^{\ 1}\, \alpha_2^{\ 2}\, \alpha_1^{\ 3}$$

بعض الخواص الرئيسية للمعينات :

٢٤ - ٧ اذا كانت A مصفوفة من السعة $n \times n$ واذا كان A^t منقول هذه المصفوفة فان :

$$\det A = \det A^t$$

البرهان : لنأخذ حد من حدود منشور المعين المتعلق بـ A ولنفرضه من الشكل :

$$(1) \qquad \varepsilon_\sigma \alpha_{\sigma(1)}{}^1 \alpha_{\sigma(2)}{}^2 \ldots \alpha_{\sigma(n)}{}^n$$

لنبادل بين مواضع المضاريب فيه بحيث تصبح فيه الادلة الدنيا مرتبة وفق الترتيب الطبيعي $(1, 2, \ldots, n)$ فتأخذ عندها الادلة العليا شكلاً جديداً نفرضه $\tau(1)\ \tau(2)\ ..\ \tau(n)$ ومن الواضح أنه اذا كان عدد انقلابات المتبادلة σ زوجياً فإن عدد انقلابات τ زوجياً وإذا كان العدد الاول فردياً فان الثاني فردي أيضاً وذلك لان الانتقال من σ الى المتبادلة الاساسية يجري بعدد من الانقلابات يساوي عدد الانقلابات التي تنقلنا من المتبادلة الاساسية الى المتبادلة τ . ان هذا يؤدي الى أن $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau$ حسب تعريف هذا الرمز ويأخذ الحد المذكور الشكل التالي :

$$(2) \qquad \varepsilon_\tau \alpha_1{}^{\tau(1)} \alpha_2{}^{\tau(2)} \ldots \alpha_n{}^{\tau(n)}$$

إن هذا هو الحد المقابل من منشور $\det A^t$ للحد (١) من منشور (١) وهما متساويان كما برهنا وبهذا يثبت المطلوب .

٢٥ - ٧ **نتيجة** : يمكن استناداً الى هذه النظرية أن نبدل في

تعريف المعين وفي كل من النظريتين التاليتين كلمة سطر بكلمة عمود .

٢٦ ـ ٧ إذا كانت B مصفوفة نتجت عن مصفوفة مربعة A باضافة أحد أعمدتها بعد ضرب مركباته بعنصر $k \neq 0$ من الحقل K فان $\det B = \det A$.

$$\det B = \det(\ldots, A_i + k\,A_j, \ldots, A_j, \ldots)$$
$$= \det(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots) + k \det(\ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots)$$
$$= \det A$$

٢٧ ـ ٧ إذا كان أحد أعمدة المصفوفة A صفراً فانه $\det A = 0$:

$$\det(A_1, \ldots, 0, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, 0\,b, \ldots, A_n) =$$
$$= 0 \,.\, \det(A_1, \ldots, b, \ldots, A_n) = 0$$

حيث يمكن كتابة كل شعاع صفري على شكل جداء العنصر الصفري من الحقل K بشعاع كيفي .

وهكذا يمكننا اعتماداً على التعريف وعلى النظريات الأخيرة أن نلخص الخواص الرئيسية للمعين بما يلي .

(١) إذا كانت B المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة **A** بمبادلة أسطرها مع أعمدتها (مع المحافظة على الترتيب) فإن $\det A = \det B$.

(٢) إذا كانت B المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة A بمبادلة سطرين (عمودين) فإن $\det B = -\det A$.

(٣) إذا كانت B المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة A بضرب

جميع عناصر سطر (عمود) بعنصر k من K غير صفري فإن :
$\det B = k \det A$.

(٤) إذا كانت B المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة A بضرب جميع عناصر سطر (عمود) بعنصر من K ثم بجمع هذه العناصر الى العناصر المقابلة من سطر (عمود) آخر فان $\det B = \det A$.

(٥) إذا كانت أسطر مصفوفة مربعة A أو أعمدتها مرتبطة خطياً فان $\det A = 0$ وبشكل خاص إذا تطابق سطران (عمودان) في مصفوفة A أو إذا كانت جميع عناصر أحد الاسطر (أحد أعمدة) أصفاراً فإن $\det A = 0$.

وعلى العكس إذا كان $\det A \neq 0$ فان أسطر المصفوفة A (وأعمدتها كذلك) مستقلة خطياً أي أن المصفوفة A منتظمة .

ضرب المعينات :

٢٨ ـ ٧ إذا كان A و B مصفوفتين من السعة $n \times n$ معرفتين على حقل واحد K فان :

$$\det (B . A) = \det (B) . \det (A)$$

البرهان : لنرمز بـ $(A_1 , A_2 , \ldots , A_n)$ لاعمدة A فيكون استناداً الى تعريف ضرب المصفوفات [٨ـ٧] .

$$B . A = (B . A_1 , B . A_2 , \ldots , B . A_n)$$

حيث اعتبرنا A_1 مصفوفة من السعة $1 \times n$.

لنعتبر B ثابتاً و A متحولا ولنعرف التطبيق :

$$(1) \qquad f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \det(B A_1, B A_2, \ldots, B A_n)$$

نبرهن استناداً الى كون det تابعاً متعدد الخطية ومتناوباً على أن f متعدد الخطية ومتناوب ونتوصل بالطريقة التي قدمناها في [٢٢-٧] الى :

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = f(I_n) \cdot \sum_{\tau \in G_n} \varepsilon_\tau \, \alpha_1^{\tau(1)} \alpha_2^{\tau(2)} \cdots \alpha_n^{\tau(n)}$$

$$= f(I_n) \det(A)$$

حيث I_n مصفوفة الواحدة من المرتبة n .

إذا استعضنا في العلاقة (1) عن A بـ I_n فسوف نجد :

$$f(I_n) = \det(B e_1 + B e_2 + \ldots + B e_n) = \det(B)$$

وذلك لان :

$$B e_1 = B_1 \ , \ B \ e_2 = B_2 \ \ldots , \ B \ e_n = B_n$$

حيث تعتبر e_i مصفوفة ذات عمود واحد كل عناصرها معدومة إلا العنصر ذي الرقم i فانه يساوي الواحد .

نتيجة لما تقدم تأخذ العلاقة (2) الشكل التالي :

$$f(A) = \det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$$

وهو المطلوب .

نشر المعين وفق عناصر سطر (أو عمود) :

٢٩ - ٧ تعريف : نسمي المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة

$A = [\alpha_i^k]$ بحذف السطر والعمود اللذين يحويان α_i^k صغير العنصر α_i^k ونسمي حاصل ضرب معين هـــذا الصغير بـ $(-1)^{i+k}$ المتمم الجبري لـ α_i^k ونرمز له بـ A_i^k .

فالمصفوفة $\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{bmatrix}$ هي غير العنصر α_3^2 من المصفوفة

$\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{bmatrix}$ كما أن $(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{vmatrix}$ هو المتمم الجبري A_3^2 .

٣٠ ـ ٧ نظرية : إن :

$$\det A = \alpha_1^k A_1^k + \alpha_2^k A_2^k + \ldots + \alpha_n^k A_n^k$$

أي لحساب معين مصفوفة يكفي أن نضرب عناصر أحد الأسطر بالمتممات الجبرية الموافقة لها ثم نجمع الناتج (تسمى هذه القاعدة نشر المعين وفق عناصر السطر ذي الرقم k) .

البرهان : لنعرف تطبيقاً f على مجموعة المصفوفات المربعـــة من السعة $n \times n$ والتي تنتمي مركباتهـــا الى الحقل K بحيث تقـابل كل مصفوفة $A = (A_1 ; A_2 , \ldots , A_n)$ بعنصر من K هو :

$$\alpha_1^k A_1^k + \alpha_2^k A_2^k + \ldots + \alpha_n^k A_n^k$$

أي :

$$f(A) = f(A_1 , A_2 , \ldots , A_n) = \alpha_1^k A_1^k + \ldots + \alpha_n^k A_n^k$$

فإذا برهنا أن هـذا التطبيق يحقق جميع الشروط المذكورة في [٢١ - ٧] وبما أن التطبيق الذي يحقق هـذه الشروط وحيد يكون $f(A) = \det A$ ويتم المطلوب .

لنبرهن أولاً أن التطبيق المذكور متناوب ولنبادل من أجل ذلك بين العمودين الأول والثاني (إن البرهان مماثل لو بادلنا بين عمودين كيفيين) فيتبادل بذلك العمودان الاول والثاني في صغيرات العناصر $\alpha_3{}^k , \alpha_4{}^k , \ldots , \alpha_n{}^k$ وبالتالي فإن المتممات الجبرية $A_3{}^k , A_4{}^k , \ldots , A_n{}^k$ تغير إشارتها . أما $A_2{}^k , A_1{}^k$ فهي تغير إشارتها كذلك لأن المضروب $(-1)^{i+k}$ الوارد في تعريف المتمم الجبري يغير إشارته بسبب تبادل موضعي العمودين الأول والثاني وهكذا نجد أن :

$$f(A_2 , A_1 , \ldots , A_n) = - f(A_1 , A_2 , \ldots , A_n)$$

لنبرهن بعد ذلك أنه إذا تطابق العمودان الأول والثاني في A (ان البرهان مماثل لو تطابق عمودان كيفيان) فإنه يتطابق العمودان الأول والثاني في صغـيرات العناصر $\alpha_3{}^k , \alpha_4{}^k , \ldots , \alpha_n{}^k$ وبالتالي يكون $A_3{}^k = A_4{}^k = \ldots = A_n{}^k = 0$. أما الحدان الاول والثاني فلا يختلفان عن بعضهما (لتطابق العمودين الاول والثاني) إلا بالاشارة وعلى هـذا فإن $f(A) = 0$ عندئذ .

وأما برهان تعدد خطية التطبيق وأن $f(I) = 1$ فنتركه للقارىء .

٣١ - ٧ ملاحظة : بما أن معين مصفوفة يسـاوي معين المصفوفة المنقولة عنها فإننا نستنتج من النظرية الاخيرة ما يلي :

$$\det A = \alpha_k{}^1 A_k{}^1 + \alpha_k{}^2 A_k{}^2 + \ldots + \alpha_k{}^n A_k{}^n$$

أي أنه للحصول على معين مصفوفة نضرب عناصر أحد الاعمدة بالمتممات الجبرية الموافقة ثم نجمع الناتج (تسمى هذه القاعـــدة نشر المعين وفق عناصر العمود ذي الرقم k) .

مثال :

– احسب قيمة المعين :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

لننشر المعين وفق عناصر السطر الثاني فنجد أنه يساوي :

$$6 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2) \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -6\,(1) + 2\,(2) + 2\,(-9) = -20$$

لنلاحظ أنه من المفيد أن ننشر المعين وفق عناصر السطر أو عناصر العمـ. الذي يحوي أكبر عدد ممكن من الاصفار فلو ضربنا السطر الثالث بـ 2 ثم أضفناه للسطر الثاني فإننا نجد أنه يساوي :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 12 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر العمود الثالث نجد :

$$1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 12 & -4 \end{vmatrix} = -20$$

٣٢ - ٧ نتيجـــة :

$$\alpha_1^k A_1^j + \alpha_2^k A_2^j + \ldots + \alpha_n^k A_n^j = 0 \qquad (k \neq j)$$

$$\alpha_k^1 A_j^1 + \alpha_k^2 A_j^2 + \ldots + \alpha_k^n A_j^n = 0 \qquad (k \neq j)$$

البرهان : لتكن A' المصفوفة الناتجة عن A برفع السطر j ووضع السطر k بدلاً منه فعندئذ يتطابق السطران j و k من A' ويكون $\det A' = 0$. لننشر الآن $\det A'$ وفق عناصر السطر k فنحصل على المعادلة الاولى . للحصول على الثانية نسلك الطريق ذاته مستعملين أعمدة A بدلاً من أسطرها .

٣٣ - ٧ نتيجة (٢) : لتكن $\bar{A}$ المصفوفة المنقولة لمصفوفة المتممات الجبرية لـ A أي المصفوفة :

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \ldots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \ldots & A_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n^1 & A_n^2 & \ldots & A_n^n \end{vmatrix}$$

من الواضح أن $A . \bar{A} = (\det A)\, I_n$ وبالتالي وبفرض $\det A \neq 0$ وبشكل مماثل نجد

$$\frac{\bar{A}}{\det A} . A = I_n$$

٣٤ ـ ٧ تعريف : نقول عن مصفوفة B من السعة $n \times n$ أنها مقلوب أو معكوس المصفوفة A من السعة ذاتها ، إذا تحقق ما يلي :

$$A \cdot B = B \cdot A = I \qquad (\text{I المصفوفة الواحدة})$$

يرمز عادة للمصفوفة B معكوس المصفوفة A بالرمز A^{-1} وبالتالي تصبح العلاقات السابقة من الشكل :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

ومن النتيجة [٣٣ ـ ٧] نجد أن مقلوب المصفوفة A هي المصفوفة $A^{-1} = \dfrac{\bar{A}}{\det A}$.

نستنتج من هذه العلاقة ومن الخاصة (٥) من [٢٧ ـ ٧] ما يلي :

٣٥ ـ ٧ نظرية : الشرط اللازم والكافي ليكون لمصفوفة مربعة A مقلوب (معكوس) هو أن تكون هذه المصفوفة ، A ، منتظمة .

مثال : أوجد مقلوب المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

إن معين المصفوفة A هو ، كما رأينا ،

$$\det A = -20$$

وأن المتممات الجبرية هي :

$$A_1^1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad , \quad A_2^1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_3^{\,1} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -24 \quad , \quad A_1^{\,2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_2^{\,2} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad , \quad A_3^{\,2} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9 \quad ,$$

$$A_1^{\,3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_2^{\,3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad , \quad A_3^{\,3} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

ومنه نجد أن :

$$A^{-1} = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -12 & 2 & 4 \\ -24 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

٣٦ - ٧ ملاحظة : حساب معينات المصفوفات من السعة 3×3

نكتب الى يمين المصفوفة العمودين الأول والثاني على التوالي :

$$\begin{matrix} \alpha_1^{\,1} & \alpha_2^{\,1} & \alpha_3^{\,1} & \alpha_1^{\,1} & \alpha_2^{\,1} \\ \alpha_1^{\,2} & \alpha_2^{\,2} & \alpha_3^{\,2} & \alpha_1^{\,2} & \alpha_2^{\,2} \\ \alpha_1^{\,3} & \alpha_2^{\,3} & \alpha_3^{\,3} & \alpha_1^{\,3} & \alpha_2^{\,3} \end{matrix}$$

فاذا أمعنا النظر في النتيجة التي حصلنا عليها في (٢) من [٢٣ - ٧] لاحظنا أن الحدود المسبوقة باشارة + هي جداء عناصر القطر الاساسي $\alpha_1^{\,1}\ \alpha_2^{\,2}\ \alpha_3^{\,3}$ وجـــداء عناصر القطرين الموازيين له من اليمـــين .

أما الحدود المسبوقة باشارة — فهي جداء عناصر القطر الثانوي $\alpha_3^1\alpha_2^2\alpha_1^3$ مع جـــداءات عناصر القطرين الموازيين له من اليمين . فلحســاب قيمة المعين :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

نكتب الى يمينه العمودين الأول والثاني فنجد :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right.$$

إن جداءات عناصر كل من القطر الأسامي والموازيينله هي 4 , 6 − , 0 أما جـداءات عناصر كل من القطر الثـانوي والموازيين له فهي 0 , 12 , 6 ولذلك فان قيمة المعين هي .

$$4 - 6 + 0 - (0 + 12 + 6) = -20$$

بعض تطبيقات المعينات :

١ - في الاستقلال الخطي للأشعة :

٣٧ - ٧ **نظرية** : الشرط اللازم والكافي كي تكون أعمدة المصفوفة A مرتبطة خطياً هو أن يكون $\det A = 0$.

البرهان : إذا كانت أعمدة A مرتبطـــة خطياً فعندئذ نستطيع أن نكتب أحد أعمدتها وليكن A_1 كتركيب خطي من الاعمدة الاخرى : $A_1 = \lambda_2 A_2 + .. + \lambda_n A_n$ وبالتالي يكون :

$$\det (A_1 , A_2 , . . . , A_n) = \det (\lambda_2 A_2 + . . + \lambda_n A_n , A_2 , . . . , A_n)$$

$$= \lambda_2 \det (A_2 , A_2 , . . . , A_n) + . . + \lambda_n \det (A_n , A_2 , . . . , A_n) = 0$$

وبالعكس إذا كان $\det A = 0$ فان الاعمدة مرتبطة خطياً لانها لو كانت مستقلة خطياً لكان لها مقلوب A^{-1} وبالتـــالي فان $A . A^{-1} = I$ ، ومنه $\det A . \det A^{-1} = 1$ الامر الذي ينتج عنـه أن $\det A \neq 0$ وهـــذا مخالف للفرض .

٣٨ - ٧ نتيجة : الشرط اللازم والكافي كي تكون أسطر مصفوفة A مرتبطة خطياً هو أن يكون $\det A = 0$ ولبرهان ذلك نستبدل بالمصفوفة A المصفوفة المنقولة A^t في النظرية السابقة فنجد المطلوب .

٣٩ - ٧ في تعيين رتبة مصفوفة :

لتكن $A = [\alpha_j{}^i]$ مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل K . تشكل أشعة أعمدة المصفوفة $A_1 , . . , A_n$ فراغاً شعاعياً جزئياً S من K^m . كما تشكل أشعة أسطر المصفوفة ، $A^1 , . . , A^m$ فراغاً شعاعياً جزئيـــاً U من K^n . نسمي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي الجزئي S الرتبة العمودية للمصفوفة A ونسمي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي الجزئي U الرتبة السطرية للمصفوفة A .

٤٠ - ٧ **نظرية** : لتكن $A = [\alpha_i^j]$ مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل K . أن الرتبة العمودية والرتبة السطرية لـ A متســاويتان وتساويان p رتبـة التطبيق الخطي الموافـــق لـ A . وتكون أكبر مصفوفة مربعة جزئية منتظمة من A من السعة $p \times p$.

(انظر التمارين المحلولة ٢٧٦ ، ٢٧٧ ، ٢٧٨)

استناداً للنظرية السابقة وإلى التعريف [٧-١٧] نجد :

٤١ - ٧ **نظرية** : الشرط اللازم والكافي لتكون مصفوفة مربعة من السعة $n \times n$ منتظمة هو أن تكون رتبة هذه المصفوفة تساوي n .

مثال : إن رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي 2 .

ورتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي 3 لان معينها غير معدوم وبالتالي فهي منتظمة .

٤٢ - ٧ حل جملة معادلات خطية :

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية في المتحولات $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 x_1 + \alpha_2^1 x_2 + \ldots + \alpha_n^1 x_n &= \beta_1 \\ \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_n^2 x_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_1^m x_1 + \alpha_2^m x_2 + \ldots + \alpha_n^m x_n &= \beta_m \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

حيث $i = 1 , \ldots , n$ ، $j = 1 , \ldots , m$ ، α_i^j و $\beta_1 , \ldots , \beta_m$ عناصر معلومة من الحقل K

نسمي المصفوفة $A = [\alpha_i^j]$ مصفوفة الامثال لمجموعـة المعادلات (I)

وسنرمز بـ T_A للتطبيق الخطي من K^n الى K^m الموافق للمصفوفة A بالنسبة للقاعدتين الطبيعيتين في K^n و K^m .

إذا رمزنا بـ x و b للشعاعين العمودين $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$ من K^n و K^m على الترتيب لامكن كتابة جملة المعادلات (I) بالمعادلة المصفوفية :

$$\text{(II)} \qquad A x = b \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j x_i = \beta_j \quad , \quad j = 1 , \ldots , m \right)$$

وفي الحالة التي يكون فيهـــا الشعاع b هو الشعاع الصفري تصبح الجملة II بالشكل :

$$\text{(III)} \qquad A x = 0$$

ونسمي الجملة في هذه الحالة جملة متجانسة .

وإذا نظرنا في أشعة أعمدة المصفوفة A لتمكنا من كتابة II بالشكل :

$$\text{(IV)} \qquad x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = b .$$

إذا كان x و x′ حلين لجملة المعادلات I فان :

$$A (x - x') = 0$$

وبعبارة ثانية $T_A (x - x') = 0$. وبالتالي فان الشعاع $x - x'$ ينتمي لنواة التطبيق الخطي T_A .

نستنتج أنه إذا كان x حلاً لجملة المعادلات I فان كل شعاع من الشكل :

$$x + z \quad : \quad z \in \operatorname{Ker} T_A$$

هو أيضاً حل لجملة المعادلات I . ومنه :

٤٣ - ٧ نظرية : الشرط اللازم والكافي كي يكون للجملة I حل وحيد (إن وجد) ، هو أن يكون $\ker T_A = \{0\}$ ، أي أن تكون رتبة مصفوفة الأمثال تساوي n .

ومن جهة ثانية ، إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال ، A ، تساوي p فيوجد p عموداً من أعمدة A مستقلة خطياً . لنفرض أن هذه الاعمدة هي $A_1 , \ldots , A_p$. تشكل هذه الاعمدة فراغاً شعاعياً جزئياً U من K^n عدد أبعاده p ويمكن عندئذ كتابة المعادلة IV بالشكل :

$$(V) \qquad x_1 A_1 + \ldots x_p A_p = b - (x_{p+1} A_{p+1} + \ldots + x_n A_n)$$

نستنتج من هذه العلاقة أن الشرط اللازم والكافي ليكون للجملة I حل هو أن يكون الشعاع b منتمياً الى الفراغ الشعاعي الجزئي U ، وذلك لأن الأشعة $A_1 , \ldots , A_n$ منتمية ل U . وعندها مهما كانت $x_{p+1} , \ldots , x_n$ من K فيمكن أن نجد عناصر $x_1 , \ldots , x_p$ من K تحقق العلاقة (V) . وبما أنه يمكن اعتبار الأشعة $A_1 , \ldots , A_p$ قاعدة في U فان $x_1 , \ldots , x_p$ تتعين بشكل وحيد . وبذلك نكون قد برهنا النظرية التالية :

٤٤ - ٧ نظرية : لنفرض أن رتبة المصفوفة A ، مصفوفة أمثال

جملة المعادلات I ، تساوي p . إن الشرط اللازم والكافي ليكون لجملة المعادلات I حل x من أجل قيمة مفروضة لـ b هو أن ينتمي الشعاع العمود b للفراغ الشعاعي الجزئي (ذي الـ p بعداً) من K^n والمتولد من أشعة أعمدة المصفوفة A . وعندها يتعين p مجهولاً $x_1, \ldots, x_p$ بشكل وحيد في حين أن بقية الـ $n - p$ مجهولاً تبقى كيفية .

٤٥ - ٧ **ملاحظة** : (١) نستنتج من العلاقة V أنه إذا كان b الشعاع المعدوم، أي إذا كان لدينا جملة المعادلات المتجانسة III فان $x_1 = \ldots = x_p = 0$ وإلا كانت الأشعة $A_1, \ldots, A_p$ مرتبطة خطياً وهذا يخالف للفرض .

وفي الحالة $p = n$ يكون لجملة المعادلات المتجانسة III حل وحيد هو الصفر

(٢) إذا كان $m = n$ فتكون مصفوفة الامثال A مربعة من السعة $n \times n$. إذا ضربنا المعادلة الاولى بـ A_1^1 والثانية بـ A_1^2 ... والاخيرة بـ A_1^n (المتممات الجبرية) وجمعنا المعادلات الناتجة وجدنا أن :

$$(\det A)\, x_1 = \beta_1 A_1^1 + \beta_2 A_1^2 + \ldots + \beta_n A_1^n$$

إن قيمة الطرف الايمن من العلاقة الاخيرة يمثل قيمة معين مصفوفة تنتج عن المصفوفة A برفع العمود الاول ووضع الشعاع b عوضاً عنه وبالتالي :

$$(\det A)\, x_1 = \det (b ; A_2, \ldots, A_n)$$

فاذا كان $\det A \neq 0$ نجد :

$$x_1 = \frac{\det (b, A_2, \ldots, A_n)}{\det A}$$

وبوجه عام نجد :

$$x_i = \frac{\det(A_1, .., A_{i-1}, b, A_{i+1}, .., A_n)}{\det A}$$

$i = 1, .., n$

نسمي قاعدة حل جملة المعادلات الخطية بالدستور الاخير **قاعدة كرامر** .

تمارين محلولة

٢٤٩ - إذا كانت :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

فأوجد ما يلي :

$D\,B^t \;,\; D\,B \;,\; C\,D \;,\; D\,C \;,\; 3\,D^t - 2\,B^t \;,\; D + C \;,\; 2\,D + B$

الحل : لدينا حسب التعريف :

$$2\,D = 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

$$2\,D + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & 10 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 10 & 15 & -6 \end{bmatrix}$$

إن الجمع $D + C$ غير معرف (لماذا ؟) .

حسب تعريف منقول مصفوفة نجد أن :

$$D^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B^t = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$3\,D^t = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 15 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \quad , \quad -2\,B^t = \begin{bmatrix} -12 & -8 \\ -2 & -10 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}$$

نجد أن :

$$3\,D^t - 2\,B^t = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 4 & 5 \\ 14 & -16 \end{bmatrix}$$

ومن أجل الجداء DC نجد :

$$DC = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & -19 & -10 \end{bmatrix}$$

أما الجداء CD فغير معروف (لماذا ؟) وكذلك الجداء DB غير معروف (لماذا ؟) .

من أجل الجداء DB^t نجد :

$$D\,B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 51 & 29 \end{bmatrix}$$

٢٥٠ - إذا كانت لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة $I - A + 2A^2 -$ حيث I مصفوفة الواحدة من المرتبة الثالثة .

الحل : لدينـــا :

$$A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$-2A^2+A-I=\begin{bmatrix}-12 & -8 & -10\\ -8 & -6 & -8\\ -10 & -8 & -12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -7 & -8\\ -7 & -4 & -7\\ -8 & -7 & -10\end{bmatrix}$$

٢٥١ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل R عـدد أبعاده 2 . ولتكن (e_1, e_2) قاعـــدة في V . ليكن $T, F: V \to U$ تطبيقين خطيين معطيين بالعلاقات :

$$T(e_1) = 2e_1 - e_2 \quad , \quad T(e_2) = 3e_1 + 2e_2$$

$$F(e_1) = 5e_1 + e_2 \quad , \quad F(e_2) = e_1 + e_2$$

(١) أوجد المصفوفة المرافقة لكل من T و F و $F \circ T$ و $T \circ F$.

(٢) أوجـــد خيال الشعاع $u = 3e_1 - 4e_2$ وفق كل من التطبيقات T و F و $F \circ T$.

الحل : (١) إذا كان $A = [a_j{}^i]$ المصفوفة المرافقـة للتطبيق الخطي T بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) فيجب أن يكون :

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{2} a_j{}^i e_i \quad , \quad j = 1, 2$$

$$= a_j{}^1 e_1 + a_j{}^2 e_2$$

وبالتالي نجد أن :

$$A = [a_j{}^i] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

وإذا كانت $B = [\, b_j^{\,i} \,]$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي F بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) فيجب أن يكون :

$$F(e_j) = \sum_{i=1}^{2} b_j^{\,i} e_i \qquad , \qquad j = 1, 2$$

ومنه نجد أن :

$$B = [\, b_j^{\,i} \,] = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وكما نعلم إن المصفوفة المرافقة للتطبيق المركب $F \circ T$ بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) هي مصفوفة الجداء BA أي :

$$B\,A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 17 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

كما أن المصفوفة المرافقة للتطبيق المركب $T \circ F$ بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) هي مصفوفة الجداء AB أي :

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

هـذا ويمكن الحصول على المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي $F \circ T$ بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) بالرجوع الى التطبيق المركب $F \circ T$ فنجد :

$$(F \circ T)(e_1) = F(T(e_1)) = F(2e_1 - e_2)$$

$$= 2F(e_1) - F(e_2) \qquad (\text{F تطبيق خطي})$$

$$= 2\,(5\,e_1 + e_2) - (e_1 + e_2)$$

$$= 9\,e_1 + e_2$$

ونجد أيضاً :

$$o\ T)\,(e_2) = 17\,e_1 + 5\,e_2$$

ونحصل على المصفوفة الموافقة BA .

وبصورة مشابهة يمكن أن نحصل على المصفوفة AB الموافقة لـ $T\ o\ F$

(٢) يمكن أن نمثل الشعاع u بشعاع عمود $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ ونحصل على خيال u وفق T بالجداء المصفوفي :

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$T\,(u) = -6\,e_1 - 11\,e_2$$

وكان بالامكان الحصول على خيال u بتطبيق T مباشرة فنجد :

$$T\,(u) = T\,(3\,e_1 - 4\,e_2)$$

$$= 3\,T\,(e_1) - 4\,T\,(e_2)$$ (T تطبيق خطي)

$$= 3\,(2\,e_1 - e_2) - 4\,(3\,e_1 + 2\,e_2) = -6\,e_1 - 11\,e_2$$

هذا وإن خيال u وفق F يعطى بالشعاع العمود :

$$B \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وخيال u وفق $F \circ T$ هو الشعاع العمود :

$$BA\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&17\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-41\\-17\end{bmatrix}$$

وخيال u وفق $T \circ F$ هو الشعاع العمود :

$$AB\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&5\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19\\-13\end{bmatrix}$$

ويمكن الحصول على خيال u بتطبيق مباشر للتطبيقات السابقة على u .

٢٥١ - اعط تفسيراً هندسياً للتحويل المعروف في المستوي xoy بالعلاقة $y = Ax$ (حيث $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ يمثلان نقطتين أو شعاعين مبدؤهما o) وذلك من أجل :

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

الحل :

$$y=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\-x_2\end{bmatrix}$$

وهذا يمثل تناظراً بالنسبة للمحور ox . أما

$$y=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

فيمثل التطبيق المطابق .

ويمثل :

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

تناظراً بالنسبة لمبدأ الاحداثيات . كما يمثل :

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

تركيب تناظرين : الاول بالنسبة لمنصف الربع الاول يعقبه تناظر بالنسبة للمحور oy . وأخيراً فإن :

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

يمثل تناظراً بالنسبة للمحور oy .

٢٥٢ ـ لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ على الحقل C ، حقل الاعداد المركبة حيث $i^2 = -1$. أوجد كلًا من المصفوفات التالية :

$$A A^t \quad ، \quad A^2 \quad ، \quad i A$$

الحل : حسب تعريف ضرب عنصر من الحقل بمصفوفة نجد :

$$i A = i \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2i \\ -1+i & 3i & -1 \\ 2i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 4-6i & 3+i \\ 4+6i & 12 & 2+5i \\ 3-i & 2-5i & 5 \end{bmatrix}$$

أن :

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5-2i & 4 & 1-i \\ 4 & 8+2i & 2-i \\ 1-i & 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

٢٥٣ - لتكن A و B مصفوفتين من السعة $n \times n$ على الحقل **K** برهن أن جداء A بـ B تبديلي إذا كان جداء المصفوفتين $A - \lambda I$ و $B - \lambda I$ تبديلياً من أجل كل عنصر λ من K وفي هذه الحالة فقط .

الحل : إذا كان $AB = BA$ فان :

$$(A - \lambda I)(B - \lambda I) = AB - \lambda (A + B) + \lambda^2 I$$

$$= BA - \lambda (B + A) + \lambda^2 I$$

(جمع المصفوفات تبديلي)

$$= (B - \lambda I)(A - \lambda I)$$

وبالعكس إذا كان من أجل كل λ من K :

$$(A - \lambda I)(B - \lambda I) = (B - \lambda I)(A - \lambda I)$$

فان :

$$AB - \lambda(A+B) + \lambda^2 I = BA - \lambda(B+A) + \lambda^2 I$$

ومنه نجد أن : $AB = BA$ وهو المطلوب .

٢٥٤ - لتكن A و B مصفوفتين من السعة $n \times n$. إذا كان $AB = BA$ فان $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ وأن $A^t B^t = B^t A^t$ أيضاً .

الحل : بأخذ معكوس طرفي العلاقة $AB = BA$ نجد :

$$(AB)^{-1} = (BA)^{-1}$$

لكن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (لماذا ؟)، وبالتالي تصبح العلاقة الاخيرة من الشكل :

$$B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

وبأخذ منقول طرفي العلاقة $AB = BA$ نجد أن :

$$(AB)^t = (BA)^t$$

وحسب خواص منقول مصفوفة يمكن أن نكتب العلاقة الأخيرة بالشكل :

$$A^t B^t = B^t A^t$$

وهو المطلوب .

٢٥٥ - أوجد المصفوفات المرافقة للتطبيقات الخطية التالية :

(١) $T : R^3 \to R^2$ ومعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

(٢) $F : R^4 \to R^2$ ومعطى بالعلاقة :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_3 - 2x_4)$$

(٣) $G : R^2 \to R^3$ ومعطى بالعلاقة :

$$G(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$$

حيث $(x_1, \ldots, x_p)$ تمثل مركبات شعاع كيفي من R^p بالنسبة للقاعدة القانونية .

الحل : (١) إذا رمزنا بـ (y_1, y_2) لخيال (x_1, x_2, x_3) من R^3 وفق T أي :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$$

فنجد أن :

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

وتكون المصفوفة المرافقة لـ T هي المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(٢) إذا كتبنا : $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2)$

فنجد أن :

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3 - 2x_4$$

والمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي F هي المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(٣) إذا كتبنا :

$$G(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$$

فنجد أن :

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

$$y_3 = 2x_1 + 3x_2$$

وأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي G هي المصفوفة :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

٢٥٦ - ليكن التطبيقان الخطيان $T : R^3 \rightarrow R^2$ و $F : R^2 \rightarrow R^3$ المعرفين بالشكل :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

حيث $(x_1, \ldots, x_p)$ تمثل مركبات شعاع كيفي من R^p بالنسبة للقاعدة القانونية .

أوجد المصفوفات الموافقة ونواة كل من التطبيقات الخطية F, T و $F o T$ و $T o F$ واستنتج رتبة كل من هذه المصفوفات الموافقة .

الحل : إذا كتبنا $(y_1, y_2) \in R^2$ حيث يكون :

$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$ فإن :

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_2 - x_3$$

ومنه المصفوفة الموافقة لـ T هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

إن نواة التطبيق الخطي T :

$$\text{Ker } T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \ : \ T(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$$

وبالتالي فإن :

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

ومنه نجد أن $x_1 = x_2 = x_3$ أي :

$$\text{Ker } T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \ : \ x_1 = x_2 = x_3 \}$$

$\text{Ker } T$ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من R^3 عدد أبعاده واحد .

إذن رتبة التطبيق الخطي T والمصفوفة A ، المرافقة لـ T ، تساوي 2 (عدد أبعاد R^3 مطروحاً منه عدد أبعاد $\operatorname{Ker} T$) .

من أجل التطبيق F ، إذا كتبنـــا $F(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$ فنجد أن :

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_1 + x_2$$

$$y_3 = x_1 - x_2$$

وأن المصفوفة المرافقة لـ F هي المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

إن نواة التطبيق الخطي F :

$$\operatorname{Ker} F = \{ (x_1, x_2) \in R^2 \ : \ F(x_1, x_2) = 0 \}$$

إذن :

$$x_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

ومنه نجد أن $x_1 = x_2 = 0$ أي أن $\operatorname{Ker} F = \{0\}$ وعدد أبعاده صفر . وتكون رتبة F والمصفوفة المرافقة B تساوي 2 عدد أبعاد R^2 .

إن المصفوفة المرافقـة للتطبيق الخطي المركب $F \circ T$ هي جـــداء

للمصفوفتين B . A أي المصفوفة :

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون التطبيق الخطي $F \circ T : R^3 \to R^3$ معطى بالعلاقة (لماذا ؟) :

$$(F \circ T)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)$$

ونجد بسهولة أن نواة هذا التطبيق :

$$\text{Ker}(F \circ T) = \{0\}$$

أي أن رتبة $F \circ T$ والمصفوفة BA تساوي 3 عدد أبعاد R^3 .

وبطريقة مشابهة نجد أن المصفوفة المرافقة لـ $T \circ F$ هي المصفوفة :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ويكون التطبيق الخطي $T \circ F : R^2 \to R^2$ معطى بالعلاقة :

$$(T \circ F)(x_1, x_2) = (-x_2, 2x_2)$$

ونجد أن نواة هذا التطبيق :

$$\text{Ker}(T \circ F) = \{(x_1, x_2) \in R^2 : (T \circ F)(x_1, x_2) = 0\}$$

$$= \{(x_1, 0) : (x_1, 0) \in R^2\}$$

وهي تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من R^2 عدد أبعاده واحـــد .

وتكون رتبة $T \circ F$ والمصفوفة AB هي الواحد .

ملاحظة : يمكن الحصول على رتب المصفوفات السابقة بالاستفادة من المعينات (معين المصفوفة المنتظمة يخالف الصفر) والنظرية [٤٠-٧] .

٢٥٧ - لدينا التطبيق f الذي يقابل كل مصفوفة من السعة 2×2 معرفة على حقل F بعنصر من هذا الحقل وفق ما يلي :

$$f \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_2^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \qquad \alpha_i^j \in F$$

فهل هـذا التطبيق متعدد الخطية بالنسبة لأعمدة المصفوفة ؟ وهل هو متناوب ؟

الحل : إن

$$f \begin{bmatrix} \alpha_1^1 + \beta_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = (\alpha_1^1 + \beta_1^1)\, \alpha_2^1 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2)\, \alpha_2^2$$

$$= (\alpha_1^1 \alpha_2^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2) + (\beta_1^1 \alpha_2^1 - \beta_1^2 \alpha_2^2)$$

$$= f \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} \beta_1^1 & \alpha_2^1 \\ \beta_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

كذلك $\forall \lambda \in F$ فإن :

$$f \begin{bmatrix} \lambda \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \lambda \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \lambda\, \alpha_1^1 \alpha_2^1 - \lambda\, \alpha_1^2 \alpha_2^2 = \lambda\, f \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

فالتطبيق خطي بالنسبة للعمود الأول .

بطريقة مماثلة نبرهن أن التطبيق خطي بالنسبة للعمود الثـــاني فهو متعدد الخطية بالنسبة لاعمـــدة المصفوفة . ولكن نلاحظ أن التطبيق ليس متناوباً لأن :

$$f\begin{bmatrix} \alpha_2^{\,1} & \alpha_1^{\,1} \\ \alpha_2^{\,2} & \alpha_1^{\,2} \end{bmatrix} = \alpha_2^{\,1}\,\alpha_1^{\,1} - \alpha_2^{\,2}\,\alpha_1^{\,2} = \alpha_1^{\,1}\,\alpha_2^{\,1} - \alpha_1^{\,2}\,\alpha_2^{\,2} =$$

$$= f\begin{bmatrix} \alpha_1^{\,1} & \alpha_2^{\,1} \\ \alpha_1^{\,2} & \alpha_2^{\,2} \end{bmatrix}$$

ولـكي يكون متناوباً يجب أن يغير إشارته عندما نبادل بين عموديه .

٢٥٨ - احسب :

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل : لننشر المعين وفق عناصر السطر الأول فنجد أنه يساوي :

$$(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{1+3}(2)\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+4}(4)\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -4 + 2 + 64 = 62$$

٢٥٩ - إذا كانت A مصفوفة مثلثية من الأسفل (راجع(٤) [١-٧]).

فبرهن أن :

$$\det A = \alpha_1^{1} \alpha_2^{2} \dots \alpha_n^{n}$$

الحل : لتكن المصفوفة المثلثية هي :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^{1} & \alpha_2^{1} & \alpha_3^{1} & \dots & \alpha_n^{1} \\ 0 & \alpha_2^{2} & \alpha_3^{2} & \dots & \alpha_n^{2} \\ 0 & 0 & \alpha_3^{3} & \dots & \alpha_n^{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n^{n} \end{bmatrix}$$

وحسب الدستور 2 في [٢٤-٧] نكتب :

$$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \ \alpha_1^{\sigma(1)} \dots \alpha_n^{\sigma(n)}$$

المجموع مأخوذ من أجل جميع متبادلات $\{1, 2, \dots, n\}$.

بما أن $\alpha_i^{\sigma(i)} = 0$ إذا كان $i \gtrless \sigma(i)$ حيث $i = 1, \dots, n$ فإن $\varepsilon_\sigma = +1$ ونحصل على :

$$\det A = \alpha_1^{1} \alpha_2^{2} \dots \alpha_n^{n}$$

وهو المطلوب .

٢٦٠ ـ إذا كانت المصفوفة A سعتها $n \times n$ وذات تناظر مائل وإذا كان $1 + 1 \neq 0$ في حقل الأعداد F فبرهن أن $\det A = 0$ إذا كان n فردياً .

(نقول عن مصفوفة مربعة إنها ذات تناظر مائل عندما : $\alpha_j^{i} = -\alpha_i^{j}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$) .

الحل : استناداً الى تعريف المعين نلاحظ :

$$\det -A = \det(-A_1, -A_2, \ldots, -A_n) =$$
$$= (-1)^n \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) = (-1)^n \det A$$

وبما أن تغيير إشارة جميع عناصر المصفوفة ذات التناظر المائل يعطي مصفوفة جديدة هي منقول المصفوفة الأصلية ، وبما أن قيمة معين المصفوفة يساوي قيمة معين المصفوفة المنقولة فان :

$$\det A = \det A^t = \det -A$$

حيث A^t منقول A .

وهكذا نجد :

$$\det A = (-1)^n \det A$$

فإذا كان n فردياً ، عندئذ يكون $(-1)^n = -1$ وبالتالي .

$$(1+1)\det A = 0$$

ولما كان $1+1 \neq 0$ فان :

$$\det A = 0$$

وهو المطلوب .

٢٦١ - برهن أنه إذا كان F هو حقل الأعداد الحقيقية فإن :

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 2 & -10 \\ -3 & -8 & 0 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 4 & 0 & -11 \\ -6 & 10 & -1 & 11 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

الحل : من المعلوم أن $1+1 \neq 0$ في حقل الأعداد الحقيقية . وبامعان النظر في المصفوفة نرى أنها ذات تناظر مائل . وبما أن $n = 5$ عـــدد فردي نستنتج استناداً الى التمرين السابق أن قيمة المعين تساوي الصفر وهو المطلوب .

٢٦٢ - لتكن A مصفوفة من السعة $n \times n$ ولتكن C مصفوفة منتظمة سعتها $n \times n$ كذلك ، وليكن $A' = C A C^{-1}$. برهن أن $\det A' = \det A$.

الحل : استناداً الى نظرية ضرب المعينات نجد :

$$\det A' = \det C A C^{-1} = \det C \det A C^{-1}$$
$$= \det C \det A \det C^{-1}$$

وبما أن قيم المعينات عناصر من الحقل F وهذه تخضع للخاصة التبديلية يكون :

$$\det A' = \det C \det C^{-1} \det A$$
$$= \det C C^{-1} \det A = \det I \det A$$

ولكن $\det I = 1$ إذن :

$$\det A' = \det A$$

* **٢٦٣** - برهن أن معين فان درموند Van dermonde :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots x_2^{n-1} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

يساوي $\prod_{i>k}(x_i - x_k)$ أي : ... $(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$،

الحل : يمكن أن ننجز البرهان بطريقة التراجع : أولاً لنفرض أن $n = 2$ فيكون :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

وهذا ينسجم مع الجواب المعطى . لنفرض الان أن المطابقة المذكورة صحيحة من أجل جميع الاعداد الصحيحة الموجبة التي هي أقل من n ، ولنبرهن صحتها من أجل n .

لنطرح من العمود n العمود $n - 1$ بعد ضربه بـ x_1 ولنطرح من العمود $n - 1$ العمود $n - 2$ بعد ضربه بـ x_1 وهكذا ، فنجد :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

لننشر وفق عناصر السطر الاول فنجد :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \dots & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

إن المضروب $(x_2 - x_1)$ مشـــترك بين جميع عناصر السطر الاول. و $(x_3 - x_1)$ مشترك بين جميع عناصر السطر الثاني وهكذا . لذلك :

$$\Delta_n = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ولكن بما أن المتطابقة صحيحة من أجل $n - 1$ يكون المعين الاخير مساوياً $\prod_{i > k > 2} (x_i - x_k)$.

أي :

$$(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \dots$$

وهكذا نجد أن :

$$\Delta_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \dots = \prod_{i > k} (x_i - x_k)$$

وهو المطلوب .

٢٦٤ - إذا كان :

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 1 \quad 0 \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & \alpha_n \end{vmatrix}$$

فبرهن أن :

$$D_n = \alpha_n D_{n-1} + D_{n-2}$$

الحل : لننشر وفق عناصر السطر الاخير فنجد :

$$D_n = (-1)^{n+n-1}(-1)\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 1 \quad 0 \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+n}\alpha_n\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots & & & -1 & \alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

ولكن المعين الاخير يساوي D_{n-1} ، أما المعين الاول فننشره وفق عناصر العمود الاخير الذي جميع عناصره أصفار باستثناء العنصر الاخير الذي يساوي 1 فنجد :

$$D_n = \alpha_n D_{n-1} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_2 & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & \alpha_{n-2} \end{vmatrix}$$

وما المعين الاخير إلا D_{n-2} لذلك :

$$D_n = \alpha_n D_{n-1} + D_{n-2}$$

وهو المطلوب .

٢٦٥ ـ احسب معين المصفوفة A التالية :

$$\begin{bmatrix} t-1 & 1 & 4 \\ 0 & t-2 & -1 \\ 3 & 2 & t-3 \end{bmatrix}$$

ثم احسب معين المصفوفة $\bar{A}$ (المصفوفة المنقولة لمصفوفة المتممات الجبرية)
وتحقق من صحة المساواة :

$$A \cdot \bar{A} = (\det A)\, I$$

الحل : لحساب معين المصفوفة ننشر وفق عناصر العمود الاول فنجد :

$$\det A = (t-1)\,[\,(t-2)\,(t-3)+2\,] + 3\,[\,-1-4\,(t-2)\,]$$

$$= t^3 - 6\,t^2 + t + 13$$

لنحسب بعد ذلك المتممات الجبرية لعناصر المصفوفة A :

$$A_1^{\,1} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} t-2 & -1 \\ 2 & t-3 \end{bmatrix} = t^2 - 5\,t + 8$$

بطريقة مماثلة نجـــد :

$$A_2^{\,1} = -3\ , \quad A_3^{\,1} = -3\,(t-2)\ , \quad A_1^{\,2} = 11 - t\ , \; A_2^{\,2} = t^2 - 4\,t - 9$$

$$A_3^{\,2} = 5 - 2\,t\ , \quad A_1^{\,3} = 7 - 4\,t\ , \quad A_2^{\,3} = t - 1\ , \; A_3^{\,3} = t^2 - 3\,t + 2$$

ويكون :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} t^2 - 5\,t + 8 & 11 - t & 7 - 4\,t \\ -3 & t^2 - 4\,t - 9 & t - 1 \\ -3\,(t-2) & 5 - 2\,t & t^2 - 3\,t + 2 \end{bmatrix}$$

وبالتـــالي :

$$\det \bar{A} = (t^2 - 5t + 8)[(t^2 - 4t - 9)(t^2 - 3t + 2) - (t-1)(5-2t)] - (11-t)[-3(t^2 - 3t + 2) + 3(t-1)(t-2)] + (7-4t)[-3(5-2t) + 3(t-2)(t^2 - 4t - 9)]$$

وحسب قواعد ضرب المصفوفات نجد :

$$A \cdot \bar{A} = (t^3 - 6t^2 + t + 13)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\det A)\, I$$

وهو المطلوب .

٢٦٦ ـ احسب A^{-1} إذا علمت أن :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل : بسهولة نجد أن :

$$\det A = -46$$

وأن :

$A_1^1 = -18$, $A_1^2 = -11$, $A_1^3 = -10$, $A_2^1 = 2$, $A_2^2 = 14$

$A_2^3 = -4$, $A_3^1 = 4$, $A_3^2 = 5$, $A_3^3 = -8$

وعلى هذا يكون :

$$A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ \bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$$

٢٦٧ ـ حل جملة المعادلات التالية وفق قاعدة كرامر :

$$x + 2y = 4$$

$$x - 4y + z = 1$$

$$2x + y - 3z = 0$$

الحل :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{50}{21}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{21} = \frac{17}{21}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{21} = \frac{39}{21} = \frac{13}{7}$$

٢٦٨ - لتكن (e^{-t}, e^{2t}) , $(e^{t}, t\,e^{t})$ قاعدتين في فراغ شعاعي جزئي V من فراغ مجموعة التطبيقات من R الى R . ليكن $D : V \to V$ التطبيق الخطي المعرف بعملية الاشتقاق (المؤثر التفاضلي) ، أوجد المصفوفتين الموافقتين لـ D بالنسبة للقاعدتين المفروضتين .

الحل : لدينا :

$$D(e^{-t}) = -e^{-t}$$

$$D(e^{2t}) = 2\,e^{2t}$$

فالمصفوفة الموافقة لـ D بالنسبة للقاعدة الاولى هي :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ولدينا أيضاً :

$$D(e^{t}) = e^{t}$$

$$D(t\,e^{t}) = e^{t} + t\,e^{t}$$

فالمصفوفة المرافقة لـ D بالنسبة للقاعدة الثانية هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٢٦٩ - لتكن $(1, t, t^2)$ قاعدة في فراغ كثيرات الحـــدود الحقيقية ذات الدرجـــة الثانية على الاكثر P_2 . برهن أن الاشعة $t - t^2, 5t, 1 + t$ من P_2 تشكل قاعدة . أوجد مصفوفة الانتقال من القاعدة الاولى الى القاعدة الثانية وبالعكس . أوجـــد خيال الشعاع $f(t) = 3t^2 - 2t + 4$ وفق التطبيق الخطي المرافق لمصفوفة الانتقـال من القاعدة الاولى الى الثانية .

الحل : لنبرهن أن الاشعة $t - t^2, 5t, 1 + t$ مستقلة خطياً . إن شرط الاستقلال الخطي هو :

$$\alpha (1 + t) + \beta (5 t) + \gamma (t - t^2) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

حيث $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

نجد من العلاقات السابقة أن :

$$\alpha + (\alpha + 5\beta + \gamma) t - \gamma t^2 = 0$$

وبما أن $(1, t, t^2)$ مستقلة خطياً فان العلاقة السابقة تؤدي الى أن :

$$\alpha = 0 \quad , \quad \alpha + 5\beta + \gamma = 0 \quad , \quad \gamma = 0$$

ومنه نجد أن $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ، أي أن الاشعة $t - t^2, 5t, 1 + t$ مستقلة خطياً وبما أن عددها يساوي عدد أبعاد الفراغ P_2 فهي تشكل قاعدة فيه .

إذا رمزنا بـ u_1 , u_2 , u_3 لأشعة القاعـدة الثانية على التوالي أي :

$$u_1 = 1 + t$$

$$u_2 = 5\,t \qquad (1)$$

$$u_3 = t - t^2$$

لوجدنا أن مصفوفة الانتقال من القاعدة $(1 , t , t^2)$ الى القاعـــدة (u_1 , u_2 , u_3) هي المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

إن التطبيق الخطي $T : P_2 \rightarrow P_2$ المرافق للمصفوفة A بالنسبة للقاعدة $(1 , t , t^2)$ يعطى بالعلاقات :

$$T(1) = 1 + t$$

$$T(t) = 5\,t$$

$$T(t^2) = t - t^2$$

إذا كتبنا مركبات الشعاع $f(t)$ بالنسبة للقاعدة $(1 , t , t^2)$ وفق العمود $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ فان مركبات خيال هـذا الشعاع وفق T هو العمود الناتج من الجداء المصفوفي :

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$T(f(t)) = 2 - 10\,t - 5\,t^2$$

(يمكن الحصول على هــذه النتيجة بتطبيق T مباشرة واستخدام المعادلات المعرفة لـ T) .

إن مصفوفة الانتقال من القاعدة الثانية إلى القاعدة الأولى هي المصفوفة المعاكسة للمصفوفة **A** ويمكن أن نحصل عليها بطريقة مباشرة هي أن نكتب أشعة القاعدة $(1, t, t^2)$ بدلالة أشعة القاعدة (u_1, u_2, u_3) فنجد من المعادلات (١) :

$$1 = u_1 - \frac{1}{5}u_2$$

$$t = \frac{1}{5}u_2$$

$$t^2 = \frac{1}{5}u_2 - u_3$$

وبالتالي فإن A^{-1} هي المصفوفة :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix}$$

٢٧٠ ـ احسب معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ الواردة في التمرين السابق وذلك باستخدام المعينات .

الحل : لما كان Δ معين المصفوفة A مغايراً الصفر لأن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

فإن المصفوفة A منتظمة ولها معكوس .

إذا رمزنا بـ $\Delta_j{}^i$ للمعين الناتج عن Δ بحذف السطر ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j فنجد أن :

$$\Delta_1{}^1 = -5 \quad , \quad \Delta_2{}^1 = 0 \quad , \quad \Delta_3{}^1 = 0$$

$$\Delta_1{}^2 = -1 \quad , \quad \Delta_2{}^2 = -1 \quad , \quad \Delta_3{}^2 = 1$$

$$\Delta_1{}^3 = 0 \quad , \quad \Delta^3{}_2 = 0 \quad , \quad \Delta_3{}^3 = 5$$

وإذا كتبنا أن $A^{-1} = [\,\beta_j{}^i\,]$ فان : $\beta_j{}^i = \dfrac{1}{\Delta}(-1)^{i+j}\,\Delta_i{}^j$ وبالتالي :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix}$$

٢٧١ - لتكن (e_1 , e_2 , e_3) القاعدة القانونية في R^3 . لنأخذ الأشعة $u_1 = (1 , 1 , 0)$ و $u_2 = (-1 , 1 , 1)$ و $u_3 = (0 , 1 , 2)$ والأشعة $v_1 = (-1 , 1 , 1)$ و $v_2 = (0 , 0 , 1)$ و $v_3 = (2 , 1 , 1)$ المنسوبة إلى القاعدة القانونية .

(١) برهن أن كلا من (v_1 , v_2 , v_3) و (u_1 , u_2 , u_3) تشكل قاعدة في R^3 .

(٢) أوجد مصفوفة الانتقال من القاعدة (u_1 , u_2 , u_3) الى القاعدة (v_1 , v_2 , v_3) .

الحل :

(١) نتركه للقارىء لسهولته .

(٢) إذا كتبنا الأشعة :

$$v_1 = - e_1 + e_2 + e_3$$

$$v_2 = e_3$$

$$v_3 = 2 e_1 + e_2 + e_3$$

فإننا نجد أن مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية الى القاعـــدة (v_1 , v_2 , v_3) هي :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبطريقة مشابهة نجد أن مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونيـــة
إلى القاعدة $(u_1, u_2; u_3)$ هي المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة الانتقال من القاعدة $(u_1; u_2, u_3)$ الى القاعدة القانونية
هي المصفوفة المعاكسة B^{-1} . لنحسب B^{-1} : إن معين هذه المصفوفة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

والمعينات الجزئية :

$$\Delta_1^1 = 1 \quad , \quad \Delta_2^1 = -2 \quad , \quad \Delta_3^1 = -1$$
$$\Delta_1^2 = 2 \quad , \quad \Delta_2^2 = 2 \quad , \quad \Delta_3^2 = 1$$
$$\Delta_1^3 = 1 \quad , \quad \Delta_2^3 = 1 \quad , \quad \Delta_3^3 = 2$$

ومنه نجد أن :

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة الانتقال من القاعـــدة (u_1, u_2, u_3) الى القاعـــدة

(v_1, v_2, v_3) هي مصفوفة الجداء :

$$AB^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة توافق التطبيق الخطي $T : R^3 \to R^3$ المعرف بالعلاقات $T(u_i) = v_i\ ,\ i = 1, 2, 3$ بالنسبة القاعدة (u_1, u_2, u_3) .

٢٧٢ - ليكن T مؤثراً خطياً على R^3 معرفاً بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3\ ,\ -2x_1 + x_2\ ,\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

حيث (x_1, x_2, x_3) مركبات شعاع كيفي بالنسبة للقاعدة القانونية (e_1, e_2, e_3) من R^3 .

(١) اكتب المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2, e_3) .

(٢) اكتب المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1, u_2, u_3) والتي أشعتها معطاة بالنسبة للقاعدة القانونية من الشكل :

$$u_1 = (1, 0, 1)\quad ,\quad u_2 = (-1, 2, 1)\quad ,\quad u_3 = (2, 1, 1)$$

(٣) برهن أن T تطبيق منتظم . ثم أوجد التطبيق المعاكس T^{-1} .

الحل : (١) إن المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية هي :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(٢) إن خيال أشعة القاعدة (u_1, u_2, u_3) وفق T هو :

$$T(u_1) = 4e_1 - 2e_2 + 3e_3$$

$$T(u_2) = -2e_1 + 4e_2 + 9e_3$$

$$T(u_3) = 7e_1 - 3e_2 + 4e_3$$

يتضح مما سبق أن المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدتين : (u_1, u_2, u_3) و (e_1, e_2, e_3) على الترتيب هي :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

ومن ناحية ثانية لدينا :

$$u_1 = e_1 + e_3$$

$$u_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3$$

$$u_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$$

أي أن مصفوفة الانتقال من القاعدة (e_1, e_2, e_3) الى القاعدة (u_1, u_2, u_3) هي :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة المعاكسة C^{-1} تمثل مصفوفة الانتقال من القاعدة (u_1, u_2, u_3) الى القاعدة (e_1, e_2, e_3) وتمكننا من كتابة أشعة القاعدة (e_1, e_2, e_3) بدلالة أشعة القاعدة (u_1, u_2, u_3) ومنه نجد :

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^{3} (B \cdot C^{-1})_i^{\,j}\, u_j \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

أي أن المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1, u_2, u_3) هي المصفوفة BC^{-1} وبالتالي يكفي أن نحسب C^{-1} .

حساب C^{-1} : إن معين المصفوفة C هو :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

وتكون المعينات الثنائية الجزئية من C :

$$\Delta_1^1 = 1 \quad , \quad \Delta_2^1 = -1 \quad , \quad \Delta_3^1 = -2$$

$$\Delta_1^2 = -3 \quad , \quad \Delta_2^2 = -1 \quad , \quad \Delta_3^2 = 2$$

$$\Delta_1^3 = -5 \quad , \quad \Delta_2^3 = 1 \quad , \quad \Delta_3^3 = 2$$

إذا كتبنا $C^{-1} = [\alpha_j^i]$ فإن $\alpha_j^i = \frac{1}{\Delta}(-1)^{i+j}\Delta_i^j$ ومنه نجد أن :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1, u_2, u_3) هي المصفوفة :

$$B\,C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(٣) لاثبات أن T تطبيق منتظم يكفي أن نثبت أن المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدة ولتكن القاعدة (e_1 , e_3 , e_3) ، منتظمة ويتم هذا باثبات أن معين المصفوفة A يخالف الصفر . إن :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

وبالتالي فالشرط محقق .

لتعيين التطبيق T^{-1} يكفي أن نعرف المصفوفة A^{-1} ، المصفوفة المرافقة لـ T^{-1} بالنسبة للقاعدة (e_1 , e_2 , e_3) . من أجل ذلك نحسب المعينات الجزئية من A :

$$\Delta_1^1 = 4 \quad , \quad \Delta_2^1 = -8 \quad , \quad \Delta_3^1 = -3$$

$$\Delta_1^2 = -2 \quad , \quad \Delta_2^2 = 13 \quad , \quad \Delta_3^2 = 6$$

$$\Delta_1^3 = -1 \quad , \quad \Delta_2^3 = 2 \quad , \quad \Delta_3^3 = 3$$

ونجد أن :

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 13 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{1}{9}(4x_1 + 2x_2 - x_3), \ \frac{1}{9}(8x_1 + 13x_2 - 2x_3),$$

$$\frac{1}{9}(-3x_1 - 6x_2 + 3x_3)\Big)$$

٢٧٣ - ليكن V فراغاً شعاعيا على الحقل K عدد أبعاده n .
لتكن $\{v_i\}$ قاعدة في V . إذا كان $A = [\alpha_i^j]$ مصفوفة منتظمة في K فبرهن أن جملة الأشعة :

$$u_i = \sum_{j=}^{n} \alpha_i^j v_j \qquad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

تشكل قاعدة في V .

الحل : بما أن عدد جملة الأشعة $(u_1, \ldots, u_n)$ يساوي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V فيكفي أن نبرهن أنها مستقلة خطياً . إن شرط الاستقلال الخطي هو :

$$\sum^{n} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ عناصر من الحقل K .

يكتب الطرف الأيسر بالشكل :

$$\sum_{i} \lambda_i u_i = \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i^j v_j = 0$$

نستنتج من هـــذه العلاقة ومن كون الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً أن :

$$\sum_{i} \lambda_i \alpha_i^j = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

إن المصفوفة $A = [\alpha_i^j]$ منتظمة وبالتالي يوجد مصفوفة معاكسة $A^{-1} = [\beta_i^j]$ حيث $AA^{-1} = I$ أي : $\sum_j \alpha_i^j \beta_j^k = \delta_i^k$ (حيث $\delta_i^k = 1$ من أجل $i = k$ وتساوي صفراً فيا عدا ذلك) . ومن العلاقات (١) نجد :

$$\sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i^j \beta_j^k = \sum_{i} \lambda_i \sum_{j} \alpha_i^j \beta_j^k = 0$$

أي $\lambda_k = 0 \, , \, k = 1, \ldots, n$ وهو المطلوب .

٢٧٤ - ليكن V و W ،راغـين شعاعيين على الحقل K ، عـدد أبعادهما n و m على الترتيب . إذا كان $T : V \rightarrow W$ تطبيقاً خطيـاً رتبته تساوي p فيوجد قاعدة $\{ v_i \}$ في V وقاعدة $\{ w_j \}$ في W بحيث تكون المصفوفة A المرافقة لـ T بالنسبة لهاتين القاعدتين من الشكل :

$$A = (\alpha_i^j) \quad : \quad \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \ldots = \alpha_p^p = 1$$

وبقية عناصر A تساوي الصفر .

وبالعكس إذا كانت المصفوفة A من الشكل المذكور فان رتبــة التطبيق الخطي T تساوي p .

الحل : إن عدد أبعاد Ker T ، نواة التطبيق الخطي T يسـاوي

$n-p$ وذلك استناداً للنظرية [١٢ ـ ٦] . لنفرض أن $v_{p+1}, \ldots, v_n$ تشكل قاعدة في $\operatorname{Ker} \mathbf{T}$. تحقق هذه الاشعة العلاقات :

$$(1) \qquad T(v_a) = 0 \quad , \quad a = p+1, \ldots, n$$

يمكن أن نضيف للأشعة السابقة p شعاعاً جديداً $v_1, \ldots, v_p$ بحيث تصبح جملة الأشعة $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n$ قاعدة في V .

إن جملة الاشعة :

$$(2) \qquad w_i = T(v_i) \quad , \quad i = 1, \ldots, p$$

تشكل قاعدة في $T(V)$ وذلك لانها مستقلة خطياً (لماذا ؟) وعددها يساوي عـدد أبعاد $T(V)$. يمكن أن نضيف $m-p$ شعاعاً جـديداً $w_{p+1}, \ldots, w_m$ بحيث تشكل جملة الاشعة $w_1, \ldots, w_m$ قاعدة في W .

إذا رمزنا بـ $A = [\alpha_i^j]$ المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدتين المنشأتين في V و W فنجد من العلاقتين (1) و (2) أن :

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \ldots = \alpha_p^p = 1$$

وبقية عناصر A تساوي الصفر .

العكس : إذا كانت المصفوفة A تحقق الشروط السابقة فإن عـدد أبعاد $T(V)$ وبالتالي رتبة T تساوي p وهو المطلوب .

٢٧٥ ـ لتكن $A = [\alpha_i^j]$ مصفوفة على الحقل K من السـعة $m \times n$. إذا كانت رتبة A تساوي p فإن مجموعـة الاشعة x من K^n حيث $Ax = 0$ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً عدد أبعاده $n-p$.

(Ax جداء مصفوفي حيث x يمثل شعاع عمود مؤلف من مركبات الشعاع x بالنسبة لقاعدة قانونية في K^n) .

الحل : إذا رمزنا بـ $T : K^n \to K^m$ للتطبيق الخطي الموافق للمصفوفة A بالنسبة للقاعدتين القانونيتين ، فإن رتبة T تساوي p (رتبة A) .

إن مجموعة الاشعة x من K^n حيث $Ax = 0$ تحقق العلاقة $T(x) = 0$ فهي تشكل نواة التطبيق الخطي T . إذن تشكل هذه الاشعة فراغاً شعاعياً جزئياً من K^n عدد أبعاده يساوي $n - p$ ، استناداً للنظرية [١٢ - ٦] .

٢٧٦ - لتكن $A = [\alpha_j^i]$ مصفوفة من السعة $m \times n$. إن عدد أشعة أعمدة المصفوفة المستقلة خطياً يساوي عدد أشعة أسطر المصفوفة المستقلة خطياً (الرتبة العمودية للمصفوفة تساوي رتبتها السطرية) .

الحل : ليكن S الفراغ الشعاعي الجزئي من K^m المولد بأشعة أعمدة المصفوفة $A_1, \dots, A_n$ وليكن U الفراغ الشعاعي الجزئي من K^n المولد بأشعة أسطر المصفوفة $A^1, \dots, A^m$. إذا كانت p الرتبة العمودية لـ A فيوجد p شعاعاً مستقلاً خطياً $A'_1, \dots, A'_p$ تولد الفراغ الشعاعي الجزئي S وأن كل شعاع عمود من A يكتب كتركيب خطي في هذه الأشعة :

$$A_j = \sum_{k=1}^{p} \beta_j^k A'_k \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

حيث $N = [\beta_j^k]$ مصفوفة من السعة $p \times n$.

إذا رمزنا بـ $A' = [\gamma_k^i]$ للمصفوفة المؤلفة من الأعمدة $A'_1, \dots, A'_p$ فنجد أن :

$$\alpha_j{}^i = \sum_{k=1}^{p} \beta_j{}^k \gamma_k{}^i$$

وتكتب هذه العلاقة بدلالة الأسطر بالعلاقة الشعاعية :

$$A^i = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k{}^i \, N^k \qquad , \qquad i = 1, \ldots, m$$

حيث N^k أشعة أسطر المصفوفة $N = [\beta_j{}^k]$.

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن أشعة أسطر المصفوفة A عناصر من الفراغ الشعاعي الجزئي المتولد بالأشعة $N^1, \ldots, N^p$. فاذا كانت q الرتبة السطرية للمصفوفة A فان $q \leqslant p$. وبطريقة مشابهة نجد أن $p \leqslant q$ وبالتالي نجد أن $p = q$ وهو المطلوب .

٢٧٧ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K عدد أبعادهما m و n على الترتيب . إذا كانت A المصفوفة الموافقة للتطبيق الخطي $T : V \to W$ بالنسبة لقاعدتين مفروضتين في V و W فان رتبة المصفوفة A تساوي رتبة التطبيق T أي عدد أبعاد T(V) ، (خيال V وفق T) .

الحل : لتكن $\{u_i\}$ قاعدة في V و $\{w_j\}$ قاعدة في W . إذا كانت المصفوفة $A = [\alpha_i{}^j]$ فان T من الشكل :

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i{}^j w_j \qquad , \qquad i = 1, \ldots, m$$

لنأخذ عناصر كيفية $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ ولنشكل المجموع :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i T(u_i) = \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i{}^j w_j$$

بما أن الأشعة $w_1, \ldots, w_n$ مستقلة خطياً فان $\sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i^j w_j = 0$
يؤدي الى كون :

$$\sum_i \lambda_i \alpha_i^j = 0 \qquad , \qquad j = 1, \ldots, n$$

وتكتب هذه العلاقات بدلالة أشعة أعمدة المصفوفة A بالمعادلة الشعاعية :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = 0$$

نستنتج مما سبق أن العلاقة $\sum_i \lambda_i T(u_i) = 0$ تكافىء العلاقة $\sum \lambda_i A_i = 0$ وبالتالي فان الشرط اللازم والكافي ليكون عدد من الأشعة $T(u_1), \ldots, T(u_m)$ مستقلة خطياً ، أن تكون أشعة أعمدة المصفوفة A والتي لها الأدلة ذاتها مستقلة خطياً ، أي أن رتبة المصفوفة A تساوي رتبة التطبيق الخطي الموافق T .

٢٧٨ - لتكن A مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل K . إذا كانت p رتبة المصفوفة A فتكون أكبر مصفوفة مربعة جزئية منتظمة من A ذات سعة $p \times p$.

الحل : يوجد ، استناداً للتمرين ٤٧٦ ، p شعاع سطر (أو عمود) من A مستقلة خطياً . تشكل هذه الاشعة مصفوفة جزئية ، A' ، من A من السعة $p \times n$. بما أن المصفوفة الجزئية A' تحوي على p شعاع سطر مستقلة خطياً فهي تحوي ، استناداً للتمرين ٤٧٦ p شعاع عمود مستقلة خطياً . تشكل أشعة الاعمدة هذه مصفوفة جزئية ، A'' ، من A' من السعة $p \times p$. إن رتبة المصفوفة A'' تساوي p فهي مصفوفة منتظمة وهو المطلوب .

تمارين غير محلولة

٢٧٩ - لتكن المصفوفات :

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب المصفوفات التالية .

$$AB \;,\; AC \;,\; BC \;,\; A(B + C^t) \;,\; 2C - 3B^t$$

٢٨٠ - لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إحسب $3A - 2A^t \;,\; A^3 - 2A^2 + A - I \;,\; A^{-1}$

٢٨١ - ليكن التطبيق الخطي $T : R^3 \to R^3$ المعطى بالعلاقة :

$$T(x, y, z) = (x + y + z \;,\; x - y + 2z \;,\; 3x - 2y + z)$$

حيث (x, y, z) تمثل مركبات شعاع كيفي من R^3 بالنسبة للقاعدة القانونية .

أوجد المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3 . عين رتبة هذه المصفوفة .

٢٨٢ - برهن أنه من أجل كل مصفوفة مربعة منتظمة A تتحقق العلاقة $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

٢٨٣ - برهن أن معكوس مصفوفة قطرية هي مصفوفة قطرية .

٢٨٤ - أوجد المصفوفة المعاكسة للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

٢٨٥ - ليكن $T : R^2 \to R^3$ و $F : \to R^3$ التطبيقين الخطيين المعرفين بالعلاقتين :

$$T(x, y, z) = (x + y - z,\ 5x + 2y - 3z)$$

$$F(x, y, z) = (-x + 2y + z,\ 3y + 3z,\ x - 3y + z)$$

حيث (x , y , z) تمثل مركبات شعاع كيفي من R^3 بالنسبة للقاعدة القانونية . والمطلوب :

(١) أوجد المصفوفات الموافقة للتطبيقات T و F , ToF , F^2 .

(٢) أوجد نواة ورتبة كل من التطبيقات T و F , ToF .

٢٨٦ - لتكن المصفوفتان

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات التالية : $A - 2B$ و A^{-1} و B^{-1} و $2B - 3A^t$.

٢٨٧ - ليكن T المؤثر الخطي (التطبيق الخطي) المعرف على

R^2 بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

حيث (x_1, x_2) تمثل مركبات شعاع كيفي من R^2 بالنسبة للقاعدة القانونية . والمطلوب .

(١) إيجاد المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية .

(٢) إيجاد المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1, u_2) حيث أن :

$$u_1 = (1, 2) \quad , \quad u_2 = (1, -1)$$

(٣) برهن أنه مهما كان العدد $\alpha \in R$ فإن للمؤثر الخطي $T - \alpha I$ مؤثراً خطياً معاكساً .

٢٨٨ - ليكن T المؤثر الخطي على R^3 المعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_3 \;,\; 2x_1 + 4x_2 + x_3 \;,\; x_1 + 3x_2)$$

حيث (x_1, x_2, x_3) تمثل مركبات شعاع كيفي من R^3 بالنسبة للقاعدة القانونية . والمطلوب :

(١) إيجاد المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية .

(٢) إيجاد المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1, u_2, u_3) حيث :

$$u_1 = (1, 0, 1) \quad , \quad u_2 = (1, -2, 1) \quad , \quad u_3 = (2, 1, -1)$$

(٣) إثبات أن T تطبيق خطي منتظم ثم إيجاد التطبيق المعاكس T^{-1} .

٢٨٩ - ليكن T التطبيق الخطي $T : R^3 \rightarrow R^3$ المرافق للمصفوفة

A بالنسبة للقاعدة القانونية حيث
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
أوجد قاعدة في نواة التطبيق الخطي T . تمم هـذه القاعدة لتصبح قاعدة في R^3 .

٢٩٠ ـ لتكن المصفوفات التالية المعرفة على الحقل C ، حقل الأعداد المركبة :

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & i & 1+i \\ 1 & -2 & i \\ i & 1 & 2-i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} i & 2+i & 1 \\ 1 & 2-i & 1+i \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات التالية :

$$AB \;,\; AC \;,\; CB \;,\; (1+i)B \;,\; B - iB^t$$

٢٩١ ـ لتكن المصفوفة
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$
، أوجدالمصفوفة المعاكسة A^{-1} . برهن أن :

$$A^2 = A \;,\; (A^{-1})^2 = A^{-1}$$

٢٩٢ ـ لدينا التطبيقات التالية التي تقابل كل مصفوفة من السعة 2×2 معرفة على حقل F بعنصر من هذا الحقل وفق مايلي :

$$f_1 \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \alpha_1^1\,\alpha_1^2 - \alpha_2^1\,\alpha_2^2 \qquad (١)$$

$$f_2 \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (٢)$$

(٣) $$f_3 \begin{bmatrix} \alpha_1^{1} & \alpha_2^{1} \\ \alpha_1^{2} & \alpha_2^{2} \end{bmatrix} = \alpha_1^{1} + \alpha_2^{2}$$

(٤) $$f_4 \begin{bmatrix} \alpha_1^{1} & \alpha_2^{1} \\ \alpha_1^{2} & \alpha_2^{2} \end{bmatrix} = \alpha_1^{1} \ \alpha_2^{2}$$

هل هذه التطبيقات متعددة الخطية .

٢٩٣ - لتكن A مصفوفة المؤثر الخطي في $V_3(R)$ المعرف بما يلي :

$$A(x, y, z) = (3x - 2z \ , \ 5y + 7z \ , \ x + y + z)$$

احسب det A .

احسب المعينات التالية :

٢٩٤ -

$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$$

٢٩٥ -

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \\ \sin 5a & \sin 5b & \sin 5c \end{vmatrix}$$

٢٩٦ -

$$\begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^2\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos^2\alpha & \cos^3\alpha \\ \sin^3\beta & \sin^2\beta\cos\beta & \sin\beta\cos^2\beta & \cos^3\beta \\ \sin^3\gamma & \sin^2\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\cos^2\gamma & \cos^3\gamma \\ \sin^3\delta & \sin^2\delta\cos\delta & \sin\delta\cos^2\delta & \cos^3\delta \end{vmatrix}$$

* ٢٩٧ - برهن أن :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \alpha_2 & \lambda & \dots & \lambda \\ . & . & . & & . \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \delta(\lambda) - \lambda \frac{d\delta}{d\lambda}$$

حيث : $\delta(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda)\dots(\alpha_n - \lambda)$

* ٢٩٨ - برهن أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ . & . & . & & . \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}$$

حـــل جمل المعادلات :

٢٩٩ -

$$2x - z = 1$$

$$2x + 4y - z = 1$$

$$-x + 3y + 3z = 2$$

٣٠١ -

$$5x + 4z + 2t = 3$$

$$x - y + 2z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 1$$

$$x + y + z + t = 0$$

٣٠٢ - $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + n\,x_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}\,x_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_1 + n\,x_2 + \frac{n(n+1)}{2}\,x_3 + \dots + \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)}\,x_n$$

$$= \frac{n(n+1)\dots(2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n}$$

٣٠٣ –

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n &= 1 \\
x_1 \quad + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n &= 2 \\
x_1 + x_2 \quad + \dots + x_{n-1} + x_n &= 3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} &= n
\end{aligned}$$

٣٠٤ – اذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فاوجد $\bar{A}$ (مصفوفة المتممات الجبرية) و A^{-1} .

٣٠٥ - لنفرض أن المصفوفة A قطرية و B مثلثية :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \dots & \beta_n^1 \\ 0 & \beta_2^2 & \dots & \beta_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n^n \end{bmatrix}$$

(١) برهن أن $\overline{A}$ قطرية وأن $\overline{B}$ مثلثية .

(٢) برهن أن مقلوب A و B من الشكل :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (\alpha_1{}^1)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\alpha_2{}^2)^{-1} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & (\alpha_n{}^n)^{-1} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} (\beta_1{}^1)^{-1} & \gamma_2{}^1 & \dots & \gamma_n{}^1 \\ 0 & (\beta_2{}^2)^{-1} & \dots & \gamma_n{}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & (\beta_n{}^n)^{-1} \end{bmatrix}$$