المقالةُ الثانية

أ ـ التعريفات

ب ـ مُبرهنات الحجاج وإضافات النيريزي

ج ـ مُبرهنات النسوي

أ- التعريفات

بسم الله الرحمن الرحيم

● قال أوقليدس: كل سطح متوازي الأضلاع، قائم الزوايا، فإنه يحيط به الخطان المحيطان بإحدى زواياه القائمة.

Heath: 1. Any rectangular parallelogram is said to be contained by the two straight lines containing the right angle.

قال المفسر: قال ايرن إنما خص اوقليدس السطح المتوازي الأضلاع القائم الزوايا بأنه يحيط به الضلعان المحيطان بالزاوية القائمة، دون المتوازي الأضلاع الذي ليس بقائم الزوايا، لأن مساحة المتوازي القائم الزوايا هي ما اجتمع من ضرب أحد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة، في الضلع الآخر؛ فهو السطح الذي يحيط به الضلعان المحيطان بالزاوية القائمة.

● قال اوقليدس: وكل سطح متوازي الأضلاع، فإن السطحين اللذين يكونان على قطره، المتوازيي الأضلاع، والقطر يقطعهما: اذا اضيف أحدهما الى السطحين المتممين اللذين عن جنبتي القطر، فإن جميع ذلك يسمى العَلَم.

Heath: 2. And in any parallelogrammic area, let any one whatever of the parallelograms about its diameter with the two complements be called a gnomon

---

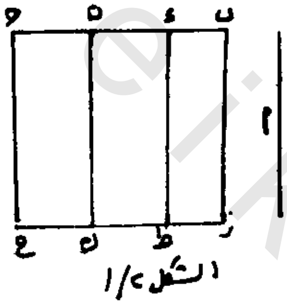
يفسر هيث كلمة gnomon بأنه شيء ما يمكن من معرفة شيء آخر أو ملاحظته. فهو علامة أو كشاف. ثم يقول ان اول استعمال هذا «الكشاف» كان للتعبير عن المزولة التي تعلم الاغريق استعمالها من البابليين. ثم صارت اللفظة تستعمل للدلالة على اداة ميكانيكية لرسم الزوايا القائمة.

ثم صارت أخيراً تشير إل الشكل الذي اذا اضيف إلى مربع ما، أو انقص من مربع ما، كان الباقي أو الناتج مربعاً. اما اوقليدس فقد عمم الفكرة حتى صارت تطابق اي متوازي اضلاع. بعد ذلك عممت اللفظة حتى صارت تشمل كل شكل يضاف إلى شكل ما فيبقيه على حاله هندسياً، مثلثاً كان او رباعياً او دائرة.

ب ـ مُبرَهنات الحجاج

[المبرهنة ١/٢]

الشكل الأول من المقالة الثانية



كل خطين مستقيمين يقسم أحدهما بأقسام، كم كانت، فإن السطح الذي يحيط به الخطان مساوٍ لجماعة السطوح التي يحيط بها الخط الذي لم يقسم، وكل واحد من أقسام الخط الآخر المقسوم

مثاله: إن خطي أ، ب جـ مفروضان. وقد قسم خط ب جـ على نقطتي د، هـ. فأقول ان السطح الذي يحيط به خطَّا أ، ب جـ مساوٍ لجماعة السطوح التي يحيط بها خط أ وأقسام ب د، د هـ، هـ جـ.

برهانه: أنا نقيم على نقطة ب عمود ب ز، وليكن مساوياً لخط أ، كما بينا عمله ببرهان الشكل المضاف إلى ١١/١؛ ونجيز على نقطة ز خط ز ح موازياً لخط ب جـ ومساوياً له، كما بين ببرهان ١/٣١؛ وبمثل هذا البرهان نخرج خطوط د ط، هـ ك، جـ ح موازية لخط ب ز.

فمن البيِّن ان سطح جـ ز يحيط به خطَّا ب جـ، ب ز: لكن ب ز مثل أ. فسطح جـ ز يحيط به خطا أ، ب جـ. وهو مساوٍ لجماعة السطوح الثلاثة جـ ك، هـ ط، د ز، المتوازية الأضلاع.

لكن سطح جـ ك يحيط به خطا جـ هـ، هـ ك؛ وسطح هـ ط يحيط به خطا

هـ د، د ط وسطح د ز يحيط به خطا د ب، ب ز. وكل واحد من خطوط جـ ح، هـ ك، د ط، ب ز مساوٍ لخط أ. فالسطوح الثلاثة يحيط بها خط أ [٢٦ ب] وأقسام ب د، د هـ، هـ جـ؛ وجماعتها مساوية لسطح جـ ز. وسطح جـ ز يحيط به، كما بينا خطا أ، ب جـ.

فقد تبين ان السطح الذي يحيط به خطا أ، ب جـ مساوٍ لجماعة السطوح التي يحيط بها أ وكل واحد من أقسام ب د، د هـ، هـ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

زيادة: مثال هذا الشكل من الأعداد: ليكن خط أ ستة من العدد، وخط ب جـ عشرة. وليكن ب د اثنين، د هـ ثلاثة، هـ جـ خمسة. فمن البين انا متى ضربنا الستة في العشرة، يكون ستين؛ وهو مساوٍ للذي يجتمع من ضرب الستة في الاثنين، وفي الثلاثة، وفي الخمسة: لأن الستة في الإثنين: إثنا عشر؛ وستة في ثلاثة: ثمانية عشر؛ وستة في خمسة: ثلاثون؛ ومجموع هذه الأعداد ستون.

قال إيرن: «هذا الشكل ليس يمكن ان يبرهن عليه الا بإن يرسم الخطّان جميعاً. فأما الأشكال الباقية فقد يمكن ان تبين برسم خط واحد فقط. وأيضاً فقد يمكن أن يتأتى من وضعنا خطاً واحداً، بطريقي البرهان اللذين احدهما طريق التحليل، والآخر طريق التركيب.

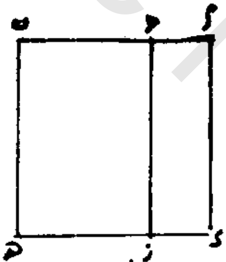
فأما التحليل فإنه متى فرضت لنا مسألة ما، فإنا ننزلها منزلة الشيء المطلوب أنه موجود ثم نتعقبه إلى شيء قد تقدم برهانه. فاذا تبين لنا قلنا انه قد وجد المطلوب بالتحليل.

وأما التركيب فإنه أن نبدأ بأشياء معروفة، ثم نركب إلى ان يوجد الشيء المطلوب. فعند ذلك يكون المطلوب قد تبين بالتركيب.

وإذ قد أخبرنا بهذا، فلنعد إلى مطلوبنا، على ما وصفنا ووعدنا». يريد بذلك ان يبين ما وعد هاهنا في سائر الأشكال التي اتى بها أوقليدس في هذه المقالة الثانية.

[المبرهنة ٢/٢]

الشكل الثاني من المقالة الثانية



الشكل ٢/٢

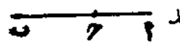
كل خط مستقيم يقسم بأقسام، كم كانت، فان مربع الخط كله مساوٍ لجماعة السطوح التي يحيط بها الخط كله مع كل واحد من أقسامه.

مثاله: أن خط أ ب قد قسم على جـ بقسمين، فأقول ان مربع خط أ ب مساوٍ لمجموع السطحين اللذين يحيط بهما خط أ ب وكل واحد من خطي أ جـ، جـ ب.

برهانه: أنا نعمل على خط أ ب سطحاً مربعاً قائم الزوايا، كما بين عمله ببرهان ١/٢٥؛ وليكن مربع ب د. ونخرج من نقطة جـ خطاً موازياً لخطي أ د، ب هـ، كما بين اخراجه ببرهان ١/٣١؛ وليكن خط جـ ز. فسطحا أ ز، جـ هـ متوازيا الأضلاع. أما سطح د جـ فيحيط به خطا د أ، أ جـ؛ وسطح ز ب يحيط به ز جـ، جـ ب؛ وخط جـ ز مثل خط أ د؛ وخط أ د مثل خط أ ب. فمجموع سطحي د جـ، ز ب يحيط بهما خط أ ب وكل واحد من خطي أ جـ، جـ ب. ومجموع سطحي د جـ، ز ب مساوٍ لمربع د ب، الكائن من خط أ ب.

فقد تبين ان المربع الكائن من خط أ ب مساوٍ لمجموع السطحين اللذين يحيط بهما خط أ ب وكل واحد من خطي أ جـ، جـ ب، وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

مثاله من الأعداد: نفرض خط أ ب عشرة من العدد؛ وقد 

قسم على نقطة جـ بقسمين، فصار أ جـ ثلاثة من العدد، وخط جـ ب سبعة.

فمن البين ان مضروب أ ب الذي هو عشرة، في مثله: مساوٍ للذي يجتمع من ضرب أ ب، الذي هو عشرة، في كل واحد من ثلاثة وسبعة. لأن عشرة في مثلها مئة، وعشرة في ثلاثة ثلاثون، وفي سبعة سبعون، ومجموعهما مئة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[٢٧ أ] قال ايرن: مثال ذلك ان نفرض الخط المستقيم خط أ ب، ونقسمه قسمة كيف كانت على نقطة جـ. فنريد ان نبين ان مربع أ ب مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع السطح الذي يحيط به خطا أ ب، أ جـ.

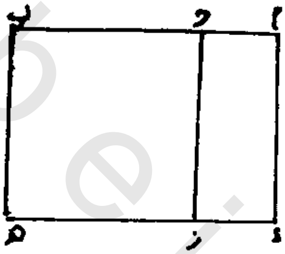
برهانه: أن نتوهم خط أ ب خطين متساويين، أحدهما منقسم والآخر غير منقسم. فمن البين ان الخطين يكونان متساويين، ويكون السطح الذي يحيط به هذان الخطان المتساويان مساوياً لمربع أحدهما. فليكن مساوياً لمربع أ ب، فبحسب برهان ٢/١ يكون مجموع السطحين الكائنين من الخط الذي لم يقسم، مع أقسام أ جـ، جـ ب: مساوياً للسطح الذي يحيط به الخط الذي لم يقسم وخط أ ب. ومربع أ ب مساوٍ لذلك السطح كما بينا. والخط الذي لم يقسم مساوٍ لخط أ ب، كما وضعنا. فالسطحان اللذان يحيط بهما خط أ ب وكل من قسمي أ جـ، جـ ب: مساويان لمربع خط أ ب. وذلك ما أردنا أن نبين

تبين هذه القضية انه اذا كان أ = ب + جـ + د + . . . ، كان أ^2 = أ ب + أ جـ + أ د + . . . على ان النص الانكليزي يحصر القضية في أ = ب + جـ، أ^2 = أ ب + أ جـ. وسنرى ان النسوي يحصرها في هذا النص. ويلاحظ ان برهان هيرن أقوى اذ اعتمد على قضية أعم.

[المبرهنة ٣/ ٢]

الشكل الثالث من المقالة الثانية

كل خط يقسم بقسمين، أي قسمين كانا، فإن السطح الذي يحيط به الخط كله وأحد القسمين: مساوٍ للسطح الذي يحيط به قسما الخط مع مربع ذلك القسم.



[الشكل ٢/٣]

مثاله: ان خط أ ب قد قسم بقسمين على نقطة جـ. فأقول ان السطح الذي يحيط به خط أ ب وقسم ب جـ: مساوٍ للسطح الذي يحيط به قسما أ جـ، جـ ب مع مربع ب جـ.

برهـانه: انا نعمل على خط جـ ب سطحاً مربعا، كما بين عمله ببرهان ١/٤٥، وليكن مربع جـ هـ. ونخرج من نقطة أ خطاً موازياً لخط جـ ز كما بين ببرهان ١/٣١، وليكن خط أ د. ونخرج خط هـ ز على الاستقامة، ونتزل انه لقي خط أ د على نقطة د. فمن الظاهر ان سطح أ هـ متوازي الأضلاع، وهو مساوٍ لسطحي أ ز، ز ب المتوازيي الأضلاع، لكن سطح أ ز يحيط به خطًا أ جـ، جـ ز؛ وخط جـ ز مثل خط جـ ب، لأن سطح ز ب عمل مربعاً؛ فسطح أ ز يحيط به خطا أ جـ، جـ ب. وسطح ز ب هو مربع خط جـ ب.

فالسطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب، مع المربع الكائن من خط جـ ب: مساوٍ أ هـ، المتوازي الأضلاع، بأسره، لكن سطح أ هـ يحيط به خطا أ ب، ب هـ؛ وخط ب هـ مساوٍ لخط جـ ب، لأن سطح ب ز عمل مربعاً. فسطح أ هـ بأسره يحيط به خطا أ ب، ب جـ.

فقد تبين ان السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ: مساوٍ للسطح الذي يحيط به قسما أ جـ، جـ ب مع مربع جـ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

مثاله من الأعداد انا نفرض خط أ ب عشرة من الأعداد ونقسمه على نقطة

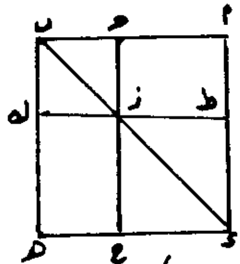
جـ بقسمين، يكون أ جـ ثلاثة من العدد، جـ ب سبعة. فضرب أ ب، الذي هو عشرة، في ب جـ الذي هو سبعة: يكون سبعين من العدد. وهو مساوٍ للمجتمع من ضرب أ جـ، الذي هو ثلاثة، في جـ ب الذي هو سبعة، ومن ضرب جـ ب، السبعة، في نفسه وذلك ان أ جـ في جـ ب احد وعشرون؛ وخط جـ ب في مثله تسعة وأربعون؛ ومجموعهما سبعون. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال ايرن: وبرهان هذا الشكل يتبين بلا صورة، ببرهان الشكل الأول من هذه المقالة: فنفرض ان لنا خطين موضوعين، وهما خطا أ ب، ب جـ؛ أحدهما غير مقسوم، وهو ب جـ؛ والآخر مقسوم على نقطة جـ، وهو أ ب. فمن البين أنه يكون السطح الذي يحيط به الخط غير المنقسم وخط أ ب مساوياً لمجموع السطوح [٢٧ ب] التي يحيط بها الخط غير المنقسم وأقسام الخط المنقسم؛ أعني بالأقسام: قسمي أ جـ، جـ ب. ولكن الخط غير المنقسم مساوٍ لخط جـ ب. فالسطح الذي يحيط به الخط غير المنقسم وخط جـ ب مساوٍ لمربع خط جـ ب.

فإذن السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ: مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب، مع مربع خط جـ ب. وذلك ما أردنان ان نبين.

[المبرهنة ٤/٢]

الشكل الرابع من المقالة الثانية



الشكل ٤/٢

كل خط قسم بقسمين، قسمة كيف وقعت، فإن مربع الخط كله مساوٍ لمربعي قسميه، مع ضعف السطح الذي يحيط به قسما الخط.

مثاله: أن خط أ ب قسم بقسمين على نقطة جـ. فأقول ان مربع أ ب مساوٍ لمربعي قسمي أ جـ، جـ ب مع ضعف السطح الذي يحيط به قسما أ جـ، جـ ب.

برهـانـه: أنـا نعمل على خط أ ب سطحاً مربعاً، كما بيّن عمله ببرهان ١/٤٥، وليكن مربع أ د هـ ب. ونخرج قطر ب د، وخط جـ ح موازياً خطي أ د، ب هـ، كما بين إخراجه ببرهان ١/٣١؛ وليقطع قطر ب د على نقطة ز. ونجيز على نقطة ز خطاً موازياً لخطي أ ب، د هـ، بحسب ما استشهدنا، وهو خط ط ك.

فلأن خط ب د قد أجيز على خطي أ د، جـ ح المتوازيين، فبحسب برهان ١/٢٩ تكون زاوية جـ ز ب الخارجة مساوية لزاوية أ د ز الداخلة. ولأن مثلث أ د ب متساوي الساقين، فبحسب برهان ١/٥ تكون زاوية أ ب د مساوية لزاوية أ د ب. والأشياء المساوية لشيء واحد متساوية. فزاوية جـ ز ب مساوية لزاوية جـ ب ز. فبحسب برهان ١/٦ يكون ضلع جـ ب مثل ضلع جـ ز. ولأن سطح جـ ك متوازي الأضلاع، فبحسب برهان ١/٣٤ يكون خط جـ ز مثل خط ب ك، وخط جـ ب مثـل خط ك ز. وقد كنا بينا ان خط جـ ب مثل خط جـ ز. والأشياء المساوية لشيء واحد متساوية. فخط ز ك مثل خط جـ ز، فهو مثل خط ك ب. فالأضلاع الأربعة: جـ ب، جـ ز، ز ك، ك ب: متساوية. فسطح جـ ك متساوي الأضلاع قائم الزوايا، لأن زاوية جـ القائمة مثل زاوية ك القائمة؛ فزاويتا ب، ز كل واحدة منهما قائمة. وذلك ببرهان ١/٣٤.

فسطح جـ ك هو مربع خط جـ ب.

ولأن ضلع أ ب مثل ضلع ب هـ، وخط جـ ب مثل خط ك ب، فاذا أسقطنا من المتساوية متساوية، فإن الذي يبقى متساوٍ. فخط أ جـ مثل خط هـ ك. لكن بحسب برهان ١/٣٤، يكون أ جـ مثل ط ز، وخط ك هـ مثل خط ز ح، وخط ط ز مثل خط ح ز. وخط ط ز يوازي خط د ح، وخط ز ح يوازي خط د ط. فسطح ط ح متساوي الأضلاع قائم الزوايا؛ وهو مساوٍ لمربع خط أ جـ.

فسطحا ط ح، جـ ك هما مربعا خطي أ جـ، جـ ب.

ولأن سطح أ هـ متوازي الأضلاع، وعلى قطره سطحان متوازيا الأضلاع،

فبحسب برهان ١/٤٣ يكون السطحان اللذان عن جنبتي قطر ب د، المتممان، متساويين. فسطح أ ز مثل سطح ز هـ.

لكن سطح ط جـ يحيط به خطا أ جـ، جـ ز؛ وخط جـ ز مثل خط جـ ب. فسطح أ ز يحيط به خطا أ جـ، جـ ب. فضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب مساوٍ لمجموع سطحي أ ز، ز هـ. فمربع أ هـ بأسره مساوٍ لمربعي قسمي أ جـ، جـ ب ولضعف السطح الذي يحيط به قسما أ جـ، جـ ب. لكن مربع أ هـ هو مربع خط أ ب.

فقد [٢٨ أ] تبين ان مربع خط أ ب مساوٍ لمربعي قسمي أ جـ، جـ ب، ولضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]: زيادة

مثاله من الأعداد: ان نفرض خط أ ب عشرة من العدد، ونقسمه على نقطة جـ بقسمين، وليكن أ جـ سبعة، جـ ب ثلاثة. فضرب أ ب في مثله مئة؛ وهو مساوٍ لضرب أ جـ؛ الذي هو سبعة، في مثله، وهو تسعة وأربعون؛ ولضرب جـ ب، الذي هو ثلاثة، في مثله وهو تسعة؛ وضعف المجتمع من أ جـ، السبعة، في جـ ب، الثلاثة، وهو اثنان وأربعون: فهو مئة. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأما البرهان على هذا الشكل، من غير صورة، على مذهب ايرن، على طريق الحل: فنطلب هل ينحلُّ المربع الكائن من خط أ ب إلى مجموع المربعين الكائنين من أ جـ، جـ ب، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب؟.

فلأن أ ب قد انقسم إلى خطي أ جـ، جـ ب، فببرهان ٢/٢ ينحلّ المربع الكائن من خط أ ب إلى مجموع السطحين اللذين يحيط بأحدهما ب أ، أ جـ، وبالآخر خطا أ ب، ب جـ، لأنه مثلهما. وهذان السطحان ينحلان إلى برهان شكل ٢/٣؛ وذلك لأن السطح الذي يحيط به خطا أ ب، أ جـ مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا ب جـ، أ جـ، مع مربع أ جـ؛ والسطح الذي يحيط به خطا

أ ب، ب جـ مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا أ جـ، ب جـ مع مربع جـ ب.
فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ ب، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ. جـ ب: مساوٍ لمجموع السطحين اللذين يحيط بأحدهما خطا ب أ، أ جـ، وبالآخر خطا أ ب، ب جـ.

وقد كنا بينا ان مربع خط أ ب مساوٍ لهذين السطحين. فقد انحلَّ المربع الكائن من خط أ ب إلى مجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ ب، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب، واستويا. وذلك ما اردنا ان نبين.

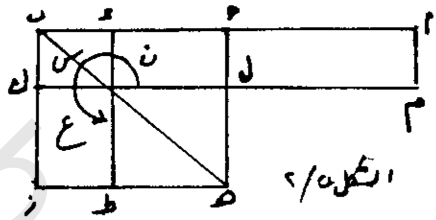
وأما على طريق التركيب، فنبدأ الآن فنركب من حيث انتهى بنا الحل، فنقول: انه بحسب برهان **٢/٣** فإن السطح الذي يحيط به خطا ب جـ، جـ أ، مع مربع أ جـ: مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا ب أ، أ جـ. وكذلك السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب، مع مربع ب جـ: مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ.

فقد تركب المربعان الكائنان من خطي أ جـ، جـ ب، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب، وساويا السطحين اللذين يحيط بأحدهما خطا ب أ، أ جـ، وبالآخر خطا أ ب، ب جـ. وهذان السطحان يتركبان ويساويان المربع الكائن من خط أ ب، بحسب برهان **٢/٢**.

فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ ب مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب: قد تركب وساوى بأجمعه المربع الكائن من خط أ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٥/٢]

الشكل الخامس من المقالة الثانية



كل خط مستقيم يقسم بقسمين متساويين، ويقسم أيضاً بقسمين مختلفين، فإن السطح الذي يحيط به القسمان المختلفان، مع مربع الخط الذي بين نقطتي القسمة: مساوٍ لمربع نصف الخط.

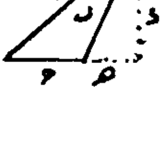
مثاله: أن خط أ ب المستقيم قسم بقسمين متساويين على نقطة جـ، وبقسمين مختلفين على نقطة د. فأقول: ان السطح الذي يحيط به قسما أ د، د ب، مع مربع جـ د: مساوٍ لمربع جـ ب.

برهانه: انا نعمل على خط جـ ب سطحاً مربعاً قائم الزوايا، كما بين ببرهان ١/٤٥، وليكن مربع جـ ز. ونخرج قطر ب هـ؛ ونخرج من نقطة د خطاً موازياً [٢٨ ب] لضلعي جـ هـ، ب ز، كما بينا اخراجه ببرهان ١/٣١؛ ونجيز على نقطة ح خطاً موازياً لخط ب أ، كما بينا إخراجه ببرهان ١/٣١. ونخرج من نقطة أ خطاً موازياً لخطوط جـ ل، د ح، ب ك، يلقى خط ك ل، وننزل أنه لقيه على نقطة م، كما بينا إخراجه ببرهان ١/٤٥.

ونبين كما بينا في شكل ٢/٤، وبمثل ما استشهدنا به من الأشكال، أن سطحي د ك، ل ط مربعان قائما الزوايا. وهما على قطر ب هـ.

تعليق:

(١) نلاحظ بوضوح ان اقليدس وهيرن ينطلقان من فكرة هندسية. فالاعداد عندهم خطوط. هذا في حين ان النيريزي يأتي بتبريرات عددية لتوضيح المفهوم، والنسوي يكاد يقضي على فكرة الجبر الهندسي باعتباره هذه القضايا علاقات جبرية محضة. انه وضعها في موضعها الصحيح.



(٢) واما إشارته إلى الزاوية المنفرجة فيبينها هذا الشكل حيث أ^2 = د^2 + (هـ + جـ)^2 = (د^2 + هـ^2) + جـ^2 + ٢ هـ جـ = ب^2 + جـ^2 + ٢ هـ جـ. فالمقدار ٢ هـ جـ هو مقدار الزيادة على مربعي ب، جـ. وواضح من الشكل ان هـ هو مسقط ب على جـ. وهذه هي القضية ١٢ عند الحجاج وهيث.

فبحسب برهان ٤٣/١ ، فإن سطح جـ ح المتمم مثل سطح ح ز المتمم .

ونـأخذ سطح د ك مشتركاً. فسطح جـ ك بأسره مساوٍ لسطح د ز بأسره.

وسطح جـ ك مثل سطح جـ م ، لأنهما على قاعدتين متساويتين، وهما ك ل، ل م، وبين خطين متـوازيين، وهمـا ك م، أ ب. وذلك بين ببرهان ٣٦/١ . فسطح جـ م إذن مساوٍ لسط د ز. لأن الأشياء المساوية لشيء واحد تكون متساوية .

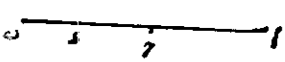
ونأخذ سطح د ل مشتركاً، فسطح م د بأسره مساوٍ للعَلَم ن س ع .

لكن سطح م د يحيط به خطا أ د، د ح ؛ وخط د ح مثل خط د ب. لأن سطح د ك مربع قائم الزوايا. فسطح م د يحيط به خطا أ د، د ب. فعلم ن س ع مساوٍ للذي يحيط به خطا أ د، د ب. ومربع هـ ح مساوٍ لمربع خط جـ د. فمربع جـ ز بأسره مساوٍ لعلم ن س ع ولمربع هـ ح. لكن مربع جـ ز هو مربع خط جـ ب. فالسطح الذي يحيط به قسما أ د، د ب، مع مربع خط جـ د، الذي بين العلامتين، مساوٍ لمربع خط جـ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

مثاله من الأعداد: نفرض أ ب عشرة من العدد، وقسمي أ جـ، جـ ب كل واحد منهما خمسة، وقسم أ د سبعة ؛ فيبقى د ب ثلاثة، ويحصل جـ د اثنين.

فمن البين ان المجتمع من ضرب قسم جـ ب في مثله خمسة وعشرون ؛ وهو مساوٍ للذي يجتمع من ضرب أ د في د ب، وذلك واحد وعشرون. ومن ضرب جـ د في مثله، وذلك اربعة، وجميعها خمسة وعشرون. وذلك ما أردنا أن نبين.



وأمـا على مذهب إيرن في برهان هذا الشكل بالتحليل: فمن أجل انا نطلب أن نعلم هل السطح الذي يحيط به قسما أ د، د ب، مع مربع خط جـ د: مساوٍ لمربع خط جـ ب،

فلنأخذ خطين قد قسم أحدهما بأقسام، وهو خط أ د، على نقطة جـ، والآخر لم يقسم، وهو خط د ب. فبحسب برهان ٢/١، يكون السطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب مساويا لمجموع السطحين اللذين يحيط بهما خط ب د وقسما أ جـ، جـ د.

فلأن أ جـ مثل جـ ب فإن السطحين اللذين يحيط بهما خطا جـ ب، د ب، وخطا د ب، جـ د مساويان للسطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب.

فقد بقي لنا مربع جـ د، فنجعله مشتركاً. فيكون مجموع السطحين اللذين يحيط بهما جـ ب، ب د، وخطا جـ د، د ب مع مربع جـ د: مساوياً للسطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب مع مربع جـ د.

لكن السطح الذي يحيط به خطا جـ د، د ب مع مربع جـ د: مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا ب جـ، جـ د، وذلك ببرهان ٢/٤.

فمجموع السطحين اللذين يحيط بأحدهما خطا ب جـ، جـ د، وبالآخر خطا جـ ب، ب د مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب مع مربع جـ د.

لكن بحسب برهان ٢/٢ يكون مجموع السطحين اللذين يحيط بهما خطا جـ ب، ب د، وخطا ب جـ، ب د: مساوياً لمربع خط جـ ب.

فمربع خط جـ ب إذن مساوٍ للسطح الذي يحيط به قسما أ د، د ب مع مربع جـ د. وذلك ما أردنا أن نبين. فقد انحل إلى برهان ٢/٢. ونبدأ الآن فنركب من حيث انتهى بنا [التحليل].

[٢٩ أ] فبحسب برهان ٢/٢ فإن السطح الذي يحيط به خطا جـ ب، ب د مع السطح الذي يحيط به خطا ب جـ، جـ د: مثل مربع خط جـ ب.

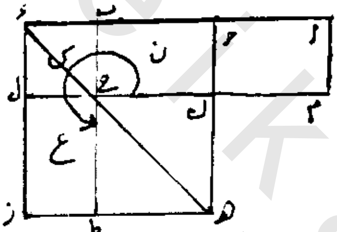
لكن بحسب برهان ٢/٤ يكون السطح الذي يحيط به خطا ب جـ، جـ د مساوياً للسطح الذي يحيط به خطا ب د، جـ د مع مربع جـ د. فمربع خط جـ ب إذن مساوٍ للسطحين اللذين يحيط بأحدهما خطا جـ ب، ب د، وبالآخر خطا هـ د، د ب، مع مربع جـ د.

فلأن خط أ جـ مساوٍ لخط جـ ب، يكون السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، د ب مع السطح الذي يحيط به خطا جـ د، ب د مساوياً السطح الذي يحيط به خطا أ د، ب د.

فالسطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب مع مربع جـ د مساوٍ للمربع الكائن من خط جـ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٢]

الشكل السادس من المقالة الثانية



الشكل ٦/٢

اذا قسم خط مستقيم بنصفين، وزيد في طوله خط آخر مستقيم، فإن السطح الذي يحيط به الخط كله مع الزيادة، والزيادة، مع مربع نصف الخط الأول: مساوٍ لمربع نصف الخط مع الزيادة.

مثاله: أن نفرض الخط المستقيم خط أ ب، ونقسمه بنصفين على نقطة جـ، ونزيد فيه خط ب د. ونريد أن نبين أن السطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب، مع مربع أ جـ: مساوٍ لمربع خط جـ د.

برهانه: أن نعمل على خط جـ د سطحاً مربعاً قائم الزوايا، كما بين عمله ببرهان ١/٤٥. ونخرج قطره د هـ؛ ونتمم خطوط الشكل على التأليف، كما بينا في الأشكال المتقدمة.

فبحسب برهان ١/٤٣ يكون سطح ح ز مساوياً لسطح جـ ح، لأنهما

★ هنا يتضح مرة أخرى ان طريقة اقليدس في معالجة الجبر هندسية، وطريقة هيرن هندسية أيضاً الا انها تعرض اسلوبي التحليل والتركيب، في حين ان النيريزي يشفع حل اقليدس بأمثله عددية وسنرى ان النسوي يدير للحل الهندسي ظهراً، ويأتي بحل جبري، كحلولنا لولا انه تنقصه الرمزية الحرفية. والقضية هذه تثبت العلاقة الجبرية (م + ن) (م – ن) + ن٢ = م٢.

متممان. ويحسب برهان ١/٣٦ يكون سطح جـ ح مساوياً لسطح أ ك لأنهما على قاعدتين متساويتين، وهما ح ك، ك م؛ وبين خطين متوازيين وهما ح م، أ ب. فسطح ح ز إذن مساوٍ لسطح أ ك.

ونأخذ سطح ك د مشتركاً. فجميع سطح م د، مساوٍ لعلم ن س ع.

لكن سطح م د يحيط به خطا أ د، د ب، لأن د ب مساوٍ لخط د ل. فالعلم إذن مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب. ومع مربع ح هـ، وهو مربع خط ب جـ، فالسطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب، مع مربع جـ ب: مساوٍ لعلم ن س ع ولمربع جـ هـ.

لكن علم ن س ع ومربع جـ هـ مساوٍ لمربع د هـ؛ ومربع د هـ كائن من خط جـ د فالسطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب مع مربع جـ ب: مساوٍ للمربع الكائن من خط جـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

وقد بين أيضاً ايرن برهان هذا الشكل على سبيل الخطوط اما على طريق التحليل: فليكن الخط المفروض خط أ ب؛ ولنقسمه بنصفين على نقطة جـ؛ ونزيد في طوله خط ب د. ونريد أن نبين ان السطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب، مع مربع جـ ب مساوٍ لمربع جـ د. فنخرج أ هـ على استقامة جـ أ، وليكن أ هـ مثل د ب. فمن البين انا اذا جعلنا خط أ ب مشتركا، يكون جميع خط هـ ب مثل جميع خط أ د.

فالسطح الذي يحيط به أ د، د ب: مساوٍ للسطح الذي يحيط به هـ ب، د ب. فمتى تبين لنا ان السطح الذى يحيط به خطا أ ب، ب د، مع مربع خط ج ب: مساوٍ لمربع خط جـ د، فقد تم البرهان على بغيتنا.

★ يلاحظ شيء من الاقتضاب في نصوص النيريزي هنا. وسنرى ان حل النسوي يشابهه قصراً ووضوحاً.

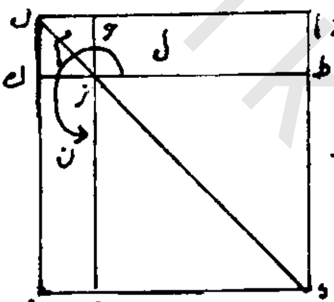
والحلول جميعها تثبت العلاقة الجبرية: (٢م + ن) ن + م^{2} = (ن + م)^{2}.

وذلك بينٌ لأن خط هـ د قد قسم بنصفين على نقطة جـ، وبقسمين مختلفين على نقطة ب. فببرهان ٢/٥ يكون السطح الذي يحيط به خطًا هـ ب، ب د مع مربع جـ ب: مساويا لمربع جـ د.

واما بالتركيب فإذا ركبنا كان السطح الذى يحيط به خطا هـ ب، ب د مع مربع خط ب جـ: مثل مربع خط جـ د. فالسطح الذي يحيط به خطا أ د، د ب مع مربع جـ ب مساوٍ لمربع ج د. وذلك ما أردنا ان نبين

[المبرهنة ٢/٧]

[٢٩ ب] الشكل السابع من المقالة الثانية



الشكل ٧/ ٢

كل خط مستقيم يقسم بقسمين، أي قسمة كانت، فإن مربع الخط كله، مع مربع أحد القسمين، اذا جمعا: مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به الخط كله وذلك القسم، مع مربع القسم الآخر، اذا جمعا.

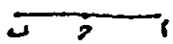
مثاله: ان خط أب قسم بقسمين، كيفما وقعت، على نقطة جـ. فاقول ان مجموع مربعي خطي أ ب، ب جـ: مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، ومربع قسم أ جـ.

برهانه: انا نعمل على خط أ ب مربعا قائم الزوايا، كما بينا عمله ببرهان ١/٤٥، وليكن مربع أ ب د هـ. ونخرج قطر ب د. ونخرج من نقطة جـ خطاً موازياً لضلعي المربع، أعني ضلعي أ د، ب هـ. كما بينا إخراجه ببرهان ١/٣١، وليكن خط جـ ز ح. ونجيز على نقطة ز خطاً موازياً لضلعي المربعين الآخرين، أعني ضلعي أ ب، د هـ، كما بينا اجازته ببرهان ١/٣١، وليكن خط ك ز ط.

فمن البين، بحسب رسمنا الأشكال المتقدمة، ان سطح ب ز هو مربع قسم ب جـ، وان سطح ز د هو مربع قسم أ جـ. وبحسب برهان ١/٤٣ فإن متمم أ ز مثل متمم ز هـ. ونأخذ مربع ب ز مشتركاً، فيصير أ ك مساوياً لسطح جـ هـ.

فمجموع سطحي أ ك ، جـ هـ ضعف سطح أ ك. وسطح أ ك قد تبين انه يحيط به خطا أ ب، ب جـ، فمجموع سطحي أ ك ،جـ هـ هو ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ. لكن مجموع سطحي أ ك،جـ هـ مساوٍ لعلم ل م ن مع مربع جـ ك. فإذا عزلنا مربع جـ ك، بقي علم ل م ن. فعلم ل م ن مع مربع جـ ك مساويان لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ. ومربع ز د قد تبين انه الكائن من قسم أ جـ. فعلم ل م ن مع مربعي ج ك، ز د مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ. مع مربع خط أ جـ. لكن علم ل م ن مع مجموع مربعي جـ ك، ز د: مساوٍ لمربع أ هـ مع مربع جـ د. فمربع أ هـ مع مربع جـ د مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع مربع خط أجـ. لكن مربع أ هـ هو كائن من خط أ ب؛ ومربع جـ ك هو كائن من خط جـ ب. فمربع أ هـ مع مربع جـ ك اذن مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، ولمربع خط أ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:



وأما البرهان على هذا الشكل من غير صورة، على طريق الحل، فانا نطلب: هل يحل مجموع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ إلى ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع المربع الكائن من خط أ جـ، ويستويان؟

فنقول ان مربع أ ب ينحل إلى برهان ٢/٤ ، وذلك ان المربع الكائن من خط أ ب مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ ب، ولضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب. فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ اذن قد انحل وساوى ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب، مع ضعف المربع الكائن من خط جـ ب، مع المربع الكائن من خط أ جـ.

لكن بحسب برهان ٢/٤ فإن ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب مع ضعف المربع الكائن من خط جـ ب: مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط

به خطا أ ب، ب جـ. وقد بقي المربع الكائن من خط أ جـ.

فضعف السطع الـذي يحيط به خطا أب، ب جـ، مع المـربـع الكـائن من خط أ جـ: مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب، مع ضعف المربع الكائن من خط جـ ب، ومع المربع الكائن من خط أجـ.

فقد انحل إلى برهان ٢/٣. وساوى مجموع المربعين الكائنين [٣٠ أ] من خطي أ ب، ب جـ: ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع المربع الكائن من خط أ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأما على طريق التركيب فنبدأ الآن فنركب، فنقول:

لما انحل مجموع مربعي أ ب، ب جـ إلى برهان الشكل الثالث، وساوى ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع المربع الكائن من خط أ جـ؛ لكن بحسب برهان ٢/٣ يكون ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ [مثل ضعف السطح الذي يحيط به أ جـ، ب جـ] مع ضعف المربع الكائن من خط ب جـ، فضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ: مع مربع خط أ جـ: مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، ب جـ، مع ضعف المربع الكائن من خط جـ ب، مع مربع خط أ جـ.

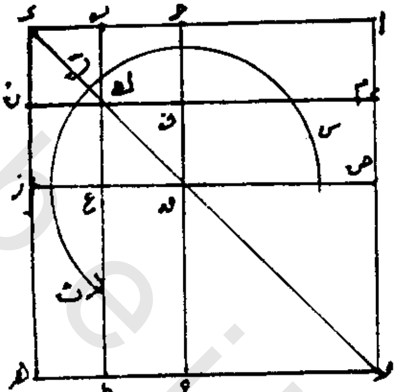
لكن بحسب برهان ٢/٤ فان مجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ ب، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ ب: مساوٍ للمربع الكائن من خط أ ب.

فيبقى مربع خط جـ ب. ونزيده على المربع الكائن من خط أ ب. فيصير مجموع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ [مساوياً ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ] مع المربع الكائن من خط أ جـ. فقد تركب من برهان ٢/٣، وانتهى إلى برهان ٢/٤، كما انحلَّ من برهان ٤ إلى برهان ٣. وذلك ما أردنا أن نبين. ★

★ كل هذه الحلول تثبت العلاقة $(م + ن)^{٢} + ن^{٢} = ٢ ن (م + ن) + م^{٢}$.

[المبرهنة ٨/ ٢]

الشكل الثامن من المقالة الثانية



الشكل ٨/ ٢

كل خط مستقيم مفروض يقسم بقسمين، أي قسمـة كانت، ويزاد في طولـه مثـل أحـد القسمـين، فإن مربع الخط المفروض مع الخط المـزيد: مسـاوٍ لأربعـة أضعاف السطح الذي يحيط به الخط المفروض والخط المزيد، مع مربع القسم الآخر.

مثاله: أن خط أ ب مستقيم، وقد قسم على نقطة جـ قسمة كيف وقعت، وزيد في طوله خط ب د مساوياً لقسم جـ ب. فأقول ان مربع خط أ د مساوٍ لأربعة أمثال السطح الذي يحيط به أ ب، ب د، مع مربع خط أ جـ.

برهـانـه: انـا نعمـل سطح أ هـ مربعاً قائم الزوايا، كما بينا عمله ببرهان ١/٤٥؛ ونخـرج قطر د و، ونخرج من نقطتي ب، جـ، خطي جـ ح، ب ط يوازيان ضلعي المربع، أعني ضلعي د هـ، أ و، كما بينا اخراجه ببرهان ١/٣١. ونجيز على نقطتي ك، ق، خطي م ف ك ن، ص ق ع ز موازيين لضلعي أ د، و هـ، كما بينا إجازته ببرهان ١/٣١.

فبحسب رسمنا شكل ٢/٤ ونظمنا البرهان هناك، يبين أن كل واحد من سطحي ب ن، ف ع مربع قائم الزوايا متساوي الأضلاع، وان سطح ب ن مربع خط ب د، وان سطح ف ع مربع خط جـ ب. وكذلك سطح م ط مربع، وسطح ص ح مربع، متساوي الأضلاع.

ولأن خط جـ ب مثل خط ب د، فإن مربع ب ن مثل مربع ف ع.

وأيضاً فلأن ضلع ف ك مثل ضلع ك ب، فإن مربع جـ ك مساوٍ لكل واحد من مربعي ب ن، ف ع؛ وكذلك نبين ان سطح ك ز مربع قائم الزوايا مساوٍ لكل

واحد من مربعات جـ ك، ب ن، ف ع. فسطوح جـ ك، ب ن، ف ع، ك ز، الأربعة: مربعات قائمات الزوايا متساويات. ولان مربع أ هـ متساوى الاضلاع قائم الزوايا. فبحسب برهان ١/٤٣ يكون متمم أ ك مساوياً لمتمم ك هـ. وقد تبين ان مربع جـ ك مثل مربع ك ز. فيبقى سطح أ ف مساوياً لسطح ع هـ. ولأن م ط مربع قائم الزوايا متساوي الأضلاع، وعن جنبتي قطره سطحا م ق، ق ط، فبحسب برهان ١/٤٣ فإن متمم م ق مثل متمم ق ط ولأن سطحي أ ف، م ق على قاعـدتين متساويتين، وبين خطين متوازيين، فانه بحسب ١/٣٦، يكون السطحان متساويين. فسطوح أ ف، م ق، ق ط، ع هـ، الأربعة: متساوية. وقد كنا بينا أن مربعات جـ ك، ب ن، ف ع، ك ز، الأربعة: أيضاً متساوية. فاذا الفنا سطح أ ف، مع مربع جـ ك، حتى يصير سطح أ ك، فمن البين ان علم س ت ث يصير أربعة امثال سطح أ ك.

لكن أ ك يحيط به خطا أ ب، ب د [٣٠ ب] لأن ب جـ مثل ب د. فعلم س ت ث اذن مساوٍ لأربعة أضعاف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب د. وسطح ص ح قد تبين أنه مربع خط أ جـ. فاذا اخرجنا مربع ص ح مشتركا، يكون علم س ت ث ومربع ص ح مساوياً لأربعة امثال السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب د مع مربع ص ح. لكن علم س ت ث ومربع ص ح جميعاً مساوٍ لسطح أ هـ. وسطح أ هـ هو مربع خط أ د. فمربع خط أ د اذن مساوٍ لأربعة امثال السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب د، مع مربع خط أ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

النيريزي: وأما على النحو الذي نحا إليه إيرن، برسمه خطاً واحداً، فانا متى حللنا مربع خط أ د، انحلّ إلى برهان ٢/٤. ذلك لأن المربع الكائن من خط أ د مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب د مع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب د.

ولأن ب د فرض مساوياً لقسم ب جـ، فإن ضعف السطح الذي يحيط به

خطا أ ب، ب جـ، مع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ؛ مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د، لكن بحسب برهان ٧/٢، يكون المربعان الكائنان من خطي أ ب، ب جـ مساوياً لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع مربع خط أ جـ.

فاذا جمعنا ذلك يكون أربعة أضعاف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع مربع خط أ جـ مساوياً لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ مع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ. وقد كنا بينا ان هذه مساوية للمربع الكائن من خط أ د.

لكن ب جـ مساوٍ لخط ب د. فأربعة أضعاف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب د مع مربع أ جـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د.

فقد انحل إلى شكل ٤ ثم إلى شكل ٧. وذلك ما أردنا ان نبين.

أما على سبيل التركيب، فنبدأ من حيث انتهى بنا الحل:

فلأن أربعة امثال السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع مربع خط أ جـ، اذا أُخذ منه ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع مربع خط أ جـ، بقي ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، فاذا أخذنا بدل ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع مربع خط أ جـ: مجموع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ، وزدناهما على ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، يكون حينئذ ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ مساوياً لأربعة أمثال السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع المربع الكائن من خط أ جـ. وذلك ببرهان ٧/١.

لكن خط ب جـ مثل خط ب د. فضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ، مع مجموع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ، مساوٍ لضعف

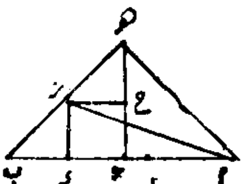
السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب د مع مجموع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب د.

ولكن بحسب برهان ٤/٢ فإن ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب د، مع مجموع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب د: مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د.

فأربعة أضعاف السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب د، مع المربع الكائن من خط أ جـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د. وذلك ما أردنا أن نبين. ★

المبرهنة ٩/٢]

الشكل التاسع من المقالة الثانية



الشكل ٩/٢

كل خط مستقيم يقسم بقسمين متساويين وبقسين مختلفين، أي قسمة كانت، فإن مجموع المربعين الكائنين من قسميه المختلفين: مساوٍ لضعف مجموع المربعين الكائنين من نصف الخط، ومن الخط الذي هو فضل نصف الخط على قسمه الأصغر.

مثاله: انا نفرض الخط [٣١ أ] المستقيم خط أ ب؛ ونقسمه بقسمين متساويين على نقطة جـ، وبقسمين مختلفين على نقطة د، فنريد ان نبين ان مجموع المربعين الكائنين من قسمي أ د، د ب: مساوٍ لضعف المربع الكائن من خط جـ ب مع ضعف المربع الكائن من خط جـ د.

برهانه: انا نقيم على نقطة جـ عمود جـ هـ مساوياً لخط أ جـ، كما بينا اقامته ببرهان ١/١١، ومساواته ببرهان ١/٢. ونخرج خطي أ هـ، هـ ب؛ ونخرج خط د ز موازياً لخط جـ هـ، كما بينا اخراجه ببرهان ١/٣١؛ ونخرج خط ز ح يوازي

تثبت هذه الحلول ان (م + ٢ن)^{٢} = ٤ن (م + ن) + م^{٢}.

خط أ ب. ونخرج خط أ ز. فلأن عمود جـ هـ اقمناه مثل خط أ جـ، فببرهان ١/٥ تكـون زاوية جـ أ هـ، مساوية لزاوية جـ هـ أ. وزاوية أ جـ هـ قائمة. فببرهان ١/٣٢ تكون كل واحدة من زاويتي جـ أ هـ، جـ هـ أ: نصف قائمة.

وأيضاً فلأن عمود جـ هـ اخرج مثل خط جـ ب، فبذلك البرهان والاستشهاد تكون كل واحدة من زاويتي جـ ب هـ، جـ هـ ب نصف قائمة. فزاوية أ هـ ب اذن قائمة.

ولأنا اخرجنا خط ز ح موازياً لخط أ ب، وقد وقع عليهما خط هـ ح جـ، فبحسب برهـان ١/٢٩ تكون زاوية هـ ح ز الخارجة مساوية لزاوية هـ جـ ب الداخلة. فلأن زاوية هـ جـ ب قائمة، تكون زاوية هـ ح ز قائمة. وكنا بينا ان زاوية ح هـ ز نصف قائمة. فبحسب برهان ١/٢٩ تبقى زاوية هـ ز ح نصف قائمة. فزاوية ح هـ ز مثل زاوية هـ ز ح. فبحسب برهان ١/٦ تكون ساق هـ ح مثل ساق ح ز.

وأيضاً فلأن أ ب وقع على خطي هـ جـ، ز د المتوازيين، فبحسب الاستشهاد المتقدم، تكون زاوية ب د ز الخارجة مساوية لزاوية ب جـ هـ الداخلة. لكن زاوية ب جـ هـ قائمة. فزاوية ب د ز اذن قائمة. وكنا بينا ان زاوية جـ ب هـ نصف قائمة. فبحسب برهان ١/٢٩ تبقى زاوية د ز ب نصف قائمة.

فبحسب برهان ١/٦ يكون ساق د ب مساوياً لساق د ز.

فلأن عمود جـ هـ اخرجناه مساوياً لخط أ جـ، فان مجموع المربعين الكائنين من خطي جـ هـ، أ جـ مساوٍ لضعف المربع الكائن من خط أ جـ. لكن مجموع مربعي جـ هـ، أ جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط أ هـ: لأن زواية أ جـ هـ قائمة. وذلك ببرهان ١/٤٦. فالمربع الكائن من خط أ هـ اذن ضعف المربع الكائن من خط أ جـ. وأيضاً فانا قد بينا ان ضلع ح هـ مثل ضلع ح ز. فمجموع المربعين الكائنين من ضلعي ح هـ، ح ز مساوٍ لضعف المربع الكائن من ضلع ح ز. فلأن زاوية هـ ح ز قائمة، فبحسب برهان ١/٤٦ يكون مجموع المربعين الكائنين من

ضلعي ح هـ، ح ز مثل المربع الكائن من خط هـ ز. فالمربع الكائن من خط هـ ز اذن ضعف المربع الكائن من خط ح ز.

ولأن ضلع ح ز مثل ضلع جـ د، وذلك بحسب برهان ١/٣٣ ، لأن سطح ح د متوازي الأضلاع، فالمربع الكائن من خط هـ ز اذن ضعف المربع الكائن من خط جـ د. وقد بينا ان المربع الكائن من خط أ هـ مساوٍ لضعف المربع الكائن من خط أ جـ. فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ هـ، هـ ز مساوٍ لمجموع ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. لكن بحسب برهان ١/٤٦ يكون مجموع المربعين الكائنين من خطي أ هـ، هـ ز مثل المربع الكائن من خط أ ز، لأن زاوية أ هـ ز قائمة، فالمربع الكائن من خط أ ز اذن مساوٍ لمجموع ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. لكن ببرهان ١/٤٦ يكون مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ز مساوياً للمربع الكائن من خط أ ز. فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ز يساوي ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. لكن د ز قد بينا أنه مساوٍ لخط د ب. فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب: مساوٍ لضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

[٣١ ب] وأما البرهان على هذا الشكل على مذهب ايرن بطريق الحل: فانا قد علمنا من برهان ٢/٤ ان المربع الكائن من خط أ د مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د مع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. فقد انحل مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب الى ان صارا مساويين لضعف السطح الذي يحيط به خط أ جـ، جـ د، مع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د، ومربع ب د. فينبغي اذن ان نبين ان ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د، ولمجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د، ولمربع ب د.

فإنا متى اسقطنا مربعي أ جـ، جـ د المشتركين، يبقى ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د مع مربع خط ب د مساوياً لمجموع مربعي خطي أ جـ، جـ د.

لكن خط أ جـ مساوٍ لخط جـ ب. فمجموع مربعي خطي ب جـ، جـ د مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا ب جـ، جـ د مع المربع الكائن من خط ب د. لكن بحسب برهان ٢/٧ يكون مجموع المربعين الكائنين من خطي ب جـ، جـ د مساوياً لضعف السطح الذي يحيط به ب جـ، جـ د مع مربع خط ب د.

فقد إنحل البرهان إلى شكل ٢/٧، وتبين أن مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب مساوٍ لضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. وذلك ما أردنا أن نبين.

وأما على سبيل التركيب فنبدأ الآن فنركب: فلأن البرهان إنتهى بنا إلى مجموع المربعين من خطي ب جـ، جـ د مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا ب جـ، جـ د مع المربع الكائن من خط د ب؛ وخط أ جـ مساوٍ لخط جـ ب. فإن مجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ ب مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د مع المربع الكائن من خط د ب. ونزيد مربعي أ جـ، جـ د؛ ونأخذهما مشتركين. فيصير ضعف المربع الكائن من خطي أ جـ، جـ د مساوياً لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د مع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د، ومع المربع الكائن من خط د ب.

لكن بحسب برهان ٢/٤ فإن المربع الكائن من خط أ د مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د مع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د.

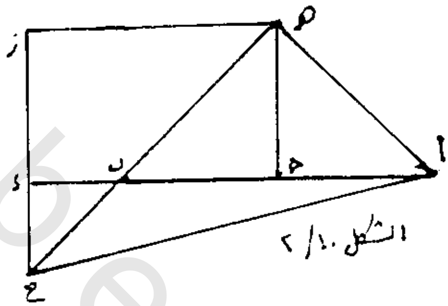
فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب مساوٍ لضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. وذلك ما أردنا أن نبين. ★

هذه القضية تثبت ان $(م + ن)^٢ + (م - ن)^٢ = ٢ م^٢ + ٢ ن^٢$

[المبرهنة ١٠/ ٢]

الشكل العاشر من المقالة الثانية

كل خط مستقيم يقسم بنصفين ويزاد في طوله خط آخر، فإن مربع الخط كله مع الزيادة، ومربع الزيادة، إذا جمعا: مساوٍ لضعف المربعين الكائنين من نصف الخط، ومن نصف الخط مع الزيادة. إذا جمعا.



الشكل ١٠/ ٢

مثاله: أن خط أ ب قسم بنصفين على علامة جـ، وزيد في طوله خط ب د، فأقول: إن مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب مساوٍ لضعف مجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د.

برهانه: أنا نقيم على نقطة جـ عمود جـ هـ مساوياً لخط أ جـ، كما بينا ببرهان ١/١١؛ ونخرج خطي أ هـ، هـ ب؛ ونخرج خط هـ ز موازياً لخط جـ د، كما بين ببرهان ١/٣١. ونخرج من نقطة د خط د ز موازياً لخط جـ هـ.

فلأن خطي هـ جـ، د ز متوازيان، وقد أجيز عليهما خط هـ ز، فإن مجموع زاويتي جـ هـ ز، هـ ز د مثل مجموع زاويتين قائمتين. وذلك بحسب برهان ١/٢٩. فزاويتا د ز هـ، ز هـ ب أصغر من قائمتين. فبحسب برهان أغانيس في مقدمة ١/٢٩، وإضافته إليه، فإن خطي هـ ب، ز د، إذا أخرجا على استقامة، التقيا، فنخرجهما، وليلتقيا على نقطة ح. ونخرج خط أ ح.

فلأن عمود جـ هـ مثل خط أ جـ، فبحسب برهان ١/٥، تكون زاوية جـ أ هـ [٣٢ أ] مثل زاوية جـ هـ أ؛ وزاوية أ جـ هـ قائمة. فبحسب برهان ١/٣٢ فإن كل واحدة من زاويتي جـ أ هـ، جـ هـ أ نصف قائمة.

وبمثل هذا البرهان والاستشهاد نبين ان كل واحدة من زاويتي جـ ب هـ، جـ هـ ب نصف قائمة. فزاوية أ هـ ب إذن قائمة.

وبحسب برهان ١/١٥ تكون زاوية د ب ح مساوية لزاوية هـ ب أ. فزاوية د ب ح إذن نصف قائمة. وزاوية ب د ح قائمة، لأنها مثل زاوية هـ ز د؛ وذلك بحسب برهان ١/٢٩.

فبحسب برهان ١/٣٢ تبقى زاوية د ح ب نصف قائمة. فضلع ب د مثل ضلع د ح. وضلع ز هـ أيضاً مثل ز ح: لأن زاوية ز هـ ح أيضاً نصف قائمة.

فاذ قد تبينت هذه الأشياء، فنعود: فلأن ضلع جـ هـ مثل ضلع أ جـ، فإن المربعين الكائنين من ضلعي جـ هـ، جـ أ، اذا جمعا: مثل ضعف المربع الكائن من ضلع أ جـ.

لكن مجموع المربعين الكائنين من ضلعي جـ هـ، جـ أ مثل المربع الكائن من ضلع أ هـ، بحسب برهان ١/٤٥. فالمربع الكائن من ضلع أ هـ إذن مثل ضعف المربع الكائن من ضلع أ جـ.

وقد بينا ان ضلع ز هـ مثل ضلع ز ح. فمجموع المربعين الكائنين من ضلعي ز هـ، ز ح مثل ضعف المربع الكائن من خط ز هـ. ولأن زاوية هـ ز ح قائمة، فبحسب برهان ١/٤٥ يكون مجموع المربعين الكائنين من ضلعي هـ ز، ز ح مثل المربع الكائن من ضلع هـ ح. فالمربع الكائن من ضلع هـ ح مثل ضعف المربع الكائن من ضلع هـ ز. وضلع هـ ز مثل ضلع جـ د؛ وذلك ببرهان ١/٣٣. فمربع خط هـ ح إذن مساوٍ لضعف مربع خط جـ د.

وقد كان تبين ان مربع خط أ هـ مثل ضعف مربع خط أ جـ. فمجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ هـ، هـ ح، إذن، مثل ضعف مجموع المربعين الكائنين خطي أ جـ، جـ د.

لكن بحسب برهان ١/٤٥ يكون مجموع المربعين الكائنين من خطي أ هـ، هـ ح مثل المربع الكائن من خط أ ح. وكذلك مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ د، د ح مثل المربع الكائن من خط أ ح، لأن زاوية أ د ح قائمة. فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ هـ، هـ ح مثل مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ح.

وقد بينا ان مجموع المربعين الكائنين من خطي أ هـ، هـ ح مثل ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. وقد بينا ان د ح مثل د ب. فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب قد تبين أنه ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]:

وأما البرهان على مذهب ايرن، عن طريق الحل: فإنا نوجب انا قد وجدنا أن مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب: مثل ضعف المربعين الكائنين من خطي أجـ، جـ د. فنقول:

إن من برهان ٢/٤ أن المربع الكائن من خط أ د مثل مجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د وضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د.

فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د، مع المربع الكائن من خط ب د: مثل ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. فاذا أسقطنا مربعي أ جـ، جـ د المشتركين، من جميعهما، بقي ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د، مع المربع الكائن من خط ب د: مثل مجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د.

لكن أ جـ مثل جـ ب. فضعف السطح الذي يحيط به خطا أجـ، جـ د: مثل ضعف السطح الذي يحيط به خطا د جـ، جـ ب.

فقد انحلَّ إلى برهان ٢/٧، وتبين ان مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب مثل ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

واما طريق التركيب: فإنا نبتدىء من حيث انتهى بنا الحل، فنقول: لأن مجموع المربعين الكائنين من خطي د جـ، جـ ب مثل ضعف السطح الذي يحيط به خطا د جـ، جـ ب، مع المربع الكائن من خط د ب: لكن خط أ جـ مثل خط جـ ب. فإن مجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ ب، مثل

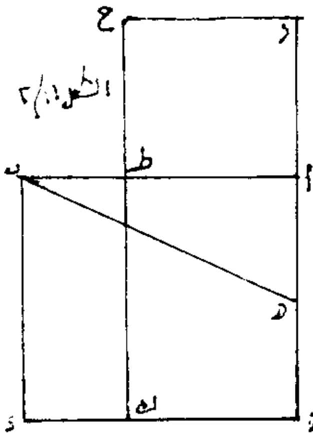
ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د مع مربع د ب. فاذا زدنا على مجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د مربعين آخرين كائنين من خطي أ جـ، جـ د، وزدنا ذلك بعينه على ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د، مع المربع الكائن من خط د ب، كان ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د مثل ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د، مع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د، مع المربع الكائن من خط ب د. لكن بحسب برهان ٢/٤ فان ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، جـ د، مع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د: مساوٍ لمربع أ د.

فقد تبين ان مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، د ب مثل ضعف المربعين الكائنين من خطي أ جـ، جـ د. وذلك ما اردنا نبين. ★

★ تثبت هذه القضية ان (٢ م+ ن)^{٢} + ن^{٢} = ٢ م^{٢} + ٢ (م + ن)^{٢}.

[المبرهنة ١١/ ٢]

الشكل الحادي عشر من المقالة الثانية

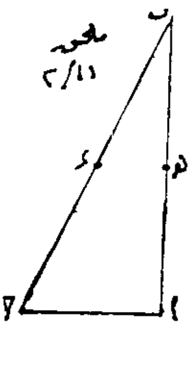


نريد أن نبين كيف نقسم خطاً معلوماً مستقيماً مفروضاً: قسمة يكون السطح الذي يحيط به الخط كله وأحد القسمين مساوياً للمربع الكائن من القسم الآخر.

مثاله: ان خط أ ب مستقيم مفروض. فنريد ان نبين كيف [نقسم] خط أ ب قسمة يكون السطح الذي يحيط به أ ب واحد القسمين مساوياً لمربع القسم الآخر. فنعمل على خط أ ب سطحاً مربعاً قائم الزوايا، كما بينا عمله ببرهان ١/٤٦. ونقسم خط أ جـ بنصفين على نقطة هـ، كما بينا عمله ببرهان ١/١٠. ونخرج خط هـ ب. ونخرج خط هـ أ حتى

يصير مساوياً لخط هـ ب؛ وليكن خط هـ ز. ونعمل على خط أ ز مربعاً كما بيناه ببرهان ١/٤٦، وليكن مربع ز ط. ونخرج خط ح ط ك موازياً لضلعي أ هـ، ب د، كما بينا اخراجه ببرهان ١/٣١. فأقول انا قد قسمنا خط أ ب بقسمين على نقطة ط، قسمة يكون السطح الذي يحيط به خط أ ب وأحد القسمين، وهو خط ب ط، مساوياً لمربع القسم الآخر، وهو أ ط.

برهانه: ان خط أ جـ قد قسم بنصفين على نقطة هـ، وزيد في طوله خط أ ز. فبحسب برهان ٢/٦ يكون السطح الذي يحيط به خطا جـ ز، ز أ، مع المربع الكائن من خط أ هـ مساوياً للمربع الكائن من خط هـ ز. لكن خط هـ ز مساوٍ لخط هـ ب. فالسطح الذي يحيط به خطا جـ ز، ز أ، مع المربع الكائن من خط أ هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ ب. لكن بحسب برهان ١/٤٧ فإن مجموع المربعين الكائنين من خطي هـ أ، أ ب مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ ب. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فالسطح الذي يحيط به خطا جـ ز، ز أ، مع المربع الكائن من خط أ هـ: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي أ هـ، أ ب. فاذا القينا المربع الكائن من خط أ هـ، المشترك، بقي السطح الذي يحيط به خطا جـ ز، ز أ مساوياً للمربع الكائن من خط أ ب. لكن السطح الذي يحيط به خطا جـ ز، ز أ هو سطح ز ك، لأن خط أ ز مساوٍ لخط ز ح. فسطح ز ك اذن [٣٣ أ] مساوٍ لمربع أ د. فاذا القينا سطح أ ك المشترك، بقي مربع ز ط مساوياً لسطح ط د. لكن سطح ط د يحيط به خطا أ ب، ب ط، لأن خط أ ب مساوٍ لخط ب د. ومربع ز ط هو الكائن من خط أ ط. فقد تبين ان السطح الذي يحيط به خطا أ ب، ب ط مساوٍ للمربع الكائن من خط أ ط. وذلك ما اردنا ان نبين.



[النيريزى]:

قال ايرن: ان هذا الشكل ليس يمكن ان يبرهن عليه بلا صورة. وذلك ان في هذه المسالة يجب باضطرار ان تعمل الاعمال التي تتمُّ بها. فاما في مطالب البرهان فإن ذلك من

الفضل. وقد بيَّنا في الأشكال التي تقدمت أنه ليس يحتاج فيها إلى اعمال، وانما يحتاج فيها إلى برهان؛ فذكرنا براهينها بلا رسوم فيما تقدم. ومن أجل أن هذا المطلب يحتاج فيه إلى عمل، لذلك صار غير ممكن ان يبين بلا رسم. واذ كان هذا هكذا، فانا لا نتثاقل عن النظر بان نضع برهاناً آخر متقنا مستقصى، انا نفرض الخط المعلوم خط أ ب. ونريد أن نبين كيف نقسم خط أ ب قسمة يكون السطح الذي يحيط به الخط كله وأحد القسمين: مساوياً لمربع القسم الآخر.

فنخرج من نقطة أ عمود أ جـ مساوياً لنصف خط أ ب، كما بينا ذلك ببرهان الشكل المضاف إلى ١١/١. ونخرج خط جـ ب. ونفصل جـ د مساوياً لخط جـ أ، كما بينا ذلك ببرهان ١/٣. فلأن المربع الكائن من خط جـ ب مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ جـ، أ ب؛ وخط جـ د مساوٍ لخط جـ أ، فإن ضلع أ ب اعظم من خط ب د. وذلك لأن مربع جـ ب. مساوٍ لمجموع مربعي جـ د، د ب، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا جـ د، د ب. وذلك بيّن ببرهان ٢/٤. فإذا اسقطنا مربعي خطي أ جـ، جـ د، بقي مربع خط أ ب مساوياً لمربع خط ب د، ولضعف السطح الذي يحيط به خطا جـ د، د ب. فاذن خط أ ب اعظم من خط ب د. فنفصل من خط أ ب: خط ب هـ مساوياً لخط ب د، كما بينا ذلك ببرهان ١/٣. فأقول: انا قد قسمنا خط أ ب على نقطة هـ قسمة يكون السطح الذي يحيط به خطا ب أ، أ هـ مساوياً للمربع الكائن من خط ب هـ.

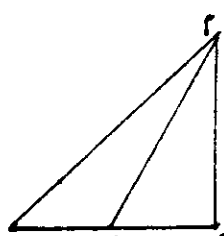
برهانه: ان المربع الكائن من خط جـ ب مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من قسمي جـ د، د ب، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا جـ د، د ب. وذلك بحسب برهان ٢/٤. لكن بحسب برهان ١/٤٧ يكون المربع الكائن من خط جـ ب مساوياً لمجموع المربعين الكائنين من خطي جـ أ، أ ب، لأن زاوية جـ أ ب قائمة. فمجموع المربعين الكائنين من قسمي جـ د، د ب، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا جـ د، د ب: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي أ جـ، أ ب.

وكنا فصلنا جـ د مثل أجـ، وفصلنا ب هـ مثل ب د. فاذن مجموع المربعين الكائنين من أجـ، ب هـ، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا أ جـ، ب هـ: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي جـ أ، أ ب. فإذا القينا جـ أ المشترك، بقي ضعف السطح الذي يحيط به خطًا جـ أ، هـ ب، مع المربع الكائن من خط هـ ب: مساوياً للمربع الكائن من خط أ ب. فلأن خط أ ب ضعف خط جـ أ، يكون ضعف السطح الذي يحيط به خطًا أ جـ، هـ ب مساوياً للسطح الذي يحيط به خطًا أ ب، هـ ب؛ وذلك بحسب برهان ٢/١.

فالسطح الذي يحيط به خطًا أ ب، ب هـ، مع المربع الكائن من خط ب هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط أ ب. لكن بحسب برهان ٢/٣ فان مجموع السطحين الذين يحيط باحدهما خطًا ب أ، أ هـ، وبالآخر خطًا أ ب، ب هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط أ ب. فإذن السطح الذي يحيط به خطًا أ ب، ب هـ، مع المربع الكائن من خط ب هـ: مساوٍ للسطحين اللذين يحيط باحدهما خطًا أ ب، ب هـ، وبالآخر خطًا ب أ، أ هـ. فإذا القينا السطح الذي يحيط به خطًا أ ب، ب هـ، المشترك، من جميعهما [٣٣ ب] بقي حينئذ السطح الذي يحيط به خطًا أ ب، أ هـ مساوياً للمربع الكائن من خط ب هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢/١٢]

الشكل الثاني عشر من المقالة الثانية


الشكل ١٢/٢

كل مثلث منفرج الزواية، فإن مربع الضلع الذي يوتر الزاوية المنفرجة أعظم من مربعي الضلعين المحيطين بالزاوية المنفرجة بمثل ضعف السطح الذي يحيط به أحد الضلعين المحيطين بالزاوية المنفرجة، والخط الذي يخرج

★ هذه القسمة الذهبية التي تقتضي تقسيم م إلى س، م ـ س بحيث يكون م: س = س: م ـ س

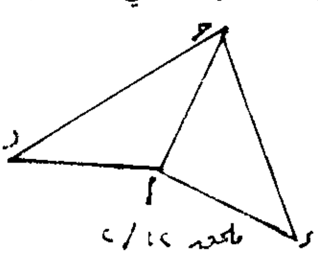
على استقامة هذا الضلع، ما بين الزاوية المنفرجة ومسقط العمود.

مثاله: ان زاوية أ ب جـ من مثلث أ ب جـ منفرجة. وقد اخرج ضلع ب جـ على استقامته، وقد ارسل من نقطة أ عمود أ د، كما بينا ذلك ببرهان ١٢/١، فاقول ان المربع الكائن من ضلع أ جـ اعظم من مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، ب جـ: بمثل ضعف السطح الذي يحيط به خطًا جـ ب، ب د.

برهانه: ان خط جـ د قد انقسم بقسمين على نقطة ب. فببرهان ٢/٤، فإن المربع الكائن من خط جـ د مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من قسمي د ب، ب جـ، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطًا د ب، ب جـ. فإذا أخذنا المربع الكائن من عمود أ د مشتركا، فإنه يكون مجموع المربعين الكائنين من ضلعي جـ د، د أ: مساوياً لمجموع مربعات خطوط جـ ب. ب د، د أ، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطًا جـ ب، ب د. لكن بحسب برهان ١/٤٧ يكون مجموع المربعين الكائنين من ضلعي جـ د، د أ مساوياً للمربع الكائن من ضلع أ جـ، لأن زاوية د قائمة. وكذلك مجموع المربعين الكائنين من ضلعي ب د، د أ مساوٍ للمربع الكائن من ضلع أ ب. فالمربع الكائن من ضلع أ جـ اذن مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، ب جـ مع ضعف السطح الذي يحيط به ضلع ب جـ وخط ب د. فالمربع الكائن من ضلع أ جـ اذن قد تبين انه اعظم من مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، ب جـ: بضعف السطح الذي يحيط به ضلع جـ ب وخط ب د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]

زيادة: قال ايرن: كل مثلث يكون المربع الكائن من احد اضلاعه أعظم من مجموع المربعين الكائنين من الضلعين الباقيين، فإن الزاوية التي يحيط بها ذانك الضلعان منفرجة:



فليكن مثلث أ ب جـ مربع ضلع ب جـ فيه أعظم من مجموع مربعي ب أ، أ جـ. فأقول ان زاوية ب أ جـ منفرجة.

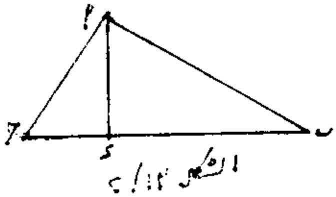
برهانه: انا نخرج من نقطة أ، من خط أ جـ، عمود أ د مساوياً لضلع أ ب، كما بينا ذلك ببرهان الشكل المضاف إلى ١/١٢. ونخرج خط جـ د. فلأن مربع أ ب مساوٍ لمربع أ د، فانا ذلك اذا اخذنا مربع أ جـ مشتركا فانه يكون مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، أ جـ: يساوي مجموع المربعين الكائنين من ضلعي د أ، أ جـ.

وكنا فرضنا المربع الكائن من ضلع ب جـ أعظم من مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، أ جـ. لكن بحسب برهان **١/٤٧**، يكون مجموع مربعي د أ، أ جـ مثل المربع الكائن من ضلع د جـ. فاذن المربع الكائن من ضلع ب جـ أعظم من المربع الكائن من ضلع جـ د. فضلع ب جـ اذن أعظم من ضلع جـ د.

ولأنا فرضنا ضلع أ د مثل ضلع أ ب، فاذا اخذنا ضلع أ جـ مشتركا، يكون ضلعا ب أ، أ جـ مساويين لضلعي د أ، أ جـ؛ وقاعدة ب جـ قد تبين انها أعظم من قاعدة جـ د. فحسب برهان **١/٢٥** تكون زاوية ب أ جـ، أعظم من زاوية د أ جـ. لكن زاوية د أ جـ قائمة، فزاوية ب أ جـ منفرجة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢/١٣]

[٣٤ أ] الشكل الثالث عشر من المقالة الثانية



كل مثلث فإن المربع الكائن من الضلع الذي يوتر [إحدى] زواياه الحادَّة: اصغر من مجموع المربعين الكائنين من الضلعين اللذين يحيطان [بتلك] الزاوية الحادَّة بمثل ضعف السطح الذي يحيط به احد الضلعين المحيطين بالزاوية الحادة والخط الذي بين تلك الزاوية وبين مسقط العمود من ذلك الضلع.

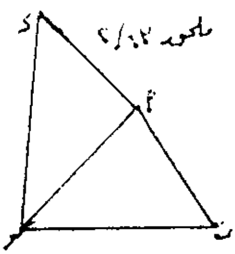
مثاله: ان زاوية أ ب جـ من مثلث أ ب جـ حادَّة، وقد اخرج من نقطة أ عمود

أ د إلى ضلع ب جـ. فأقول: ان المربع الكائن من ضلع أ جـ أصغر من مجموع المربعين الكائنين من خطي أ ب، ب جـ بمثل ضعف السطح الذي يحيط به خطّا جـ ب، ب د.

برهانه: ان خط ب جـ قد انقسم بقسمين على نقطة د. فبحسب برهان ٢/٧، فان المربع الكائن من خط ب جـ، مع المربع الكائن من خط ب د: مساوٍ لضعف السطح الذي يحيط به خطا ب جـ، ب د، مع المربع الكائن من قسم جـ د. فاذا اخذنا المربع الكائن من عمود أ د مشتركاً، يصير مجموع المربعات الثلاثة الكائنات من خطوط ب جـ، ب د، أ د: مساوياً لضعف السطح الذي يحيط به خطّا ب جـ، ب د مع مجموع المربعين الكائنين من خطي جـ د، أ د. لكن بحسب برهان ١/٤٧، فإن مجموع المربعين الكائنين من ضلعي ب د، أ د: مساوٍ للمربع الكائن من خط أ ب، لأن زاويتي د قائمتان. وبهذا الاستشهاد نبين ان مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ د، د جـ مساوٍ للمربع الكائن من ضلع أ جـ.

فيصير مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، ب جـ مساوياً للمربع الكائن من ضلع أ جـ، مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا ب د، ب جـ.

فقد تبين ان المربع الكائن من ضلع أ جـ أصغر من مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، ب جـ بضعف السطح الذي يحيط به خطّا جـ ب، ب د. وذلك ما أردنا ان نبين.



[النيريزي]:

قال ايرن في عكس هذا الشكل: كل مثلث يكون مربع احد اضلاعه أصغر من مربعي الضلعين الباقيين فإن الزاوية التي يحيط بها ذانك الضلعان حادَّة.

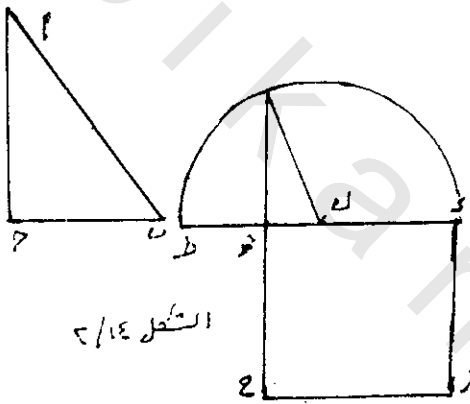
مثاله: ان ضلع ب جـ من مثلث أ ب جـ مربعه أصغر من مجموع مربعي ضلعي أ ب، أ جـ. فأقول: ان زاوية أ ب جـ حادة.

برهانه: انا نقيم على نقطة أ من خط أ جـ: عمود أ د مساوياً لضلع أ ب، كما بينا ذلك ببرهان ١/١٢. ونصل د جـ.

فانا متى استشهدنا بشكل ١/٤٧ وشكل ١/٤٥، كما استشهدنا في الشكل المضاف الذي قبل هذا الشكل، أعني في الزاوية المنفرجة، تبين ان الزاوية ب أ جـ حادَّة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢/١٤]

الشكل الرابع عشر من المقالة الثانية



الشكل ١٤/ ٢

نريد أن نبين كيف نعمل سطحاً مربعاً مساوياً لمثلث معلوم: فليكن المثلث المفروض مثلث أ ب جـ. ونريد ان نبين كيف نعمل سطحاً مربعاً مساوياً لمثلث أ ب جـ. فنعمل سطحاً متوازي الأضلاع قائم الزوايا مساوياً لمثلث أ ب جـ، كما بينا عمله ببرهان ١/٤٢، وليكن سطح د ح. فإن كان سطح د ح مربعاً فقد عملنا ما أردنا عمله. وإن كان مختلف الأضلاع، فننزل أن ضلع د هـ أعظم من ضلع هـ ح. ونخرج د هـ على الاستقامة، حتى يصير ما أخرجناه مساوياً لخط هـ ح، وليكن هـ ط. ثم نقسم د ط بنصفين على نقطة ك، كما بينا قسمته ببرهان ١/١٠. ونخط على مركز ك وببعد د ك نصف دائرة د ل ط. ونخرج من نقطة هـ عمود هـ ل، كما بينا إخراجه ببرهان ١/١١، ونخرج ك ل فلأن خط د ط قد قسم بنصفين على نقطة ك [٣٤ ب]، وبقسمين مختلفين على نقطة هـ؛ فبحسب برهان ٢/٥، فإن السطح الذي يحيط به خطَّا د هـ، هـ ط، مع المربع الكائن من خط ك هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط ك ط.

لكن ك ط مثل ك ل، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط. فالسطح الذي يحيط به خطًّا د هـ، هـ ط، مع المربع الكائن من خط ك هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط ك ل.

لكن بحسب برهان ١/٤٧، يكون المربع الكائن من خط ك ل مساوياً لمجموع المربعين الكائنين من خطَّي ك هـ، هـ ل، لأن زاوية ك هـ ل قائمة. فالسطح الذي يحيط به خطًّا د هـ، هـ ط، مع المربع الكائن من خط ك هـ: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطَّي ك هـ، هـ ل.

فنسقط مربع ك هـ المشترك. فيبقى السطح الذي يحيط به خطًّا د هـ، هـ ط: مساوياً للمربع الكائن من خط هـ ل. وكنا أخرجنا هـ ط مساوياً لضلع هـ ح. فالسطح الذي يحيط به خطًّا د هـ، هـ ح إذن مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ ل. لكن السطح الذي يحيط به خطًّا د هـ، هـ ح هو سطح د ح. فسطح د ح إذن مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ ل. لكن سطح د ح مساوٍ لمثلث أ ب جـ.

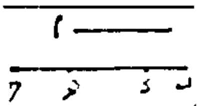
فالمربع الكائن من خط هـ ل إذن مساوٍ لمثلث أ ب جـ. فقد أصبنا ضلع المربع المساوي لسطح د ح، وهو خط هـ ل، مساوٍ لمثلث أ ب جـ. وذلك ما أردنا أن نعمل.

تمت المقالة الثانية من كتاب اوقليدس

ج مبرهنات النسوي

[المبرهنة ١/٢ تقابل ١/٢ عند الحجاج]

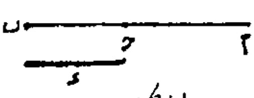
إذا كان خطان، متساويين كانا أو غير متساويين، كخطي ب جـ، أ، وقسم أحدهما، وليكن ب جـ، بأقسام، كم كانت، وهي أقسام ب د، د هـ هـ جـ، أقول: ان ضرب خط أ في خط ب جـ، مثل ضرب الذي لم يقسم، في كل واحد من أقسام ب د، د هـ، هـ جـ.



برهـانه: إن [ضرب أ في] خط ب جـ ليس بأعظم ولا بأصغر من ضرب أ في كل واحد من ب د، د هـ، هـ جـ. فضرب أ في ب جـ مساوٍ لضرب أ في كل واحد من اقسام ب د، د هـ، هـ جـ [١٤ و]. وذلك ما أردنا أن نبين.

وهنالك استبان انه إذا قسم خط بقسمين، كيفما اتفق، فان ضرب الخط كله في كل واحد من أقسامه مساوٍ لمربع الخط كله.

[المبرهنة ٢/٢ تقابل ٣/٢ عند الحجاج]

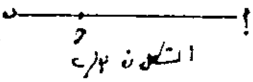


إذا قسم خط ما، كخط أ ب على نقطة جـ، كيفما اتفق، أقول إن ضرب أ ب في أحد القسمين، وليكن أ ب في ب جـ: مسـاوٍ لضـرب ب جـ في جـ أ ومربع القسم الذي ذكرنا، أعني ب جـ.

برهانه: نجعل د مثل جـ ب فخط د يقسم أ ب على جـ. فضرب د في أ ب مثل ضرب د في كل واحد من أقسام أ جـ، جـ ب، أعني ب جـ في جـ أ،

ومربع ب جـ، لأن د مثل ب جـ فضرب أ ب في ب جـ مثل ضرب أ جـ في ب جـ ومربع ب جـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢/٣ تقابل ٢/٤ عند الحجاج]

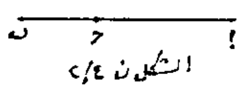


إذا كان خط ما مثل أ ب، وقسم على نقطة جـ كيفما اتفق، أقول أن مربع أ ب مثل مربعي أ جـ، جـ ب، وضرب أ جـ في جـ ب مرتين.

برهانه: خط أ ب قسم على جـ. فمربع أ ب مساوٍ لضرب أ ب في ب جـ، ولضرب أ ب في أ جـ. لكن ضرب أ ب في ب جـ مثل ضرب أ جـ في جـ ب ومربع ب جـ. وضرب أ ب في أ جـ مثل ضرب أ جـ في جـ ب ومربع أ جـ. فمربع أ ب مثل مربعي أ جـ، ب جـ وضرب أ جـ في جـ ب مرتين. وذلك ما أردنا أن نبين.

ومن هذا الشكل تبين مقدار زيادة مربع وتر الزاوية المنفرجة على مربعي الضلعين المحيطين بها.

[المبرهنة ٢/٤ تقابل ٢/٧ عند الحجاج]



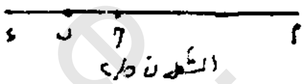
اذا قسم خط ما [١٤ ظ] كخط أ ب بقسمين، على نقطة جـ، أقول: ان ضعف ضرب أ ب في أحد قسميه، وليكن ب جـ، مع مربع أ جـ مساوٍ لمربعي أ ب، ب جـ.

برهانه: ان أ ب قسم على جـ. فضعف ضرب أ جـ في جـ ب مع مربعي جـ ب، جـ أ مثل مربع أ ب. نجعل مربع ب جـ مشتركاً. فضعف ضرب أ جـ في جـ ب، مع ضعف مربع جـ ب، أعني ضعف ضرب أ ب في ب جـ، ومربع أ جـ: مثل مربعي أ ب، ب جـ

فضعف ضرب أ ب في ب جـ مع مربع أ جـ مثل مربعي أ ب، ب جـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

ومن هذا الشكل تبين مقدار نقصان مربع وتر الزاوية الحادة من مربعي الضلعين المحيطين بها.

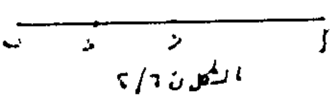
[المبرهنة ٥/ ٢ تقابل ٧/ ٢ عند الحجاج]



إذا قسم خط ما، كخط أ ب، قسمين على جـ، أقول: إن أربعة أمثال ضرب أ ب في أحد قسميه، وليكن ب جـ، مع مربع القسم الباقي، وهو أ جـ: مساوٍ لمربع أ ب، ب جـ إذا صارا خطاً واحداً.

أقول: إنا نجعل ب د مثل ب جـ. فلأن أ ب قسم على جـ، فمربعا أ ب، ب جـ أعني أ ب، ب د مثل ضعف ضرب أ ب في ب جـ، أعني في ب د، [مع مربع أ جـ. فنجعل ضعف ضرب أ ب في ب جـ] مشتركاً. فأربعة أمثال ضرب أ ب في ب جـ مع مربع أ جـ مثل مربع أ د، أعني أ ب، ب جـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٦/ ٢ تقابل ٥/ ٢ عند الحجاج]



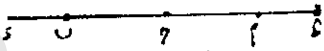
إذا نصف خط ما، كخط أ ب، على نقطة جـ، وقسم على نقطة د، أقول: ان ضرب أ د في د ب، مع مربع جـ د مثل مربع نصف خط أ ب.

برهانه: انه [في] خطي أ د، د ب: قسم أ د على جـ. فضرب أ د في د ب مثل ضرب جـ د في د ب، أ جـ في د ب. لكن ضرب أ جـ في د ب مثل ضرب جـ د في د ب ومربع د ب. فضرب أ د في د ب مثل ضعف ضرب د جـ في د ب مع مربع د ب. نجعل مربع جـ د مشتركاً. فضرب أ د في د ب [١٥و]

مع مربع جـ د [مثل مربع جـ ب، أعني] مثل مربع نصف خط أ ب. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢/٧ تقابل ٢/٦ عند الحجاج]

إذا نصف خط ما، كخط أ ب، على نقطة جـ، وكان ب د زيادة ما عليه، أقول: إن ضرب أ د في د ب، مع مربع نصف أ ب مثل مربع جـ د.



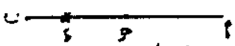
الشكل ن ٧/ ٢

برهانه: نجعل أ هـ مثل ب د. فخط هـ د نصف على جـ، وقسم على ب. فضرب هـ ب في ب د مع مربع جـ ب، الذي هو نصف أ ب، مثل مربع جـ د.

لكن هـ ب مثل أ د. فضرب أ د في د ب مع مربع جـ ب مثل جـ د. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢/٨ تقابل ٢/٩ عند الحجاج]

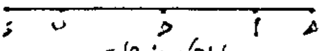
إذا نصف خط ما، كخط أ ب على جـ، وقسم على نقطة د أقول: ان مربعي أ د، د ب مساويان لضعف مربع أ جـ مع ضعف مربع جـ د.



الشكل ن ٨/ ٢

برهانه: ان أ د قسم على جـ. فمربع أ د مثل مربعي أ جـ، جـ د وضعف ضرب أ جـ في جـ د، أعني ضعف ضرب ب جـ في جـ د، لأن ب جـ مثل أ جـ. نجعل مربع د ب مشتركاً. فمربع أ د، د ب مثل مربعي أ جـ، جـ د، مع ضعف ضرب ب جـ في جـ د، ومربع د ب. لكن ضعف ضرب ب جـ في جـ د مع مربع د ب مساو [١٥ظ] لمربعي أ جـ، جـ د، أعني ضعف مربع نصف خط أ ب، وضعف مربع جـ د. فمربعا أ د، د ب مثل ضعف مربع نصف أ ب، وضعف مربع جـ د. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢/١٠ تقابل ٢/١٠ عند الحجاج]

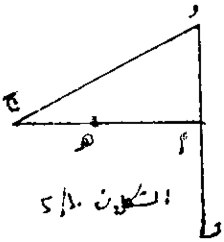


الشكل ٢/٩

اذا نصف خط ما، كخط أ ب، على جـ، وكان ب د زيادة ما عليه، أقول: ان مربعي أ د، د ب مثل ضعف مربع نصف خط أ ب مع ضعف مربع جـ د.

برهانه: نجعل أ هـ مثل ب د. فخط هـ د نصف على جـ، وقسم على ب. فمربعا هـ ب، ب د، أعني مربعي أ د، د ب: مثل ضعف مربع نصف هـ د، أعني ضعف مربع جـ د، مع ضعف مربع جـ ب الذي هو نصف خط أ ب. فمربعا أ د، د ب مثل ضعف مربع نصف خط أ ب، وضعف مربع جـ د. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢/١٠ تقابل ٢/١١ عند الحجاج]



الشكل ٢/١٠

نريد أن نقسم خطاً، كخط أ ب، بقسمين، حتى يكون ضرب الخط في أحد قسميه: مثل مربع القسم الآخر: فنخرج عمود أ جـ، ونجعله مثل نصف أ ب. ونصل ب جـ. ونزيد أ د في أ جـ، حتى يكون جـ د مثل ب جـ. ونفصل أ هـ مثل أ د. أقول: ان ضرب أ ب في ب هـ مثل مربع أ هـ.

برهانه: لأن مربعي أ ب، أ جـ مثل مربع ب جـ، ومربع ب جـ مثل مربع جـ د، فمربعا أ ب، أ جـ مثل مربع جـ د. ومربع جـ د مثل مربعي أ جـ، أ د وضرب ضعف أ جـ في أ د. نلقي مربع أ جـ المشترك. يبقى مربع أ ب مثل مربع أ د وضرب ضعف أ جـ في أ د. وَ أ ب ضعف أ جـ، أ هـ مثل أ د. فمربع أ ب مثل مربع أ هـ وضرب أ ب في أ هـ. ولكن ضرب أ ب في أ هـ وَ أ ب في هـ ب مثل مربع أ ب. فمربع أ هـ وضرب أ ب في أ هـ مثل [١٦و] ضرب أ ب

في أ هـ و أ ب في هـ ب. ونلقي ضرب أ ب في أ هـ المشترك. فيبقى: مربع أ هـ مثل ضرب أ ب في هـ ب. فقد قسمنا خط أ ب على نقطة كما أردنا. وذلك ما أردنا أن نعمل.

تمت المقالة الثانية [والحمد لله حق حمده]

المقالة الثانية

في موازنة ختامية

تشتمل هذه المقالة، كما يعرضها الحجاج وهيث، على ١٤ قضية، أخذ منها النسوي بعشر فقط، وعلق النيريزي على ١٣ منها، تعليقات كلها إضافات مأخوذات من هيرن الإسكندري.

وقضايا هذه المقالة أكثرها جبرية. وقد ذكرنا في نهاية كل قضية العلاقة الجبرية التي تمثلها هذه القضية، وإليك هذه العلاقات كما يذكرها هيث في ١/٣٧٢.

١ ـ أ (ب + جـ + د + . . .) = أ ب + أ جـ + أ د + . . .

٢ ـ (أ + ب) أ + (أ + ب) ب = (أ + ب)^{٢}

٣ ـ (أ + ب) أ = أ ب + أ^{٢}

٤ ـ (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} + ٢ أ ب

٥ ـ أ ب + [(أ + ب)/٢ − ب)/]^{٢} = [(أ + ب)/٢]^{٢} أو: (م + ن) (م − ن) + ن^{٢} = م^{٢}

٦ ـ (٢أ + ب) ب + أ^{٢} أو: (م + ن) (م − ن) + ن^{٢} = م^{٢}

٧ ـ (أ + ب)^{٢} + أ^{٢} = ٢(أ + ب) أ + ب^{٢} أو: م^{٢} + ن^{٢} = ٢م ن + (م − ن)^{٢}

٨ ـ ٤(أ + ب) أ + ب^{٢} = [(أ + ب) + أ]^{٢} أي ٤ م ن + (م − ن)^{٢} = (م + ن)^{٢}

٩ ـ أ^{٢} + ب^{٢} = ٢ [(أ + ب/٢)]^{٢} + [(أ + ب)/٢ − ب]^{٢} أو (م + ن)^{٢} + (م − ن)^{٢} = ٢ (م^{٢} + ن^{٢})

١٠ ـ (٢أ + ب)^{٢} + ب^{٢} = ٢ [أ^{٢} + (أ + ب)^{٢}] أو: (م + ن)^{٢} + (ن − م)^{٢} =٢ (^{٢} + ن^{٢}).

وان من الدراسات الممتعة ان نتعقب تغير الخلفية الفكرية عند اقليدس (الحجاج) والنيريزي والنسوي من هندسية محضة تتكلم مثلاً عن المربع الكائن على خط ب جـ. إلى جبرية محضة تتكلم عن مربع ب جـ أي (ب جـ)^{٢}.

وقد جرد النسوي كتاب اقليدس من ثلاث مبرهنات هي المبرهنات ١٢، ١٣، ١٤. اما المبرهنة ١٢ فتتعلق بالضلع المقابل للزاوية المنفرجة في المثلث المنفرج الزاوية. وهي تتضمن المبرهنة ١/٣٧ عند النسوي.

وأما المبرهنة ١٣ فتتعلق بالضلع المقابل لوتر الزاوية الحادة في المثلث. واما المبرهنة ١٤ فتعلمنا كيف ترسم مربعاً يكافىء مثلثاً مفروضاً. والمبرهنات الثلاث اساسيات في هندسة اقليدس.