المقالةُ الثالثة

أ. التعريفات

ب. مُبرهنات الحجاج وإضافات النيريزي

ج. مُبرهنات النسوي

أ ـ التعريفات

المقالة الثالثة من كتاب أوقليدس في الأصول

بسم الله الرحمن الرحيم

(١): قال أوقليدس: الدوائر المتساوية هي التي أقطارها متساوية، أو الخطوط التي تخرج من مراكزها إلى الخطوط المحيطة بها متساوية.

Heath: Equal circles are those the diameters of which are equal, or the radii* of which are equal.

قال إيرن: هذا القول بيِّن، لأنه اذا كانت الأقطار متساوية، فإن الخطوط الخارجة من المراكز الى المحيطات تكون متساوية، لأن كل واحد من تلك الخطوط نصف القطر. وظاهر أنه اذا كانت الخطوط المستقيمة الخارجة من المراكز إلى المحيطات متساوية، فإن الدوائر تكون متساوية، لأن رسوم الدوائر تكون إنما بالبعد الذي بين المراكز والمحيطات، الذي هو نصف الأقطار.

قال النسوي: الدوائر المتساوية هي التي اقطارها متساوية.

(٢) قال اوقليدس: الخط المستقيم المماس للدائرة هو الذي اذا لامس الدائرة وأخرج في الجهتين جميعاً لم يقطع الدائرة.

قال النسوي: الخط المماس للدائرة هو الذي يلقاها ولا يقطعها إذا أخرج في كلتا الجهتين.

★ ليس في الاغريقية لفظة واحدة للدلالة على نصف القطر، ولفظة radius (جمعها radis) لاتينية اما العبارة الأغريقية فتقابل العبارة العربية «الخطوط التي تخرج من المركز إلى الخطوط المحيطة بها. وسنرى ان كلمة محيط (cireumference) تطلق على ما نسميه المحيط، وعلى القوس.

(٣) والدوائر التي تماسُّ بعضها بعضاً هي التي اذا ماسَّ بعضها بعضاً لم تتقاطع.

قال النسوي: والدوائر المتماسَّة هي التي تتلاقى ولا تتقاطع.

(٤) والخـطوط المستقيمة المتساوية البعد عن المركز هي التي الأعمدة الخارجة من المركز اليها متساوية.

قال النسـوي: ويقال ان أبعاد الأوتار من مركز الدائرة متساوية اذا كانت الأعمدة المخرجة اليها من المركز متساوية.

(٥) وأعظمها بعداً عن المركز هو الذي العمود الخارج اليه أعظم.

قال النسوي: والخط الذي يقال ان بعده عن المركز أعظم هو الذي يكون العمود الواقع عليه أعظم.

قال ايرن: إن الـرياضي [لقب لأقليدس] أراد أن يبين البعـد الذي بين المراكز وبين الخطوط المستقيمة المتباينة. لذلك ذكر الأعمدة. وذلك انه قد يمكن أن يخرج من كل نقطة إلى كل خط: خطوط كثيرة؛ فأما البعد الذي بين النقطة وبين الخط: فهو العمود الخارج من تلك النقطة إلى ذلك الخط.

(٦) قال اوقليدس: وقطعة الدائرة هي الشكل الذي يحيط به خط مستقيم وقطعة قوس من محيط الدائرة.

Heath: A sgment of a circle is the figure contained by a straight line and a circumference of a circle.

قال النسـوي: وقطعة الدائرة هي التي يحيط بها خط مستقيم وقوس من الخط المحيط. والنقطة التي تكون على منتصف قوس قطعة الدائرة يقال لها رأس القطعة.

(٧) وزاوية القطعة هي التي اذا علِّم على قوس القطعة نقطة ما، وأخرج منها إلى نهايتي قاعدة القطعة خطان مستقيمان: أحاطا بها.

قال النسوي: وتر القطعة يقال له قاعدة القطعة. والزاوية التي في قطعة الدائرة هي التي اذا علِّم على قوس القطعة علامة، وأخرج منها إلى نهاية قاعدة القطعة خطان: أحاطا بها.

● واذا كان في الدائرة خطوط، فكانت الأعمدة التي تخرج اليها من المركز متساوية [كانت أطوال الخطوط متساوية، واذا تساوت الأطوال] تتساوى أبعاد الخطوط من المركز.

● وأبعدها هو الذي عموده اطول.

● والقطعة من الدائرة يحيط بها خط مستقيم يقال له الوتر، وطائفة الخط المحيط يقال لها القوس.

● وزاوية القطعة يحيط بها خط الوتر وخط القوس.

● واذا جعلت نقطة على خط القوس وأخرج منها خطان إلى طرفي الوتر، فصار الوتر قاعدة لها، فإن الزاوية التي على النقطة، والخطان يحيطان بها: مركبة على القوس.

● والشكل الذي يقال له القطاع هو الذي يحيط به خطان يخرجان من المركز إلى الخط المحيط، والقوس التي بينهما.

● والزاوية التي يحيط بها الخطان مركبة على مركز الدائرة.

● وقطع الدوائر: اذا كانت زاويتا كل قطعة مساويتين لزاويتي القطعة الأخرى، فالقطع متساوية.

● واذا كانت القطع متساوية، فإن زاويتي كل قطعة مساويتان لزاويتي القطعة الأخرى.

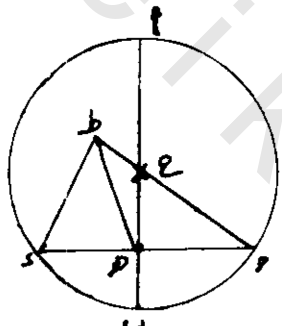
● واذا كانت زوايا القطع متساوية، فالقطع متساوية.

● واذا كانت القطع متساوية فالزوايا متساوية.

ب ـ مُبرَهنات الحجّاج وإضافات النيريزي

[المبرهنة ١/٣]

الشكل الأول من المقالة الثالثة



الشكل ١/٢

نريد ان نبين كيف نجد مركز دائرة مفروضة. فننزل انها دائرة أ ب، ونريد ان نبين كيف نجد مركزها. فنخرج فيها وتر جـ د حيث شئنا من الدائرة، ونقسمه بنصفين على نقطة هـ، كما بينا ذلك ببرهان ١٠/١. ونقيم على نقطة هـ عموداً. ونخرجه في كلتا الجهتين حتى ينتهي طرفاه إلى محيط الدائرة، كما بينا اخراجه ببرهان ١١/١. وليكن خط أ ب. ثم نقسم خط أ ب بنصفين على نقطة ح. فأقول ان نقطة ح مركز الدائرة، وانه لا يمكن ان يكون غيرها المركز، فان امكن ان غير نقطة ح هي المركز، فليكن مركزها نقطة ط.

ونخرج خطوط ط د، ط هـ، ط جـ. فلأن خط جـ هـ مثل خط هـ د، فانا اذا أخذنا هـ ط مشتركاً، يكون خطا جـ هـ، هـ ط مثل خطي د هـ، هـ ط. ولأن نقطة ط رسمت على انها مركز الدائرة، فيجب ان يكون خط ط جـ مثل خط ط د. فببرهان ٨/١ فإن زاوية جـ هـ ط مساوية لزاوية د هـ ط.

واذا قام خط مستقيم على خط مستقيم فكانت الزاويتان اللتان عن جنبتيه متساويتين، فان الخط القائم عمود عليه، وكل واحدة من الزاويتين قائمة. فزاوية

جـ هـ قائمـــة. لكن زاوية جـ هـ ط قد تبين انها هي القائمة. فزاوية جـ هـ ط العظمى مثل زاوية جـ هـ ح الصغرى.

هذا خلف لا يمكن. فليست نقـطة ط اذن بمركز للدائرة. وكذلك سائر النقط التي تفـرض في الـدائرة، حيث فرضت منها، غير ممكن ان تكون مركزاً للدائرة، سوى نقطة ح. ومعها قد تبين، من وجودنا لمركز الدائرة، ان كل وترين يقسم أحدهما الآخر بنصفين وعلى زوايا قائمة، فإن عليه يكون مركز الدائرة. وذلك ما أردنا ان نبين.

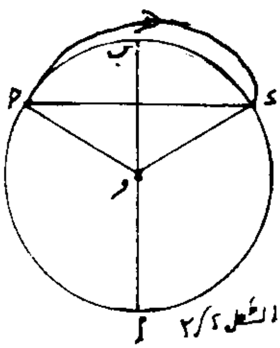
تبـين انـه لا يكون وتران في دائرة يقطع أحدهما الآخر بنصفين على زاوية قائمة، الا وهو يجوز على مركز الدائرة.

[المبرهنة ٢/٣]

الشكل الثاني من المقالة الثالثة

اذا فرض على محيط دائرة نقطتان، كيفما وقعتا، ووصل بينهما بخط مستقيم، فإن الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين يقع داخل الدائرة.

مثـالـه: انا نفرض على دائرة أ ب نقطتي جـ، د، ونخرج خط جـ د مستقيماً. فأقول انه وقع داخل دائرة أ ب.



الشكل ٢/٢

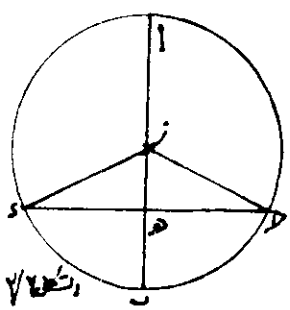
برهانه: انه غير ممكن ان يقع خارجاً عن الدائرة، فان أمكن فليقـع على مثال خط جـ هـ د ونطلب مركز الـدائـرة بحسب برهان الشكل الأول من هذه المقالة، وننزل انه نقطة و، ونصل بين نقطتي جـ، و ونقطتي و، د. ونخرج من نقطة و إلى محيط دائرة أ ب خطاً مستقيماً كيفما وقع، وننزل انه و ب، وننزل اننا قد أخذناه إلى نقطة هـ.

فان كان كما انزلنا ان خط جـ هـ د مستقيم، فمن البين ان مثلث جـ هـ د و متساوي الساقين لأن ساق جـ و مساوٍ لساق و د، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط. فزاوية و جـ هـ مثل زاوية و د هـ. وبحسب ١/٤٦ فإن زاوية و هـ جـ الخارجة من مثلث و د هـ أعظم من زاوية و د هـ الداخلة. فزاوية و هـ جـ إذن أعظم من زاوية و جـ هـ. لكن بحسب برهان ١/١٩ يكون ضلع و جـ الموتر الزاوية العظمى أعظم من ضلع هـ و الموتر للزاوية الصغرى. لكن خط و جـ مساوٍ لخط و ب. فخط و ب اذن أعظم من خط و هـ: الأصغر أعظم من الأعظم هذا خلف غير ممكن. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٣]

الشكل الثالث من المقالة الثالثة

اذا اجيز على مركز دائرة خط مستقيم، فقطع خطاً آخر مستقيماً، ليس على المركز، بنصفين، فإنه يقطعه على زوايا قائمة. وان قطعه [٣٦ أ] على زوايا قائمة، فإن يقطعه بنصفين.



مثاله: ان دائرة أ ب مركزها نقطة ز، وقد أجيز على ز خط أ ب. وقد قطع خط جـ د على نقطة هـ. فأقول: ان كان قطعه بنصفين، فإنه يقطعه على زوايا قائمة. وان قطعه على زوايا قائمة فانه يقطعه بنصفين.

برهـانه: انا ننزل اولاً انه قطعه بنصفين على نقطة هـ. ونخرج من نقطة ز، المركز، خطي ز جـ، ز د. فلأن خط جـ هـ مثل خط هـ د، ونأخذ خط هـ ز مشتركاً، فان خطي جـ هـ، هـ ز مثل خطي د هـ، هـ ز، وقاعدة جـ ز مثل قاعدة د ز، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط. فبحسب برهان ١/٨ تصير زاوية جـ هـ ز مساوية لزاوية د هـ ز.

وبحسب مصادرة اذا قام خط مستقيم على خط مستقيم، فكانت الزاويتان اللتان عن جنبتي الخط القائم متساويتين، فان كل واحدة من الزاويتين يقال لها قائمة، فزاويتا جـ هـ ز، د هـ ز: كل واحدة منهما قائمة. فقد تبين ان خط أ ب لما قطع خط جـ د بنصفين، قطعه على زوايا قائمة.

وننزل أيضاً ان خط أ ب قد قطع خط جـ هـ على نقطة هـ على زوايا قائمة. فأقول: انه قد قطعه بنصفين.

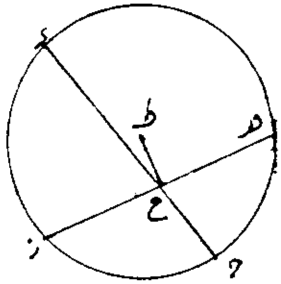
برهانه: ان مثلث جـ د ز متساوي الساقين: ساق ز د مثل ساق ز جـ، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط. فبحسب برهان ١/٥ إن زاوية ز جـ د مساوية لزاوية ز د جـ. وقد كنا بينا ان زاوية جـ هـ ز القائمة مثل زاوية د هـ ز. فزاويتا ز جـ هـ، ز هـ جـ مساويتان لزاويتي ز د هـ، ز هـ د. فبحسب برهان ١/٣٢ تبقى زاوية جـ ز هـ مساوية لزاوية د ز هـ. فاذا أخذنا خط ز هـ مشتركاً، فانه يكون ضلعا جـ هـ، ز هـ مساويين لضلعي د ز، ز هـ. وزاوية جـ ز هـ قد تبين انها مثل زاوية د ز هـ. فبحسب برهان ١/٤ تكون قاعدة جـ هـ مثل قاعدة د هـ. فقد تبين ان خط أ ب قد قطع خط جـ د بنصفين. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٤/ ٣]

الشكل الرابع من المقالة الثالثة

اذا تقاطع خطان في دائرة، على غير المركز، فإنهما لا يتقاطعان على أنصافهما.

مثاله ان خطي جـ د، هـ ز قد تقاطعا في دائرة أ ب على نقطة ح. وليس واحد منهما يجوز على المركز. فأقول انهما لم يتقاطعا على أنصافهما، وانه غير ممكن ذلك، فإن أمكن ان يجوزا على غير المركز ويقطع أحدهما الآخر بنصفين، . فليتقاطعا على أنصافهما، ولننزل ان موضع التقاطع نقطة ح. ونستخرج مركز دائرة أ ب، كما بين ذلك



الشكل ٤/٢

ببرهان ٣/١ وليكن نقطة ط. ونصل بين نقطتي ط، ح بخط مستقيم.

فمن أجل أنه قد خرج من نقطة ط، التي هي المركز، خط ط ح المستقيم، وقسم خط جـ د بنصفين. فبحسب برهان ٣/٣ فإن خط ط ح عمود على خط جـ د. فزاوية د ح ط إذن قائمة. وأيضاً فإن خط ط ح خرج من المركز إلى خط ز هـ وقسمه بنصفين على نقطة ح. فبحسب برهان ٣/٣ فإن خط ط ح عمود على خط هـ ز. فزاوية ز ح ط إذن قائمة. وقد تبين ان زاوية د ح ط أيضاً قائمة. فزاوية ز ح ط إذن مساوية لزاوية د ح ط: العظمى مثل الصغرى - هذا خلف.

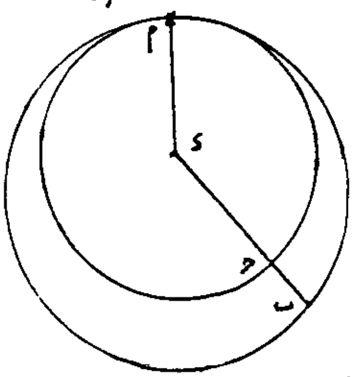
فقد تبين ان خطي جـ د، هـ ز لا يتقاطعان على أنصافهما على غير المركز. فقد بقي ان يكون تقاطعهما على المركز لأن الخطوط الخارجة من المركز إلى محيط الدائرة متساوية. وذلك ما أردنا ان نبين.

[٣/٥ تقابل ٣/٦ عن هيث]

الشكل الخامس من المقالة الثالثة

[٣٦ ب] اذا تماست دائرتان فانهما لا تكونان على مركز [واحد].

الشكل ٥/٣



مثاله: ان دائرتي أ ب، أ جـ قد تماستا على نقطة أ. فأقول انهما لا تكونان على مركز واحد.

برهانه: ان أمكن ان تكونا على مركز واحد فلننزل انهما على مركز د، ونخرج خط أ د، ونخرج من نقطة د خطاً إلى دائرة أ ب كيف اتفق، وليكن خط د ب. فمن أجل ان نقطة د مركز لدائرة أ جـ، فمن البين ان خط أ د مساوٍ لخط د جـ. وأيضاً فلأن نقطة د مركز لدائرة أ ب، وقد خرج منها خطان إلى المحيط، وهما خطا أ د، د ب، فخط أ د اذن مساوٍ لخط د ب. والمساوية لشيء

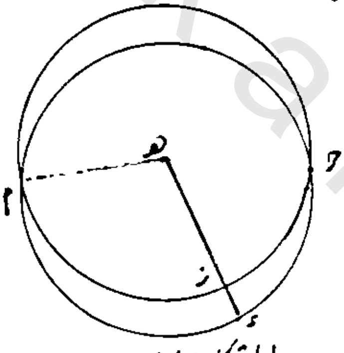
واحد فهي مساوية. فخط د ب اذن مساوٍ لخط د جـ: الأعظم مساوٍ للأصغر. هذا خلف غير ممكن. وذلك ما أردنا ان نبين.

ا[ألنيرزي]:
قال إيرن انما قدمنا المتماسَّة على المتقاطعة لأن المماسَّة قبل التقاطع.

[المبرهنة ٣/٦، تقابل ٣/٥ عند هيث]

الشكل السادس من المقالة الثالثة

اذا تقاطعت دائرتان، فإنهما ليستا على مركز واحد.



الشكل ٦/٢

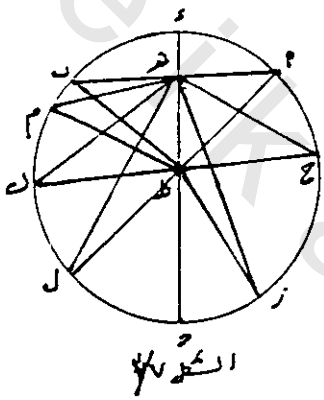
مثاله: ان دائرتي أ ز جـ، أ د جـ تقاطعتا على نقطتي أ، جـ. فأقول ان دائرتي أ ز جـ، أ د جـ ليستا على مركز واحد.

برهانه: انه ان امكن، فليكن مركزهما واحداً، وننزل أنه نقطة هـ، ونخرج من نقطة هـ إلى نقطة أ خط أ هـ. فمن البين انه قد انتهى إلى محيط الدائرتين جميعاً، ونخرج خط هـ د إلى محيط دائرة أ د جـ، كيف اتفق إخراجه. فمن أجل ان نقطة هـ مركز دائرة أ ز جـ، يكون خط هـ أ مساوياً لخط هـ ز، وأيضاً فمن أجل ان نقطة هـ مركز لدائرة أ د جـ يكون خط هـ أ مساوياً لخط هـ د. وقد تبين ان خط هـ أ مساوٍ لخط هـ ز. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فخط هـ د اذن مساوٍ لخط هـ ز: الأعظم مثل الأصغر. هذا خلف، غير ممكن. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٧/٣]

الشكل السابع من المقالة الثالثة

اذا فرض على قطر دائرة علامة ما، ليست مركز الدائرة، وأخرج من تلك العلامة إلى محيط الدائرة خطوط مستقيمة، فان أعظم الخطوط: الذي عليه مركز الدائرة، وأصغرها باقي القطر. وأما الخطوط الأخر، فما قرب منها من المركز، كان أعظم مما بعد منها عنه. وخطان [خطان] فقط عن جنبتي القطر متساويان.



الشكل ٧

مثالـه: ان دائرة أ ب جـ د، قطرها جـ د. ونفرض عليه نقطة لا تكون على المركز، ولتكن نقطة هـ، والمركز نقطة ط، ونخرج من نقطة هـ إلى محيط الدائرة: خطوطاً كم شئنا، وكيف وقعت، ولتكن خطوط هـ أ، هـ ح، هـ ز. فأقول: ان أطول هذه الخطوط كلها الخط الذي عليه المركز، وهو خط هـ جـ؛ وأقصرها خط هـ د. والباقية، فما قرب منها من نقطة ط فهو أعظم مما بعد عنها: أقول ان خط هـ ز أعظم من خط هـ ح، وخط هـ ح أعظم من خط هـ أ.

برهانه: أنا نخرج من نقطة ط خطوط ط ز، ط ح، ط أ. فمن أجل ان نقطة ط مركز، فإن خط ط ز مساوٍ لخط ط ح؛ ونأخذ خط هـ ط مشتركاً، فخطا هـ ط، ط ز مساويان لخطي هـ ط، ط ح؛ وزاوية هـ ط ز أعظم من زاوية هـ ط ح. فبحسب برهان ١/٢٤ فإن خط هـ ز أعظم من خط هـ ح.

لكن خط ط ز مساوٍ لخط ط جـ؛ فخط هـ ط مع خط ط ز مساوٍ لخط هـ جـ. وخط هـ ط مع خط ط ز أعظم من خط هـ ز، [٣٧ أ] وذلك ببرهان ١/٢٠، فخط هـ جـ أعظم من خط هـ ز. وقد تبين ان خط هـ ز أعظم من خط هـ ح. وبمثل هذا البرهان والاستشهاد يتبين ان خط هـ ح أعظم من خط هـ أ.

وأيضاً فان خطي أ هـ، هـ ط أعظم من خط أ ط. لكن خط أ ط مساوٍ لخط د ط. فإذن خطا أ هـ، هـ ط أعظم من خط د ط. فاذا اسقطنا خط هـ ط المشترك، بقي خط أ هـ أعظم من خط هـ د.

فقد تبين ان أطول هذه الخطوط كلها: خط هـ جـ الذي على المركز؛ وأصغرها تمام القطر، الذي هو خط هـ د؛ والباقي فما قرب من المركز أعظم مما بعد عنه: أعني قد تبين ان خط هـ ز أعظم من خط هـ ح، وخط هـ ح أعظم من خط أ هـ.

وأقول انه يخرج من نقطة هـ عن جنبتي القطر، الذي هو د جـ، إلى محيط الدائرة: خطان متساويان.

برهانه: انا نخرج من نقطة ط إلى قوس ط ك جـ خطوطاً مستقيمة مساوية لخطوط هـ أ، هـ ح، هـ ز، فنعمل على نقطة ط، من خط ط جـ: زاوية مثل زاوية أ ط هـ، كما بينا عمله ببرهان ١/٢٣ ولتكن زاوية ب ط هـ. ونعمل عليها أيضاً زاوية مثل زاوية هـ ط ح، وننزل انها زاوية ك ط هـ. وأيضاً زاوية مثل زاوية ز ط هـ، ولتكن زاوية ل ط هـ. ونخرج خطوط هـ ب، هـ ك، هـ ل. فمن أجل ان نقطة ط مركز الدائرة، فإن خطوط ط أ، ط ك، ط ل تكون متساوية.

ولأنا عملنا زواية ب ط هـ مساوية أ ط هـ. فانا اذا أخذنا خط ط هـ مشتركاً، يكون خطا هـ ط، هـ ب مساويين لخطي أ ط، ط هـ؛ وزاوية أ ط هـ مساوية لزاوية هـ ط ب. فبحسب برهان ١/٤ يكون خط أ هـ مساوياً لخط هـ ب.

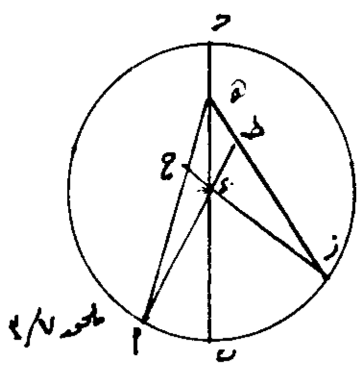
ونبين أيضاً أن خط هـ ك مساوٍ لخط هـ ح، لأنا عملنا زاوية هـ ط ك مساوية لزاوية ح ط هـ. فضلعا ح ط، ط هـ مساويان لضلعي ك ط، ط هـ؛ وزاوية ح ط هـ مثل زاوية ك ط هـ. فخط هـ ح مساوٍ لخط هـ ك.

وبمثل هذا البرهان والاستشهاد نبين ان خط ط ز مساوٍ لخط ط ل. فقد تبين ان خطين خطين عن جنبتي القطر متساويان. وذلك ما أردنا أن نبين.

واقول انه غير ممكن ان يخرج من نقطة هـ الى قوس د ك جـ خطوط مساوية هـ أ، هـ ح، هـ ز غير خطوط هـ ب، هـ ك، هـ ل. فإن أمكن فليخرج مثل خط هـ م. ونصل م ط. فخط ط م مساوٍ لخط ط أ لأنهما خرجا من المركز الى المحيط. فنأخذ خط هـ ط مشتركاً، فخطا م ط، ط هـ مساويان لخطي أ ط، ط هـ، وقاعدة هـ م مساوية لقاعدة هـ أ. فبحسب برهان ١/٨ تكون زاوية م ط هـ مساوية لزاوية أ ط هـ. لكنا عملنا زاوية ب ط هـ مساوية لزاوية أ ط هـ. فزاوية م ط هـ إذن مساوية لزاوية ب ط هـ: العظمى مثل الصغرى. هذا خلف غير ممكن.

وبمثل هذا البرهان نبين أنه لا يمكن [ان تخرج] الى قوس جـ ك د خطوط غير هـ ب، هـ ل، هـ ك تساوي خطوط هـ أ، هـ ح، هـ ز وذلك ما أردنا أن نبين.

قال ايرن: هذا الشكل قد بين فيه الرياضي ان الخطوط القريبة من المركز أعظم من البعيدة عنه، بأن صير الخطين في جهة واحدة من المركز. فإن فرض لنا خطان عن جنبتي المركز، أحدهما أقرب اليه من الآخر، فانا نبين أن أقربهما اليه أعظم من أبعدهما عنه بهذا العمل: [٣٧ ب] نفرض دائرة أ ب جـ، وقطرها ب جـ، ومركزها د. ونفرض على ب جـ نقطة هـ. ونخرج منها إلى المحيط [خطي] هـ أ، هـ ز. ونجعل هـ أ أقرب الى المركز من هـ ز. فأقول: ان هـ أ أعظم من هـ ز.



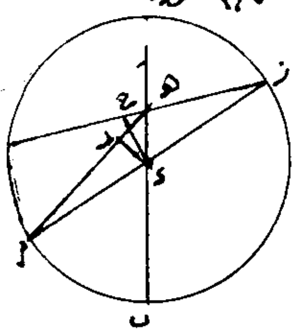
برهـانـه: انا نخرج من د عمودي د ح، د ط، وخطي د أ، د ز. فلأن أ هـ أقرب إلى المركز من ز هـ. فبحسب مصادرة هذه المقالة يكون عمود د ط أعظم من عمود د ح. فمربع خط د ط أعظم من مربع خط د ح. فمن أجل ان كل واحدة من زاويتي د ط هـ، د ح هـ. قائمة. فببرهان ١/٤٦ فإن مربع د ط مع مربع

ط هـ مساوٍ لمربع د هـ. وكذلك مربع د ح مع مربع ح هـ مساوٍ لمربع ي هـ فمربع د ط مع مربع ط هـ إذن مساوٍ لمربع د ح مع مربع ح هـ. ولكن مربع د ط قد تبين انه أعظم من مربع د ح. فيبقى ان مربع هـ ح أعظم من مربع هـ ط. فخط هـ ح إذن أعظم من خط هـ ط.

وأيضاً فلأن زاويتي أ ح د، ز ط د كل واحدة منها قائمة، فببرهان ١/٤٦ يكون مربع ز ط مع مربع ط د مساوياً لمربع د ز؛ ومربع أ ح مع مربع ح د مساوياً لمربع أ د. لكن خط أ د مساوٍ لخط د ز، لأنهما خرجا من المركز الى المحيط. فمربع أ ح إذن مع مربع ح د مساوٍ لمربع ز ط مع مربع ط د. وقد تبين ان مربع د ط أعظم من مربع د ح. فاذا اسقطناهما بقي مربع أ ح أعظم من مربع ز ط. فخط أ ح إذن أعظم من خط ز ط. وقد بينا ان خط هـ ح أعظم من خط هـ ط. فخط أ هـ إذن أعظم من خط هـ ز وذلك ما أردنا أن نبين.

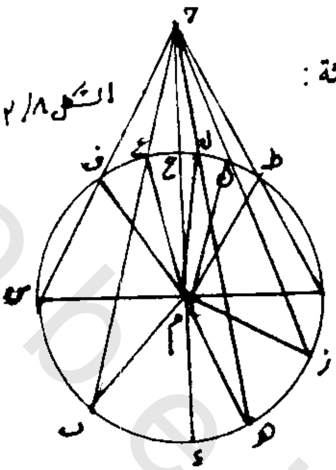
وقال ايرن أيضاً فإن كان الخط الذي يخرج من علامة د عموداً على خط هـ ز، لا يقع على خط هـ ز، لكن على الخط المتصل به على استقامة، كعمود د ح، فمن أجل ان خط د ز مساوٍ لخط د أ، لأنهما خرجا من المركز الى المحيط، ومربعي د ط، ط أ مساويان لمربع أ د، ومربعي د ح، ح ز مساويان لمربع د ز، فإن مربعي د ح، ح ز مساويان لمربعي د ط، ط أ لكن مربع ح ز أعظم من مربع د ط، فإذا أسقطناهما بقي مربع أ ط أعظم من مربع ح ز. فخط أ ط إذن أعظم من خط ز ح. فاذا أسقطنا من خط ح ز خط ح هـ؛ وزدنا على خط أ ط خط ط هـ، فمن البين ان جميع خط هـ أ أعظم من خط هـ ز بكثير. وذلك ما أردنا أن نبين.

٧/٢ ملحوظ؟



[المبرهنة ٨/ ٣]

الشكل الثامن من المقالة الثالثة:



اذا فرضت نقطة خارج دائرة، وأخرج منها الى الدائرة خطوط مستقيمة، أحدها يجوز على المركز، والأخر كيفما وقعت من محيط الدائرة، فإن أعظمها هو الذي يجوز على المركز، وأصغرها الذي يصل بين النقطة وبين القطر. أما الخطوط الأخر، فما كان منها يقطع الدائرة، ويلقى أخمصها، فإن ما قرب منها من قطر الدائرة فهو أعظم مما بعد عنها. وما كان منها لا يقطع الدائرة، ولكن يلقى حدبتها، فإن ما بعد عن القطر منها يكون أعظم مما قرب منه. وقد يخرج من تلك النقطة خطان [خطان] من التي تلقى أخمصها ومن التي تلقى حدبتها متساويان.

مثاله: انا نفرض دائرة أ ب، ونفرض نقطة جـ خارجها، ونخرج [٣٨ أ] خطوط جـ د، جـ هـ، جـ ز، جـ أ تقطع الدائرة وتلقى أخمصها، الذي هو قوس د أ؛ وخطوط جـ ط، جـ ك، جـ ل تلقى حدبتها التي هي قوس جـ أ؛ وخط جـ د يمر بنقطة م التي هي مركز الدائرة. فأقول: أن أعظمها من التي تقطع الدائرة: خط جـ د. والباقية فما قرب من خط جـ د فهو أعظم مما بعد عنه. وما بعد عن خط جـ د. من الخطوط التي تلقى حدبة الدائرة أعظم مما قرب منه. وأقصر الخطوط كلها خط جـ ح. وقد يخرج من نقطة جـ، عن جنبتي خط جـ د، الذي هو القطر: خطوط تقطع الدائرة وتلقى أخمصها، يكون خطان خطان من على جنبتي القطر متساويين.

برهانه: انا نخرج خطوط م أ، م ز، م هـ. فخطوط م أ، م ز، م هـ، م د متساوية لأنها خرجت من المركز إلى المحيط. ومن أجل ان كل مثلث فإن كل ضلعين من أضلاعه، اذا جمعا معاً كخط واحد، هو أعظم من الضلع الثالث،

فبحسب برهان ١/٢٠ من أ فإن خط جـ م مع خط م هـ أعظم من خط جـ هـ. لكن خط م د مساوٍ لخط م هـ. فخط جـ د إذن أعظم من خط جـ هـ. ولأن ضلعي جـ م، م هـ من مثلث جـ م هـ مساويان لضلعي جـ م، م ز من مثلث جـ م ز، وزاوية جـ م هـ بين أنها أعظم من زاوية جـ م ز، فبحسب برهان ١/٢٤ من أ تكون قاعدة جـ هـ أعظم من قاعدة جـ ز.

وكذلك نبين ان خط جـ ز أعظم من خط جـ أ. فقد تبين ان أعظم الخطوط جـ د، وان جـ هـ الأقرب الى جـ د أعظم من جـ ز الأبعد، وان جـ ز أعظم من جـ أ.

وأقول أيضاً ان خط جـ ط، الذي هو أبعد من خط جـ د، أعظم من خط جـ ك الأقرب، ج ك أعظم من جـ ل، وأقصرها كلها خط جـ ح.

برهانه: انا نخرج خطوط م ط، م ك، م ل. ومن أجل ان كل مثلث فان ضلعين من أضلاعه، كخط واحد، أعظم من الضلع الثالث، فإن م ل، جـ أعظم من م جـ. لكن م ل مثل م ح. فاذا أسقطناهما يبقى ل جـ أعظم من ح جـ.

ومن أجل ان مثلث م ك جـ قد خرج من طرفي ضلع من أضلاعه، وهو ضلع م جـ، خطان فالتقى طرفاهما على نقطة ل داخل المثلث، فإنه بحسب برهان ١/٢١ يكون خط م ل مع خط ل جـ أصغر من خط م ك مع خط ك جـ. لكن خط م ك مثل خط ك ل. فاذا اسقطناهما بقي خط جـ ك أعظم من خط جـ ل. وكذلك يتبين ان خط ج ط أعظم من خط ج ك. فقد تبين أن أعظم هذه الخطوط جـ ط، وأقصرها جـ ح. وان جـ ط أعظم من جـ ك، جـ ك أعظم من جـ ل، جـ ل أعظم من جـ ح.

وأقول أيضاً انه قد خرج من نقطة جـ خطوط عن جنبتي خط جـ د تقطع الدائرة، وتلقى أخمصها، كل خطين نظيرين فهما متساويان.

برهانه انا نعمل على نقطة م من خط جـ م زاوية مثل زاوية جـ م هـ، كما

بين عملها ببرهان ١/٢٣ . ولتكن زاوية جـ م ب فلأن خط م ب مساوٍ لخط م هـ، ونخرج خط جـ م مشتركاً، يكون خطا جـ م، م ب مساويين لخطي جـ م، م هـ؛ وزاوية جـ م ب عملت مساوية لزاوية جـ م هـ. فبحسب برهان ١/٤، تكون قاعدة جـ هـ مساوية لقاعدة جـ ب.

وكـذلـك لو أردنا ان نخرج خطين آخرين، يكون الذي يتلو خط جـ ب مساوياً لخط جـ ز، والرابع مساوياً لخط جـ أ، لعملنا على نقطة جـ من خط جـ م زاويتين مثل زاويتي جـ م ز، جـ م أ. ثم نصل بين نقطة م وبين طرف الخط الذي عملت الزاوية عليه [٣٨ ب] من محيط الدائرة. فأقول انه غير ممكن ان يخرج من نقطة جـ الى قوس د ب ح خط آخر مساوٍ لخط جـ هـ، غير خط جـ ب. ولا خط آخر مساوٍ للخطوط الأخرى، سوى الخطوط التي خرجت. فإن أمكن فليكن جـ س، ويخرج خط م س. فمن أجل ان خط م ب مساوٍ لخط م س، لأنهما خرجا من المركز، فانا اذا اخذنا جـ م مشتركاً يكون خط جـ م مع خط جـ ب مثل خط جـ م مع خط جـ س؛ وزاوية جـ م ب أعظم من زاوية جـ م س. فبحسب برهان ١/٢٤ يكون جـ ب أعظم من جـ س، وكنا فرضناهما متساويين. هذا خلف فليس يمكن اذن ان يخرج من نقطة جـ الى قوس د ب ح خط مستقيم مساوٍ لخط جـ ب، ولا لسائر الخطوط المساوية لخطوط جـ هـ، جـ ز، جـ أ.

وأقول أيضاً: وقد يخرج من نقطة جـ خطوط عن جنبتي خط جـ ح، تلقى حدبة الدائرة، ويكون كل خطين نظيرين عن جنبتي خط د ح، متساويين.

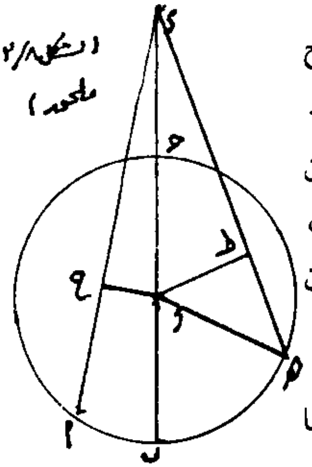
برهانه: انا نعمل على نقطة م من خط جـ م زاوية مثل زاوية جـ م ل، ولتكن زاوية جـ م ع؛ ونصـل جـ ع. فخط م ع مساوٍ لخط م ل، لأنهما خرجا من المركز، ونأخذ خط جـ م مشتركاً. فخطا ع م، جـ م مثل خطي ل م، م جـ، وزاوية ع م جـ عملت مساوية لزاوية ل م جـ. فقاعدة جـ ل مثل قاعدة جـ ع.

ويمثـل هذا العمـل نخرج من نقطة جـ الى تقبيبة س ح خطوطاً مساوية

لخطوط جـ ك، جـ ط. وأقول إنه غير ممكن ان يخرج من نقطة جـ إلى تقبيب س ح خط آخر مساوٍ لخط جـ ع. فإن امكن فليكن مثل خط جـ ف. ونصل بين نقطتي م، ف. فمن أجل ان مثلث جـ م ف قد خرج من طرفي ضلع من أضلاعه خطا جـ ع، م ع، والتقى طرفاهما داخل المثلث على نقطة ع، فمن البين، بحسب برهان ١/٢١ أن جـ ف مع خط ف م أعظم من خط جـ ع مع خط ع م. لكن خط م ف مساوٍ لخط م ع لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط. فاذا أسقطناهما، بقي خط جـ ف أعظم من خط جـ ع. وكنا فرضناهما متساويين. وهذا خلف غير ممكن. فقد تبين أنه لا يمكن ان يخرج من نقطة جـ خط يلقى تقبيب ح س مساوٍ لخط جـ ع، ولا لسائر الخطوط التي هي نظائر لخطوط جـ ل، جـ ك، جـ ط. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]:

قال ايرن: من أجل ان الرياضي برهن على هذا الشكل بأن صيَّر الخطوط في الجهة الواحدة، فينبغي ان نبرهن ببرهان آخر، كما فعلنا في الشكل المتقدم، فنقول إنه اذا فرض خطان مستقيمان عن جنبتي القطر، أحدهما أقرب الى المركز، والآخر أبعد عنه فإن أقربهما اليه يكون أعظم من أبعدهما.



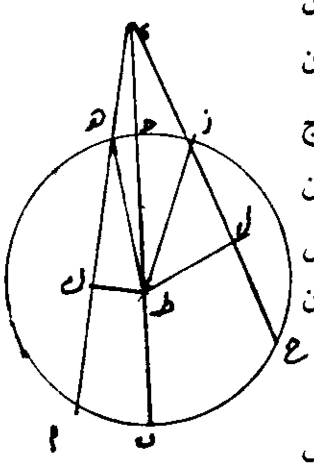
مثال: ذلك انا نفرض دائرة أ ب جـ، ونخرج قطرها، وهو خط ب جـ، على استقامة الى نقطة د. ونخرج من د الى دائرة أ ب جـ: خطين آخرين مستقيمين، عن جنبتي القطر، وهما خطا د أ، د هـ، وخط د أ أقرب الى المركز من خط د هـ. فأقول ان خط أ د أعظم من خط د هـ.

برهانه: انا نستخرج مركز الدائرة، كما بينا اخراجه ببرهان ١/٢ وليكن [٣٩ أ] نقطة ز. ونخرج من نقطة ز الى خطي أ د، د هـ عمودي ز ح، ز ط كما بين اخراجه ببرهان ١/٢.

فمن أجل ان خط أ د أقرب الى نقطة ز من خط د هـ، فان عمود ز ح أصغر من عمود ز ط. وأيضاً فمن أجل ان مربع خط د ح مع مربع خط ز ح مساوٍ لمربع خط د ز، وذلك بحسب برهان ٤٦/١ وكذلك مربع خط د ط مع مربع خط ط ز مساوٍ لمربع خط د ز. فمجموع مربعي د ح، ح ز مساوٍ لمجموع مربعي د ط، ط ز. لكن مربع خط ح ز أصغر من مربع خط ط ز. فاذا اسقطناهما بقي مربع خط د ح أعظم من مربع خط دِ ط. فخط د ح أعظم من خط د ط.

وأيضاً فإن خط أ ز مثل خط ز هـ لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط فيكون مجموع مربعي خطي ز ح، أ ح مساوياً لمربع خط أ ز. ومجموع مربعي خطي ز ط، ط هـ مساوٍ لمربع خط هـ ز. فمجموع مربعي خطي ز ط، ط هـ اذن مساوٍ لمجموع مربعي خطي ز ح، ح أ. لكن مربع خط ز ح أصغر من مربع خط ز ط. فاذا أسقطناهما، بقي مربع خط أ ح أعظم من مربع خط ط هـ. وكنا بينا أن خط د ح أعظم أيضاً من خط د ط. فخط د أ إذن أعظم من خط د هـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

ونبين أيضاً ان الخطوط التي تلقى تقبب الدائرة: ما كان منها أقرب إلى الخط الذي بين العلامة وبين القطر يكون أصغر مما كان أبعد عنه.



ونفعل ذلك أيضاً في خطين مستقيمين يكونان عن جنبتي الخط الذي بين العلامة والقطر. فننزل ان الدائرة دائرة أ ب جـ، وقطرها خط ب جـ. ونخرج خط ب جـ على استقامة الى نقطة د، ونخرج من نقطة د الى تقبب الدائرة خطي د هـ، د ز. ونجعل خط د هـ أقرب الى خط د جـ من خط د ز، فأقول ان خط د هـ أصغر من خط د ز.

برهانه: انا نخرج خطي د هـ، د ز الى أخمص الدائرة. فليخرجا إلى نقطتي أ، ح. ونطلب مركز

الدائرة، وهو نقطة ط. ونخرج من نقطة ط عمودي ط ك، ط ل، ونصل بين نقطتي ط، هـ ونقطتي ط، ز بخطي ط هـ، ط ز. فمن أجل ان زاوية د هـ ط خارج مثلث هـ ك ط، وزاوية هـ ك ط قائمة، فانه بحسب برهان ١/٥٦ تكون زاوية د هـ ط أعظم من زاوية هـ ك ط. فزاوية د هـ ط اذن منفرجة.

وكذلك نبين ان زاوية د ز ط منفرجة. فمثلثا د هـ ط، د ز ط منفرجا الزاوية. وكل زاوية منفرجة فان مربع الضلع الذي يوتر الزاوية المنفرجة مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من الضلعين المحيطين بالزاوية المنفرجة، مع ضعف السطح الذي يحيط به أحد الضلعين المحيطين بالزاوية المنفرجة الذي يقع على استقامة العمود، والخط الذي بين العمود وطرف الزاوية المنفرجة. وذلك بحسب برهان ٢/٢. فالمربعان الكائنان من ضلعي د هـ، هـ ط مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا د هـ، هـ ك: مساوٍ لمربع خط د ط. وكذلك مجموع مربعي خطي د ز، ز ط مع ضعف السطح يحيط به خطا د ز، ز ل مساوٍ لمربع خط د ط. فمجموع مربعي خطي د ز، ز ط مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا د ز، ز ل مساوٍ لمجموع مربعي خطي د هـ، هـ ط مع ضعف السطح الذي يحيط به خطا د هـ، هـ ك. فمن أجل ان هـ ك مساوٍ لخط ك أ، وخط ز ل مساوٍ لخط ل ح، وذلك بحسب برهان ٣/٢ فانه بحسب برهان ٣/١ يكون ضعف السطح الذي يحيط به خطا د هـ، هـ ك مساوياً للسطح الذي يحيط به د هـ، هـ أ. وكذلك ضعف السطح الذي يحيط به خطا د ز، ز ل مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا د ز، ز ح.

فالسطح الذي يحيط به خطا أ هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط د هـ: مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا ح ز، ز د مع المربع الكائن من خط د ز لكن بحسب برهان ٣/٢ فان السطح الذي يحيط به خطا أ هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط د هـ مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا أ د، د هـ. وكذلك السطح الذي [٣٩ ب] يحيط به خطا ح ز، ز د مع المربع الكائن من خط د ز

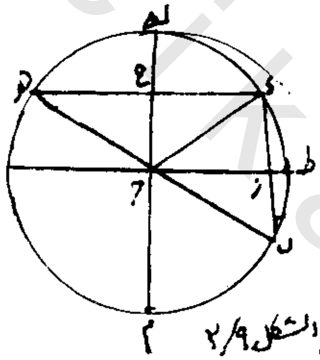
مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا ح د، د ز. فالسطح إذن الذي يحيط به خطا أ د، د هـ مساوٍ للسطح الذي يحيط به خطا ح د، د ز.

وقد بينا ان خط أ د أعظم من خط ح د، لأنه أقرب الى المركز. فخط د هـ اذن أصغر من خط د ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٩/٣]

الشكل التاسع من المقالة الثالثة

كل نقطة في داخل دائرة يخرج منها الى الخط المحيط بالدائرة اكثر من خطين، تكون كلها متساوية، فإن تلك النقطة مركز لتلك الدائرة.


الشكل ٩/٢

مثاله: ان في داخل دائرة أ ب نقطة جـ، وقد خرج منها إلى الخط المحيط بالدائرة اكثر من خطين، وهي كلها متساوية، وهي خطوط جـ ب، جـ هـ، جـ د. فأقول ان نقطة جـ مركز لدائرة أ ب.

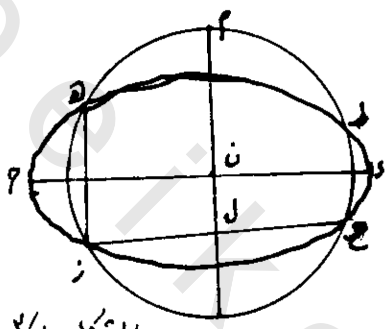
برهانه: انا نخرج خطي ب د، د هـ، ونقسم كل واحد منهما بنصفين، على نقطتي ز، ح. ونخرج خطي جـ ز، جـ ح، وننفذهما في الجهتين جميعاً إلى محيط الدائرة، وهما خطا أ ط، ك م. فمن أجل ان خط ب ز فصلناه مساوياً لخط ز د، فاذا أخذنا ز جـ مشتركاً، فان خطي جـ ز، ز ب مساويان لخطي جـ ز، ز د؛ وقاعدة جـ ب مساوية لقاعدة جـ د. فإنه بحسب برهان ١/٨، فإن زاوية جـ ز ب مساوية لزاوية جـ ز د؛ وكل واحدة منهما اذن قائمة. فبحسب ما تبين في وجود مركز الدائرة انه متى قسم خط ب د بنصفين وأخرج مثل خط أ ط عموداً على خط ب د فإن على خط أ ط يكون مركز الدائرة فمركز الدائرة إذن على خط أ ط.

ويمثل هذا البرهان وهذا الاستشهاد نبين ان مركز الدائرة على خط ك م.

فمن الظاهر ان المركز على النقطة التي عليها تقاطع خطا أ ط، ك م. فمركز الدائرة على نقطة جـ. فنقطة جـ إذن مركز للدائرة. وذلك ما أردنا أن نبين.

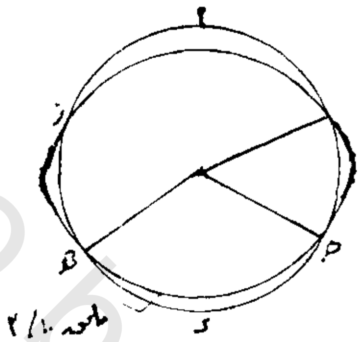
[المبرهنة ١٠/٣]

الشكل العاشر من المقالة الثالثة



الشكل ١٠/٢

لا يمكن ان تقاطع دائرة دائرة أخرى على أكثر من موضعين. فإن أمكن فلتقاطع دائرة أ ب: دائرة جـ د على أكثر من علامتين، وليكن على علامات هـ، ز، ح. ونخرج خطي هـ ز، ز ح، ونقسم كل واحد منهما بنصفين على نقطتي ك، ل. ونجيز على نقطتي ك، ل خطي أ ب، جـ د يقطعان خطي هـ ز، ز ح على زوايا قائمة. فبحسب ما تبين ببرهان ١١/١، فمن أجل ان خط ز ح في دائرتي أ ب، جـ د، وقد قسم بنصفين على علامة ل، واخرج عليه خط أ ل ب على زاوية قائمة، فبحسب ما بينا ببرهان ٩/٣ فان مركزي دائرتي أب، جـ د على خط أ ب. وأيضاً فإن خط هـ ز وقع في دائرتي أ ب، جـ د، وقد قسم بنصفين على نقطة ك، وأخرج خط جـ ك د على زوايا قائمة على خط هـ ز. فمركزا دائرتي أ ب، جـ د على خط جـ د. فمركزا الدائرتين على خطي أ ب، جـ د، . فهما اذن على الفصل المشترك للخطين، فهما على نقطة ن. فنقطة ن مركز لدائرتي أ ب، جـ د، وقد تبين ببرهان ٥/٣ ان كل دائرتين تتقاطعان فليس مركزاهما بواحد. فليس يمكن ان تقاطع دائرة أ ب دائرة جـ د الا في موضعين. وذلك ما أردنا ان نبين.

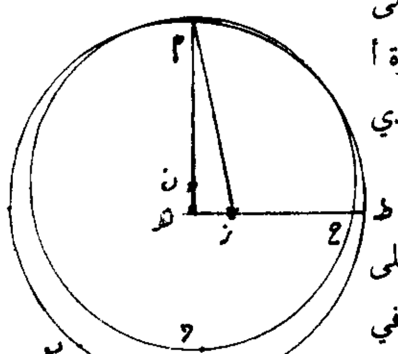


[٤٠ أ] قال ايرن: نبين هذا بالشكل التاسع فنقول: ان أمكن ان تقاطع دائرة دائرة على أكثر من علامتين فلتقاطع دائرة أ ب جـ د: دائرة ب جـ هـ ز على أكثر من علامتين، أعني على علامات ب، جـ، هـ، ز. ونستخرج مركز دائرة أ ب جـ د، كما تبين إخراجه ببرهان ٣/١ ونفرضه على علامة ط، ونخرج خطوط ط ب، ط جـ، ط هـ. فمن أجل ان نقطة ط مركز أ ب جـ د فإن خطوط ط ب، ط جـ، ط هـ تكون متساوية. ولأن نقطة ط داخل دائرة ب جـ هـ، وقد خرج منها إلى محيطها خطوط متساوية، أكثر من خطين، فبحسب برهان ٣/٩ تكون نقطة ط مركزاً لدائرة ب جـ هـ ز. وهي أيضاً مركز لدائرة أ ب جـ د. فدائرتان اذن تتقاطعان مركزاهما نقطة واحدة. هذا خلف، لأنا قد بينا ببرهان ٣/٥ ان هذا غير ممكن وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/١١]

الشكل الحادي عشر من المقالة الثالثة

كل دائرتين تتماسان فالخط الذي يجوز على مركزيهما يقع حيث تتماسان.

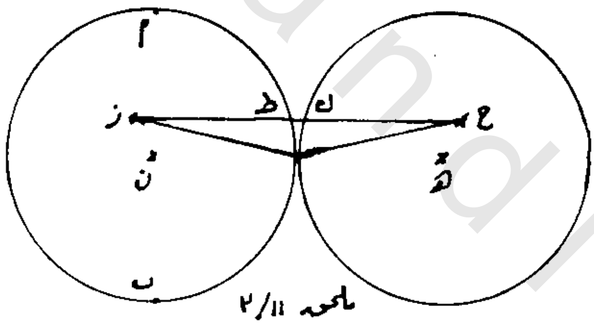


مثاله: ان دائرتي أ ب، أ جـ تتماسان على نقطة أ. ومركز دائرة أ ب نقطة هـ. ومركز دائرة أ جـ نقطة ن. فأقول ان الخط المستقيم الذي يجوز على نقطتي هـ، ن يقع على نقطة أ.

لا يمكن غيره. فان أمكن ان يجوز على مركزيهما ويقع على غير نقطة التماس فليقع [في وضع] كخط هـ ز ح ط ونخرج خطي أ هـ، أ ز. فبحسب برهان ١/٢٠ يكون ضلعا أ ز، ز هـ مجموعين أعظم من ضلع أ هـ. لكن خط أ ز مساوٍ لخط ز ح لأنهما خرجا من

المركز إلى المحيط؛ ونجعل خط هـ ز مشتركاً. فخط هـ ح اذن أعظم من خط هـ أ. وخط هـ أ مثل خط هـ ط، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط. فخط هـ ح إذن أعظم من خط هـ ط: الأصغر أعظم من الأعظم. هذا محال. فقد ظهر ان الخط الذي يجوز على نقطتي هـ، ن ليس يقع على موضع آخر غير نقطة أ، وذلك ما أردنا ان نبين.

قال ايرن: ان الرياضي فرض في هذا الشكل الدائرتين متماستين من داخل. فنبين نحن ذلك ان كانت المماسة من خارج. فلنفرض دائرتي أ ب، جـ د تتماسان على نقطة جـ. وليكن مركز دائرة أ ب نقطة ن، ومركز دائرة جـ د نقطة هـ. فاقول ان الخط المستقيم الذي يجوز على نقطتي هـ، ن يمر بنقطة جـ.



برهانه: انه لا يمكن غيره، فإن امكن فليكن الخط الذي يمر بنقطتي هـ، ن لا يجوز على نقطة جـ، ولكن ليمر بموضع آخر كخط ز ط ك ح ونخرج خطي جـ ز، جـ ح*. فيحدث مثلث جـ ز ح. فبحسب برهان ١/٢٠ يكون ضلعا ز جـ، جـ ح مجموعين أعظم من ضلع ز ح. لكن خط جـ ح مساوٍ لخط ح ك، وخط ز ط مساوٍ لخط ز جـ. فمجموع خطي ز جـ، جـ ح مساوٍ لمجموع خطي ح ك، ز ط، فإذن مجموع خطي ح ك، ز ط أعظم من خط ز ح: الأصغر أعظم

★ على اعتبار ان ز، ح هما مركز الدائرتين. ويلاحظ ان هذا الحل هو المبرهنة ١٥/٣ عند هيث ـ المحقق.

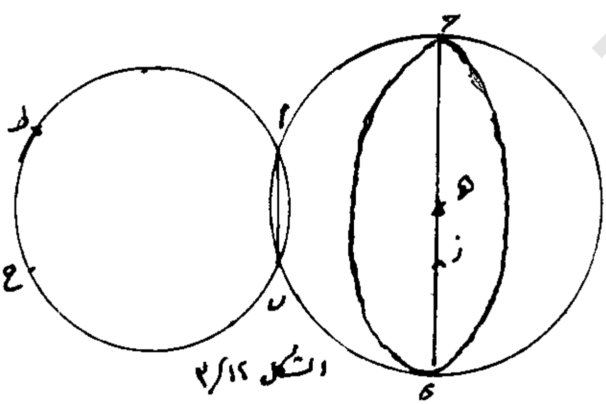
من الأعظم. هذا محال. فالخط المستقيم اذن الذي يجوز على نقطتي هـ، ن، اللتين هما المركزين ليس يمكن ان يجوز على موضع من المواضع إلا على نقطة جـ، الموضع الذي عليه تماس الدائرتين. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/١٢ تقابل ٣/١٣ عند هيث]

الشكل الثاني عشر من المقالة الثالثة

[٤٠ ب] لا تماس دائرة دائرة أخرى على أكثر من علامة، من داخل كانت المماسة، أو من خارج. فإن أمكن ان تتماس دائرتان على أكثر من علامة واحدة فلتتماسا: إما من داخل فدائرتا أ ب، جـ د على نقطتي جـ، د؛ وأما من خارج فدائرتا أ ب، ط ح على نقطتي أ، ب. فلنبرهن على اللتين قد تماستا من داخل. فننزل ان مركز دائرة أ ب نقطة هـ، ونقطة مركز جـ د نقطة ز. فالخط الذي يجوز على نقطتي هـ، ز، بحسب ما قد تبين ببرهان ٣/١١، يقع حيث تماس الدائرتان. فليكن كخط جـ هـ ز د. فمن أجل ان نقطة هـ مركز لدائرة، وقد خرج منها إلى المحيط خطا هـ جـ، هـ د، فهما متساويان. فخط هـ جـ إذن أعظم من ز د. فخط جـ ز إذن أعظم من ز د بكثير.

وأيضاً فانا فرضنا نقطة ز مركزاً لدائرة جـ د. فخط ز جـ مساوٍ لخط ز د. فخط ز جـ الأعظم إذن مساوٍ لخط ز د الأصغر. هذا خلف غير ممكن. فليس يمكن ان تماس دائرة دائرة الا على نقطة واحدة.

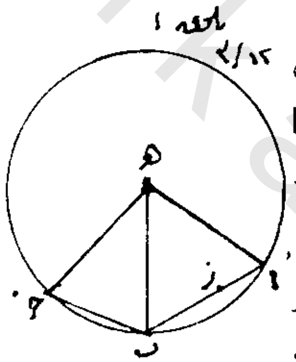


الشكل ١٢/٢

هذا اذا كانت المماسة من داخل. ونبين أيضاً انه ولا اذا كانت المماسة

من خارج يمكن ان تتماسا إلا على نقطة واحدة:

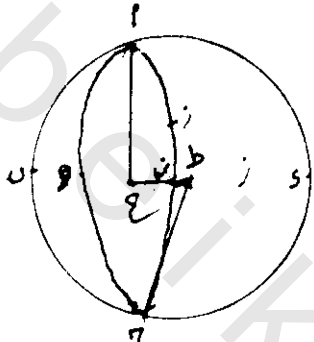
برهانه: انه ان أمكن ان تماس دائرة أ ب دائرة ح ط على أكثر من نقطة فلتتماسا على نقطتي أ، ب. فمن الظاهر، بحسب برهان ٢/٤ ان الخط المستقيم الذي يصل بين نقطتي أ، ب يقع داخل دائرة أ ب. فليقع كخط أ ب. ومن أجل ان على محيط دائرة ح ط نقطتي أ، ب، فبحسب برهان ٢/٤ فان الخط المستقيم الذي يصل بينهما يقع داخل دائرة ح ط. وقد وقع خارجاً منها. هذا خلف غير ممكن. فليس تتماس دائرتان من خارج الا على نقطة. وذلك ما أردنا أن نبين.



قال ايرن: نقدم مقدمة نحتاج اليها في الشكل ١٢/٢ الثاني عشر: [أي] خط مستقيم لا يقطع محيط [أي] دائرة على أكثر من علامتين. فان أمكن فليقطع خط أ جـ المستقيم دائرة د أ جـ على أكثر من علامتين، أعني على علامات أ، ب، جـ. ونستخرج مركز الدائرة كما بين استخراجه ببرهان ٣/١. وليكن نقطة هـ. ونصل خطوط هـ أ، هـ ب، هـ جـ. فمن أجل ان خط أ ب جـ خط واحد مستقيم، وزاوية هـ ب أ خارج مثلث هـ ب جـ، فانه، بحسب برهان ١/٤٦، تكون زاوية هـ ب أ أعظم من زاوية هـ جـ ب. لكن زاوية هـ ب أ مساوية لزاوية هـ أ ب، وذلك بين بحسب برهان ١/١٥. فزاوية هـ أ ب إذن أعظم من زاوية هـ جـ ب. ولأن ضلع هـ جـ مساوٍ لضلع هـ أ، فانه بحسب ١/٥ تكون زاوية هـ أ ب مساوية لزاوية هـ جـ ب. وقد كانت أعظم منها. هذا خلف غير ممكن. فاذن خط مستقيم لا يقطع محيط دائرة على أكثر من علامتين. وذلك ما أرنا أن نبين.

فإن قال قائل ان مركز الدائرة يمكن ان يكون على خط أ ب، فعند ذلك

نقول انه ان أمكن، فليكن على علامة ز. فمن أجل ان علامة ز مركز دائرة أ ب جـ د، فان خط أ ز مساوٍ لخط ز ب. وأيضاً فإن خط ز أ مساوٍ لخط ز ب جـ. فخط ز ب جـ إذن مساوٍ لخط ز ب. فاذن خط جـ ب ز الأعظم مساوٍ لخط ز ب الأصغر. وذلك غير ممكن. فإذن خط مستقيم لا يقطع محيط دائرة على أكثر من علامتين. وذلك ما أردنا أن نبين.



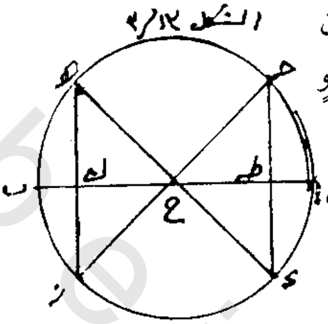
١٢/٢، مخطوط

[٤١ أ] قال ايرن أيضاً: في الشكل الثاني عشر ان أمكن أن يتماس دائرتان على أكثر من علامة واحدة، فلتتماس دائرتا أ ب جـ د، أ هـ جـ ز، من داخل، على أكثر من علامة، أعني على علامتي أ، جـ. وليكن مركز دائرة أ هـ جـ ز، كما بين إخراجه ببرهان ٣/١ وليكن نقطة ح. ومركز دائرة أ ب جـ د ننزل أنه خارج دائرة أ هـ جـ ز على علامة ط. فنقول ان المركز لا يقع خارجاً. فإن أمكن فانا نصل بين نقطتي ح، ط، اللتين هما المركزان بخط ح ط. فمن البين بحسب برهان ٣/١ أن خط ح ط اذا أخرج في جهتين جميعاً فإنه يجوز على مواضع المماسة. فهو إذن يجوز على نقطتي أ، جـ. فلنخرجه. فيصير اذن وضع هذا الخط كوضع خط أ ح ز ط جـ. فخط أ ح ز ط جـ يقطع دائرة أ هـ جـ ز على أكثر من علامتين. وقد بينا ان ذلك غير ممكن. فليس يقع مركز دائرة أ ب جـ د خارج دائرة أ هـ جـ ز.

وبمثل هذا يتبين انه لا يقع على قوس أ ز جـ. فإن أمكن، فليكن مثل نقطة ز. فخط أ ح ز جـ خط واحد مستقيم يقطع محيط دائرة أ هـ جـ ز على أكثر من علامتين، أعني على علامات أ، ز، جـ. وذلك غير ممكن. فغير ممكن إذن ان يقع مركز دائرة أ ب جـ د على محيط دائرة أ هـ جـ ز. وقد بينا أنه لا يقع أيضاً خارجها. فإذن يقع داخلها، كما قال الرياضي. وذلك ما أردنا أن نبين.

[٣/١٣ تقابل ٣/١٤ عند هيث]

الشكل الثالث عشر من المقالة الثالثة



الخطوط المتساوية في دائرة، فإن بعدها من المركز متساوٍ. والخطوط التي بعدها من المركز متساوٍ هي متساوية.

مثاله: انه وقع في دائرة أ ب: خطا جـ د، هـ ز، وهما متساويان. فأقول ان بعدهما من المركز متساوٍ.

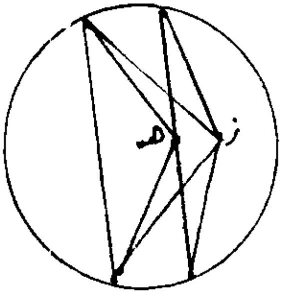
برهانه: انا نستخرج مركز الدائرة، كما بين إخراجه ببرهان ٣/١ وليكن نقطة ح. ونخرج خطوط ح جـ، ح د، ح هـ، ح ز. ونخرج من نقطة ح الى خطي جـ د، هـ ز: عمودي ح ط، ح ك كما بين إخراجهما ببرهان ١/٢ فمن أجل أنه وقع في دائرة أ ب خطا جـ د، هـ ز، وقد خرج من المركز اليهما عمودا ح ط، ح ك. فبين ببرهان ٣/٣ أنهما يقطعان خطي جـ د، هـ ز بنصفين.

فخط ط جـ مثل خط ط د؛ هـ ك مثل ك ز. فمن أجل ان ضلع ح جـ مثل ضلع ح هـ؛ وضلع د جـ مثل ضلع ز هـ؛ وقاعدة ح د مساوية لقاعدة ح ز، فإنه بحسب برهان ١/٨ تكون زاوية د جـ ح مساوية لزاوية ز هـ ح. ومن أجل ان خط جـ د مثل خط هـ ز، فإن انصافهما متساوية. فخط جـ ط إذن مساوٍ لخط هـ ك، ح جـ مثل ح هـ. وقد تبين ان زاوية ط جـ ح مساوية لزاوية ح هـ ك. فبحسب برهان ١/٤ تكون قاعدة ح ط مساوية لقاعدة ح ك. وهما عمودان على خطي جـ د، هـ ز، فهما إذن بعدا خطي جـ د، هـ ز من نقطة ح التي هي مركز دائرة أ ب. فبعدا خطي جـ د، هـ ز من المركز متساويان. وذلك ما أردنا أن نبين.

وأقول أيضاً اذا كان بعدا خطي جـ د، هـ ز من المركز: بعداً متساوياً، فانهما متساويان.

برهـانه: من أجل ان الأبعاد التي للخطوط من المراكز هي أعمدة على الخطوط. وخطا ح ط، ح ك قد خرجا من المركز، وهما عمودان على خطي جـ د، هـ ز. فهما اذن البعدان، وهما متساويان. فمن أجل ان خطي ح ط، ح ك خرجا من نقطة ح، التي هي المركز، الى خطي جـ د، هـ ز، وقطعاهما على زوايا قائمة، فبحسب ببرهان **٣/٣**، فان كل واحد منهما يقطع خط جـ د [أو] هـ ز بنصفين، على نقـطتي ط، ك. فخط د جـ مثـلا ضعف خط جـ ط؛ وخط ز هـ مثـلا خط ك هـ. فلأن زاويتي ح ط جـ، ح ك هـ كل واحدة منهما قائمة فإنه بحسب برهان **١/٤٥** يكون مجموع مربعي خطي جـ ط، ط ح مساوياً لمربع خط ح جـ. وكذلك مجموع مربعي خطي ح ك، ك هـ يساوي مربع خط هـ ح. ولأن خطي ح جـ، ح هـ متساويان، لأنهما خرجا من المركز الى المحيط؛ فيكون مجموع مربعي خطي جـ ط، ط ح مساوياً لمجموع مربعي خطي هـ ك، ك ح. لكن مربع خط ح ط مساوٍ لمربع خط ح ك. فاذا أسقطناهما، بقي مربع خط ط جـ مساوياً لمربع خط ك هـ. فخط ط جـ إذن مساوٍ لخط ك هـ. وكنا بينا ان خط د جـ ضعـف خط ط جـ، وخط د هـ ضعـف خط ك هـ. والأشياء التي هي أضعاف متساوية لأشياء متساوية، فهي متساوية. فخط د جـ إذن مساوٍ لخط ز هـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

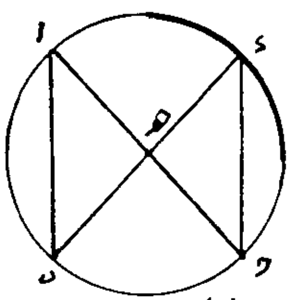
١٤/٢، ملحق ١



[٤١ ب] أما زيادة ايرن في هذا الشكل فإنه بين ان مركز الدائرة يقع بين خطي هـ ز، جـ د؛ ورسم لذلك صورة دائرة أ ب جـ د، وأخرج فيها خطي أ ب، جـ د، وهما متساويان. فقال ان مركز هذه الدائرة يقع بين خطي أ ب، جـ د، لا يمكن غيره. فإن أمكن فليقع أولاً على أحد خطي أ ب، جـ د: فلننزل انه

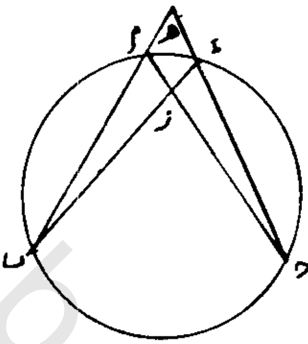
وقع على خط جـ د، على نقطة هـ. ونخرج خطي هـ أ، هـ ي. خط أ هـ مساوٍ لخط هـ د، وخط ب هـ مساوٍ لخط هـ جـ. لكن بحسب برهان ١/٢٠ فان مجموع خطي أ هـ، هـ ب، كخط واحد: أعظم من خط أ ب، فخط جـ د اذن أعظم من خط أ ب. وكنا فرضناهما متساويين. هذا خلف.

وبمثل هذا نبين انه ولا يمكن ان يقع على خط أ ب. فإذن ليس مركز دائرة أ ب جـ د على أحد خطي أ ب، جـ د. فأقول أيضاً انه ولا خارجاً عن خطي أ ب، جـ د. فإن أمكن، فليكن خارجاً عن خط جـ د. وننزل انه نقطة ز. ونخرج خطوط ز د، ز جـ، ز أ، ز ب. فمن أجل ان نقطة ز مركز الدائرة، فإن الخطوط الخارجة منها الى المحيط متساوية. فخطا ز أ، ز ب مثل خطي ز د، ز جـ؛ وقاعدة أ ب مساوية لقاعدة د جـ. فبحسب برهان ١/٨ تكون زاوية أ ز ب مساوية لزاوية د ز جـ: الأصغر مساوية للأعظم. هذا خلف. وبمثل هذا البرهان نبين انه غير ممكن ان يقع أيضاً خارج خط أ ب. فقد تبين ان مركز دائرة أ ب جـ د ليس يقع الا فيما بين خطي أ ب، جـ د. وذلك ما أردنا أن نبين.



وبيَّن أيضاً إيرن ان مركز دائرة أ ب جـ د يقع بين خطي أ ب، جـ د المتساويين بغير طرق الخلف. فقال: ليس يخلو من ان يكون خطا أ ب، جـ د متوازيين أو غير متوازيين. فلننزل انهما متوازيان أولاً. ونصل بين خطي أ ب، د جـ بخطي أ جـ، د ب. فالزوايا المتبادلة اذن متساوية. فزاوية أ مساوية لزاوية جـ، وزاوية د مساوية لزاوية ب؛ وقاعدة أ ب مساوية لقاعدة د جـ. فبحسب برهان ١/٢٦ يكون ضلع أ هـ مساوياً لضلع هـ جـ، وضلع هـ ب مساوياً لضلع هـ د. فخطا أ جـ، ب د تقاطعا على أنصافهما على نقطة هـ. فتبين ببرهان ٣/٤ ان مركز الدائرة على خطي أ جـ، ب د. فالمركز اذن نقطة هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

ونُنزل أيضاً ان خطي أ ب ، جـ د غير متوازيين ، ونخرجهما على استقامة حتى يلتقيا . فليلتقيا على نقطة هـ . ونخرج خطي أ جـ ، ب د يتقاطعان على نقطة ز . ونخرج خط هـ ز ح . فأقول : ان مركز الدائرة على خط هـ ح .



٢/١٢ ملحق ٢

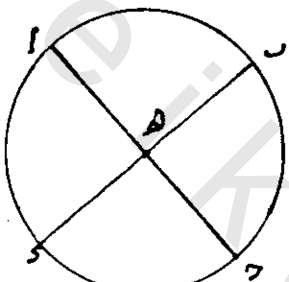
برهانه : من أجل ان زاوية ب أ جـ مساوية لزاوية ب د جـ ، لأنهما في قطعة واحدة ، ويوترهما قوس واحدة ، وهي قوس ب د جـ .

(ومثل هذه الأشكال يستشهد بها ، وان كانت مرسومة من بعده لأنه ليس فيها مقدمات تتلو هذا الشكل ، ولا هذا الشكل من الأوائل لذلك الشكل . لكن أوائل ذلك الشكل مأخوذة من المقالة الأولى ، ومن الشكل الأول من هذه المقالة . فمن أجل ذلك لما احتاج ايرن إلى حل هذه الشكوك ، جعل الشكل العشرين من هذه المقالة : أولاً لهذا الشكل الثالث عشر ، فقال) :

من أجل ان زاوية ب أ جـ مساوية لزاوية ب د جـ ، وزاوية أ ب د مساوية لزاوية أ جـ د ، لأنهما أيضاً في قطعة أ ب جـ د ، ويوترها قوس واحدة وهي قوس أ د ، وضلع أ ب مساوٍ لضلع جـ د ، فان بحسب ١/٢٦ [٤٢ أ] يكون خط أ ز مساوياً لخط ز د . وأيضاً من أجل ان زاوية د ب جـ مساوية لزاوية أ جـ ب لأنهما في قطعة أ د جـ ب ويوترهما قوسا أ ب ، د جـ المتساويان ، وقد تبين ان زاوية د جـ أ مثل زاوية د ب أ ، فإن زاوية د جـ ب بأسرها مساوية لزاوية أ ب جـ بأسرها فإذن ، بحسب برهان ١/٣ يكون مثلث هـ جـ ب متساوي الساقين : ساق هـ جـ مثل ساق هـ ب . وقد فرضنا د جـ مثل أ ب ، فيكون هـ د الباقي مثل هـ أ .

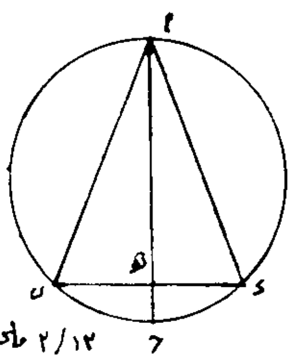
وأيضاً من أجل ان زاوية هـ أ جـ مساوية لزاوية هـ د ب ، وذلك بحسب برهان ١/٢٦ ، وضلعا هـ د ، د ز مثل ضلعي هـ أ ، أ ز ، فبحسب برهان ١/٤ تكون زاوية د هـ ز مساوية لزاوية أ هـ ز .

فخط هـ ب إذن مساوٍ لخط هـ جـ؛ وزاوية ب هـ ط قد تبين انها مساوية لزاوية جـ ب ط؛ ونأخذ خط هـ ط مشتركاً؛ وضلعا جـ هـ، هـ ط مساويان لضلعي ب هـ، هـ ب ط وزاوية هـ ط مساوية لزاوية جـ هـ ط فقاعدة ب ط مساوية لقاعدة جـ ط؛ وزاوية هـ ط ب مساوية لزاوية هـ ط جـ. فهما اذن قائمتان. فخط ب جـ قد وقع في دائرة أ ب جـ د، وقد جاز عليه خط هـ ط، وقسمه بنصفين، وعلى زوايا قائمة. فبحسب برهان ٣/٤ فإن على خط هـ ط يكون مركز الدائرة، وذلك ما أردنا أن نبين.



٢/١٢ مأخوذ ٤

وقال أيضاً: فإن قال قائل ان الخطين المتساويين يتقاطعان داخل دائرة أ ب جـ د، على علامة هـ، كخطي أ جـ، ب د، فإنا نقول ان المركز لا يخلو من ان يكون على تقاطع خطي أ جـ، ب د، المشترك لهما، أعني علامة هـ، أو على غيرها. فإن وقع على علامة هـ، فهو إذن بين خطي أ جـ، ب د، وقد انحل المطلب. وقد بينا انه لا يقع على أحد خطي أ ب، جـ د. فإن قال قائل: إنا نفرض خطي أ ب، جـ د غير متقاطعين في داخل دائرة أ ب جـ د، لكن متلاقيين على محيطها كخطي أ ب، أ د: فانا نبين ان مركز دائرة أ ب جـ د بين خطي أ ب، أ د؛ فنخرج خط ب د، ونقسمه بنصفين على علامة هـ. ونخرج أ هـ، ونخرجه إلى محيط الدائرة، الى نقطة جـ فأقول ان مركز الدائرة على خط أ جـ.



٢/١٢ مأخوذ ٥

برهانه: ان مثلث أ ب د متساوي الساقين. فبحسب برهان ١/٥ تكون زاوية أ ب د مساوية لزاوية أ د ب. وكنا فرضنا خط أ ب مثل خط أ د، وفصلنا ب هـ مثل هـ د، فضلعا أ د، د هـ مثل ضلعي أ ب، ب هـ، وزاوية ب مثل زاوية د. فمثلث أ هـ د مثل

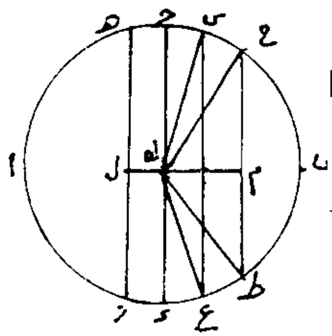
مثلث أ ب هـ، وزاوية أ هـ ب مثل زاوية أ هـ د، فقد جاز خط أ د على خط ب د، وقسمه بنصفين على نقطة هـ، وعلى زوايا قائمة. فبحسب برهان ٣/٣ فإنه على خط أ جـ يكون مركز الدائرة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/١٤ تقابل ١٥/ عند هيث]

الشكل الرابع عشر من المقالة الثالثة

الخطوط المستقيمة الواقعة في دائرة: أعظمها قطر الدائرة. والباقية فما كان منها أقرب الى المركز فهو أعظم مما بعد عنه.

مثاله: ان دائرة أ ب وقع فيها خطوط جـ د، هـ ز، ح ط: وخط جـ د قطر الدائرة، وخط هـ ز أقرب الى المركز من خط ح ط. فأقول: ان أعظمها خط جـ د؛ وخط هـ ز أعظم من خط ح ط



الشكل ٣/١٤

برهانه: انا ننزل ان المركز نقطة ك [٤٢ ب] ونخرج منها إلى خطي هـ ز، ح ط عمودي ك ل، ك م، كما بينا ببرهان ١/١٢. فمن أجل ان خط هـ ز أقرب الى المركز من خط ح ط، فإن عمود ك م أعظم من عمود ك ل. فنفصل من خط ك م مثل خط ك ل، كما بين ببرهان ١/٢، وليكن خط ك ن. ونجيز على نقطة ن خط س ن ع موازياً لخط ط ح، كما بين ببرهان ١/٣١. فخط ك ن عمود على خط س ع. واذا كانت أبعاد الخطوط من المركز متساوية، فان الأعمدة التي تخرج الى الخطوط من المركز تكون متساوية. واذا كانت الأعمدة متساوية فإن الخطوط متساوية. فخط هـ ز مساوٍ لخط س ع. ونخرج خطوط ك س، ك ع، ك ح، ك ط. فمن أجل ان كل مثلث فإن ضلعين من أضلاعه مجموعين كخط واحد: أعظم من الضلع الثالث، وذلك ببرهان ١/٢٠، فضلعا

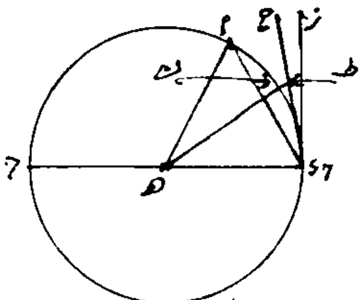
ك س، ك ع مجموعين كخط واحد: أعظم من خط س ع. لكن خط ك س مساوٍ لخطا ك جـ، وخط ك ع مساوٍ لخط ك د. فخطا ك س، ك ع، كخط واحد: مساوٍ لقطر الدائرة، الذي هو خط جـ د. فخط جـ د اذن أعظم من خط س ع. لكن خط س ع مساوٍ لخط هـ ز. فخط جـ د الذي هو القطر أعظم من خط هـ ز.

وأيضاً فمن أجل أن خطي ك س، ك ع مساويان لخطي ك ح، ك ط، لأنها خارجة من المركز الى المحيط؛ وزاوية س ك ع أعظم من زاوية ح ك ط، فببرهان ١/٢٤ تكون قاعدة س ع أعظم من قاعدة ح ط. لكن خط س ع مساوٍ لخط هـ ز. فخط هـ ز الأقرب الى المركز أعظم من خط ط ح الأبعد عنه. وقد بينا ان قطر الدائرة، أعظم من خط هـ ز. فقد ظهر أنه اذا وقع في دائرة خطوط مستقيمة، فأعظمها قطر الدائرة، والباقية فما قرب منها من مركز الدائرة أعظم مما بعد عنه. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٣/١٥ تقابل ٣/١٦ عند هيث]

الشكل الخامس عشر من المقالة الثالثة

كل دائـرة يخرج من طرف قطرها خط مستقيم على زاوية قائمة، فإنه يقع خارج الدائرة، ولا يقع بينه وبين الخط المحيط بالدائرة، خط آخر مستقيم. وكل خط هذه حاله فهو مماس للدائرة، وتكون الزاوية التي يحيط بها ذلك الخط والخط المحيط: أصغر من كل زاوية حادة؛ والتي تليها من داخل الدائرة التي يحيط بها خط القطر والخط المحيط أعظم من كل زاوية حادة.



الشكل ١٥/٢

مثاله: ان دائرة أ جـ د، قطرها جـ د، وقد خرج من نقطة د، التي هي طرف القطر، خط على زاوية قائمة، وهو خط د ز. فأقول انه يقع خارج الدائرة، لا

يمكن غير ذلك. فإن أمكن ان يقع في داخل الدائرة، فليكن مثل خط د أ، ونخرج خط هـ أ. فمثلث أ هـ د متساوي الساقين لأن خط هـ أ مثل خط هـ د، لأنهما خرجا من المركز الى المحيط، فببرهان ١/٥، تكون زاوية هـ أ د مساوية لزاوية هـ د أ. لكن زاوية هـ د أ فرضناها قائمة. فزاوية هـ أ د اذن قائمة. فمثلث هـ أ د فيه زاويتان قائمتان. وذلك غير ممكن، لأنه قد بين ببرهان ١/١٧ ان كل زاويتين من زوايا كل مثلث، اذا جمعتا، أصغر من قائمتين. فقد تبين ان الخط القائم على نقطة د، على زاوية قائمة، يقع خارج الدائرة، فليقع مثل خط د ز.

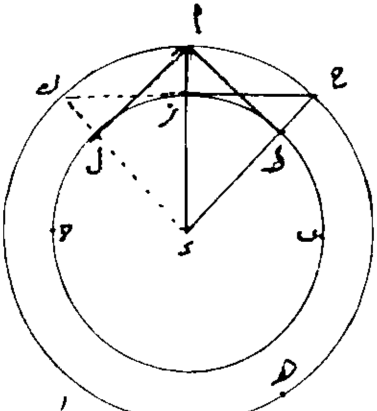
وأقول أيضاً انه لا يقع بينه وبين قوس أ د خط آخر. فإن أمكن، فليقع مثل خط د ح. فمن أجل ان زاوية هـ د ز قائمة، فإن زاوية هـ د ح أصغر من قائمة. فقد يمكن إذن ان يخرج [٤٣ أ] الى خط د ح، من نقطة هـ خط قائم عليه، على زوايا قائمة. فلنخرج خط هـ ط. فمن أجل ان زاوية هـ ط د أعظم من زاوية هـ د ط، والزاوية العظمى يوترها الضلع الأعظم، وذلك بحسب برهان ١/٩ يكون خط هـ د أعظم من خط هـ ط. لكن خط هـ د مساوٍ لخط هـ ك لأنهما خرجا من المركز الى المحيط. فخط هـ ك اذن أعظم من خط هـ ط: الأصغر أعظم من الأعظم. هذا خلف. فقد ظهر انه لا يقع بين خط د ز وبين قوس د أ خط آخر مستقيم.

وأيضاً فأقول ان زاوية ك د ز الخارجة أصغر من كل زاوية حادة، وان زاوية هـ د ك الداخلة أعظم من كل زاوية حادة. برهانه ان لو كانت زاوية ك د ز الخارجة مثل زاوية حادة، أو أعظم من حادة، لكان يقع بين قوس أ ك د وبين خط د ز خط آخر مستقيم. فمن أجل ما قد تبين انه لا يمكن ان يقع بينهما خط آخر مستقيم، صارت أصغر من كل زاوية حادة، وصارت زاوية نصف الدائرة التي يحيط بها قوس جـ أ د وقطر جـ هـ د أعظم من كل زاوية حادة. وعندها تبين ان كل خط مستقيم يخرج من طرف قطر الدائرة على زاوية قائمة، فإنه مماس للدائرة. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال النيريزي : أراد الرياضي ان الزاوية التي يحيط بها قوس جـ أ د وعمود د ز أصغر من كل زاوية حادة، لأنها غير منقسمة . فلو كانت منقسمة لوقع بين قوس جـ أ د وبين خط د ز خط آخر مستقيم، اذ أن قسمة الزوايا انما تكون بالخطوط المستقيمة التي تفصلها . فلما لم تنفصل زاوية ك د ز، لم تكن بزاوية حادة، لأن الزوايا الحادة كلها تنقسم . فسماها باسم اضطره الأمر اليه، بسبب الزاوية الأخرى الداخلة، وذلك ان زاوية هـ د ز لما كانت قائمة، ووقع بين خط جـ د، وعمود د ز، قوس د أ، وفصلت زاوية ك د ز، لا مقدار لها، بقيت الزاوية الداخلة التي يحيط بها قطر جـ د وقوس جـ أ د أعظم من كل زاوية حادة، لأن الزاوية الحادة هي التي تنقص عن الزاوية القائمة، بزاوية ما، أخرى، حادة. فمن أجل ان هذه الزاوية الداخلة لم تنقص عن الزاوية القائمة بزاوية لها مقدار، نسب الرياضي الزاوية الداخلة الى أنها أعظم من كل زاوية حادة . ومن أجل ان الزاوية الخارجة لا يمكن ان تنقسم بخط مستقيم، فإن كل خط حاله هذه الحال فهو مماس للدائرة .

[المبرهنة ٣/١٦ تقابل ٣/١٧ عند هيث]

الشكل السادس عشر من المقالة الثالثة



الشكل ٢/١٦

نريد أن نبين كيف نخرج من نقطة مفروضة خطاً مستقيماً يماس دائرة مفروضة . فننزل ان النقطة المفروضة نقطة أ، والدائرة المفروضة دائرة ب جـ . ونستخرج مركز الدائرة، وليكن نقطة د، ونصل بين نقطتي د، أ بخط د أ، فيقطع الدائرة على نقطة ز؛ ونجعل نقطة د مركزاً، ونخط ببعد د أ دائرة أ هـ . ونقيم على نقطة ز، من خط أ د خطاً

يكون عموداً عليه، ونخرجه الى ان يلقى دائرة أ هـ، كما بينا إخراجه ببرهان ٤١/١ وليكن خط ز ح.

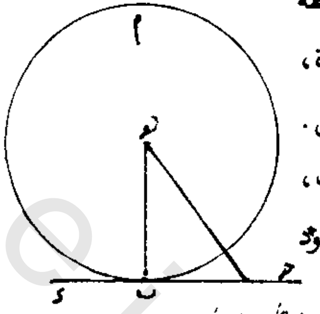
فمن البين بحسب برهان ١٧/٣ ان خط ز ح يقع خارج دائرة ب جـ، وهو مماس للدائرة. ونصل بين نقطتي د، ح. فخط د ح يقطع دائرة ب جـ على نقطة ط. ونصل نقطتي أ، ط بخط أ ط. فلأن خط د أ مساوٍ لخط د ح، لأنهما خرجا من المركز الى المحيط، وخط د ز مثل خط د ط، فان خطي أ د، د ط مساويان لخطي ح د، د ز، كل ضلع مساوٍ لنظيره؛ وزاوية أ د ط مشتركة للمثلثين. فإنه، بحسب برهان ٤/١، تكون قاعدة أ ط مساوية لقاعدة ح ز، ومثلث أ د ط مساوياً لمثلث [٤٣ ب] ح د ز، وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا: زاوية أ ط د مساوية لزاوية ح ز د. لكن زاوية ح ز د قائمة. فزاوية د ط أ قائمة. فقد خرج من نقطة ط، التي هي طرف قطر دائرة ب جـ: خط ط أ، على زاوية قائمة. وقد تبين ببرهان ١٧/٣ ان الخط الخارج من طرف قطر الدائرة، على زاوية قائمة، مماس للدائرة. فخط أ ط اذن مماس للدائرة. فقد خرج من نقطة أ المفروضة الى دائرة ب جـ المفروضة: خط أ ط يماس الدائرة. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال ايرن: ان كانت النقطة المفروضة داخل الدائرة، لم يمكن ان يخرج منها خط يماس الدائرة، لأن الخط يقطع الدائرة. وان كانت على الخط المحيط، أخرج قطر الدائرة من النقطة المفروضة، ثم يقام على تلك النقطة عمود، فيكون ذلك العمود هو الخط المماس للدائرة.

وان أردنا ان نخرج خطين من نقطة أ الى محيط دائرة ب جـ، يماسانها، فانا نخرج خط ح ز على الاستقامة الى نقطة ك ونصل بين نقطتي د، ك بخط د ك يقطع الدائرة على نقطة ل، ونصل خط أ ل. فنبين بحسب ما برهن الرياضي ان خط أ ل أيضاً مماس للدائرة، وهو مساوٍ لخط أ ط. فقد تبين أيضاً ان كل نقطة مفروضة يخرج منها خطان يماسان دائرة مفروضة، فان الخطين متساويان. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٣/١٧ تقابل ٣/١٨ عند هيث]

الشكل السابع عشر من المقالة الثالثة



كل دائرة ماسَّها خط مستقيم، وأخرج من النقطة التي عليها المماسَّة خط مستقيم الى مركز الدائرة، فإن الخط المخـرج عمـود على الخط الممـاسّ. فلننزل ان خط جـ د يماسّ دائرة أ ب على نقطة ب، ومركز الدائرة علامة هـ. فأقول: ان خط ب هـ عمود على خط جـ د.

لا يمكن غيره. فإن امكن فلنخرج من نقطة هـ، التي هي المركز، عموداً على خط جـ د، وليكن عمود هـ ز. فمن أجل ان زاوية هـ ز ب قائمة، فان زاوية هـ ب ز أصغر من قائمة، لأن كل زاويتين من زوايا المثلث أصغر من زاويتين قائمتين. وذلـك ببـرهان ١/١٧. ومن أجل ان الزاوية العظمى يوترها الضلع الأطول، بحسب ما تبين ببرهان ١/١٩، يكون ضلع ب هـ أعظم من ضلع هـ ز. ونقطة ز خارج الدائرة. فخط هـ ز أعظم من خط هـ ب. فيكون خط هـ ب الأصغر أعظم من خط هـ ز الأعظم. هذا خلف. فليس يمكن اذن ان يكون خط هـ ز عموداً على خط جـ د، ولا غيره من الخطوط، سوى الخط الذي يصل بين موضع التماس وبين المركز، مثل هـ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

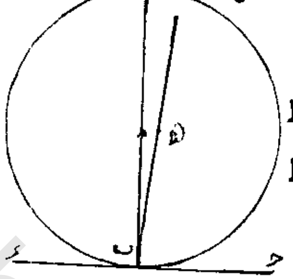
[المبرهنة ٣/١٨ تقابل ٣/١٩ عند هيث]

الشكل الثامن عشر من المقالة الثالثة

كل خط يماسّ دائرة، ويخرج من حيث يمارسها خط على زاوية [قائمة] يقطع الدائرة، فإن عليه يكون مركز الدائرة.

مثـالـه: ان خـط جـ د يمـاس دائـرة أ ب علـى نقـطـة

الشكل ١٨/٢



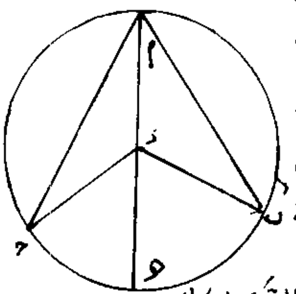
ب، وقد خرج من نقطة ب خط ب أ عموداً على خط جـ د يقطع الدائرة. فأقول ان مركز الدائرة على خط أ ب، لا يمكن غيره.

فإن أمكن فلننزل ان المركز نقطة هـ، ونصل هـ ب. فمن أجل ان خط جـ د يماس دائرة أ ب، وقد خرج من النقطة التي عليها المماسَّة خط مستقيم الى المركز، وهو خط ب هـ، فان خط ب هـ عمود على خط جـ د، وذلك ببرهان ١٧ من ٣. فزاوية هـ ب جـ قائمة. وقد كنا فرضنا ان زاوية أ ب جـ قائمة. فزاوية أ ب جـ مساوية لزاوية هـ ب جـ: الأعظم مساوٍ للأصغر. هذا خلف فليس يمكن ان تكون نقطة هـ مركزاً لدائرة أ ب، ولا غيرها من النقط [٤٤ أ] التي ليست على خط أ ب. فمركز الدائرة اذن على خط أ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/١٩ تقابل ٣/٢٠ عند هيث]

الشكل التاسع عشر من المقالة الثالثة

الزاوية التي على مركز كل دائرة ضعف الزاوية التي على المحيط، اذا كانت قاعدتاهما قوساً واحدة. مثاله ان دائرة أ ب جـ على مركزها زاوية ب د جـ، وعلى محيطها زاوية ب أ جـ، وقاعدتهما قوس واحدة هي قوس ب جـ. فأقول: ان زاوية ب د جـ ضعف زاوية ب أ جـ.



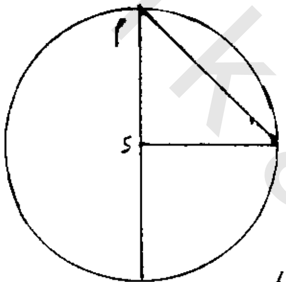
الشكل ١٩/٢

برهانه انا نخرج خط أ د، ونخرجه الى علامة هـ. فمن أجل ان مركز الدائرة نقطة د، وقد خرج منها خطا د أ، د ب، فهما متساويان. فبحسب برهان ١/٥ تكون زاوية د أ ب مساوية لزاوية د ب أ. ولأن زاوية ب د هـ خارج مثلث أ ب د، ومجموع زاويتي د أ ب، د ب أ ضعف زاوية

د أ ب، فإنه بحسب برهان ١/٣٢، تكون زاوية ب د هـ مثل زاويتي د أ ب، د ب أ. فزاوية ب د هـ مثل ضعف زاوية ب أ د.

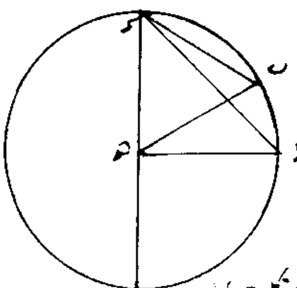
وبمثل هذا الاستشهاد نبين ان زاوية جـ د هـ ضعف زاوية جـ أ د. فجميع زاوية ب د جـ ضعف جميع زاوية ب أ جـ. فقد ظهر ان الزاوية التي على مركز كل دائرة ضعف الزاوية التي على محيطها، اذا كانت قاعدتهما قوساً واحدة. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال ايرن: فإن كان وضع الزاوية التي على المحيط مثل زاوية جـ أ ب، وخط أ د يتصل بخط د ب على استقامة، فظاهر ان زاوية جـ د ب ضعف زاوية جـ أ ب.



الشكل ٢/١٦

وان كان وضع الزاوية التي على المحيط مثل وضع زاوية جـ د ب، وقد تقاطع خط جـ د وخط هـ ب، فانا نخرج خط د هـ ز. فمن أجل ان خط هـ د مساوٍ لخط هـ ب، فإن زاوية هـ د ب مساوية لزاوية هـ ب د. فزاوية ب هـ ز، التي هي خارج مثلث هـ ب د: ضعف زاوية هـ د ب.



الشكل [illegible]

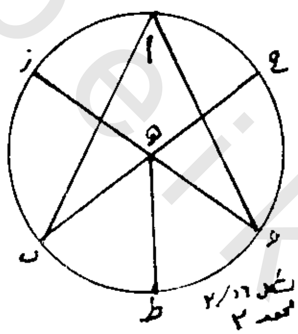
وأيضاً فإن خط هـ د مساوٍ لخط هـ جـ. فزاوية هـ د جـ مساوية لزاوية هـ جـ د. فزاوية ز هـ جـ ضعف زاوية هـ د جـ. فاذا أسقطناهما بقيت زاوية ب هـ جـ ضعف زاوية ب د جـ. وذلك ما اردنا ان نبين.

وقال ايرن أيضاً: اما الشكل فقد تبين بكل وضع، وبرهن على كل عمل. وقد يبقى علينا ان نضع المقدمة المقولة له. ونبرهنه برهاناً عاماً، لأنه ان لم يبرهن على ما سنبرهنه لم يمكنا ان نبرهن الشكل الذي بعده، على كل وضع، لكن على ما وضعه الرياضي فقط. وذلك منكر، لأنه قد يجب اضطراراً ان تصير المقدمة عامية،

وان يبرهن على كل وضع وان يحل عناد المعاندين لئلا يكون شيء في المساحة غير مبرهن.

واذا وضعنا هذه المقدمة، وجئنا للشكل، كان جميع ما في الشكل بيناً واضحاً، ولا يبقى للمعاندين موضع عناد فيه، أعني في الشكل الذي بعد هذا، وهو الشكل العشرون.

والمقدمة التي يجب تقديمها، والشكل الموضوع لها هو هذا:



الزاوية التي على مركز كل دائرة هي ضعف الزاوية التي على محيطها، اذا كانت قاعدتهما جميعاً قوساً واحدة. والزوايا الباقية التي على المركز، وهي تتمة الأربع القوائم ضعف الزاوية التي على المحيط، في القوس التي توتر الزاوية التي على المركز.

فلتكن الزاوية التي على المركز زاوية جـ هـ ب، والتي على المحيط زاوية جـ أ ب، ونخرج خطي ب هـ، جـ هـ على استقامتهما إلى محيط الدائرة إلى نقطتي ح، ز، ونخرج خطي حـ ط، ط ب، و خط ط هـ. فأقول ان كل الزوايا [٤٤ ب] التي تقع في قوس ب أ جـ، حيث كان وقوعها، وقاعدة جميعها قوس ب ط جـ، فان زاوية جـ هـ ب ضعف لكل واحدة منها. وان مجموع زوايا ب هـ ز، ز هـ ح، ح هـ جـ: ضعف زاوية ب ط جـ، وضعف لكل واحدة من الزوايا التي تقع في قوس ب ط جـ.

برهانه: ان نقطة هـ مركز الدائرة. فخط هـ ب مثل خط هـ ط. فزاوية هـ ب ط مساوية لزاوية هـ ط ب. فزاوية ح هـ ط اذن، الخارجة، ضعف زاوية هـ ط ب.

وأيضاً خط هـ ط مثل خط هـ جـ. فزاوية هـ ط جـ مثل زاوية هـ جـ ط. فزاوية ز هـ ط ضعف زاوية هـ ط جـ. فمجموع زاويتي ح هـ ط، ز هـ ط:

ضعف زاوية ب ط جـ.

لكن زاوية جـ هـ ب مساوية لزاوية ح هـ ز، وذلك ببرهان ١٥/ فاذا اسقطنا زاوية جـ هـ ب، وأخذنا بدلها زاوية ح هـ ز، بقيت زاويتا ح هـ جـ، ز هـ ب، مع زاوية ح هـ ز: ضعف زاوية حـ ط ب.

وظاهر ان زاوية ب ط جـ حيث فرضناها من قوس ب ط جـ. فان زوايا جـ هـ ح، ح هـ ز، ز هـ ب، الثلاث، اذا جمعت: مساوية لضعف زاوية ب ط جـ. فكل الزوايا التي تقع اذن في قطعة قوس ب ط جـ متساوية.

وأيضاً فمن أجل ان زاوية ب أ جـ عملت كيف وقعت، وقد تبين ان الزاوية التي على المركز ضعفها، وهي زاوية ب هـ جـ، فإن كل الزوايا التي في القطعة الواحدة، أعني المرسومة في قوس ب أ جـ متساوية، لأنه قد تبين ان زاوية ب هـ جـ ضعف كل واحدة منها.

وأيضاً فمن أجل ان زاوية ب ط جـ في قطعة ب ط جـ، وقد ظهر ان زوايا ب هـ ز، ز هـ ح، ح هـ جـ، اذا جمعت: ضعفها، فان الزوايا كلها التي ترسم في قطعة ب ط جـ متساوية، لأن كل واحدة منها نصف الزوايا المذكورة اذا جمعت. فقد تبين ان كل الزوايا التي تقع في قطعة واحدة متساوية. وهذا الذي كنا اردنا ان نبينه كلياً. ولذلك جعلنا هذا الشكل، ليتبين ما قاله الرياضي بياناً كليا. واذ قد تبين هذا، فان الشكل الذي بعده يتبرهن معه، وذلك بأن نقول:

من أجل ان زوايا ب هـ ز، ز هـ ح، ح هـ جـ، اذا جمعت، مساوية لضعف زاوية ب ط جـ، وزاوية ب هـ جـ ضعف زاوية ب أ جـ، فمجموع الأربع الزوايا، أعني زوايا ب هـ جـ، ب هـ ز، ز هـ ح، ح هـ جـ، مساوية لضعف زاويتي ب ط جـ، ب أ جـ. لكن الأربع الزوايا معادلات لأربع زوايا قائمة. وذلك بين ببرهان ١٥/١ فمجموع زاويتي ب ط جـ، ب أ جـ، إذن، مثل مجموع زاويتين قائمتين.

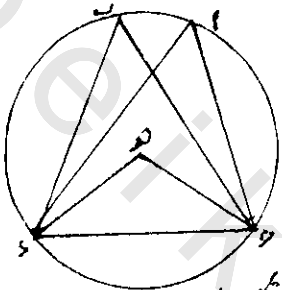
فإذن السطوح ذوات الأربعة الأضلاع التي في كل دائرة، فإن كل زاويتين

تتقابلان: مساويتان لزاويتين قائمتين.

قال النيريزي: هذا البرهان الذي قبله ثلاثة أشكال الشكل التاسع عشر، والعشرون والواحد والعشرون.

[المبرهنة ٣/٢٠ تقابل ٣/٢١ عند هيث]

الشكل العشرون من المقالة الثالثة



الشكل ٣/٢٠

الـزوايا التي في قطعـة واحدة من دائرة، فهي متساوية، اذا كان يوترها قوس واحدة.

مثاله: ان دائرة أ ب جـ د، في قطعة منها، وهي قطعة جـ أ ب د: زاويتا جـ أ د، جـ ب د على قاعدة واحدة، وهي قوس جـ د. فأقول انهما متساويتان.

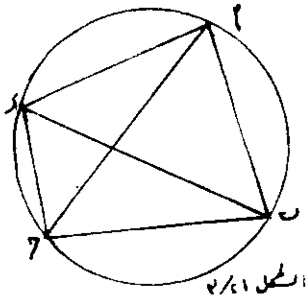
برهانه: انا نستخرج مركز الدائرة، وليكن نقطة هـ. ونخـرج خطي هـ جـ، هـ د. فبحسب برهان ٣/١٩ فإن زاوية جـ هـ د ضعف لكل واحدة من زاويتي جـ أ د، جـ ب د. والأشياء التي هي نصف لشيء واحد، فإن الأشياء متساوية. فزاوية جـ أ د. اذن مساوية جـ ب د. فالزوايا التي في قطعة واحدة من دائرة ويوترها قوس واحدة فهي متساوية. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال ايرن: وقد يمكن ان نبرهن هذا الشكل برهانا عاماً بالشكل الذي قدمناه.

[المبرهنة ٣/٢١ تقابل ٣/٢٢ عند هيث]

[٤٥ أ] الشكل الواحد والعشرون من المقالة الثالثة

كل دائرة يقع فيها سطح ذو أربعة أضلاع، فكل زاويتين تتقابلان منه فهما مساويتان لزاويتين قائمتين.



مثاله: ان في دائرة أ ب جـ د: سطح أ ب جـ د. فأقول ان كل زاويتين تتقابلان منه فهما مساويتان لزاويتين قائمتين.

برهانه: انا نخرج خطي أ جـ، ب د. فمن أجل ان زاويتي ب أ جـ، ب د جـ في قطعة واحدة، وهي قطعة ب أ د جـ، وعلى قوس واحدة، وهي قوس ب جـ. فببرهان ٢٠/٣ تكون زاوية ب أ جـ مساوية لزاوية ب د جـ.

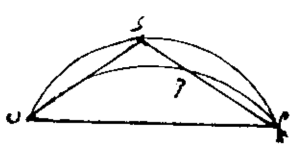
وأيضاً فان زاويتي أ د ب، أ جـ ب في قطعة واحدة، وعلى قوس واحدة. فزاويتا أ د ب، أ جـ ب متساويتان فمجموع زاويتي ب أ جـ، أ جـ ب مثل زاوية أ د جـ. ونأخذ زاوية أ ب جـ مشتركة. فزوايا ب أ جـ، ب جـ أ، أ ب جـ: مساوية لزاويتي أ د ب، ب د جـ، أعني أ د جـ، وبحسب برهان ٣٢/١ تكون زوايا ب أ جـ، أ جـ ب، أ ب جـ مساوية لزاويتين قائمتين. فزاويتا أ د جـ، أ ب جـ المتقابلتان اذن مساويتان لزاويتين قائمتين.

وعلى هذا المثال نبين ان مجموع زاويتي ب أ د، ب جـ د مساوٍ لزاويتين قائمتين.

فكل سطح ذي أربعة أضلاع يقع في دائرة، فان كل زاويتين من زواياه متقابلتين تساويان زاويتين قائمتين وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٢/٣ تقابل ٢٣/٣ عند هيث]

الشكل الثاني والعشرون من المقالة الثالثة



لا يمكن ان يقوم على خط واحد مستقيم قطعتان متشابهتان من دائرتين إحداهما أعظم من الأخرى.

فإن أمكن أن يقوم، فلننزل أنهما قطعتا أ جـ ب، أ د ب، والعظمى منهما قطعة أ د ب. ونخرج خط أ جـ، وننفذه على الاستقامة

إلى نقطة د. ونخرج خطي ب جـ، ب د.

فمن أجل ان قطعة أ جـ ب تشبه قطعة أ د ب، فإن زاوية أ جـ ب مساوية لزاوية أ د ب، لأن القِسيّ المتشابهة تقبل زوايا متساوية. ولأن زاوية أ جـ ب خارج مثلث جـ ب د، فبحسب برهان ١٦/١: تكون زاوية أ جـ ب أعظم من زاوية أ د ب. فزاوية أ جـ ب مساوية لزاوية أ د ب، وهي أعظم منها. هذا خلف، غير ممكن.

فليس يقوم إذن على خط واحد قطعتان متشابهتان من دائرتين إحداهما أعظم من الأخرى. وذلك ما أردنا ان نبين.

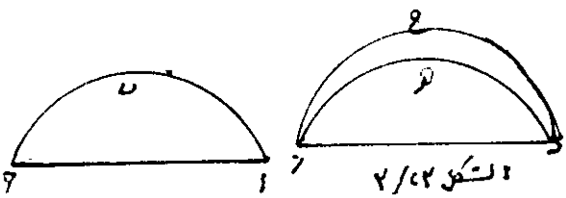
قال الشيخ: حَدُّ القطعتين المتشابهتين ان تكون الزوايا المركبة عليهما متساوية. وإن شئت قلت هي التي نسبتها إلى دوائرها نسبة واحدة. وليس المتشابه كالمتساوي: بينهما فرق، كما ذكرنا.

قال النيريزي: فإن قال قائل إنه يقوم في جهتين مختلفتين: فإن كانت قطعة أ د ب الأعظم، في الجهة الأخرى من خط أ ب، فإنا متى أقمنا على خط أ ب، في جهة قطعة أ جـ ب: قطعة مساوية لقطعة أ د ب، قَفَلَت على قطعة أ جـ ب، وصار وضعها هذا الوضع الذي هي عليه. فيعود البرهان إلى الذي برهنه الرياضي.

[المبرهنة ٣/٢٣ تقابل ٣/٢٤ عند هيث]

الشكل الثالث ولعشرون من المقالة الثالثة

قطع الدوائر المتشابهة اذا كانت على خطوط مستقيمة متساوية فانها متساوية.



مثاله: ان قطعتي أ ب جـ، د هـ ز متشابهتان. وهما على خطي أ جـ، د ز المتساويين. فأقول: ان القطعتين متساويتان.

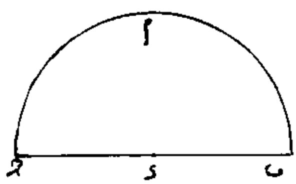
برهانه: انا اذا ركبنا قطعة أ ب جـ على قطعة د هـ ز، لم تفضل احداهما على الأخرى، لأنهما متشابهتان. فإن فضلت، وقعت قوس أ ب جـ خارج قوس د هـ ز، أو داخلها، فلننزل انها وقعت أولاً خارجاً، كقوس د ح ز. فقطعة د ح ز تشبه قطعة د هـ ز، وقد تبين ببرهان ٣/٢٢ انه لا يمكن ان يقوم على خط واحد مستقيم قطعتان متشابهتان من دائرتين احداهما أعظم من الأخرى. فقطعة د ح ز أعظم من قطعة د هـ ز، وهي شبيهة بها. هذا خلف غير ممكن. فقطعة أ ب جـ اذن مساوية لقطعة د هـ ز.

فالقطوع المتشابهة اذا كانت على خطوط مستقيمة متساوية، فان القطوع متساوية. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٢٤ تقابل ٣/٢٥ عند هيث]

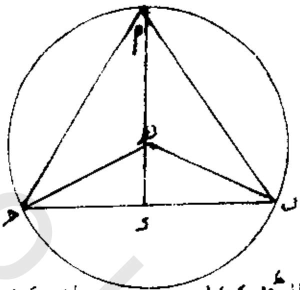
الشكل الرابع والعشرون من المقالة الثالثة

اذا كانت قطعة من دائرة معلومة فأردنا ان نبين كيف تتم الدائرة التي القطعة منها، نصف دائرة كانت، أو أعظم أو أصغر، فإنا ننزل اولاً ان القطعة المفروضة التي عليها أ ب جـ: نصف دائرة، ونبين كيف تتم دائرتها. فلتكن القطعة على ما في الصورة الأولى: فمن أجل ان قطعة ب أ جـ نصف دائرة، فان



الشكل ٣/٢٤ الصورة ١

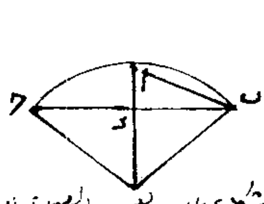
خط جـ د ب قطر الدائرة التي قطعة ب أ جـ نصفها فمن الظاهر ان مركز الدائرة على منتصف خط ب جـ، اذ كانت الخطوط التي تخرج من المركز إلى المحيط متساوية. فنقسم خط ب جـ بنصفين على نقطة د، كما بين ببرهان ١/١٠ فعلى مركز د، وببعد د جـ، أو د ب، نتم دائرة أ ب جـ.



الشكل ٢/٢٤ الصورة ٢

ثم ننزل ان القطعة التي عليها ب أ جـ، من الصورة الثانية: أعظم من نصف دائرة ونبين كيف نتم دائرتها: فنقسم خط ب جـ بنصفين، كما بين ببرهان ١/١٠، على نقطة د. ونخرج من نقطة د خط د أ عموداً على خط ب جـ، كما بين ببرهان ١/١١ فمن أجل ان قطعة ب أ جـ أعظم من نصف دائرة، فإن مركز الدائرة اذن يقع فيها. ومن أجل ان خط ب جـ في دائرة ب أ جـ، وقد قسم على نقطة د بنصفين. وأخرج عمود د أ، فظاهر بحسب برهان ٣ من ٣ أن مركز الدائرة على خط د أ. فلأن خط د أ يمر بالمركز فهو أطول الخطوط كلها التي تخرج من نقطة د إلى محيط قطعة ب أ جـ. وذلك بيِّن ببرهان ٣/٧ فخط د أ أعظم من خط د ب. ونخرج ب أ، فبحسب برهان ١/٨، فإن زاوية أ ب د أعظم من زاوية ب أ د. فنعمل على نقطة ب من خط أ ب زاوية مثل زاوية ب أ د، كما بين عمله ببرهان ١/٢٣، ولتكن زاوية أ ب هـ. ونخرج ب هـ، جـ هـ. فمن أجل ان زاوية ب أ هـ مساوية لزاوية أ ب هـ، فإنه بحسب برهان ١/٦ يكون ضلع أ هـ مساوياً لضلع ب هـ. ومن أجل ان زاوية ب د هـ مساوية لزاوية جـ د هـ، وخط ب د مثل د جـ، فاذا أخذنا د هـ مشتركاً، يكون خطا ب د، د هـ مساويين لخطي جـ د، د هـ، والزاويتان اللتان عند د متساويتان. فبحسب برهان ١/٤، يكون خط ب هـ مساوياً لخط جـ هـ. وقد بينا ان خط أ هـ مثل خط هـ ب. فنقطة هـ في قطعة دائرة ب أ جـ، وقد خرج منها أكثر من خطين، وصارت متساوية. فبحسب برهان ٣/٩ تكون نقطة هـ مركز الدائرة ب أ جـ. فعلى نقطة هـ، وببعد هـ أ نتم الدائرة.

ثم ننزل ان القطعة على ما في الصورة الثالثة: أصغر من نصف دائرة، وهي قطعة ب أ جـ. ونقسم خط ب جـ بنصفين على نقطة د، ونقيم على نقطة د عموم د أ، وننفذه إلى قوس ب أ جـ.



الشكل ٢/٢٤ الصورة ٢

فمن أجل ان خط ب جـ وتر لقوس ب أ جـ، وقد قسم بنصفين على نقطة د، وأخرج عمود د أ، فظاهر ببرهان ٣/٣ ان خط أ د تمام القطر. وبحسب برهان ٣/١٧، فان خط د أ أصغر من خط د ب. فنخرج خط أ ب. فبحسب برهان ١/٨، فإن زاوية ب أ د أعظم من زاوية أ ب د. فنعمل على نقطة ب من خط أ ب: زاوية مساوية لزاوية ب أ د، ولتكن زاوية أ ب هـ. ونخرج خط أ د يلقى خط ب هـ على نقطة هـ. ونخرج خط هـ جـ فكانت زاوية أ مساوية لزاوية ب، فان خط هـ أ مساوٍ لخط هـ ب. ويمثل ما بينا نبين ان خط هـ جـ مساوٍ لخط هـ ب. فالخطوط الثلاثة متساوية: هـ ب، هـ جـ، هـ أ فبحسب برهان ٣/٩ تكون نقطة هـ مركز الدائرة ب أ جـ. فعلى نقطة هـ، وببعد هـ أ نتم الدائرة.

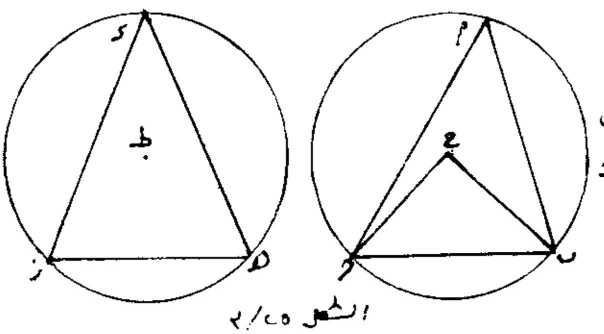
هذا الشكل أخره إيرن وجعله الشكل الحادي والثلاثين، لأنه قصد للبرهان عليه في صورة واحدة.

[المبرهنة ٣/٢٥ تقابل ٣/٢٦ عند هيث]

[٤٦ أ] الشكل الخامس العشرون من المقالة الثالثة

الزوايا المتساوية التي في الدوائر المتساوية فانها على قسي متساوية، على المحيطات كانت، أو على المراكز.

مثاله: ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان، ومركزاهما نقطتا ح، ط وعليهما زاويتا ب ح جـ، هـ ط ز [متساويتان] فأقول ان قوس ب جـ مساوية لقوس هـ ز.



الشكل ٣/٢٥

برهانه: انا نفرض على قوسي ب أ جـ، هـ د ز نقطتين كيفما وقعتا. فننزل أنهما نقطتا أ، د.

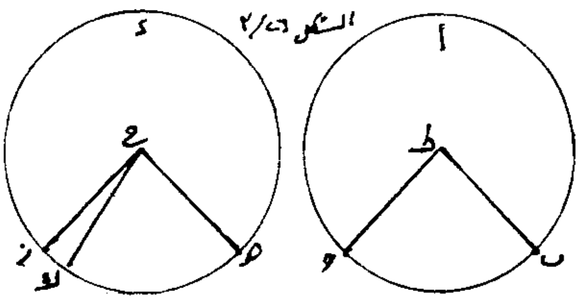
ونخرج خطوط أ ب، أ جـ، د هـ، د ز، ب جـ، هـ ز.

فمن أجل ان خطي ب ح، ح جـ مثل خطي هـ ط، ط ز، وزاوية ب ح جـ مساوية لزاوية هـ ط ز. فبحسب برهان ٤/١ تكون قاعدة ب جـ مثل قاعدة هـ ز. ومن أجل ان زاويتي ب ح جـ، هـ ط ز على المركزين، ب أ جـ، هـ د ز على المحيطين، فبحسب برهان ٣/١٩، تكون زاوية ب ح جـ ضعف زاوية ب أ جـ، وزاوية هـ ط ز ضعف زاوية هـ د ز. فزاوية ب أ جـ اذن مساوية لزاوية هـ د ز. فقطعة ب أ جـ تشبه قطعة هـ د ز. وهما من دائرتين متساويتين. فمن أجل ان خطي ب جـ، هـ ز متساويان، وعليهما قطعتا ب أ جـ، هـ د ز المتساويتان، فبحسب برهان ٢/٢٣ تكون قطعة ب أ جـ مساوية لقطعة هـ د ز. وفرضنا دائرة ب أ جـ مساوية لدائرة هـ د ز. واذا أسقطنا من المتساوية متساوية، فإن الباقي يكون متساوياً. فقوس ب جـ مساوية لقوس هـ ز. فقد ظهر ان الزوايا المتساوية اذا كانت في الدوائر المتساوية، على المراكز كانت أو على المحيطات، فإنها على قسي متساوية. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٢٦ تقابل ٣/٢٧ عند هيث]

الشكل السادس والعشرون من المقالة الثالثة

اذا كانت في دوائر متساوية زوايا على قسي متساوية، فالزوايا متساوية، على المراكز كانت أو على المحيطات.



مثاله: ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان، وقوسي ب جـ، هـ ز

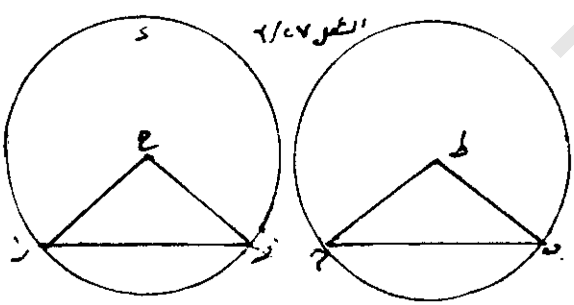
متساويتان، والمركزان نقطتا ط، ح، وعليهما زاويتا ب ط جـ، هـ ح ز، يوترهما قوسا ب جـ، هـ ز المتساويتان. فأقول ان زاوية ب ط جـ مساوية لزاوية هـ ح ز، لا يمكن إلا ذلك.

فإن أمكن فلتكن زاوية ب ط جـ أصغر من زاوية هـ ح ز. ونعمل على نقطة ح من خط هـ ح زاوية هـ ح ك مساوية لزاوية ب ط جـ، كما بيِّن عملها ببرهان ١/٢٣. فمن أجل ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان، وعلى مركزيهما زاويتا ب ط جـ، هـ ح ك المتساويتان، فبحسب برهان ١/٢٥ تكون قوس ب جـ مساوية لقوس هـ ك.

لكنا فرضنا قوس ب جـ مساوية لقوس هـ ز. فقوس هـ ز اذن مساوية لقوس هـ ك: العظمى مثل الصغرى. هذا خلف غير ممكن. فليست اذن زاوية ب ط جـ بأصغر من زاوية هـ ح ز. ولا هي أيضاً أعظم منها. فهي اذن مثلها. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٢٧ تقابل ٣/٢٨ عند هيث]

الشكل السابع والعشرون من المقالة الثالثة



الأوتار المتساوية في الدوائر المتساوية تفصل قسياً متساوية. والوتر الأعظم يفصل قوساً أعظم.

مثاله: ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان، وفيهما وترا ب جـ، هـ ز متساويان. فأقول ان قوسي ب جـ، هـ ز متساويتان.

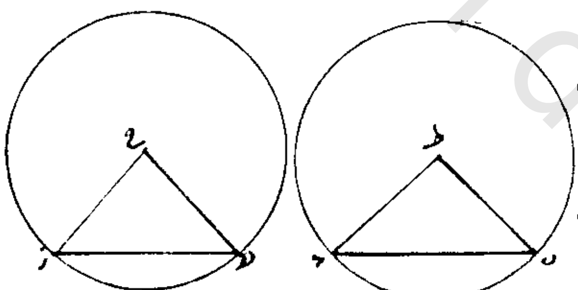
برهـانـه: انـا نستخرج المركزين، وليكونا نقطتي ط، ح، ونخرج منهما خطوط ط ب، ط جـ، ح هـ، ح ز.

فمن أجل ان دائرتي ب أ جـ، هـ د ز متساويتان، فإن خطي ب ط، ط جـ مساويان لخطي هـ ح، ح ز، وخط ب جـ فرض مساوياً لخط هـ ز. فبحسب برهان ١/١٨ تكون زاوية ب ط جـ مساوية لزاوية هـ ح ز. فمن أجل ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان [٤٦ ب] وعلى مركزيهما زاويتا ب ط جـ، هـ ح ز المتساويتان، فانه، بحسب برهان ٣/٢٥، تكون قوس ب جـ مساوية لقوس هـ ز. واذا اسقط من الدوائر المتساوية في الدوائر المتساوية قطع متساوية، فان القطع الباقية تكون متساوية. فقوس ب أ جـ أيضاً مساوية لقوس هـ د ز. فقد تبين ان الأوتار المتساوية في الدوائر المتساوية تفصل قسياً متساوية. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٢٨ تقابل ٣/٢٩ عند هيث]

الشكل الثامن والعشرون من المقالة الثالثة

القسي المتساوية من الدوائر المتساوية تفصلها أوتار متساوية.



الشكل ٣/٢٨

مثاله: ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز، متساويتان، ونفصل منهما قوسي ب جـ، هـ ز متساويين، فأقول: ان وتريهما متساويان.

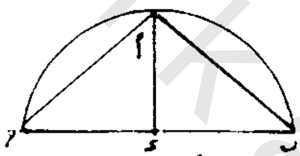
برهـانـه: انا نستخرج مركزي الدائرتين، وليكونا نقطتي ط، ح. ونخرج خطوط ط ب، ط جـ، ح هـ، ح ز، ووتري ب جـ، هـ ز. فمن أجل ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان، وقد فصل منهما قوسا ب جـ، هـ ز المتساويتان، فبحسب برهان ٣/٢٦ تكون زاوية ب ط جـ مساوية لزاوية هـ ح ز.

وأيضاً فمن أجل ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان، وقد خرج من المركزين خطوط، فهي اذن متساوية. فخطا ط ب، ط جـ مساويان لخطي ح هـ، ح ز؛ وزاوية ط مساوية لزاوية ح. فبحسب برهان ١/٤ تكون قاعدة ب جـ مساوية لقاعدة هـ ز. فقد تبين ان القسي المتساوية من الدوائر المتساوية تفصلها أوتار متساوية. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٢٩ تقابل ٣/٣٠ عند هيث]

الشكل التاسع والعشرون من المقالة الثالثة

نريد ان نبين كيف نقسم قوساً مفروضة بنصفين: فننزل انها قوس أ جـ. فنخرج وترها، وهو خط ب جـ؛ ونقسمه بنصفين على نقطة د، ونقيم على نقطة د خطاً على زاوية قائمة. وننفذه إلى قوس ب أ جـ. وليكن خط أ د. ونخرج خطي أ ب، أ جـ.



الشكل ٣/٢٩

فمن أجل ان خط ب د فصلناه مثل خط د جـ، ونأخذ د أ مشتركاً، فخطا ب د، د أ مثل خطي جـ د، د أ؛ وزاوية ب د أ مساوية لزاوية جـ د أ. فقاعدة أ جـ مساوية لقاعدة أ ب.

ومن أجل ان الأوتار المتساوية من الدوائر المتساوية تفصل قسياً متساوية، فبحسب برهان ٣/٢٧ تكون قوس أ ب مساوية لقوس أ جـ. فقد قسمنا قوس ب أ جـ بنصفين على نقطة أ وذلك ما أردنا ان نبين.

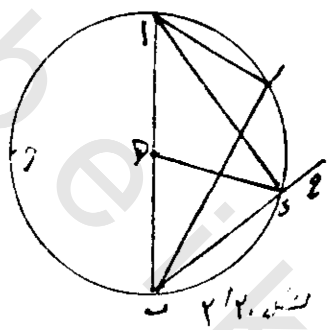
[المبرهنة ٣/٣٠ تقابل ٣/٣١ عند هيث]

الشكل الثلاثون من المقالة الثالثة

الزوايا المستقيمة الخطين التي تقع في دائرة، ما كان منها في دائرة فهو قائم. وما كان منها في قطعة أعظم من نصف دائرة فهو حادة. وما كان منها في

قطعة أصغر من نصف دائرة فهو منفرجة.

وأما الزواية التي يحيط بها خط الوتر وخط القوس، فان القطعة ان كانت أعـظم من نصف دائرة، فالزاوية منفرجة. وان كانت أصغر من نصف دائرة، فالزواية حادة.



مثاله: ان دائرة أ ب وقع على خط محيطها زوايا أ د ب، د أ ب، أ ز د. وزاوية أ د ب في أ د ب، وهي نصف دائرة. وزاوية د أ ب في قطعة ز أ جـ ب، وهي أعظم من نصف دائرة. وزاوية أ ز د في قطعة أ ز د، وهي أصغر من نصف دائرة. فأقول ان زاوية أ ز د منفرجة، وزواية د أ ب حادة. وزاوية [٤٧ أ] أ د ب قائمة.

برهانه انا نخرج قطر أ ب، ونستخرج المركز، وهو نقطة هـ. ونصل هـ د.

فمن أجل ان نقطة هـ مركز للدائرة، وقد خرج منها إلى المحيط خطوط هـ أ، هـ ب، هـ د، فهي اذن متساوية. فمثلث هـ أ د متساوي الساقين. فببرهان ١/٥ تكون زاوية هـ أ د مساوية لزاوية هـ د أ. فمن أجل ان زاوية د هـ ب خارجة من المثلث، فببرهان ١/٣٤ تكون زاوية د هـ ب مساوية لزاويتي هـ أ د، هـ د أ. فزاوية د هـ ب إذن ضعف زاوية د أ هـ.

وبمثل هذا البرهان والاستشهاد نبين ان زاوية أ هـ د ضعف زاوية هـ د ب. فمجموع زاويتي د هـ أ، د هـ ب: ضعف جميع زاوية أ د ب.

ومن أجـل انـه اذا قام خط على خط فان الزاويتين اللتين عن جنبتيه اما قائمتان واما مساويتان لقائمتين، فببرهان ١/٣٣ فان مجموع زاويتي د هـ أ، د هـ ب مساوٍ لزاويتين قائمتين. وهو ضعف زاوية أ د ب. فزاوية أ د ب اذن قائمة.

وأيضـاً فمن أجـل ان مثلث أ د ب فيه زاوية قائمة، وهي زاوية أ د ب،

فببرهان ١/١٧ تكون زاوية د أ ب حادة. وهي في قطعة د أ جـ ب التي هي أعظم من نصف دائرة.

وأيضاً فان زاوية أ ب د حادة لأنها في مثلث أ ب د القائم الزاوية. ومن أجل ان سطح أ ب د ز ذو أربعة أضلاع في دائرة أ ب، فببرهان ٣/٢١ فان كل زاويتين منه تتقابلان مساويتان لزاويتين قائمتين؛ وزاويتا أ ز د، أ ب د متقابلتان، فهما اذن جميعاً مساويتان لزاويتين قائمتين؛ وزاوية أ ب د منهما قد بينا انها حادة. فتبقى اذن زاوية أ ز د أعظم من زاوية قائمة. فهي اذن منفرجة. وهي في قطعة أ ز د التي هي أصغر من نصف دائرة.

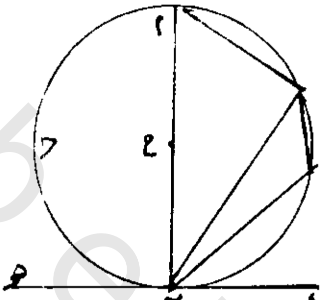
فقد تبين ان كل نصف دائرة فان الزاوية المستقيمة الخطين الواقعة على محيطها تكون قائمة. وكل قطعة هي أعظم من نصف دائرة فان الزاوية المستقيمة الخطين الواقعة فيها تكون حادة. وكل قطعة هي أصغر من نصف دائرة، فان الزاوية المستقيمة الخطين الواقعة على محيطها تكون منفرجة. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأيضاً أقول ان الزاوية التي يحيط بها قوس ب د ووتر د أ منفرجة. وهي زاوية قطعة أ ز د.

برهانه: انا نخرج خط ب د على الاستقامة إلى نقطة ح. فلأن زاوية أ د ب قائمة، فإنا متى رفعنا وتر ب د، كانت الزاوية التي يحيط بها قوس ب د وخط أ د أعظم من قائمة. فهي إذن منفرجة. ومن أجل ان خط أ د قائم على خط ب ح المستقيم، وزاوية أ د ب قائمة، فإن زاوية أ د ح أيضاً تكون قائمة. وذلك بيِّن ببرهان ١/١٣. فاذا أسقطنا الزاوية التي يحيط بها تقبب ز د، وخط د ح، بقيت الزاوية التي يحيط بها قوس ز د وخط أ د حادة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣١/٣ تقابل ٣١/٣ عند هيث]

الشكل الواحد والثلاثون من المقالة الثالثة



الشكل ٣١/٣

كل دائـرة ماسَّهـا خط مستقيم، وأخرج من نقطة المماسة خط آخر مستقيم يقطع الدائرة على غير المــركــز، فان الـزاويتين اللتين عن جنبتيه مساويتان للزاويتين اللتين تقعان في قطعتي الدائرة المتبادلتين.

مثاله: ان دائرة أ ب يماسّها خط د هـ على نقطة ب. وقد خرج من نقطة ب خط ب ز يقطع الدائرة على غير المركز. فأقول ان زاويتي ز ب د، ز ب هـ مساويتان للزاويتين اللتين تقعان في قطعتي ز أ جـ ب، ز ط ب: اما زاوية ز ب د فهي مساوية للزاوية التي تقع في قطعة ز أ جـ ب. وأما زاوية [٤٧ ب] ز ب هـ فمساوية للزاوية التي تقع في قطعة ب ط ز.

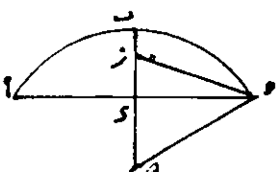
برهانه: انا نعلم على قوس ز ب علامة، أين وقعت منها. فننزل أنها علامة ط، ونخرج خطي ط ز، ط ب. ونستخرج مركز الدائرة، فننزل انها نقطة ح. ونخرج خط ب ح. فظاهر ببرهان ٣/١٧ ان خط أ ح ب قائم على خط د هـ، على زوايا قائمة على نقطة ب. فزاوية أ ب هـ قائمة. ومن أجل ان قطعة أ ز ب نصف دائرة. فببرهان ٣/٣ تكون زاوية أ ز ب قائمة. فاذا اخذنا زاوية أ ب ز مشتركة كان مجموع زاويتي أ ز ب، أ ب ز مساوياً لجميع زاوية ز ب هـ. لكن مجموع زاويتي ز ب هـ، ز ب د مساوٍ لزاويتين قائمتين، ولكن مجموع زوايا المثلث الثلاث، أعني زوايا أ ب ز، أ ز ب، ز أ ب مساوٍ لزاويتين قائمتين. فهي اذن مجموعة مثل زاويتي ز ب د، ز ب هـ. فاذا اسقطنا زاوية ز ب هـ بزاويتي أ ز ب، ز ب أ، بقيت زاوية ز ب د مساوية لزاوية ز أ ب؛ وهي في قطعة ز أ جـ ب.

ومن أجـل ان سطح أ ز ط ب ذو أربعة أضلاع في دائرة أ ب، فإن كل زاويتين منه تتقابلان مساويتان لزاويتين قائمتين. فزاويتا ز أ ب، ز ط ب إذن مساويتان لزاويتين قائمتين. فهما اذن مساويتان لزاويتي ز ب د، ز ب هـ. وقد بينا ان زاوية زَ أ ب مساوية لزاوية ز ب د. فيبقى زاوية ز ط ب مساوية لزاوية ز ب هـ؛ وهي في قطعة ب ط ز.

فقد تبين ان الزاويتين اللتين عن جنبتي خط ز ب مساويتان للزاويتين اللتين تقعان في قطعتي الدائرة المتبادلتين. وذلك ما أردنا ان نبين.

فان كان خط ز ب قطر الدائرة، فمن البين ان كل واحدة من الزاويتين اللتين عن جنبتيه قائمة ومساوية لكل واحدة من الزاويتين اللتين تقعان في نصف الدائرة.

شكـل لايرن: اذا كانت قطعة من دائرة معلومة، نريد ان نبين كيف نتم الدائرة التي القطعة منها:



الشكل ٢/٢١ ملحوم

فلتكن القطعة التي عليها أ ب جـ. ونقسم قوس أ ب جـ بنصفين على نقطة ب. ونخرج من نقطة ب إلى وتر أ جـ عمود ب د. ونخرج وتر ب جـ. ونعمل على نقطة جـ من خط ب جـ زاوية مساوية لزاوية د ب جـ. فان كانت الزاوية المعمولة المساوية لزاوية د ب جـ تقع مثل زاوية ب جـ د، فظاهر ان مركز الدائرة على نقطة د، وان قطعة أ ب جـ نصف دائرة. وان كانت الـزاوية المعمولة على نقطة جـ، المساوية لزاوية د ب جـ، تقع خارج قطعة أ ب جـ، كزاوية ب جـ هـ، فإن مركز الدائرة يقع خارج قطعة أ ب جـ، كنقطة هـ، فتكون القطعة أصغر من نصف دائرة. وان كانت الزاوية المعمولة على نقطة جـ المساوية لزاوية د ب جـ تقع داخل قطعة أ ب جـ، كزاوية ب جـ

ز فان مركز الدائرة يقع داخل قطعة أ ب جـ، على نقطة ز، فيظهر لنا ان القطعة المفروضة أعظم من نصف دائرة.

فإذن قد تبين كيف نتم القطعة المفروضة، وأين وقع المركز: على أ جـ، أو داخلها، أو خارجها. وذلك ما أردنا ان نبين.

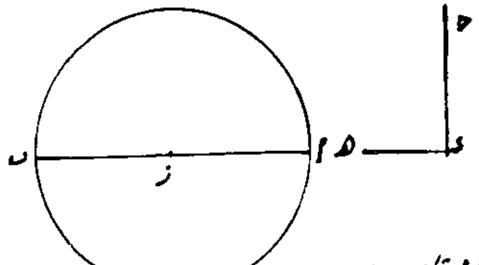
قال المفسر: قسم قوس أ جـ بنصفين ليظهر ان وتر قوس أ ب مساوٍ لوتر قوس ب جـ. لأنه لو قسم خط أ جـ بنصفين، لكان بمقتضى الشكل التاسع والعشرين، وهو كيف نقسم قوساً معلومة بنصفين، وكان ما كان يظهر له ان وتر قوس أ ب مساوٍ لوتر قوس ب جـ، الا بعد قسمته قوس أ ب جـ بنصفين، من الواجب جعل هذا الشكل بعد ذلك الشكل. وانما اراد ان يبين ان الزاوية التي عند أ مساوية للزاوية التي عند جـ اذا كانت الزاوية المعمولة على نقطة جـ تقع كزاوية ب جـ د، ليتبين أن خطوط د ب، د جـ، د أ متساوية [٤٨ أ] ولتكون النقطة مركز الدائرة؛ وأيضاً ليتبين له ان خط أ د مثل خط د جـ، ليتبين ان مركز الدائرة على خط ب د أو على الذي على استقامته.

[المبرهنة ٣٢/ ٣ تقابل ٣٣/ ٣ عند هيث]

الشكل الثاني والثلاثون من المقالة الثالثة

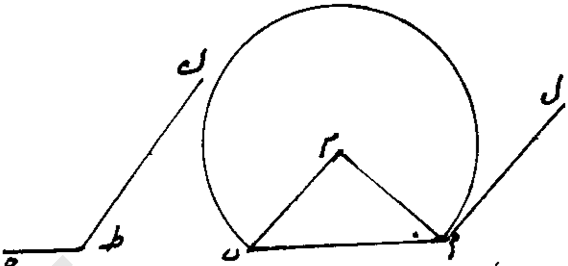
نريد ان نبين كيف نقيم على خط مستقيم معلوم قطعة من دائرة تقبل زاوية مثل زاوية معلومة، أي زاوية كانت: قائمة أو منفرجة، أو حادة.

مثاله: ان خط أ ب الخط المعلوم، والزاوية المعلومة القائمة زاوية جـ د هـ؛ والمنفرجة زاوية ح ط ك؛

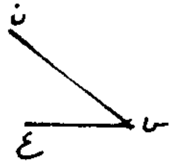


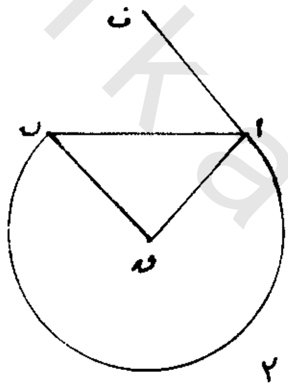
الشكل ٣٢/٢ الصورة ١

والحادة زاوية ن س ع . فنريد ان نبين كيف نقيم على خط أ ب قطعة من دائرة تقبل زاوية مساوية لزاوية جـ د هـ، ثم قطعة تقبل زاوية مساوية لزاوية ح ط ك، ثم قطعة تقبل زاوية مساوية لزاوية ن س ع : فنرسم خط أ ب في ثلاثة مواضع . ونبتدىء برسم الصورة الأولى : فنقسم خط أ ب بنصفين على نقطة ز، ونرسم على نقطة ز، وببعد ز أ أو ز ب دائرة أ ب . فمن أجل ان مركز دائرة أ ب على خط أ ب، فان خط أ ب قطر لدائرة أ ب، والقطر يقسم الدائرة بنصفين،



الشكل ٢/٢٢ الصورة ح





الشكل ٢/٢٢
الصورة ٢

كما بين سنبليقيوس في مصادرة المقالة الأولى . فكل واحدة من القطعتين اللتين على خط أ ب : نصف دائرة وقد تبين ببرهان ٣/٣٠ ان القطعة التي هي نصف دائرة : تقبل زاوية قائمة . فنصف الدائرة الذي على خط أ ب يقبل مثل زاوية جـ د هـ القائمة .

ونتلو بالصورة الثانية : فنعمل على نقطة أ من خط أ ب الثاني زاوية مساوية لزاوية ح ط ك المنفرجة، كما بين عمله ببرهان ١/٢٣ ، ولتكن زاوية ب أ ل . ونقيم على نقطة أ من خط أ ل خط أ م عموداً عليه . فظاهر ان زاوية ل أ م قائمة، وزاوية م أ ب حادة . ثم نعمل على نقطة ب من خط أ ب : زاوية أ ب م مساوية لزاوية ب أ م .

فمن أجل ان مثلث أ م ب زاويتاه اللتان فوق القاعدة متساويتان، فانه بحسب برهان ١/٦ يكون خط م أ مساوياً لخط م ب. فإذن الدائرة المخطوطة على مركز م، وببعد م أ تجوز على نقطتي أ، ب، ولا تقطع من خط أ ل، ولا الخط الذي على استقامته، شيئاً: لأنها متى قطعت منه شيئاً، كان الخط المستقيم القائم على طرف قطر م أ، على زوايا قائمة، يقع داخل الدائرة. وقد تبين ببرهان ٣/١٦ انه يقع خارج الدائرة، وانه مماس للدائرة. فخط أ ل اذن مماس للدائرة. ومن أجل ان خط أ ل يماسّ دائرة أ ب، وقد خرج من النقطة التي عليها المماسة: خط أ ب، فقطع الدائرة على غير المركز، فبحسب برهان ٣/٣١ تكون الزاوية التي تقع في قطعة أ ب الصغرى مساوية لزاوية ب أ ل المبادلة لها. لكن زاوية ب أ ل عملت مساوية لزاوية ح ط ك المنفرجة. فقد أقمنا على أ ب، في الصورة الثانية، قطعة أ ب الصغرى تقبل زاوية مساوية لزاوية ح ط ك المنفرجة. وذلك ما أردنا ان نبين.

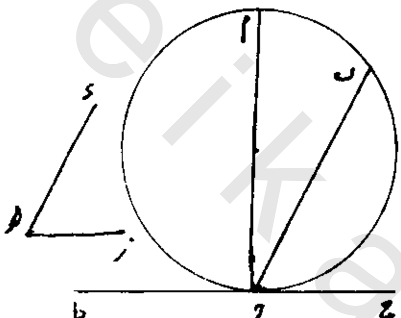
وبقي ان نبين كيف نعمل على خط أ ب الثالث قطعة دائرة تقبل زاوية مساوية لزاوية ن س ع الحادة. فنعمل على خط أ ب على نقطة أ زاوية ب أ ف مساوية لزاوية ن س ع. فمن أجل ان زاوية ن س ع حادة، تكون زاوية ب أ ف حادة. وأيضاً نقيم على نقطة أ من خط أ ف: عمود أ ق. فزاوية ب أ ق حادة. فنعمل على نقطة ب من خط أ ب زاوية أ ب ق مساوية لزاوية ب أ ق. فمن أجل ان زاويتي أ، ب متساويتان، فإن ساقي ق أ، ق ب متساويتان فالدائرة المرسومة على نقطة ق وببعد ق أ تمر بنقطتي أ، ب ولا تقطع من خط أ ف، ولا الخط الذي على استقامته شيئاً، ولتكن دائرة أ ب. ومن أجل ان خط أ ق قائم على طرف قطر ق أ على زوايا قائمة، فبحسب برهان ٣/١٦، يكون خط أ ف مماساً لدائرة أ ب من خارج، ومن أجل ان خط أ ف مماس دائرة أ ب، وقد خرج من نقطة المماسة: خط أ ب، فقطع الدائرة، على غير المركز، فإنه، ببرهان ٣/٣١، تكون الزاوية التي تقع في قطعة أ ب العظمى مساوية لزاوية ن

س ع. فقد أقمنا على خط أ ب المعلوم: قطعة أ ب العظمى تقبل زاوية مثل زاوية ن س ع الحادة المعلومة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٣/٣ تقابل ٣٤/٣ عند هيث]

[٤٨ ب] الشكل الثالث والثلاثون من المقالة الثالثة

نريد ان نبين كيف نفصل من دائرة معلومة قطعة تقبل زاوية مساوية لزاوية معلومة.



الشكل ٢٢/٢

فننزل ان الدائرة المعلومة دائرة أ ب جـ، والزاوية المعلومة زاوية د هـ ز. ونريد ان نبين كيف نفصل من دائرة أ ب جـ قطعة تقبل زاوية مساوية لزاوية د هـ ز. فنجيز على أي نقطة أردنا من النقط التي على محيط دائرة أ ب جـ خطاً يماس الدائرة. فننزل ان النقطة نقطة جـ، ونجيز عليها خط ح ط يماس دائرة أ ب جـ، وذلك بحسب ما بينا ببرهان ١٦/٣، وهو انا نجيز على نقطة جـ قطر الدائرة، ونقيم على طرف القطر الذي عند نقطة جـ خطاً على زاوية قائمة، وهو خط ح ط. فخط ح ط اذن هو مماس للدائرة. ونعمل على نقطة جـ من خط ح ط زاوية مساوية لزاوية د هـ ز، ولتكن زاوية ب جـ ح.

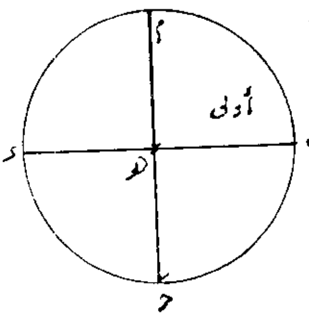
فمن أجل ان خط ح ط يماس دائرة أ ب جـ، وقد خرج من العلامة التي عليها المماسة: خط جـ ب، فقطع الدائرة على غير المركز، فمن البين، ببرهان ٣١/٣ ان زاوية ب جـ ح مساوية للزاوية التي تقع في سقطعة ب أ جـ المبادلة لها. لكنا عملنا زاوية ب جـ ح مساوية لزاوية د هـ ز. فالزاوية التي في قطعة ب أ جـ مساوية لزاوية د هـ ز. فقد فصلنا من دائرة أ ب جـ قطعة ب أ جـ تقبل زاوية مساوية لزاوية د هـ ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٤/٣ تقابل ٣٥/٣ عند هيث]

الشكل الرابع والثلاثون من المقالة الثالثة

كل وترين يتقاطعان في دائرة، فإن السطح القائم الزوايا الذي يحيط به أحد قسمي الخطين مع قسمة الآخر: مساوٍ للسطح القائم الزوايا الذي يحيط به أحد القسمين من الخط الآخر، مع قسمة الآخر.

هذا التقـاطـع له ست جهـات: امـا ان يكون التقاطع لهما جميعاً على المركز، واما ان يكون أحدهما يمر بالمركز ويقاطع الآخر بنصفين على زوايا قائمة. واما ان يمر احدهما على المركز ولا يقاطع الآخر بنصفين. واما ان لا يمر بالمركز ويقاطع أحدهما الآخر بنصفين. واما ان لا يمر بالمركز و لايقاطع أحدهما الآخر بنصفين ولا على زوايا قائمة. واما ان لا يمر بالمركز ولا يقاطع أحدهما الآخر بنصفين، لكنهما يتقاطعان على زوايا قائمة.

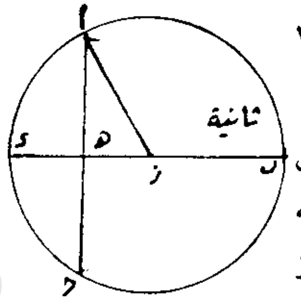


فنجعل اذن لذلك ست صور متوالية أولى وثانية وثالثة ورابعة وخامسة وسادسة. ولتكن ست دوائر على كل دائرة منها أ ب، جـ د:

فلتكن الدائرة الأولى عليها أ ب، جـ د، يتقاطع فيها القطران على مركز هـ. فأقول ان القائم الزوايا الذي يحيط به قسما أ هـ، هـ جـ مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحط به قسما ب هـ، هـ د.

برهـانه: من أجل ان نقطة هـ مركز لدائرة أ ب جـ د، فالخطوط الأربعة متساوية: هـ أ، هـ ب، هـ جـ، هـ د، لأنها خرجت من المركز إلى المحيط. فالقائم الزوايا الذي يحيط به قسما أ هـ، هـ جـ مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

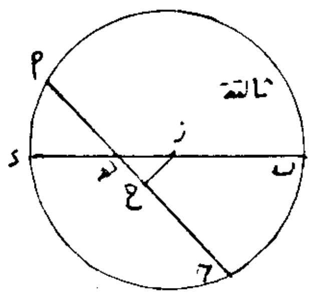
وأيضاً فإنه في الصورة الثانية قاطع قطر ب د وتر أ جـ بنصفين على نقطة هـ. فظاهر ببرهان ٣/٤ أنهما يتقاطعان على زوايا قائمة. ومركز الدائرة ز. فنصل أ ز. فمن أجل ان خط ب د قد قسم بنصفين على نقط ز، وبقسمين مختلفين على نقطة هـ، فإنه بحسب برهان ٣/٥ يكون القائم الزوايا الذي يحيط



به خطا ب هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط ز هـ مساوياً للمربع الكائن من خط ز د. لكن خط أ ز مساوٍ لخط ز د. فإذن القائم الزوايا يحيط به خطا ب هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط ز هـ مساوٍ للمربع الكائن [٤٩ أ] من خط أ ز.

لكن بحسب برهان ١/٤٦ فان المربع الكائن من خط أ ز مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي ز هـ، هـ أ. فاذا اسقطنا المربع الكائن من خط ز هـ، بقي القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مساوٍ للمربع الكائن من خط أ هـ. لكن خط أ هـ مساوياً لخط هـ جـ. والقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به أ هـ، هـ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأيضاً في الصورة الثالثة تقاطع قطر ب د ووتر أ جـ على زوايا غير قائمة، على نقطة هـ. فيتبين ببرهان ٣/٣ ان نقطة هـ ليست على منتصف وتر أ جـ. فليكن خط جـ هـ أعظم من خط أ هـ. ونخرج من المركز، وهو نقطة ز، الى خط أ جـ عمود ز ح، كما بين إخراجه ببرهان ١/١٢. فظاهر ببرهان ٣/٣

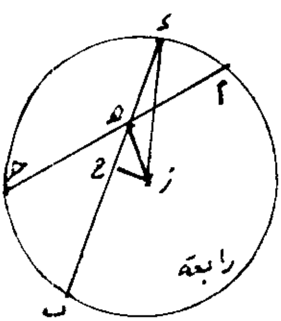


ان عمود ز ح يقسم وتر أ جـ بنصفين على نقطة ح وبقسمين مختلفين على نقطة

هـ. فببرهان ٢/٥ يكون القائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ، مع المربع الكائن من خط ح هـ مساوياً للمربع الكائن من خط أ ح. ونأخذ مربع خط ز ح مشتركاً: فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ مع المربعين الكائنين من خطي هـ ح، ز ح: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطّي ز ح، ح أ. لكن بحسب برهان ١/٤٦ فان مجموع المربعين الكائنين من خطي ز ح، ح أ مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د المساوي ز أ. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ، مع المربعين الكائنين من خطي هـ ح، ز ح: مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د. وايضاً فبحسب برهان ١/٤٦ فان مجموع المربعين الكائنين من خطي ح ز، ح هـ مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د.

وأيضاً فان خط ب د قد قسم بنصفين على نقطة ز، وبقسمين مختلفين على نقطة هـ. فبحسب برهان ٢/٥٤ فإن القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط ز هـ مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د.

فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط ز هـ إذن مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ مع المربع الكائن من خط ز هـ. فاذا القينا المربع الكائن من خط ز هـ، المشترك، بقي القائم الزوايا الذي يحيط به جـ هـ، هـ أ مساوياً للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.



وأيضاً في الصورة الرابعة: تقاطع وترا أ جـ، ب د على غير المركز، لكن قطع أحدهما الآخر بنصفين. فنتزل ان خط ب د قاطع أ جـ بنصفين على علامة هـ. فأقول ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا [ب هـ، هـ د مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا] أ هـ، هـ جـ.

برهانه: من أجل ان خط ب د قاطع أ جـ بنصفين على نقطة هـ، فإن خط

أ جـ غير قاطـع لخط ب د بنصفين، لأنه قد تبين ببرهان ٣/٤ ان كل وترين يتقاطعان في دائرة، ولا يجوزان على المركز، فليس يقطع كل واحد منهما الآخر بنصفين. فخط أ جـ اذن يقـطع خط ب د بقسمين مختلفين. فلننزل القسم الأعظم خط ب هـ. ونخرج من المركز، الذي هو نقطة ز، عموداً الى خط د ب، وليكن عمود ز ح. ونخرج خطوط ز هـ، ز أ، ز د.

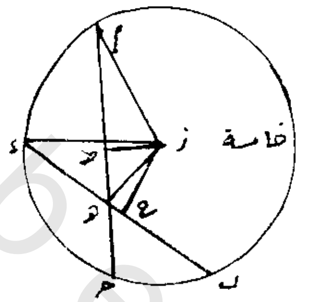
فمن أجل ان خط ب د قد انقسم بنصفين على علامة ح [٤٩ ب] وبقسمين مختلفين على علامة هـ. فبحسب برهان ٢/٥ فان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د، مع المربع الكائن من خط ح هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط ح د. ونأخذ مربع خط ز ح مشتركاً: فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مع المـربعين الكـائنين من خطي ح هـ، ح ز: مسـاوٍ لجميع المربعين الكائنين من خطي ح ز، ح د. لكن مجموع المربعين الكائنين من خطي ز ح، ح هـ مساوٍ للمربع الكائن من خط ز هـ.

فيكون القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د، مع المربع الكائن من خط هـ ز: مساوياً لمجموع المربعين الكائنين من خطي ز ح، ح د. لكن بحسب برهان ١/٤٦ فإن مجموع المربعين الكائنين من خطي ز ح، ح د مساوٍ للمربع الكائن من خط أ ز، المساوي لخط ز د.

فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د، مع المربع الكائن من خط ز هـ اذن مساوٍ للمربع الكائن من خط أ ز. ومن أجل ان نقطة هـ منتصف خط أ جـ، وقد خرج من نقـطة ز، التي هي المركز، اليه خط ز هـ، فظاهر بحسب برهـان ٣/٣ ان زاوية أ هـ ز قائمة. فمجموع المربعين الكائنين من خطي ز هـ، هـ أ: مساوٍ للمربع الكائن من خط أ ز.

فاذا اسقطنا المربع الكائن من خط ز هـ المشترك، بقي القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مساوياً للمربع الكائن من خط أ هـ. لكن أ هـ مساوٍ

لخط هـ جـ. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د إذن مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ هـ، هـ جـ وذلك ما أردنا ان نبين.



وأيضاً في الصورة الخامسة تقاطع وترا أ جـ، ب د على نقطة هـ، ولا واحد منهما يمر بالمركز، ولا أحدهما يقطع الآخر بنصفين. فأقول: ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د: مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ هـ، هـ جـ

برهانه: انا نستخرج المركز، وليكن نقطة ز، ونخرج عمودي ز ح، ز ط الى خطي ب د، جـ أ. ونخرج خطوط ز أ، ز د، ز هـ. فظاهر بحسب ما بينا قبل، ان ب ح مساوٍ لخط ح د، وخط جـ ط مساوٍ لخط أ ط.

فمن أجل ان خط أ جـ قد انقسم بنصفين على نقطة ط، وبقسمين مختلفين على نقطة هـ، فبحسب برهان ٢/٥ يكون: القائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ، مع المربع الكائن من خط ط هـ مساوياً للمربع الكائن من خط ط أ. فاذا أخذنا المربع الكائن من خط ز ط مشتركاً، كان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ مع مجموع المربعين الكائنين من خطي ط هـ، ط ز: مساوياً لمجموع المربعين الكائنين من خطي أ ط، ط ز

لكن مجموع المربعين الكائنين من خطي ط هـ، ط ز: مساوٍ للمربع الكائن من خط ز هـ. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ مع المربع الكائن من خط ز هـ: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي ز ط، ط أ. لكن مجموع المربعين الكائنين من خطي ز ط، ط أ مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د المساوي لخط ز أ، لأن زاوية أ ط ز قائمة. وذلك بين ببرهان ١/٤٦.

فالقائم الزوايا الذي يحيط به خط جـ هـ، مع هـ أ مع المربع الكائن من

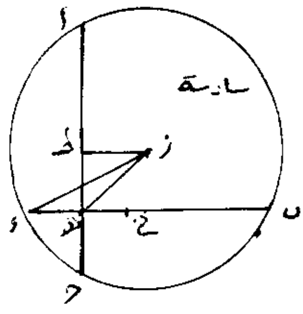
خط ز هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د.

وأيضاً فان خط ب د قد انقسم كما بينا بنصفين على علامة ح، وبقسمين مختلفين على علامة هـ.

فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط هـ ح مساوٍ للمربع الكائن من خط ح د. ونأخذ خط ح ز مشتركاً. فالقائم الزوايا الذي يحيط به [٥٠ أ] خطا ب هـ، هـ د مع مجموع المربعين الكائنين من خطي ح هـ، ح ز: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي ح ز، ح د. ولكن مجموع المربعين الكائنين من خطي ح ز، ح هـ مساوٍ للمربع الكائن من خط ز هـ.

فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د، مع المربع الكائن من خط ز هـ: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي ح ز، ح د. لكن مجموع المربعين الكائنين من خطي ح ز، ح د مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د، مع المربع الكائن من خط ز هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د.

وقد كنا بينا ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ، مع المربع الكائن من خط ز هـ مساوٍ أيضاً للمربع الكائن من خط ز د. فاذا أسقطنا المربع الكائن من خط ز هـ، بقي القائم الزوايا الذي يحيط به خطا جـ هـ، هـ أ: مساوياً للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د وذلك ما أردنا ان نبين.



وأيضاً في الصورة السادسة: تقاطع وترا أ جـ، ب د على نقطة هـ. وليس واحد منهما على المركز، لكنهما يتقاطعان على زوايا قائمة، على نقطة هـ. فأقول ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ هـ، هـ جـ مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د.

برهانه: انا نستخرج مركز الدائرة، وليكن نقطة ز، ونخرج منها إلى خطي أ جـ، ب د عمودي ز ح، ز ط فظاهر انهما يقسمان خطي أ جـ، ب د، كل واحد منهما بنصفين.

فخط ب د قد انقسم بنصفين على نقطة ح، وبقسمين مختلفين على نقطة هـ. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د، مع المربع الكائن من خط ح هـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط ح د.

فاذا أخذنا خط ز ح مشتركاً كان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د، مع المربعين الكائنين من خطي ح هـ، ح ز: مساوياً لمجموع المربعين الكائنين من خطي ز ح، ح د.

لكن مجموع المربعين الكائنين من خطي ز ح، ح هـ مساوٍ للمربع الكائن من خط ز هـ، فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط ز هـ: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي زح، ح د. لكن مجموع المربعين الكائنين من خطي ز ح، ح د مساوٍ للمربع الكائن من خط ز جـ المساوي لخط ز د، لأن زاوية ز ح د قائمة.

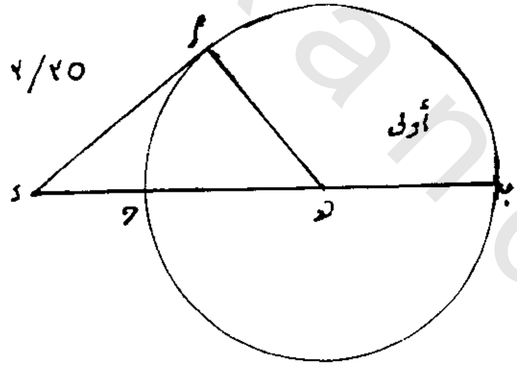
وبمثل هذا البرهان نبين ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ هـ، هـ جـ، مع المربع الكائن من خط ز هـ: مساوٍ للمربع للكائن من خط ز جـ فيكون القائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ هـ، هـ جـ، مع المربع الكائن من خط هـ ز: مساوياً للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مع المربع الكائن من خط هـ ز. فاذا أسقطنا المربع الكائن من خط هـ ز، بقي القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب هـ، هـ د مساوياً للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ هـ، هـ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٣٥ تقابل ٣/٣٦ عند هيث]

الشكل الخامس والثلاثون من المقالة الثالثة

كل علامة مفروضة خارج دائرة يخرج منها خطان مستقيمان، أحدهما يقطع الدائرة، والآخر يماسُّها، فان السطح القائم الزوايا الذي يحيط به الخط القاطع للدائرة وقسمه الذي يقع خارج الدائرة مساوٍ للمربع الكائن من الخط المماس للدائرة.

[٥٠ ب] وهذا ينقسم إلى ثلاثة أوضاع: اما ان يكون وضع الخط القاطع على مركز الدائرة؛ واما ان يكون في النصف الذي بين المركز وبين المماس للدائرة؛ واما ان يكون في النصف الآخر.



ومثاله: انا ننزل دائرة أ ب على الوضع الأول، وننزل ان خارجاً منها علامة د، وقد خرج منها إلى الدائرة خطان، احدهما يقطعها ويجوز على مركزها وينتهي إلى محيطها، وهو خط د جـ ب؛ والآخر يماسها على نقطة أ، وهو خط د أ. فأقول ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د.

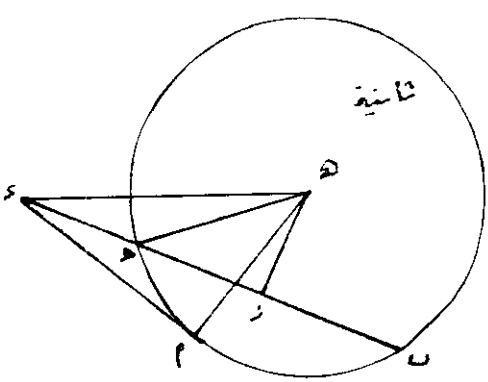
برهانه: انا ننزل ان مركز الدائرة علامة هـ، ونخرج هـ أ. فظاهر بحسب برهان ٣/١٧ ان زاوية د أ هـ قائمة، وذلك لأن خط أ د فرض مماساً للدائرة على نقطة أ، وقد خرج من نقطة أ إلى مركز الدائرة خط أ هـ. فهو اذن عمود على خط أ د. فبحسب برهان ١/٤٧ فإن مجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، أ هـ مساوٍ للمربع الكائن من خط د هـ.

ومن أجل ان خط ب جـ قد قسم بنصفين على نقطة هـ، وزيد في طوله خط جـ د، فإنه بحسب برهان ٢/٦ يكون القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المربع الكائن من خط جـ هـ مساوياً للمربع الكائن من خط هـ د.

وقد كنا بينا ان المربع الكائن من خط د هـ مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي د أ، أ هـ.

فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المربع الكائن من خط جـ هـ مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي أ هـ، أ د، لكن المربع الكائن من خط أ هـ مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ جـ. فاذا اسقطناهما من الجهتين، بقي القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوياً للمربع الكائن من خط أ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأيضاً فانا ننزل دائرة أ ب على الوضع الثاني، وان علامة د مفروضة خارجها، وقد خرج منها خط د جـ ب يقطع الدائرة وينتهي إلى أخمصها. وخط أ د يماسها على نقطة أ. فأقول ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د.



برهانه: انا نستخرج مركز الدائرة، كما بين ببرهان ١/٣ ونخرج خطوط د هـ، هـ أ، هـ جـ. ونخرج من نقطة هـ إلى خط جـ ب عمود هـ ز، كما بين إخراجه ببرهان ١/١٢ فظاهر بما بين ببرهان ٣/٣ ان خط هـ ز يقسم خط ب جـ بنصفين. فخط ب جـ قد انقسم على نقطة ز بنصفين، وقد زيد في طوله خط جـ د. فنبين ببرهان ٢/٦ ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المربع الكائن من خط جـ ز مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د.

فاذا أخذنا المربع الكائن من خط ز هـ مشتركاً، كان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ، مع المربعين الكائنين من خطي جـ ز، ز هـ مساوياً للمربعين الكائنين من خطي ز هـ، ز د.

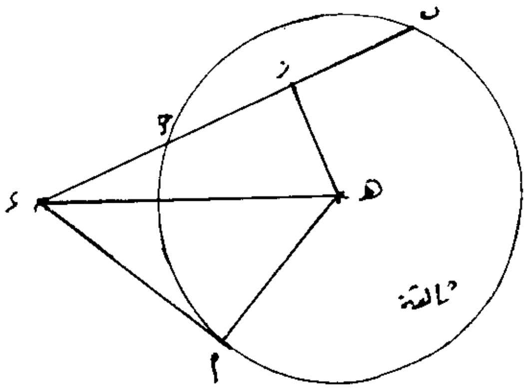
لكن مجموع المربعين الكائنين من خطي ز هـ، ز جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ جـ.

فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المربع الكائن من خط هـ جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د. وذلك بين ببرهان ١/٤٧، لأن زاوية هـ ز د [٥١ أ] قائمة.

فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ، مع المربع الكائن من خط هـ جـ، إذن، مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د. ومن أجل ان خط أ د يماس دائرة أ ب على نقطة أ، وقد خرج من نقطة أ إلى المركز خط أ هـ على زوايا قائمة، فبحسب برهان ٣/١٧ فان زاوية د أ هـ قائمة. وبحسب برهان ١/٤٦ يكون مجموع المربعين الكائنين من خطي د أ، أ هـ مساوياً للمربع الكائن من خط هـ د.

وقد كنا بينا ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المربع الكائن من خط هـ جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط د هـ. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المربع الكائن من خط هـ جـ، إذن، مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي هـ أ، أ د. ومن أجل ان خط هـ أ مساوٍ لخط هـ جـ فان مربعيهما متساويان. فاذا اسقطناهما من الجهتين، بقي القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوياً للمربع الكائن من خط أ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأيضاً فانا ننزل ان دائرة أ ب على الوضع الثالث، ونقطة د خارجة عنها، وقد خرج منها إلى الدائرة خطا د جـ ب، د أ. أما خط د جـ ب فانه يقطعها وينتهي إلى أخمصها، إلى نقطة ب. وأما خط د أ فيماسها على نقطة أ. فأقول ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د.



برهانه: انا نستخرج المركز، وليكن نقطة هـ ونخرج خطوط د هـ، هـ جـ، هـ أ. ونخرج من نقطة هـ خط هـ ز يقسم خط ب جـ على زوايا قائمة. فبين حسب برهان ٣ من ٣ انه يقسمه بنصفين.

فخط ب جـ قد انقسم بنصفين على نقطة ز؛ وقد زيد في طوله خط جـ د. فبحسب برهان ٦ من ٢ فان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ، مع المربع الكائن من خط جـ ز: مساوٍ للمربع الكائن من خط ز د. فاذا أخذنا خط ز هـ مشتركاً، كان القائم الزوايا الذي يحيط ب خطا ب د، د جـ، مع مجموع المربعين الكائنين من خطي جـ ز، ز هـ: مساوياً لمجموع المربعين الكائنين من خطي ز هـ، ز د.

لكن بحسب برهان ١/٤٦ يكون مجموع المربعين الكائنين من خطي ز هـ، مساوياً للمربع الكائن من خط هـ د؛ لان زاوية هـ ز د قائمة فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ، مع المربع الكائن من خط هـ جـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د.

ومجموع المربعين الكائنين من خطي هـ أ، أ د أيضاً مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فمجموع المربعين الكائنين من خطي هـ أ، أ د مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ، مع المربع الكائن من خط هـ جـ. ومن أجل ان خط هـ جـ مساوٍ لخط هـ أ، فان مربعيهما

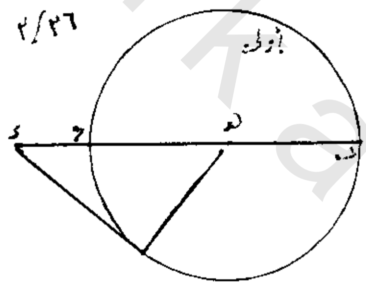
متساويان. فاذا أسقطناهما من الجهتين، بقي القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوياً للمربع الكائن من خط أ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٦/ ٣ تقابل ٣٧/ ٣ عند هيث]

الشكل السادس والثلاثون من المقالة الثالثة

كل علامـة مفروضة خارج دائرة، يخرج منها الى الدائرة خطان مستقيمان، أحدهما يقطع الدائرة وينتهي الى أخمصها، والآخر يلقى تقببها فقط، وكان السطح الذي يحيط به الخط القاطع وقسمه الخارج من الدائرة مساوياً للمربع الكائن من الخط الملاقي لتقبب الدائرة، فان الملاقي للدائرة مماس للدائرة.

٢/٣٦



ونعيد الصـورة الأولى من الصـور الثلاث المتقدمة، فأقول: اذا كانت نقطة د خارجة من دائرة أ ب، وخرج منها خطان احدهما خط د جـ ب، وهو يقطع الدائرة؛ والآخر كخط أ د ينتهي الى تقببها، الى نقطة أ، وكان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، جـ د مساوياً للمربع الكائن من خط أ د [٥١ ب] فان خط أ د يماس دائرة أ ب على نقطة أ.

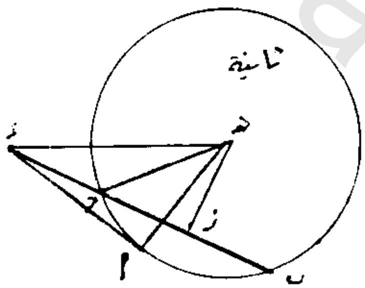
برهانه: انا نصل خط أ هـ. فمن اجل ان خط ب جـ انقسم بنصفين على نقطة هـ، وزيد في طوله خط جـ د، فإن القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ، مع المربع الكائن من خط هـ جـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د. لكن مربع خط هـ جـ مساوٍ لمربع خط هـ أ. والقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ, مساوٍ للمربع الكائن من خط د أ. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المـربـع الكائن من خط هـ جـ: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي هـ أ، أ د. وقد كنا بينا ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المربع الكائن من خط هـ جـ: مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ

د. فالمربع الكائن من خط هـ د اذن مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي أ هـ، أ د.

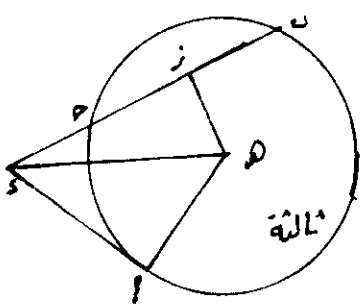
وكل مثلث يكون مجموع المربعين الكائنين من الخطين اللذين يحيطان بإحدى زواياه مساوياً لمربع الخط الذي يوتر تلك الزاوية، فإن تلك الزاوية قائمة. وذلك بين ببرهان ١/١٧ فزاوية هـ أ د اذن قائمة.

وكل خط يخرج من طرف قطر دائرة على زوايا قائمة، فإن ذلك الخط مماس للدائرة. وذلك بين ببرهان ٣/١٥ فخط أ د اذن يماس دائرة أ ب على نقطة أ. وذلك ما أردنا ان نبين.

فلنعد رسم الصورة الثانية فأقول: اذا كان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوياً للمربع الكائن من خط أ د، فان زاوية د أ هـ قائمة.



برهانه: من أجل أنه في رسم الصورة الثانية قد تبين ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ، مع المربع الكائن من خط هـ جـ، مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د؛ وظاهر أيضاً ان المربع الكائن من خط هـ جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ أ؛ والقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د، فمجموع المربعين الكائنين من خطي أ د، أ هـ مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د. فبين بحسب ما بينا في الشكل المتقدم ان زاوية هـ أ د قائمة. فخط أ د مماس لدائرة أ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.



ونعيد أيضاً رسم الصورة الثالثة فأقول: اذ كان القائم الزوايا الذي يحط به خطا ب د، د ج مساوياً للمربع الكائن من خط أ د، فان زاوية أ هـ قائمة.

برهانه: من أجل أنه في رسم الصورة الثالثة قد تبين ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطاب د، د جـ، مع المربع الكائن من خط هـ جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د، ومربع هـ جـ مساوٍ لمربع خط هـ أ، لأنهما متساويان وفرضنا على ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط أ د، فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ، مع المربع الكائن من خط هـ جـ مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من خطي هـ أ، أ د.

لكنا قد بينا ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب د، د جـ مع المربع الكائن من خط هـ جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د. فمجموع المربعين الكائنين من خطي هـ أ، أ د مساوٍ للمربع الكائن من خط هـ د. فبحسب برهان ١٧/١ تكون زاوية هـ أ د قائمة.

وبحسب برهان ٣/٢٠ فان خط أ د مماس لدائرة أ ب على نقطة أ. وذلك ما أردنا ان نبين.

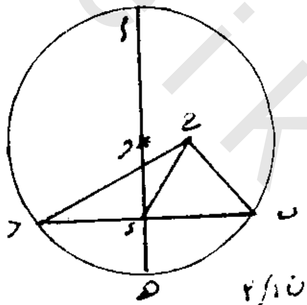
تمت المقالة الثالثة من كتاب اوقليدس. . . .

والحمد لله وصلى الله على محمد وآله وسلم

ج ـ مُبَرهنات النَّسَوي

[المبرهنة ١/ ٣] [تقابل ١/ ٣ عند الحجاج]

نريد ان نجد مركز دائرة كدائرة أ ب جـ. فنصل وتر ب جـ، وننصفه على د. ونخرج عمود د أ، ونخرجه إلى هـ. وننصف أ هـ على و. أقول ان و مركز الدائرة.



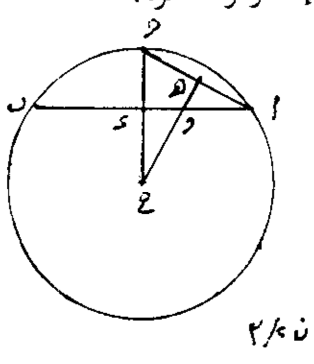
لا يمكن غيره. فإن أمكن، فليكن ح. ونصل جـ ح، د ح، ب ح. فـ جـ د مثل د ب، د ح مشترك، وقاعدة ب ح مثل جـ ح. فزاوية ب د ح مثل زاوية جـ د ح. فهما قائمتان. لكن زاوية جـ د م قائمة. فزاوية جـ د ح العظمى مثل زاوية جـ د أ الصغرى. هذا خلف. فنقطة و مركز الدائرة، وذلك ما أردنا ان نبين.

ن ١/٢

وقد تبين ان كل وتر يقسم بنصفين، ويخرج من موضع القسمة عمود، فعليه يكون المركز.

[المبرهنة ٢/ ٣ تقابل ٢٤/ ٣ عند الحجاج]

اذا كانت قطعة من دائرة، نريد ان نتمم دائرتها: كقطعة أ جـ ب. فنصل أ ب، وننصفه على د ونخرج عمود د جـ، ونصل أ جـ، وننصفه على هـ ونخرج عمود هـ و، وننفذه وننفذ جـ د فيلتقان على ح. أقول إنه مركز الدائرة.

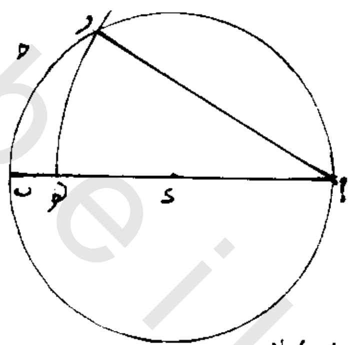


برهانه: لأن جـ و عمود على أب منصف له، فالمركز عليه اذا أخرج. وكذلك يكون المركز على هـ و اذا أخرج. فتقاطعهما، وهو [١٧ و] نقطة ح، اذن مركز الدائرة. وذلك ما أردنا ان نتمم.

ن ٢/٢

[المبرهنة ٣/٣]

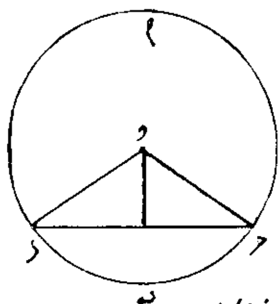
نريـد أن نخـط في دائـرة مفـروضـة، كدائـرة أ ب، وتراً مثل خط مفروض، ليس بأعظم من قطر الدائرة كخط ح جـ. فنخط قطراً أ د ب. فان كان مثل خط جـ فهو المطلوب وان كان أعظم منه، نفصل منه مثل جـ، وهو أ هـ، ونديرِ على مركز أ، وببعد أ هـ: قوس و هـ، أقول ان أ و مثل جـ، لأن أ و مثل أ هـ، أ هـ مثل جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.



ن ٢/٢

[المبرهنة ٣/٤ تقابل ٣/٣ عند الحجاج]

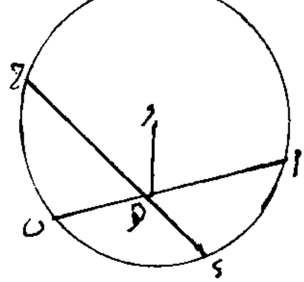
اذا أخرج من مركز دائرة خط، فنصف وتراً في الدائرة، فانه عمود على الوتر. وعكسه. كما في دائرة أ ب: وتر أ د، وقد نصفه و هـ. أقول انه عمود على جـ د. المركز و. نصل و جـ، و د فَـ جـ هـ مثل د هـ، و جـ مثل و د، هـ و مشترك في مثلثي و جـ هـ، و هـ د. فزاوية جـ هـ و مثل زاوية [١٧ ظ] د هـ و. فهما إذن قائمتان. ثم ليكن و هـ عموداً على جـ د. أقول انه ينصفه: لأن و جـ مثل و د، وزاويتا جـ، د متساويتان. فليكون جـ هـ مثل هـ د وذلك ما أردنا أن نبين.



ن ٤/٢

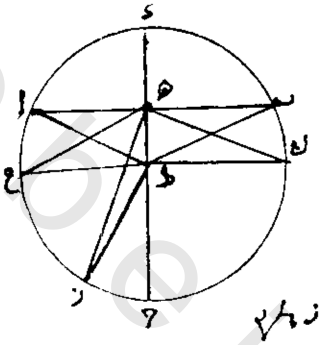
[المبرهنة ٣/٥ تقابل ٣/٤ عند الحجاج]

كل وترين يتقاطعان في دائرة، فليسا يتقاطعان نصفين نصفين كوتري أ ب، جـ د، فأن أمكن فليتقاطعا على هـ بنصفين نصفين، ونخرج من و، وهي المركز، خط و هـ. فانـه ينصف خطي أ ب، جـ د على زاوية قائمة، فزاوية و هـ جـ قائمة، وكذلك زاوية و هـ ب. هذا خلف.



فاما ان ينصف أحدهما الآخر، فهذا ممكن، كما نصَّف جـ د: أ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٦ تقابل ٣/٧ عند الحجاج]



كل نقطة في دائرة، غير المركز، يخرج منها خطوط إلى المحيط، فأطولها ما يمر بالمركز. وما قرب منه أطول مما بعد. وأقصرها تمام القطر من تلك النقطة. وخطان فقط عن جنبتي الأقصر متساويان. كنقطة هـ في دائرة أ ب، وخطوط هـ ز، هـ ح، هـ أ، هـ جـ. أقول [١٨ و]: ان هـ جـ الذي يمر بالمركز، وهو ط، أطولها وَ هـ د، وهو تمام القطر: أقصرها. وأما سائرها فان هـ ز أطول من هـ ح، هـ ح أطول من هـ أ. وإن هـ أ، هـ ب عن جنبتي الأقصر متساويان.

فنخرج ط ز، ط ح، ط أ. فضلعا ز ط، ط هـ من مثلث ز ط هـ: أطول من هـ ز. وفي مثلثي ز ط هـ، هـ ط ح: ضلع ز ط مثل ط ح، ط هـ مشترك، وزاوية ز ط هـ أعظم من زاوية ح ط هـ. فضلع هـ ز أطول من هـ ح.

وفي مثلثي ط هـ ح، ط هـ أ: ضلع ط ح مثل ط أ، ط هـ مشترك، وزاوية هـ ط ح أعظم من زاوية هـ ط أ. فَـ هـ ح أطول من هـ أ.

وأيضاً مجموع هـ أ، هـ ط أطول من أ ط، وَ أ ط مثل ط د. يلقى هـ ط المشترك. فيبقى هـ أ أطول من هـ د.

ونعمل زاوية هـ ط ب مثل زاوية أ ط هـ، ونصل هـ ب: أ ط مثل ط ب، ط هـ مشترك، وزاوية أ ط هـ مثل زاوية هـ ط ب. فَـ هـ أ مثل هـ ب. وهما عن جنبتي الأقصر. وليس يمكن ان نخرج من هـ إلى المحيط مثل هـ أ الا هـ ب.

فان أمكن فليكن هـ ك. ونصل ط ك. فَ أ هـ مثل هـ ك، أ ط مثل ط ك، ط هـ مشترك فزاوية أ ط هـ زاوية ك ط هـ. ولكن زاوية أ ط هـ مثل زاوية ب ط

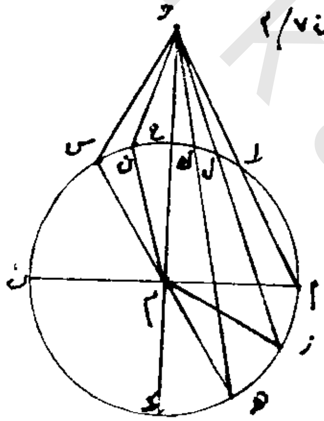
هـ . فزاوية ك ط هـ مثل زاوية [١٨ ظ] ب ط هـ . العظمى مثل الصغرى، وذلك محال . وذلك ما أردنا ان نبين .

وقد تبين انه ليس يخرج من نقطة غير المركز، في دائرة، الى محيطها : ثلاثة خطوط متساوية . فقد تبين أن كل نقطة في دائرة يخرج منها أكثر من خطين متساويين الى المحيط، فإن تلك النقطة تكون مركز الدائرة .

[المبرهنة ٣/٧ : يقابل ٣/٨ عند الحجاج]

كل نقطة خارج دائرة يخرج منها خطوط تدخل الدائرة، فإن أطولها يمر بالمركز★ . ثم ما قرب منه أطول مما بعد عنه . وخطان فقط عن جنبتي الأقصر متساويان .

ن ٧/٢



كنقطة جـ : خرج منها الى دائرة أ ب خطوط جـ د، جـ هـ، جـ ز، جـ أ؛ جـ د هو الذي يمر بالمركز، وهو م . فأقول إنه أطول الخطوط الداخلة، وأن جـ هـ أطول من جـ ز؛ جـ ز أطول من جـ أ؛ وأقصر الخطوط الخارجة جـ ح الذي بين النقطة وطرف القطر؛ وأن جـ ك أقصر من جـ ل، جـ ل أقصر من جـ ط .

فنخرج خطوط م هـ، م ز، م أ، م ط، م ك .

فمجموع هـ م، م جـ أطول من جـ هـ؛ م هـ مثل م د . فـ د جـ أطول من هـ جـ .

وفي مثلثي هـ م جـ، ز م جـ : ضلع م هـ مثل ضلع م ز؛ م جـ مشترك؛ وزاوية هـ م جـ أعظم من زاوية ز م جـ . فَ هـ جـ أطول من ز جـ .

وفي مثلثي ز م جـ، أ م جـ : ضلع م ز مثل ضلع م أ؛ م جـ مشترك؛ وزاوية ز م جـ أعظم من زاوية أ م جـ . فَ ز جـ أطول من أ جـ .

★ ربما كان هنا عبارة ساقطة هي «وأصغرها ما يصل بين النقطة وطرف القطر» . انظر منطرق النظرية عند الحجاج .

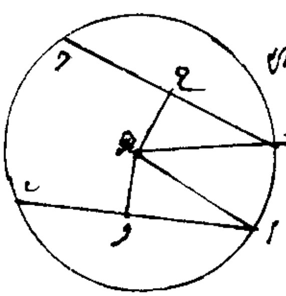
ومجموع م ك، ك جـ أطول من م جـ؛ م ك مثل م ح يبقى ك جـ أطول من ح جَـ. فَ جـ ح أقصر من ك جـ. وفي مثلث ل جـ م: ضلعا م ك، ك جـ قد [١٩ أ] التقيا في داخله. فمجموع م ل، ل جـ أطول من مجموع م ك، ك جـ. لكن م ك مثل م ل. فيبقى ل جـ أطول من ك جـ.

وكذلك نبين ان ط جـ أطول من ل جـ.

ونعمل على م، من خط م جـ: زاوية ن م جـ مثل زاوية ك م جـ. ونخرج جـ ن. فَ ك م مثل م ن؛ م جـ مشترك؛ وزاوية جـ م ك مثل زاوية ن م جـ. فقاعدة ك جـ مثل قاعدة جـ ن. ولا يمكن ان يكون خط آخر يساوي كل واحد منهما. والا فليكن جـ س: ونخرج م س. فَ ك جـ مثل جـ س؛ ك م مثل م س؛ م جـ مشترك. فزاوية جـ م ك مثل زاوية جـ م س، وقد كانت زاوية جـ م ك مثل زاوية جـ م ن. فزاوية جـ م س العظمى مثل زاوية جـ م ن الصغرى. هذا خلف. فليس يخرج من نقطة خارج دائرة إلى محيطها ثلاثة خطوط متساوية، وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٨/ ٣ تقابل ٣٣/ ٣ عند الحجاج]

اذا وقعت في دائرة أوتار متساوية، كوتري أ ب، جـ د في دائرة أ جـ، أقول ان بعديهما من المركز، وهو نقطة هـ، متساويان.



برهانه انا نخرج من هـ عمودي هـ ز، هـ ح ونصل [١٩ ظ] هـ أ، هـ د. فلأن زاوية ز قائمة، يكون مربع أ هـ مثل مربعي أ ز، ز هـ. وكذلك مربع د هـ مثل مربعي د ح، هـ ح. وَ أ هـ، د هـ متساويان.

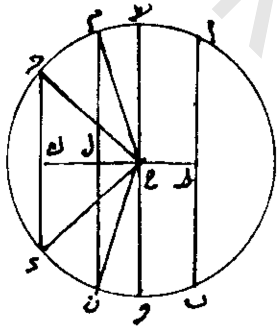
فيكون مربعا أ ز، ز هـ مثل مربعي أ هـ، د ح، ح هـ. لكن مربع أ ز مثل مربع د ح، لأنهما متساويان. يبقى مربع هـ ز مثل مربع

هـ ح. يكون هـ ز مثل هـ ح. وهما عمودان. فبعدا أ ب، جـ د من المركز متساويان.

عكسه، وهو: بعد أ ب من هـ مثل بعد جـ د من هـ، أقول ان أ ب مثل جـ د: لأن مربعي أ ز، ز هـ مثل مربعي د ح، ح هـ. وأيضاً مربع هـ ز مثل مربع هـ ح. يبقى مربع د ح مثل مربع ز أ. يكون أ ز مثل د ح. وَ أ ز نصف أ ب، د ح نصف د جـ. فَـ أ ب يكون مثل د جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٩ تقابل ٣/١٤ عند الحجاج]

اذا كانت في دائرة أوتار، كوتري أ ب، جـ د في دائرة أ ب د جـ. والقطر هـ و، وَ أ ب أقرب الى القطر من جـ د [يكون أ ب أعظم من جـ د].

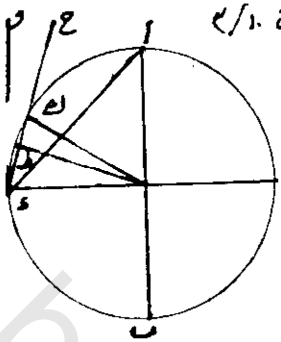


برهـانـه: نخرج من نقطة ح، التي هي المركز، عمودي ح ط، ح ك. فيكون ح ك أطول من ح ط. نجعل ح ل مثل ح ط، ونجعل على ل خط م ن يوازي جـ د. فيكون مثل أ ب. ونصل [٢٠ و] خطوط ح م، ح جـ، ح د، ح ن. فمجموع م ح، ح ن أطول من م ن. ومجموعهما مثل القطر. فالقطر أطول من م ن، أعني من أ ب. وَم ح، ح ن من مثلث م ح ن، مثل جـ ح، ح د من مثلث جـ ح د. وزاوية م ح ن أعظم من زاوية جـ ح د. فَـ م ن، أعني أ ب، أعظم من جـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

ن ٩/٢

[المبرهنة ٣/١٠ تقابل ٣/١٥ عند الحجاج]

اذا أُخرج من طرف قطر دائرة عمود، كقطر جـ د من دائرة [أ جـ ب د] أخرج من طرف د منه عمود د و: أقول إنه يقع خارج الدائرة.



فإن أمكن، فليقع داخلها، مثل د أ؛ ونخرج من ن ٢/١٠ المركز، وهي نقطة هـ، خط هـ أ. فهو مثل هـ د. فزاوية أ مثل زاوية هـ د أ. وزاوية هـ د أ قائمة. فزاوية أ قائمة. فمثلث هـ د أ قائم الزاويتين. هذا خلف. ٦ فيقع اذن خارج الدائرة، مثل د و.

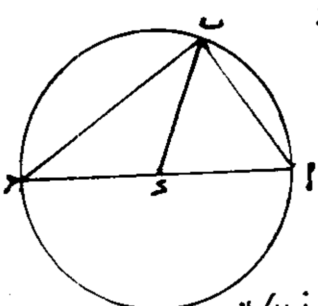
وأقول انه لا يقع بين د و العمود، وبين المحيط خط آخر مستقيم.

فان امكن، فليقع مثل خط د ح، ونوقع عليه عمود هـ ط. فزاوية هـ ط قائمة، وزاوية هـ د ط أصغر من قائمة. فضلع هـ د أطول من هـ ط. وَ هـ د مثل هـ ك، فَـ هـ ك أطول من هـ ط. هذا خلف.

وأقول ان زاوية نصف الدائرة التي يحيط بها قوس أ د، وخط د هـ: أعظم من كل زاوية حادة مستقيمة الخطين. فإن الزاوية التي يحيط بها قوس أ د وخط د و أصغر من كل زاوية حادة مستقيمة الخطين لأنه [٢٠ ظ] لو كانت زاوية حادة مستقيمة الخطين أعظم من زاوية أ د هـ، وأصغر من زاوية أ د و، لأمكن ان يقع بين عمود د و وبين قوس د أ جـ خط آخر مستقيم. وذلك ما أردنا ان نبين.

وقد ظهر من ذلك ان العمود الخارج من طرف قطر الدائرة يكون مماساً للدائرة.

[المبرهنة ٣/١١ متضمنة في ٣/٣٠ عند الحجاج]

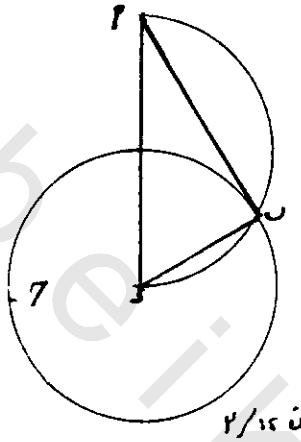


الزوايا التي تقع في نصف الدائرة قائمة. كزاوية أ ب جـ في دائرة أ ب جـ.

برهانه: نخرج من المركز، وهو د، خط د ب. فلأن د أ مثل د ب، تكون زاوية أ مثل زاوية د ب أ. ويمثل ذلك تكون زاوية جـ مثل زاوية د ب جـ. فزاويتا أ، جـ مثل زاوية أ ب جـ. والزوايا الثلاث ٢/١١

للمثلث مثل قائمتين. فزاوية أ ب جـ قائمة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٢/ ٣ تقابل ١٦/ ٣ عند الحجاج]

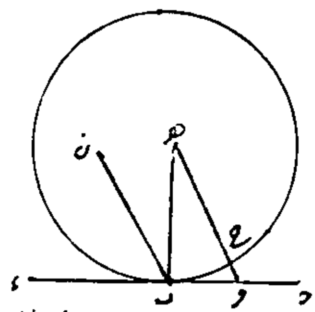


ن ١٢/٢

نريد أن نخرج من نقطة مفروضة خطاً يماس دائرة مفروضة: كنقطة أ، ودائرة ب جـ. فنخرج من المركز، وهي نقطة د، خط د أ، ونخط عليه نصف دائرة د ب أ، ونخرج خط أ ب. فأقول انه مماس للدائرة.

برهـانه: نخرج خط ب د. فلأن زاوية أ ب د قائمـة، لأنها في [٢١ و] نصف الدائرة، يكون ب أ عموداً على ب د الذي هو نصف القطر. فيكون أ ب مماساً لدائرة ب جـ. وذلك ما أردنا ان نعمل.

[المبرهنة ١٣/ ٣] [تشمل ١٧/ ٣ عند الحجاج]



ن ١٢/٢

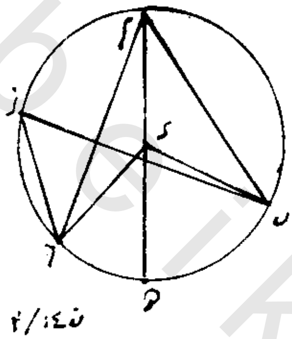
كل خط يماس دائرة، كخط جـ د، ودائرة أ ب، ويخرج من موضع التماس، وهي نقطة ب، خط الى المركز، وهو ب هـ، فأقول ان هـ ب عمود على جـ د فإن لم يكن كذلك، فليكن العمود هـ و، فزاوية هـ و ب قائمة، تكون أعظم من زاوية هـ ب و. فلذلك يكون ضلع هـ ب أطول من هـ و ولكن هـ ب مثل هـ ح؛ فَـ هـ ح أطول من هـ و. الجزء أطول من الكل. هذا خلف.

[المبرهنة ١٤/ ٣ تقابل ١٨/ ٣ عند الحجاج]

وأيضاً اذا أخرج من موضع التماس عمود الى الدائرة: كنقطة ب وعمود ب هـ، أقول ان المركز يكون على ب هـ. فإن امكن فليكن على ب ن. فتكون كل واحدة من زاويتي هـ ب و، ن ب و قائمة. هذا خلف. فالمركز على ب هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/١٥: تقابل ٣/١٩ عند الحجاج]

الزاوية التي على المركز مثلا الزاوية التي على المحيط، اذا كانت قاعدتها قوساً واحدة: كزاوية ب د جـ على مركز د من دائرة أ ب جـ: وكزاوية ب أ جـ على المحيط، وقاعدتها قوس ب جـ: أقول: ان زاوية د مثلا زاوية أ.



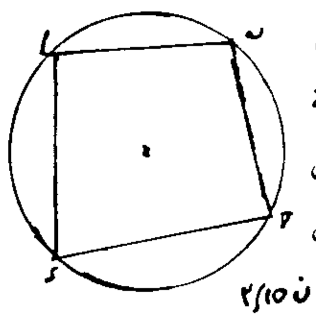
برهانه: ان نخرج أ د وننفذه الى هـ. فـ أ د مثل ب د. فزاوية ب أ د مثل زاوية أ ب د، فجميعهما مثلا زاوية ب أ د. ولكن [٢١ ظ] زاوية ب د هـ مثل جميع زاويتي ب أ د، أ ب د. فهي مثلا زاوية ب أ د. وكذلك زاوية جـ د هـ مثلا زاوية جـ أ د. فكل زاوية ب د جـ مثلا زاوية ب أ جـ.

[المبرهنة ٣/١٦ تقابل ٣/٢٠ عند الحجاج]

وأيضاً اذا كان في قطعة من دائرة زاويتان، فهما متساويتان. كزاويتي ب أ جـ، ب ز جـ في قطعة ب أ ز جـ من دائرة أ ب جـ.

برهانه: انا نخرج من المركز، وهو د، خطي د ب، د جـ. فزاوية ب د جـ مثلا كل واحدة من زاويتي ب أ جـ، ب ز جـ. فزاويتا ب أ جـ، ب ز جـ متساويتان. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/١٧: تقابل ٣/٢١ عند الحجاج]



كل ذي أربعة أضلاع زواياه على محيط دائرة، فكل زاويتين تتقابلان فيه مثل قائمتين: كذي أربعة أضلاع أ ب جـ د، زواياه، وهي أ، ب، جـ، د، على محيط دائرة أ ب جـ د: فأقول: ان زاويتي أ، جـ مثل قائمتين. وكذلك زاويتا ب، د.

برهانه: نخرج وتري أ جـ، ب د. فزاوية ب أجـ

مثل زاوية ب د جـ: لأنهما في قطعة ب أ د جـ. وأيضاً زاوية أ د ب مثل زاوية أ جـ ب.

فكل [٢٢ و] زاوية أ د جـ مثل زاويتي ب أ جـ، ب جـ أ. ونجعل زاوية جـ ب أ مشتركة. فزوايا ب أ جـ، أ جـ ب، جـ ب أ، وهي مثل قائمتين، مثل زاويتي أ د جـ، أ ب جـ.

ويمثل ذلك نعلم ان زاويتي ب أ د، د جـ ب مثل قائمتين. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٨/٣ تقابل ٢٣/٣ عند الحجاج]

قطع الـدوائـر المتشابهة اذا كانت على خطوط متساوية فانها أيضاً متساوية كقطعتي أ ب جـ، د هـ ز المتشابهتين. وهما على خطي أ جـ، د ز المتساويين. أقول: انهما متساويتان.

برهانه: انا اذا وضعنا نقطة أ على نقطة د، تقع نقطة جـ على ز، ونطابق قطعة أ ب جـ على قطعة د هـ ز، فتكون مساوية لها. فان أمكن ان تقع خارجها أو داخلها، مثل د ب ز مثلا. فنصل ز هـ، ونخرجه إلى ح، ونصل ح د، ب ز:

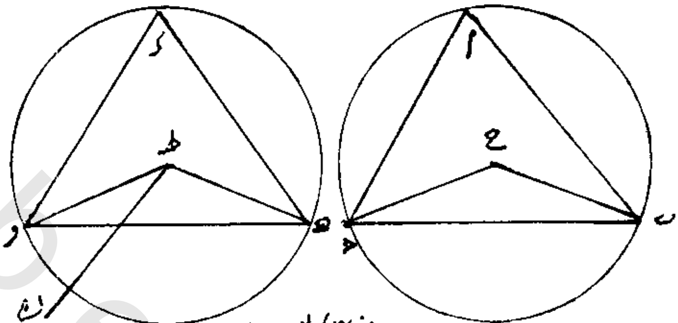
فلأجل ان قطعتي د ب ز، د هـ ز متشابهتان تكون زاوية د هـ ز مثل زاوية د ح ز، الخارجة للداخلة. هذا خلف. فقطعة أ ب جـ إذن تطابق قطعة د هـ ز، وتصير مساوية لها. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٩/٣ تقابل ٢٥/٣ عند الحجاج]

اذا كانت في دوائـر متسـاوية زوايا متسـاوية، على المـراكـز كانت أو على المحيطات، فهي على قسي متساوية.

فلتتساوَ دائرتا أ ب جـ، د هـ و، وزاويتا ب أ جـ، هـ د و، على المحيطين.

أقول: إن قوسي ب جـ، ـ د، وهما قاعدتا الزوايا متساويان.



ن ٢/١٧ ، ٢/١٨

برهـانـه:

نخرج وتري ب جـ، هـ و. فـ ب ح مثل هـ ط، جـ ح مثل ط و، وزاوية ح مثل زاوية هـ ط و. فَـ ب جـ مثل هـ و [٢٢ ظ]. ولكن زاوية ح مثلا زاوية أ، وزاوية ط مثلا زاوية د. فزاويتا أ، د متساويتان. فقطعة ب أ جـ تشبه قطعة هـ د و، وهما على خطي ب جـ، هـ و المتساويين. فقوس ب أ جـ مثل قوس هـ د و ولكن الدائرتين متساويتان. فيبقى قوس ب جـ مثل قوس هـ و.

[المبرهنة ٣/٢٠ وتقابل ٣/٢٦ عند الحجاج]

ونبين عكسه وهو: اذا كانت في دوائر متساوية زوايا على قسي متساوية، فالزوايا متساوية، على المراكز كانت أو على المحيطات.

فلتتساوَ دائرتا أ ب جـ، د هـ و، وقوسا ب جـ، هـ و، وعليهما زاويتا ح، هـ ط و، أقول: انهما متساويتان.

برهانه: فإن أمكن غير ذلك، فلتكن زاوية ح أصغر من زاوية ط، ونعمل زاوية هـ ط ك مثل زاوية ح، فقوس ب جـ مثل قوس هـ ك. ولكن قوس ب جـ مثل قوس هـ و. فقوس هـ و مثل قوس هـ ك، وذلك خلف. فزاويتا ح وَ هـ ط و متساويتان.

[المبرهنة ٣/٢١ تقابل ٣/٢٧ عند الحجاج]

وأيضاً الأمتار المتساوية في دوائر متساوية تفصل قسيًّا متساوية.

فلتتساوَ دائرتا أ ب جـ، د هـ و، ووترا ب جـ، هـ و، أقول: إنهما تفصلان

قوسي ب جـ، هـ د متساويتين.

برهانه: فنخرج من مركزي ح، ط خطوط ح ب، ح جـ، ط هـ، ط و. فَـ ب ح مثل هـ ط، جـ ح مثل و ط، ب جـ مثل هـ و. فزاوية ح مثل زاوية هـ ط و. فقوس ب جـ مثل قوس هـ و، والدائرة مثل الدائرة، فقوس ب أ جـ مثل قوس هـ د و..

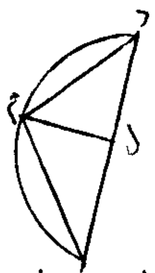
[المبرهنة ٢٢/ ٣ تقابل ٢٨/ ٣ عند الحجاج]

ونبين عكسه وهو ان القسي المتساوية من دوائر متساوية تفصلها أوتار متساوية. فلتتساوَ دائرتا أ ب جـ، د هـ و. وقوسا ب جـ، هـ و متساويتان، أقول: ان وتري ب جـ، هـ و متساويتان.

برهانه: نخرج من مركزي ح، ط خطوط ح ب، ح جـ، ط هـ، ط و. [٢٣ و] فَـ ب ح، ح جـ مثل هـ ط، ط و.

[٢٣ و] فـ ب ح، ح جـ مثل هـ ط، ط و؛ وزاويتا ح، هـ ط و، في قطعتي ب جـ، هـ و المتساويتين، فهما متساويتان، فقاعدة ب جـ مثل قاعدة هـ و. وذلك ما أردنا ان نبين.

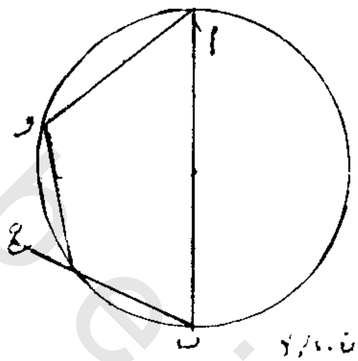
[المبرهنة ٢٣/ ٣ تقابل ٢٩/ ٣ عند الحجاج]



وأيضاً نريد أن ننصف قوساً معلومة، كقوس د و فنخرج وتر د و، وننصفه على ل، ونخرج منه عمود ل م، فنصفها نقطة م.

برهانه: لأنا نخرج وتري د م، م و، فيكون د ل مثل ل و، ل م مشترك، وزاويتا ل في المثلثين قائمتان. فوتر د م مثل وتر م و فقوساهما متساويتان. وذلك ما أردنا ان نعمل.

[المبرهنة ٣/٢٤ تقابل ٣/٣٠ عند الحجاج]

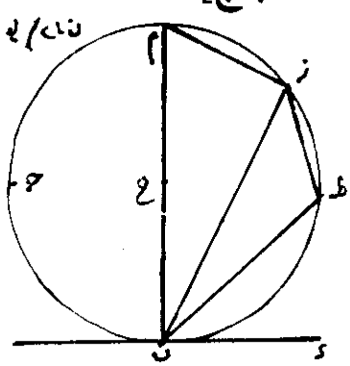


اذا وقعت في دائرة زاوية مستقيمة الخطين مركبة على القوس، كدائرة أ ب جـ، وقطرها أ ب، وقد أعلم على قوس أ د ب نقطتا د، و، كيف وقعتا، وأخرج منهما د أ، د ب، د و، و أ فأقــول: ان زاوية أ د ب، وهــي في نصـف الدائرة: قائمة. وقد تبين ذلك. وأقول ان زاوية أ ب د، التي وقعت في قوس د ب جـ أ، وهي أعظم من نصف دائرة، أصغر من قائمة، لأن زاوية أ د ب قائمة.

فأقول ان زاوية د و أ [٢٣ ظ] التي وقعت في قوس أ و د، وهي أصغر من نصف دائرة، أعظم من قائمة، لأن زاويتي أ ب د، أ و د، المتقابلتين في شكل د و أ ب ذي الأربعـة الأضلاع، مثل قائمتين. وزاوية أ د ب أصغر من قائمة، وزاوية أ و د أعظم من قائمة.

وأقول: ان زاوية قطعة أ جـ ب د منفرجة، وزاوية قطعة أ و د حادة. فنخرج وتر ب د إلى ح. وزاوية أ د ب قائمة، فالزاوية التي يحيط بها وتر أ د وقوس د ب: منفرجة: ولأن زاوية أ د ح قائمة، تصير الزاوية التي يحيط بها وتر د أ وقوس و د: حادة، وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/٢٥ تقابل ٣/٣١ عند الحجاج]



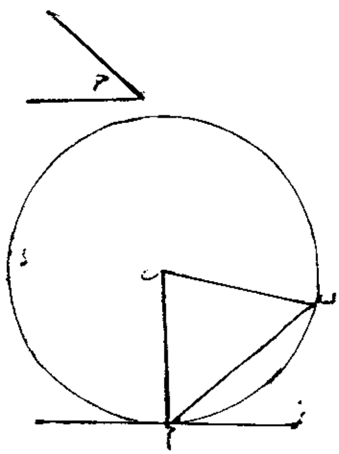
كل خط يماس دائرة، ويخرج من حيث يماسها خط يقطع الدائرة، ولا يمر بالمركز، فان الزاويتين اللتين على جنبتيه: مثل الزاويتين اللتين تقعان في قطعتي الدائرة المتبادلتين. كخط د هـ: يماس دائرة أ ب جـ على ب، وخرج منها ب ز، فقطع الدائرة،

ولم يمر بالمركز: أقول: ان زاوية ز ب د مثل التي تقع في قطعة [ز أ ب، وزاوية ز ب هـ مثل التي تقع في قطعة] ز ط ب. فنعلم على قوس ز ب نقطة ط، كيفما وقعت، ونخرج [٢٤ و] من ب إلى المركز، وهو ح، خط ب ح، وننفذه إلى أ، ونخرج ز ط، ط ب، ز أ.

د هـ يماس الدائرة على ب، ويخرج من المركز ح ب. فزاوية ح ب هـ قائمة. وزاوية أ ز ب قائمة. فبقيت زاويتا ز ب أ، ز أ ب من مثلث أ ز ب: قائمة واحدة، مثل زاويتي ز ب أ، ز ب د اللتين جميعهما قائمة. وننقص زاوية ز ب أ، المشتركة، فتبقى زاوية ز ب د مثل زاوية ز أ ب، التي في قطعة ز أ جـ ب.

وزاويتا ز ط ب، ز أ ب، المتقابلتان في سطح أ ب ط ز، ذي الأربعة الأضلاع، مثل قائمتين فزاوية ز ب د مثل زاوية ز أ ب. فزاوية ز ط ب الباقية، وهي التي في قطعة ز ط ب، مثل زاوية ز ب هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٦/ ٣ تقابل ٣٢/ ٣ عند الحجاج]



نريد ان نعمل على خط معلوم، كخط أ ب، قطعة دائرة تقبل زاوية مفروضة، وهي زاوية جـ. فنقيم على نقطة أ: زاوية ب أ ز مثل زاوية جـ. ونخرج أ ح عموداً على ز أ. ونعمل على نقطة ب: زاوية أ ب ح مثل زاوية ح أ ب. فيكون ضلع أ ح مثل ح ب. ونجعل ح مركزاً، ونديز ببعد ح أ دائرة أ ب د.

فلأن المركز نقطة ح، وزاوية ح أ ز قائمة، فـ ز أ يماس دائرة أ ب د على نقطة أ. وخرج منها أ ب. فزاوية ز أ ب مثل التي في قطعة أ د ب. ولكن زاوية [٢٤ ظ] ز أ ب مثل زاوية جـ فالتي تقع في قطعة أ د ب مثل جـ.

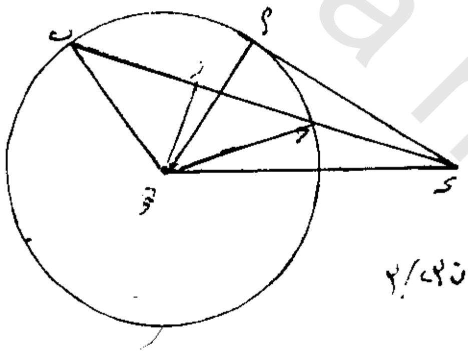
[المبرهنة ٢٧/ ٣ تقابل ٣٣/ ٣ عند الحجاج]

وأيضاً نريد ان نفصل من دائرة مفروضة، كدائرة أ ب د: قطعة تقبل زاوية مثل زاوية مفروضة كزاوية جـ.

فخطٌّ من المركز، وهوح، خط ح أ، ونعمل على ح زاوية أ ح ب مثلي زاوية جـ. فلأن زاوية ح على المركز، تكون مثلي التي تقع في قطعة أ د ب. وزاوية ح مثلا جـ فالتي تقع في قطعة أ د ب مثل جـ. وذلك ما أردنا أن نفصل.

[المبرهنة ٢٨/ ٣ تقابل ٢٣٥/ ٣ عند الحجاج]

كل نقطة خارج دائرة، كنقطة د ودائرة أ ب جـ [ونخرج] من النقطة إلى الدائرة خطان، كخطي د أ، د ب، د أ يماسها، د ب يقطعها، أقول ان ضرب د ب القاطع لها، في د جـ المنفصل منه، مثل مربع د أ المماس.



برهانه: ان نجعل المركز هـ، ونصل هـ أ، هـ جـ، هـ د، ونوقع على ب د عمود هـ ز، فانه ينصف ب جـ على ز، وقد زيد فيه جـ د، فضرب ب د في د جـ، مع مربع ز جـ: مثل مربع ز د. ونجعل مربع ز هـ مشتركاً. فضرب ب د في جـ د، مع مربعي ز جـ، ز هـ، أعني مربع هـ جـ، مثل مربعي ز د، ز هـ، أعني مربع د هـ. فضرب ب د في د جـ مع مربع هـ جـ: مثل مربع هـ د.

ولكن مربع هـ د، مثل مربعي هـ أ، أ د، فضرب ب د في د جـ مع مربع هـ جـ: مثل مربع أ د ومربع هـ أ، أعني مربع هـ جـ. ونلقي مربع هـ جـ المشترك. فيبقى ضرب ب د في د جـ مثل مربع أ د.

[المبرهنة ٢٩/ ٣ تقابل ٣٦/ ٣ عند الحجاج]

[٢٥ و] ونبين عكسه، وهو ان [كان] ضرب ب د الذي قطع الدائرة في د جـ مثل مربع د أ الذي انتهى اليها، أقول: ان د أ يماس الدائرة.

فنخرج من مركزها خطوط هـ أ، هـ جـ، هـ د، وعمود هـ ز. فَـ ب ز مثل ز جـ. وقد زيد جـ د في ب جـ. فضرب ب د [في د جـ] مع مربع ز جـ: مثل مربع ز د. ونجعل مربع ز هـ مشتركاً. فضرب ب د في د جـ مع مربعي ز جـ، ز هـ، أعني مربع هـ جـ: مثل مربعي ز د، ز هـ، أعني مربع هـ د. وقد كان ضرب ب د في د جـ مثل مربع أ د؛ ولكن هـ جـ مثل هـ أ فمربعا أ د، هـ أ مثل مربع هـ د. فزاوية هـ أ د قائمة، وَ أ د عمود على طرف القطر، فهو مماس للدائرة. وذلك ما أردنا ان نبين.

وقد تبين من ذلك انه اذا خرج من نقطة إلى دائرة خطان يماسّانها، فهما متساويان.

تمت المقالة الثالثة بحمد الله وعونه

والحمد لله حق حمده

موازنة ختامية

المقالة الثالثة، كما يعرضها هيث، تتألف من ٣٧ مبرهنة، يعرضها الحجاج في ٣٦. ذلك ان المبرهنتين ١١، ١٢ عند هيث يعرضهما الحجاج بمبرهنة واحدة، وهما تبرهنان ان خط المركزين لأي دائرتين متماستين يمر بنقطة التماس. فكتاب هيث يستعـرض التماس من الداخل في المبرهنة ١١، ثم التماس من الخارج في المـبرهنـة ١٢. وفي كتاب الحجاج نجد اقليدس يكتفي بالتماس من الداخل، ويكمل الصورة هيرن فيضيف التماس من الخارج.

وليس هذا المثـال هو الوحيد على مداخلات هيرون (وربما النيريزي) على نصوص اقليدس، فمن الأمثلة الأخرى ان المبرهنتين ٥، ٦ عند هيث هما ٦، ٥ عند الحجاج، تليهما اشارة بانه قدم التماس على التقاطع لأن المماسة تسبق المقاطعة.

والنسوي يعرض هذه المقالة في ٢٩ مبرهنة.

لقـد اهمل تسع مبرهنات واضاف من عنده واحدة وجعل احدى مبرهنات اقليدس في اثنتـين. تلك هي المـبرهنـة ٣٠ عنـد الحجاج عن الزاوية في قطعة الدائرة، واما المبرهنات التي اهملها النسوي فهي المبرهنات ٢، ٥، ٦، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ٢٢، ٣٤. واكثـرهـا يتعلق بتـماس الـدوائر وتقاطعها وكلها قضايا هنـدسية اسـاسية، منهـا ما لا يستغني الفلكي عنـه، واما المبرهنة التي اضافها النسوي من عنده فتبين كيف ترسم في دائرة وتراً بطول مفروض. وهذا هو الشكل ١/٤ عند هيث والحجاج.