المقالة السادسة

أ ـ التعريفات

ب ـ مبرهنات الحجاج وإضافات النيريزي

ج ـ مبرهنات النسوي

أ ـ التعريفات

١ ـ تعريفات الحجاج

[٧٠ ب] ربِّ يسِّر وأعن

بسم الله الرحمن الرحيم

المقالة السادسة من كتاب الأصول لأوقليدس

قال اوقليدس: السطوح المتشابهة هي التي زواياها متساوية واضلاعها المحيطة بزواياها المتساوية متناسبة.

قال أبوالعباس النيريزي: يُعنى بالسطوح في هذا الموضع: الأشكال التي تحيط بها خطوط مستقيمة. وليس هذان الشرطان بأولين؛ ولكنهما يحتاجان إلى برهان ان كل سطحين مستقيمي الخطوط: اذا كانت زواياهما متساوية، فان الأضلاع التي تحيط بالزوايا المتساوية متناسبة. وقد برهن الرياضي على ذلك ببرهان ٤ من ٦؛ وبرهن أيضاً ببرهان ٥ من ٦ ان كل سطحين مستقيمي الخطوط تكون الأضلاع التي تحيط بزواياهما متناسبة، فإن زواياهما متساوية. ولكن قدَّم هذين الشرطين ليحدَّ بهما السطوح المتشابهة، وليفصل بهذا الحد السطوح المتشابهة عن التي ليست متشابهة.

قال اوقليدس: السطوح المتكافئة الأضلاع هي التي اضلاعها متناسبة، على التقديم والتأخير وفي نسخة أخرى: هي التي في كل واحد منها مقدمات وتوالٍ.

قال النيريزي: الفصل بين المتشابهة والمتكافئة ان كل شكلين مسطحين مستقيمي الخطوط متشابهين، فإن المقدمات في أحدهما، والتوالي في الآخر؛

والذي فيه المقدمات ليس فيه التوالي، والذي فيه التوالي ليس فيه المقدمات.

وأما المتكافئتان فهما اللذان يؤخذ من أحدهما، أعني الأول: مقدم، ومن الثاني تالٍ؛ ثم يؤخذ من الثاني مقدم ومن الأول تالٍ؛ ثم من الأول مقدم ومن الثاني تالٍ؛ ولا يزال كذلك حتى تنسب الأضلاع كلها.

قال اوقليدس: الارتفاع في الشكل هو العمود المخرج من رأسه إلى قاعدته.

يقال في الخط المستقيم انه قد قسم على نسبة ذات وسط وطرفين: متى كانت نسبة الخط بأسره إلى أعظم قسميه كنسبة أعظم قسميه إلى اصغرهما.

يقال ان النسبة مؤلفة من نسب: متى كانت أقدار تلك النسب اذا ضوعفت بأنفسها فعلت نسبة ما.

ووجد في نسخة أخر أن النسبة تقسم بنسب اذا كانت النسبة متى جزئت بعضها على بعض احدثت نسبة ما.

٢ ـ تعريفات النسوي :

● السطوح المتشابهة هي التي زواياها متساوية، والأضلاع المحيطة بزواياها المتساوية متناسبة. واذا وضع هذا فمن البين ان المربعات كلها متشابهة.

● السطوح المتكافئة الأضلاع هي التي أضلاعها متناسبة، على التقديم والتأخير.

● الارتفاع في الشكل هو العمود المخرج من رأسه إلى خط قاعدته.

● كل سطح متوازي الأضلاع قائم الزوايا، فإن الخطين المحيطين بإحدى زواياه، القائمة يقال لهما: المحيطان به. ويقال للسطح أيضاً انه من ضرب احد الخطين في الآخر.

● يقال في الخط انه مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين متى كانت نسبة الخط بأسره إلى أعظم قسميه: كنسبة أعظم قسميه إلى أصغرهما.

Heith: 1/6 Similar rectilineal figures are such as have their angles severally equal and the sides abuot the equal angles porportional.

2/6 Reciprocally related figures*.

3/6 A straight line is said to have been cut in extreme and mean ratio when, as the whole line is to the greater segment, so is the greater to the less.

4/6 The height of any figure is the perpemdicular drawn from the vertex to the base.

★ لا يعطي هيث (٢/١٨٩) تعريف اقليدس، وهو عن السطوح المتكافئة، وانما يعدد اعتراضات عليه ويسقطه لأنه في رأيه لا معنى له ولا يستعمله اقليدس في باقي كتابه. وفي تقديري ان موضع الخطأ هو عدم وجود كلمة في الاغريقية تعني تساوي المساحتين. وهذا ـ على ما يبدو ـ قد ادركه الناقل العربي فوضع كلمة التكافؤ لتقابل reciprocel relation .

ب. مُبرهنات الجاج

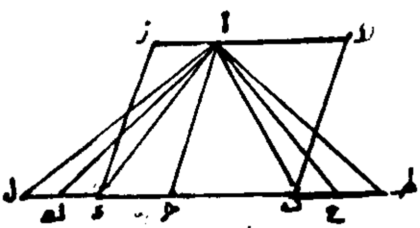
[المبرهنة ١/ ٦]

الشكل الأول من المقالة السادسة

السطوح المتوازية الأضلاع، والمثلثات، اذا كان ارتفاعها بقدر واحد، فإن نسبة بعضها إلى بعض، كنسبة قواعدها، بعضها إلى بعض.

مثاله: ان سطحي جـ هـ، جـ ز متوازيا الأضلاع، وارتفاعهما وارتفاع مثلثي أ ب جـ، أ جـ د، ارتفاع واحد. فأقول ان نسبة قاعدة ب جـ إلى قاعدة جـ د: كنسبة مثلث أ ب جـ إلى مثلث أ جـ د، وكنسبة متوازي جـ هـ إلى متوازي جـ ز.

برهـانـه: انا نخرج خط ب د في كلتا الجهتين، إلى ط، ل. ونجعـل في الخط الخارج في جهة نقطة ب، من أضعاف خط ب جـ: مثل ما في الخط الخارج من جهة نقطة د، من أضعاف الخط د جـ.



الشكل ١/ ٦

فلننـزل ان في خط ب ط من أضعاف ب جـ: مثل ما في خط د ل من اضعاف خط د جـ؛ وان الأضعاف المأخوذة لخط ب جـ: خطا ب ح، ح ط؛ والأضعاف المأخوذة لخط جـ د: خطا د ك، ك ل.

ونخرج خطوط أ ح، أ ط، أ ك، أ ل

فمن أجل ان قواعد ط ح، ح ب، ب جـ متساوية، والمثلثات التي قواعدها متساوية، وبين خطين متوازيين، فهي متساوية، كما تبين من برهان ٣٨ من ١،

فمثلثات أ ط ح، أ ح ب، أ ب جـ: متساوية. وكذلك نبين ان مثلثات أ ل ك، أ ك د، أ د جـ متساوية وقواعدها متساوية.

ففي قاعدة ط جـ من أضعاف قاعدة ب جـ مثل ما في مثلث أ ط جـ من أضعاف مثلث أ ب جـ. وكذلك في قاعدة ل جـ من أضعاف قاعدة جـ د مثل ما في مثلث أ ل جـ من أضعاف مثلث أ جـ د. فقاعدة ط جـ ومثلث أ ط جـ إما أن يكونا زائدين معاً على قاعدة جـ ل ومثلث أ جـ ل، واما ان يكونا مساويين معاً واما ان يكونا ناقصين معاً عنهما. فلنا أربعة مقادير، قاعدتا ب جـ، جـ د، ومثلثا أ ب جـ، أ جـ د وقد أخذ لمقدار ب جـ، الذي هو الأول، ولمثلث أ ب جـ الذي هو المقدار الثالث أضعاف متساوية. أما لقاعدة ب جـ [٧١ أ] فخط ط جـ، وأما لمثلث أ ب جـ فمثلث أ ط جـ.

وأيضاً فقد أخذ للمقدار الثاني الذي هو جـ د، لمثلث أ د جـ الذي هو المقدار الرابع: أضعاف متساوية، وقد بينا ان قاعدة ط جـ ومثلث أ ط جـ اللذين هما الأول والثالث: اما زائدان معاً على مقداري جـ ل، أ ل جـ اللذين هما الثاني والرابع، واما مساويان معاً لهما، واما ناقصان معاً عنهما. فنسبة قاعدة ب جـ إلى قاعدة جـ د كنسبة مثلث أ ب جـ إلى مثلث أ جـ د. وكذلك نسبة قاعدة ب جـ إلى قاعدة جـ د كنسبة متوازي جـ هـ إلى متوازي جـ ز. ومن أجل ان متوازي جـ هـ ضعف مثلث أ ب جـ، ومتوازي جـ ز ضعف مثلث أ جـ د، كما تبين من برهان ٣٤ من ١.

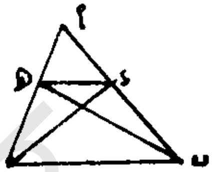
وأيضاً على هذا المثال بعينه نبين ان لو كملنا على خطوط ط ح، ح ب، د ك، ك ل: سطوحاً متوازية الأضلاع: وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢/ ٦]

الشكل الثاني من المقالة السادسة

كل مثلث يوصل بين ضلعين من أضلاعه خط مستقيم يوازي ضلع المثلث

الباقي، فإنه يفصل الضلعين على نسبة واحدة. وإن فصل الضلعين على نسبة واحدة، فان الخط موازٍ للضلع الثالث الباقي.



الشكل ٢/٦

مثاله: انا نصل بين ضلعي أ ب، أ جـ بخط د هـ يوازي ضلع ب جـ الباقي. فأقول: ان خط د هـ قد فصل ضلعي أ ب، أ جـ على نسبة واحدة، أعني انه قد صير نسبة ب د إلى د أ كنسبة جـ هـ إلى هـ أ.

برهانه: انا نخرج خطي ب هـ، جـ د. فمثلث ب د هـ مساوٍ لمثلث جـ د هـ، لأنهما على قاعدة د هـ، وبين خطي د هـ، ب جـ المتوازيين كما تبين ببرهان ٣٧ من ١. والأعظام المتساوية نسبتها إلى عظم آخر: نسبة واحدة، كما تبين ببرهان ٧ من ٥ فنسبة مثلث ب د هـ إلى مثلث أ د هـ كنسبة مثلث جـ د هـ إلى مثلث أ د هـ. ومن اجل ان المثلثات التي ارتفاعها بقدر واحد، فان نسبة بعضها إلى بعض، كنسبة قواعدها بعضها إلى بعض، كما بين ببرهان ١ من ٦. فنسبة مثلث ب د هـ إلى مثلث أ د هـ كنسبة قاعدة ب د إلى قاعدة د أ. وكذلك مثلث جـ د هـ إلى مثلث هـ د أ كنسبة قاعدة جـ هـ إلى قاعدة هـ أ.

فاذا رفعنا الوسائط، كما بين ببرهان ١١ من ٥، بقيت نسبة ب د إلى د أ كنسبة جـ هـ إلى هـ أ. وذلك ما اردنا ان نبين.

وأيضاً فانا ننزل ان د هـ يفصل ضلعي ب أ، جـ أ على نسبة واحدة. فأقول ان خط د هـ مواز لخط ب جـ.

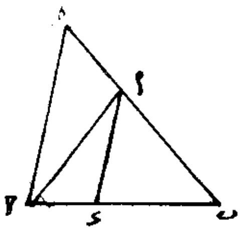
برهانه: عكس ذلك البرهان: من أجل انه لما كانت نسبة ب د إلى د أ كنسبة جـ هـ إلى هـ أ؛ ومما وصفنا تكون نسبة ب د إلى د أ كنسبة مثلث ب د هـ إلى مثلث د أ هـ؛ وكذلك تكون نسبة جـ هـ إلى هـ أ كنسبة مثلث جـ د هـ إلى مثلث د أ هـ. فاذا أسقطنا الوسائط بقيت نسبة مثلث ب د هـ إلى مثلث د أ هـ كنسبة مثلث جـ د هـ إلى مثلث د أ هـ. فنسبة مثلثي ب د هـ، جـ د هـ

إلى مثلث د أ هـ نسبة واحدة. والمقادير التي نسبتها إلى مقدار آخر نسبة واحدة، فان المقادير متساوية، كما بين ببرهان ٩ من ٥ فمثلث ب د هـ مثل مثلث جـ د هـ. والمثلثات المتساوية التي على قاعدة واحدة، وبين خطين، فإن الخطين متوازيان، كما بين ببرهان ٣٩ من ١ فخط د هـ مواز لخط ب جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/ ٦]

الشكل الثالث من المقالة السادسة

كل مثلث تقسم زاوية من زواياه بنصفين، بخط ينتهي إلى القاعدة، فإن نسبة قسمي القاعدة، أحدهما إلى الآخر، كنسبة ضلعي المثلث الباقيين أحدهما إلى الآخر. وان صير نسبة قسمي القاعدة، أحدهما إلى الآخر: كنسبة الضلعين الباقيين، أحدهما إلى الآخر، فإن الخط يقسم الزاوية بنصفين.



مثاله: ان زاوية ب أ جـ من مثلث أ ب جـ قد قسمت بنصفين بخط أ د. فاقول ان نسبة ب د إلى د جـ كنسبة ضلع ب أ إلى ضلع أ جـ.

برهانه: انا نخرج خط جـ هـ يوازي خط أ د، كما بين إخراجه ببرهان ٣١ من ١؛ ونخرج خط ب أ حتى يلقى الخط المخرج الموازي: على نقطة هـ. فمن أجل ان خطي جـ هـ، د أ متوازيان وقد وقع عليهما خط ب هـ، فحسب [٧١ ب] برهان ٢٩ من ١ تكون زاوية أ هـ جـ الداخلة مساوية لزاوية ب أ د الخارجة. وأيضاً فمن أجل ان خطي أ د، هـ جـ المتوازيين قد وقع عليهما خط أ جـ، فبما بيِّن من برهان ٢٩ من ١ تكون زاويتا جـ أ د، أ جـ هـ المتبادلتان متساويتين. وقد كنا فرضنا زاويتي ب أ د، د أ جـ متساويتين. فزاوية أ هـ جـ اذن مساوية لزاوية أ جـ هـ. فمما بيِّن ببرهان ٦ من ١ تكون ساق أ هـ مثل ساق أ جـ.

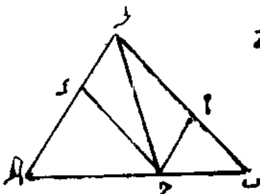
وأيضاً فان مثلث ب جـ هـ قد وصل بين ضلعين من أضلاعه بخط د أ. فبما بيِّن ببرهان ٢ من ٦ تكون نسبة خط أ ب إلى خط أ هـ كنسبة خط ب د إلى خط د جـ. وقد بينا ان خط أ هـ مساوٍ لخط أ جـ. فنسبة خط ب أ إلى كل واحد من خطي أ هـ، أ جـ نسبة واحدة، كما بين ببرهان ٧ من ٥. فنسبة ضلع ب أ إلى ضلع أ جـ كنسبة قسم ب د إلى قسم د جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأيضاً فانا ننزل ان نسبة ضلع ب أ إلى ضلع أ جـ كنسبة قسم ب د إلى قسم د جـ. فأقول ان زاوية ب أ جـ قد انقسمت بنصفين.

برهانه: انا نخرج خط جـ هـ يوازي أ د، ونخرج ضلع ب أ حتى يلقاه على نقطة هـ. ونعكس البرهان المتقدم فنقول: من أجل ان نسبة قسم ب د، إلى قسم د جـ كنسبة ضلع ب أ إلى ضلع أ جـ، وكنسبة ضلع ب أ إلى خط أ هـ، صارت نسبة خط ب أ إلى كل واحد من خطي أ هـ، أ جـ نسبة واحدة. فمما بين ببرهان ٩ من ٥، يكون خط أ هـ مساوياً لخط أ جـ. وكل مثلث متساوي الساقين فان زاويتيه اللتين فوق القاعدة متساويتان، ببرهان ٥ من ١. فزاوية أ هـ جـ مثل زاوية أ جـ هـ. وبما قدمنا من الاستشهاد تكون زاوية د أ جـ مساوية لزاوية أ جـ هـ، وزاوية أ هـ جـ مساوية لزاوية ب أ د، من أجل انا فرضنا خط أ د يوازي خط جـ هـ. فزاوية ب أ د إذن مساوية لزاوية د أ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٤/ ٦]

الشكل الرابع من المقالة السادسة


الشكل ٤/٦

كل مثلثين متشابهين فإن أوتار زواياهما المتساوية متناسبة مثاله ان مثلثي أ ب جـ، د جـ هـ متشابهان، وزواياهما المتساوية: زاوية أ ب جـ مثل زاوية د جـ هـ؛ وزاوية ب أ جـ مثل زاوية جـ د هـ؛ وزاوية أ جـ ب مثل زاوية د هـ جـ.

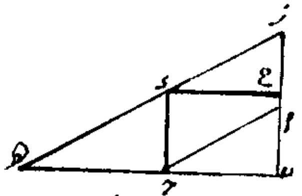
فأقول: ان الأوتار التي توتر الزوايا المتساوية متناسبة: أعني أن نسبة أ ب إلى دجـ كنسبة ب جـ إلى جـ هـ، وكنسبة أ جـ إلى د هـ.

برهانه: انا نصل بنقطة جـ خط ب جـ على استقامة جـ هـ، وننزل انا عملنا عليه مثلث أ ب جـ المساوية زواياه لمثلث جـ د هـ، كما بين عمله ببرهان ٢٢ من ١. ومتى كانت في المثلثين زاوية قائمة، توخينا ان تقع الزاويتان القائمتان عند نقطتي أ، د فاذا عمل كذلك، فإن خطي ب أ، د هـ اذا أخرجا على استقامة التقيا على نقطة ز.

فلأن زاوية أ جـ ب الخارجة فرضت مثل زاوية د هـ جـ الداخلة، فان خط أ جـ موازٍ ل خط ز هـ، كما بين ببرهان ٢٨ من ١. وكذلك فرضت زاوية د جـ هـ الخارجة مساوية لزاوية أ ب جـ الداخلة. فخط ب ز موازٍ لخط جـ د. فسطح أ جـ، د ز اذن متوازي الأضلاع، والأضلاع المتقابلة متساوية، كما بن ببرهان ٣٤ من ١. فَـ أ جـ مثل ز د، أ ز مثل جـ د.

فمن أجل ان مثلث ب ز هـ قد وصل بين ضلعين من أضلاعه بخط أ جـ يوازي ز هـ التي هي القاعدة، فبما بيِّن ببرهان ٢ من ٦ تكون نسبة ب أ إلى أ ز، أعني إلى جـ د كنسبة ب جـ إلى جـ هـ.

وأيضاً فان مثلث ب ز هـ قد وصل بين ضلعين من أضلاعه بخط جـ د يوازي ب ز التي هي القاعدة. فنسبة هـ د إلى د ز، أعني إلى أ جـ: كنسبة هـ جـ إلى جـ ب. وقد تبين ان نسبة هـ جـ إلى جـ ب كنسبة د جـ إلى أ ب. فنسبة د هـ إلى أ جـ كنسبة هـ جـ إلى جـ ب، وكنسبة د جـ إلى أ ب. وذلك ما اردنا ان نبين.



ملحق I/٤

قال النيريزي: وقد يمكن ان يرسم هذا الشكل اذا كانت فيهما زاوية قائمة على هذا السبيل: نخرج هـ جـ إلى ب [٧٢ أ] على الاستقامة، وليكن جـ ب

مساوياً لنظيره من أضلاع المثلث، وهو هـ جـ، ولتكن زاويتا هـ جـ د، جـ ب أ قائمتين، وزاوية هـ د جـ مساوية لزاوية ب أ جـ، وزاوية جـ هـ د مساوية لزاوية أ جـ ب. فمن أجل ان مجموع زاويتي أ ب جـ، د هـ جـ أصغر من زاويتين قائمتين، فإن خطي ب أ، هـ د اذا أخرجا على الاستقامة التقيا. فليكن التقاؤهما على نقطة ز. ونخرج د ح يوازي هـ ب. فيصير مثلث ح د ز مساوي الأضلاع لمثلث أ ب جـ: ضلع د ز مثل ضلع جـ أ، وضلع ح د مثل ضلع ب جـ، وضلع ح ز مثل ضلع ب أ.وذلك ان خط ح د يوازي ب جـ، ب ز يوازي جـ د. فـ ب ح مثل جـ د، ب جـ مثل ح د.

وأيضاً فإن زاوية أ جـ ب وضعت مساوية لزاوية جـ هـ ز. فخط جـ أ يوازي خط د ز، فَـ د ز مثل جـ أ؛ وزاوية ح د ز مثل زاوية د هـ ب، أعني مثل زاوية أ جـ ب. فقاعدة ح ز مثل قاعدة أ ب. فلأن ح د يوازي قاعدة ب هـ، تكون نسبة هـ د إلى د ز كنسبة ب ح إلى ح ز. فنسبة هـ د إلى جـ أ كنسبة ب ح، أعني كنسبة جـ د إلى ب أ.

وأيضاً فمن أجل ان خط جـ أ يوازي خط هـ ز، تكون نسبة هـ جـ إلى جـ ب كنسبة أ ز إلى أ ب. وَ أ ز مثل جـ د. فنسبة جـ د إلى أ ب كنسبة هـ جـ إلى جـ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

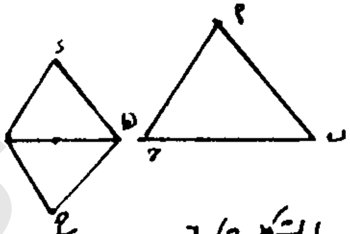
[المبرهنة ٥/ ٦]

الشكل الخامس من المقالة السادسة

كل مثلثين أضلاعهما متناسبة، فإن زواياهما التي توترها الأضلاع المتناسبة متساوية.

مثاله: ان مثلثي أ ب جـ، د هـ ز متناسبا الأضلاع: نسبة أ ب إلى هـ د كنسبة ب جـ إلى هـ ز، وكنسبة أ جـ إلى د ز. فأقول: ان زوايا مثلث أ ب جـ

مساوية لزوايا مثلث د هـ ز: زاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ز، وزاوية أ جـ ب مثل زاوية د ز هـ، وزاوية جـ ب أ مثل زاوية ز هـ د.



الشكل ٥/٦

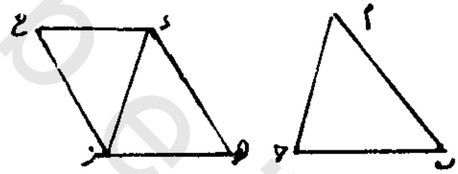
برهانه: انا نعمل على نقطة هـ من خط هـ ز: زاوية مساوية لزاوية أ ب جـ، كما بين عمله ببرهان ٢٣ من ١، ولتكن زاوية ز هـ ح؛ وعلى نقطة ز مثل زاوية أ جـ ب، ولتكن زاوية هـ ز ح. فتبقى زاوية هـ ح ز مساوية لزاوية ب أ جـ، ببرهان ٢٦ من ١. فمثلث هـ ح ز زواياه مساوية لزوايا مثلث ب أ جـ. وقد تبين ان كل مثلثين تساوي زوايا أحدهما زوايا الآخر، فإن أوتار الزوايا المتساوية متناسبة. فنسبة ضلع أ ب إلى ضلع هـ ح كنسبة ضلع ب جـ إلى ضلع هـ ز. ولكن نسبة ضلع ب جـ إلى ضلع هـ ز كنسبة ضلع أ ب إلى ضلع هـ د، لأن هذا موضوع. فنسبة أ ب إلى هـ د وإلى هـ ح واحدة. فاذا أسقطنا الواسطة بقي ضلع هـ د مثل ضلع هـ ح. وكذلك نبين ان نسبة جـ أ إلى د ز، ز ح واحدة. فضلع د ز مساوٍ لضلع ز ح. من مثلث هـ ح ز، وقاعدة ه ز مشتركة. فضلعا د هـ، هـ ز مثل ضلعي هـ ح، هـ ز، وقاعدة ز د مثل قاعدة ز ح. فزاوية د هـ ز مثل زاوية ز هـ ح. وكذلك نبين ان زاوية د ز هـ مثل زاوية هـ ز ح. وتبقى زاوية ز ح هـ مثل زاوية هـ د ز. فزوايا مثلث هـ ح ز مساوية لزوايا مثلث هـ د ز: زاوية ح هـ ز مساوية لزاوية ز هـ د. وزاوية هـ ز ح مساوية لزاوية هـ ز د. وزاوية هـ ح ز مساوية لزاوية هـ د ز.

لكن عملت زاوية ح هـ ز مثل زاوية جـ ب أ، وزاوية هـ ز ح مثل زاوية ب جـ أ، وزاوية هـ ح ز مثل زاوية ب أ جـ. فزوايا مثلث ب أ جـ مساوية لزوايا مثلث هـ د ز: زاوية جـ ب أ مثل زاوية ز هـ د، وزاوية أ جـ ب مثل زاوية د ز هـ، وزاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ز. فقد تبين ان كل مثلثين اضلاعهما متناسبة، فان زواياهما التي توترها تلك الأضلاع متساوية. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/ ٦]

[٧٢ ب] الشكل السادس من المقالة السادسة

اذا تساوت زاويتان من مثلثين وتناسبت أضلاعهما المحيطة بهما، فزوايا أحدهما مساوية لزوايا الآخر، كل زاوية مساوية لنظيرتها.



الشكل ٦/٦

مثاله: ان زاوية ب أ جـ من مثلث أ ب جـ مساوية لزاوية هـ د ز من مثلث د هـ ز؛ ونسبة ضلع أ ب الى د هـ كنسبة أ جـ الى د ز. فأقول ان زاوية أ ب جـ مساوية لزاوية د هـ ز، وزاوية أ جـ ب مساوية لزاوية د ز هـ.

برهانه: انا نعمل على نقطة د من خط د ز زاوية مساوية ب أ جـ، كما بين ببرهان ٢٣ من ١، ولتكن زاوية ز د ح؛ ونعمل على نقطة ز زاوية مثل أ جـ ب، ولتكن زاوية د ز ح. فتبقى زاوية ح مثل زاوية ب ببرهان ٢٦ من ١. فزوايا مثلث د ز ح مساوية لزوايا مثلث أ ب جـ. وأوتار الزوايا المتساوية متناسبة، ببرهان ٤ من ٦. فنسبة أ جـ إلى د ز كنسبة أ ب إلى د ح. وقد كانت نسبة أ جـ إلى د ز كنسبة أ ب إلى د هـ. فاذا أسقطنا الواسطة بقيت نسبة أ ب إلى كل واحد من د هـ، د ح نسبة واحدة. فَـ د هـ مساوٍ لِـ د ح؛ د ز مشترك. فيكون ضلعا هـ د، د ز مساويين لضلعي د ز، د ح؛ وزاوية هـ د ز وضعت مثل زاوية ز د ح. فقاعدة هـ ز مثل قاعدة ز ح، ومثلث هـ د ز مثل مثلث د ح ز، والزوايا التي توترها الأضلاع المتناسبة متساوية ببرهان ٦/٥. فزاوية هـ د ز مساوية لزاوية ز د ح، وزاوية هـ ز د مساوية لزاوية د ز ح، فتبقى زاوية د ح ز مثل زاوية د هـ ز.

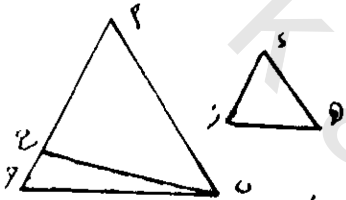
ولكن زاوية ز د ح عملت مثل زاوية ب أ جـ، وزاوية د ز ح عملت مثل زاوية أ جـ ب، وحصلت زاوية د ح ز مساوية لزاوية أ ب جـ. فزوايا مثلث أ ب جـ إذن مساوية لزوايا مثلث د هـ ز: زاوية أ ب جـ مثل زاوية د هـ ز، وزاوية أ جـ

ب مثل زاوية د ز هـ. وقد كان في الموضوع ان زاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ز. فقد تبين ان كل مثلثين تكون زاوية من احدهما مساوية لزاوية من الآخر، وتتناسب الأضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين، فزواياهما متساوية، كل زاوية لنظيرتها. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ٧/ ٦]

الشكل السابع من المقالة السادسة

اذا تساوت زاويتان من مثلثين، وتناسبت اضلاع زاويتين أخريين منهما، وكانت كل واحدة من الزاويتين الباقيتين منها أصغر أو غير أصغر من قائمة، فان زواياهما النظائر متساوية.



الشكل ٧/ ٦

مثاله: ان زاويتي ب أ جـ، هـ د ز من مثلثي أ ب جـ، د هـ ز: متساويتان. والأضلاع المحيطة بزاويتي أ ب جـ، د هـ ز متناسبة: نسبة أ ب إلى د هـ كنسبة ب جـ إلى هـ ز. وكل زاوية من ب جـ أ، هـ ز د أصغر أو غير أصغر من قائمة فنقول ان الزاويتين الباقيتين من مثلث أ ب جـ مساويتان للزاويتين الباقيتين من مثلث د هـ ز: أعني ان زاوية أ ب جـ مساوية لزاوية د هـ ز، وزاوية أ جـ ب مساوية لزاوية د ز هـ.

برهانه: انا ننزل اولاً ان كل واحدة من زاويتي ب جـ أ، هـ ز د ليست أصغر من قائمة.

فنقول ان زاوية جـ ب أ مثل زاوية د هـ ز. فان أمكن الا تكون كذلك، فنعمل على أنها أعظم من زاوية د هـ ز، ونعمل على نقطة ب من خط أ ب زاوية أ ب ح مساوية لزاوية د هـ ز. وكان الموضوع ان زاوية ب أ ح مساوية لزاوية هـ د ز. فتبقى زاوية ب ح أ مساوية لزاوية هـ ز د، ببرهان ١/٢٦. فزوايا مثلث أ ب ح مساوية لزوايا مثلث هـ د ز. والأضلاع التي توتر الزوايا المتساوية متناسبة،

ببرهان ٦/٤ . فنسبة أ ب إلى هـ د كنسبة ب ح إلى هـ ز. وكان الموضوع ان نسبة أ ب إلى د هـ كنسبة ب جـ إلى هـ ز. فاذا اسقطنا الواسطة [٧٣ أ] كما بين ببرهان ٥/١١ ، بقيت نسبة ب ح ، ب جـ إلى هـ ز نسبة واحدة. والمقادير التي نسبتها إلى مقدار واحد نسبة واحدة: فانها متساوية، ببرهان ٥/٩ . فضلع ب ح مساوٍ لضلع ب جـ. فزاوية ب ح جـ مساوية لزاوية ب جـ ح. لكن الموضوع ان زاوية ب جـ ح ليست بأصغر من قائمة، فزاوية ب ح جـ أيضاً ليست بأصغر من قائمة. فمجموع زاويتي ب جـ ح، ب ح جـ ليس بأصغر من قائمتين. ونزيد زاوية جـ ب ح، فتصير زوايا مثلث جـ ب ح الثلاث أعظم من قائمتين. هذا محال غير ممكن، ببرهان ١/١٧ . فقد تبين أنه غير ممكن ان تكون زاوية أ ب جـ أعظم من زاوية د هـ ز.

فنقول: ولا يمكن ان تكون أصغر منها، لأنه اذا جعلت زاوية أ ب جـ أصغر من زاوية د هـ ز، كانت زاوية د هـ ز أعظم من زاوية أ ب جـ، فيتسق البرهان كما اتسق في زاوية أ ب جـ لما وضعت أعظم من زاوية د هـ ز.

فنعمل الآن على ان زاويتي أ جـ ب، د ز هـ: كل واحدة منهما أصغر من قائمة. فنبين، كما بينا، ان زاوية أ ب جـ مساوية لزاوية د هـ ز. فان أمكن الا تكون، فلننزل ان زاوية أ ب جـ أعظم. ونعمل كما عملنا زاوية أ ب ح مساوية لزاوية د هـ ز. وكان الموضوع ان زاوية هـ د ز مساوية لزاوية ب أ ح. فتبقى زاوية أ ح ب مثل زاوية د ز هـ. فزوايا مثلث أ ب ح مساوية لزوايا مثلث هـ د ز. فالأضلاع التي توتر الزوايا المتساوية متناسبة. وكما بينا، نبين ان ضلع ب ح مثل ضلع ب جـ، وزاوية ب جـ ح مساوية لزاوية ب ح جـ. لكن زاوية ب جـ ح أصغر من قائمة. فزاوية ب ح جـ أصغر من قائمة. فتبقى زاوية ب ح أ أعظم من قائمة. لكن زاوية ب ح أ قد تبين انها مساوية هـ ز د. والموضوع ان زاوية هـ ز د أصغر من قائمة. فزاوية ب ح أ هي أيضاً أصغر من قائمة؛ وهي أيضاً أعظم من قائمة. هذا محال غير ممكن. فليست اذن زاوية أ ب جـ بأعظم من

زاوية د هـ ز، ولا أصغر منها. فهما إذن متساويتان. والموضوع ان زاوية ب آ جـ مساوية لزاوية هـ د ز. فتبقى زاوية أ جـ ب مساوية لزاوية هـ ز د. فزوايا مثلث أ ب جـ مساوية لزوايا مثلث د هـ ز. فقد تبين ان كل مثلثين تساوي زاوية من أحدهما زاوية من الآخر، وتتناسب الأضلاع المحيطة بزاويتين أخريين منهما، وتكون كل واحدة من الزاويتين الباقيتين منهما أصغر أو غير أصغر من قائمة، فإن زواياهما النظائر متساوية. وذلك ما أردنا ان نبين.

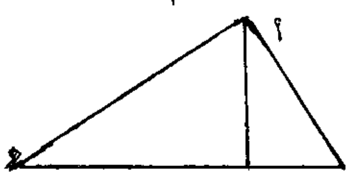
قال النيريزي: انما قال ان زاويتي جـ، ز إما أعظم وإما أصغر من قائمة، لأنهما متى كانت كل واحدة منهما قائمة، وزاويتا أ، د متساويتان، فزاويتا ب، هـ أيضاً متساويتان.

[المبرهنة ٨/ ٦]

الشكل الثامن من المقالة السادسة

كل زاوية قائمة في مثلث يخرج منها عمود إلى القاعدة، فعن جنبتي العمود مثلثان متشابهان ويشبهان المثلث الأعظم.

مثاله: ان زاوية ب أ جـ قائمة، وقد أخرج منها عمود أ د إلى قاعدة ب جـ، فأقول ان مثلثي أ د ب، أ د جـ متشابهان ويشبهان المثلث الأعظم.



الشكل ٨/ ٦

برهانه: ان زاويتي ب أ جـ، أ د ب قائمتان، من مثلثي أ ب جـ، أ ب د. ونجعل زاوية أ ب جـ مشتركة لهما. فتبقى زاوية أ جـ ب من المثلث الأعظم مثل زاوية ب أ د من المثلث الأصغر. وذلك ببرهان ٢٦/ ١. فزوايا مثلث أ ب جـ مساوية لزوايا مثلث أ ب د. والأضلاع التي توتر الزوايا المتساوية متناسبة، ببرهان ٦/٤. فنسبة ب جـ إلى ب أ: كنسبة أ ب إلى ب د، وكنسبة أ جـ إلى أ د.

فقد ساوت زوايا مثلث أ ب جـ الأعظم لزوايا مثلث أ ب د الأصغر، وتناسبت الأضلاع الموترة للزوايا المتساوية. فمثلث أ ب جـ الأعظم يشبه مثلث أ جـ ب الأصغر.

وأقول أيضاً ان مثلثي أ ب د، أ د جـ متشابهان.

برهانه: ان زاويتي أ د ب، أ د جـ قائمتان. وقد تبين ان زاوية ب أ د مساوية لزاوية أ جـ ب. فنبقى زاوية أ ب د مثل زاوية د أ جـ. فزوايا مثلثي أ ب د، أ د جـ متساوية. فنسبة أ ب من مثلث أ ب د إلى أ جـ من مثلث أ د جـ: كنسبة ب د من مثلث أ ب د إلى أ د من مثلث أ جـ د، وكنسبة أ د من مثلث أ ب د إلى جـ د من مثلث أ جـ د. فمثلثا أ ب د، أ جـ د قد تساوت زواياهما وتناسبت الأضلاع الموترة للزوايا المتساوية. فمثلث أ ب د يشبه مثلث أ جـ د. وقد بينا ان كل واحد منهما يشبه المثلث الأعظم. وذلك ما أردنا ان نبين.

تعقيب في الهامش: قال ثابت بن قرة: وجدناها هنا في بعض النسخ كلاماً لم نجده في النسخ اليونانية هو: وهنالك استبان ان كل مثلث قائم الزاوية يخرج من زاويته القائمة عمود على القاعدة، فان العمود يناسب قسمي القاعدة فيما بينهما، وكل واحدة من ضلعي المثلث مناسبة لكل القاعدة، ولكل واحد من قسميها.

تعقيب المحقق: هذا التعبير عن العلاقات الثلاث:

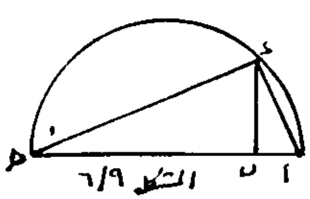
(ب أ)^{٢} = ب د. ب جـ

(أ ب)^{٢} = ب د. د جـ

(أ جـ)^{٢} = جـ د. جـ ب

[المبرهنة ٩/٦، تقابل ١٣/٦ عند هيث]

[٧٣ ب] الشكل التاسع من المقالة السادسة



نريد ان نبين كيف نجد خطاً وسطاً بين خطين معلومين، تتوالى الخطوط الثلاثة على نسبة واحدة. فنجعل الخطين المعلومين أ ب، ب جـ. ونريد ان نجد بينهما خطاً مناسباً لهما. فنصل الخطين،

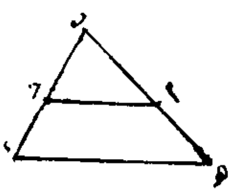
ونجعلهمـا كخط واحد مستقيم يلتقيان على نقطة ب. وهذا الأيصال قد بين بالأشكال المضافة إلى ١/٢. ونخط على أ جـ نصف دائرة، كما بين ببرهان ٣/٢٤، وليكن نصف دائرة أ د جـ, ونقيم على نقطة ب عمود ب د، ببرهان ١١ / ١. ونخـرج خطي أ د، جـ د. فلأن مثلث أ جـ في نصف دائـرة، فإن زاوية أ د جـ قائمة ببرهان ٣/٣٠. وقد خرج من الزاوية القائمة عمود د ب. فعن جنبتي العمود مثلثان متشابهان، ببرهان ٦/٨، وهما مثلثا أ د ب، جـ ب د. فزاوية أ ب د مثل زاوية جـ ب د، وزاوية ب د أ مثل زاوية ب جـ د، والأوتار التي توتر الزوايا المتساوية: متناسبة، فنسبة أ ب من مثلث أ ب د، إلى ب د من مثلث ب د جـ: كنسبة ب د من مثلث أ ب د إلى ب جـ من مثلث ب د جـ. فقد أصبنا خط ب د وسطاً بين خطي أ ب، ب جـ وتوالت الثلاثة على نسبة واحدة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/١٠، تقابل ٦/١١ عند هيث]

الشكل العاشر من المقالة السادسة

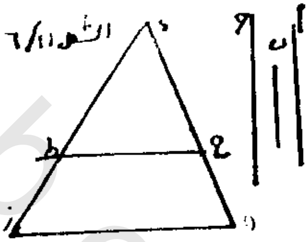
نريد ان نبين كيف نجد خطاً ثالثاً تالياً لخطين وتتوالى [الثلاثة] متناسبة.

فنجعل الخطين أ ب، ب جـ، ونصل أحدهما بالآخر اتصالاً يحدث منهما زاوية، كما في هذه الصورة. وليكن التقاؤهما على نقطة ب. ونخرج ب أ بالاستقامة إلى نقطة هـ. وليكن هـ أ مثل ب جـ، كما بين ببرهان ١/٢. ونصل خط جـ أ. ونخرج خط هـ د يوازي جـ أ، ونخرج ب جـ يلقى هـ د. ونعمل على انه لقيه على نقطة د. فمن أجل ان مثلث هـ ب د قد وصل بين ضلعيه بخط جـ أ يوازي القاعدة، فبما بين ببرهان ٦/٢ تكون نسبة ب أ إلى أ هـ كنسبة ب جـ إلى جـ د. وقد فرضنا أ هـ مثل ب جـ. فنسبة ب أ إلى ب جـ كنسبة ب جـ إلى جـ د. فقـد وجـدنـا خط جـ د ثالثـاً وتالياً لخطي أ ب، ب جـ على نسبتهما. وذلك ما أردنا ان نبين.



[المبرهنة ٦/١١، تقابل ٦/١٢ عند هيث]

الشكل الحادي عشر من من المقالة السادسة

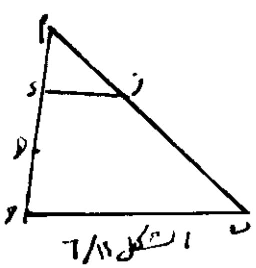


نريد أن نبين كيف نجد خطاً رابعاً تالياً لثلاثة خطوط، وتتوالى متناسبة.

فنجعل الخطوط الثلاثة: أ، ب، جـ؛ ونريد ان نجد لها خطاً رابعاً تتوالى متناسبة: فنصل خطي أ، ب ونجعلهما كخط واحد، وهو د ح هـ، وليكن د ح مثل أ، ح هـ مثل ب. ونصل بنقطة د خطاً مساوياً لخط جـ يحيط مع هـ د بزاوية، وليكن خط د ط. ونصل خط ح ط. ونخرج هـ ز موازياً لخط ح ط. ونخرج د ط ز يلقى هـ ز على نقطة ز. فبما قدمنا من برهان ٦/٢ تكون نسبة د ح الى ح هـ كنسبة د ط الى ط ز. وقد فرضنا د ح مساوياً لخط أ، ح هـ مساوياً لخط جـ. فقد وجدنا خطاً رابعاً، وهو ط ز قد توالى مع خطوط أ، ب، جـ على نسبة واحدة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/١٢، تقابل ٦/٩ عند هيث]

الشكل الثاني عشر من المقالة السادسة

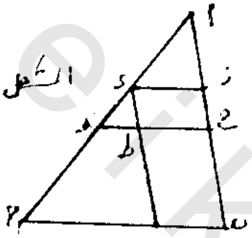


نريد ان نبين كيف نفصل من خط معلوم أي جزء شئنا. فنجعل الخط المعلوم: أ ب، والجزء الذي نريد ان نفصله منه: الثلث. فنصل بنقطة أ خطاً بأي بُعد شئنا، وليحط مع خط أ ب بزاوية. وليكن خط أ جـ. ونقسم خط أ جـ بثلاثة أقسام متساوية، كما بين ببرهان الشكل المضاف الى ١/٣١. فنعمل على انا قسمناه على نقطتي د، هـ. فَـ أ د ثلث أ جـ. ونصل ب جـ. ونخرج د ز يوازي القاعدة التي هي ب جـ. فبما بين ببرهان ٦/٢ تكون نسبة جـ د الى د أ كنسبة ب ز الى ز أ. لكن

جـ د [٧٤ أ] ضعف د أ. فـ ب ز ضعف ز أ. فجميع ب أ ثلاثة أضعاف أ ز، أ ز ثلث أ ب. فقد فصلنا من خط أ ب خط أ ز، وهو الجزء الذي أردنا، وهو الثلث. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/١٣، تقابل ٦/١٠ عند هيث]

الشكل الثالث عشر من المقالة السادسة



الشكل ٦/١١

نريد ان نبين كيف نقسم خطاً معلوماً كقسمة خط آخر معلوم، بمثل أقسامه فليكن الخطان أ ب، أ جـ، ونعمل على ان أ جـ الخط المقسوم على نقطتي د، هـ، كيف كانت القسمة: اما متساوية واما مختلفة. ونريد ان نبين كيف نقسم خط أ ب كقسمة خط أ جـ، بمثل أقسامه، المتساوية او المختلفة. وسبيل هذين الخطين ان يكون لهما وضع ما. فننقلهما عن وضعهما حتى يتصلا على نقطة واحدة، كما اتصلا في هذه الصورة: على نقطة أ، ويحيطان بزاوية ب أ جـ. ونصل ب جـ. ونخرج من نقطتي د، هـ خطي د ز، هـ ح يوازيان جـ ب. ونخرج من نقطة د خط د ك يوازي أ ب. فسطحا ز ك، ب ط متوازيا الأضلاع. فالخطوط المتقابلة متساوية، ببرهان ١/٣٤. فخط ز ح مثل د ط، ح ب مثل ط ك.

وأيضاً فان في مثلث ك د جـ قد وصل بين ضلعي ك د، د جـ بخط هـ ط يوازي قاعدة ك جـ. فنسبة ك ط الى ط د كنسبة جـ هـ الى هـ د؛ ك ط مثل ب ح، ط د مثل ح ز. فنسبة جـ هـ الى هـ د كنسبة ب ح الى ح ز.

وأيضاً في مثلث أ ح هـ: خط د ز قد وصل بين ضلعيه يوازي القاعدة. فنسبة هـ د الى د أ كنسبة ح ز الى ز أ. وقد كانت نسبة جـ هـ الى هـ د كنسبة ب ح الى ح ز. فقد قسم خط أ ب بأقسام خط أ جـ، وعلى تلك النسبة. وذلك ما أردنا ان نبين.

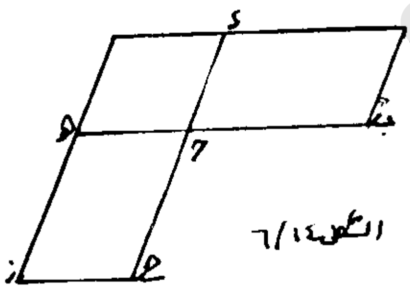
[المبرهنة ١٤/ ٦]

الشكل الرابع عشر من المقالة السادسة

كل سطحين متوازيي الأضلاع، متساويين، تساوي زاوية من احدهما زاوية من السطح الآخر، فإن الأضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متكافئة. واذا كانت الأضلاع المحيطة بالزاويتين متكافئة، فان السطحين متساويان.

مثاله: ان أضلاع سطحي أ جـ، جـ ز متوازية، وهما متساويان، وزاويتا ب جـ د، هـ جـ ح متساويتان. فأقول ان الأضلاع المحيطة بزاويتي ب جـ د، هـ جـ ح متكافئة، أعني أن نسبة ب جـ إلى جـ هـ كنسبة ح جـ إلى جـ د.

برهانه: انا نصل خط ب جـ بخط جـ هـ حتى يصيرا واحداً، كخط ب هـ. ونتمم سطح هـ د.


الشكل ١٤/ ٦

فلأن سطح أ جـ مثل سطح جـ ز فنسبتهما الى سطح أ هـ واحدة، ببرهان ٧/ ٥. لكن نسبة سطح أ جـ الى سطح د هـ كنسبة قاعدة ب جـ الى قاعدة جـ هـ، ببرهان ١/ ٦. وكذلك نسبة سطح ح هـ الى سطح هـ د كنسبة قاعدة ح جـ الى قاعدة جـ د. فاذا رفعنا الوسائط، كما بين ببرهان ١١/ ٥ بقيت نسبة ضلع ب جـ الى ضلع جـ هـ كنسبة ضلع ح جـ الى ضلع جـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأيضاً أقول انه متى كان السطحان متوازيي الأضلاع، وزاويتا جـ منهما متساويتان، ونسبة ضلع ب جـ الى ضلع جـ هـ كنسبة ضلع ح جـ الى ضلع جـ د، فان سطح أ جـ مساوٍ لسطح جـ ز.

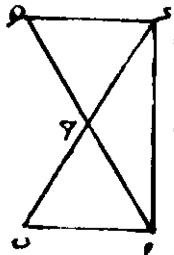
برهانه: ان نسبة قاعدة ب جـ من سطح أ جـ الى قاعدة جـ هـ من سطح د هـ: كنسبة متوازي أ جـ إلى متوزاي د هـ. وكذلك نسبة قاعدة د جـ من متوازي

د هـ الى قاعدة جـ ح من متوازي ح هـ : كنسبة متوازي د هـ الى متوازي ح هـ . فاذا طرحنا الوسائط بقيت نسبة متوازي أ جـ الى متوازي د هـ كنسبة متوازي ح هـ الى متوازي د هـ . والمقادير التي نسبتها الى مقدار واحد نسبة واحدة، فإن المقادير متساوية . فمتوازي أ جـ إذن مساوٍ لمتوازي جـ ز. وذلك ما أردنا ان نبين .

[المبرهنة ١٥/٦]

[٧٤ ب] الشكل الخامس عشر من المقالة السادسة

كل مثلثين متساويين، تساوي زاوية من أحدهما زاوية من المثلث الآخر، فإن الأضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متكافئة . واذا كانت الأضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متكافئة، فإن المثلثين متساويان .



الشكل ٦/١٥

مثاله : ان مثلثي أ ب جـ، د جـ هـ متساويان، وزاويتي أ جـ ب، د جـ هـ متساويتان . فأقول ان نسبة ضلع ب جـ الى ضلع جـ د كنسبة ضلع هـ جـ الى ضلع جـ أ .

برهانه : ان زاوية أ جـ ب اذا كانت مساوية لزاوية د جـ هـ، فانه بحكم برهان ١/١٥ متى وصلنا خط أ جـ بخط جـ هـ، وخط ب جـ، بخط جـ د، اتصلت وصار خطا أ هـ، ب د مستقيمين . ونصل بين نقطتي أ، د .

فمن أجل ان مثلثي أ ب جـ، د هـ جـ متساويان، فببرهان ٧/٥ نسبتهما الى مثلث أ جـ د نسبة واحدة . ومن أجل ان مثلثي أ ب جـ، أ جـ د على قاعدتي ب جـ، جـ د، وارتفاعهما على نقطة أ، فببرهان ١/٦ تكون نسبة قاعدة ب جـ الى قاعدة جـ د كنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث أ جـ د . وبمثل هذا البرهان نبين ان نسبة قاعدة هـ جـ الى قاعدة جـ أ . كنسبة مثلث جـ د هـ الى مثلث د جـ أ لكن مثلث د جـ هـ مساوٍ لمثلث أ جـ ب ، ونسبتهما الى مثلث أ د جـ واحدة ،

كما بينا. فنسبة ضلع ب جـ من مثلث أ ب جـ، الى ضلع جـ د من مثلث جـ هـ د: كنسبة ضلع جـ هـ من مثلث جـ هـ د الى ضلع جـ أ من مثلث أ ب جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

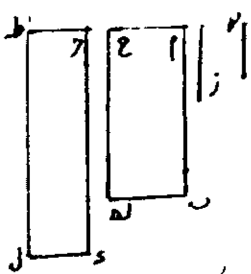
وأقول أيضاً: اذا كانت نسبة ب جـ الى جـ د كنسبة هـ جـ الى جـ أ، وزاويتا جـ متساويتان، فإن مثلث أ ب جـ مساوٍ لمثلث جـ هـ د.

برهانه: ان نسبة ب جـ الى جـ د كنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث أ جـ د. ونسبة هـ جـ الى جـ أ كنسبة مثلث جـ هـ د الى مثلث أ جـ د. فاذا أسقطنا الواسطة، بقيت نسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث أ جـ د: كنسبة مثلث جـ هـ د الى مثلث أ جـ د. والمقادير التي نسبتها الى مقدار واحد واحدة: فهي متساوية، كما بين ببرهان ٥/٩. فمثلث أ ب جـ مساوٍ لمثلث جـ د هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/١٦]

الشكل السادس عشر من المقالة السادسة

كل أربعة خطوط متناسبة، فان القائم الزوايا الذي يحيط به الأول والرابع: مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به الثاني والثالث. واذا كان القائم الزوايا الذي يحيط به الأول والرابع: مساوياً للقائم الزوايا الذي يحيط به الثاني والثالث، فان الخطوط الأربعة متناسبة.



الشكل ٦/١٦

مثاله: ان خطوط أ ب، جـ د، هـ، ز متناسبة: نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ الى ز. فأقول ان القائم الزوايا الذي يحيط به أ ب، ز: مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به جـ د، هـ.

برهانه: انا نقيم على نقطة أ خطاً مساوياً لخط ز؛ وكذلك نقيم على نقطة جـ خطاً مساوياً لخط هـ؛ وعلى زاويتين قائمتين. وليكونا خطي أ ح، جـ ط.

ونتمم متوازيي أ ك، جـ ل. فلأن نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ الى ز؛ أ ح يساوي ز؛ جـ ط يساوي هـ؛ تكون نسبة أ ب الى جـ د كنسبة جـ ط الى أ ح. فسطحا أ ك، جـ ل متوازيا الأضلاع قائما الزوايا، والأضلاع التي تحيط بالزوايا القائمة متكافئة، أعني ان نسبة أ ب الى جـ د كنسبة جـ ط الى أ ح. فسطحا أ ك، جـ ل متساويان، ببرهان ٦/١٤.

لكن سطح أ ك يحيط به خطا أ ب، ز؛ وسطح جـ ل يحيط به خطا جـ د، هـ. فقد تبين ان كل أربعة خطوط متناسبة، فإن القائم الزوايا الذي يحيط به الأول والرابع: مساوٍ للقائم الزوايا الذي يحيط به الثاني والثالث. وذلك ما أردنا ان نبين.

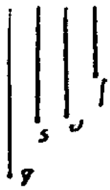
وأقول أيضاً: اذا كان القائم الزوايا الذي يحيط به الأول والرابع مساوياً للقائم الزوايا الذي يحيط به الثاني والثالث [فإن الخطوط الأربعة متناسبة].

برهانه: انا نقيم أ ح، جـ ط مساويين هـ، ز. فمن أجل ان زوايا متوازي أ ك مساوية لزوايا [٧٥ أ] متوازي جـ ل، فببرهان ٦/١٤ تكون الأضلاع التي تحيط بالزوايا المتساوية متكافئة، أعني ان نسبة أ ب الى جـ د كنسبة جـ ط الى أ ح. وَ جـ ط يساوي هـ، أ ح يساوي ز. فنسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ الى ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/١٧]

الشكل السابع عشر من المقالة السادسة

اذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة، فإن القائم الزوايا الذي يحيط به الأول والثاني مساوٍ لمربع الخط الأوسط. وإذا كانت ثلاثة خطوط موضوعة فكان القائم الزوايا الذي يحيط به الأول والثالث مساوياً لمربع الخط الأوسط، فإن الخطوط الثلاثة متناسبة.



مثاله: أن خطوط أ، ب، جـ توالت متناسبة: نسبة أ الى ب كنسبة ب الى جـ. فأقول ان القائم الزوايا الذي يحيط به أ، جـ مساوٍ لمربع ب.

برهانه: انا نجعل خط د مساوياً لخط ب. فلأن نسبة أ الى ب كنسبة ب الى جـ، د مثل ب، فإن نسبة أ الى ب كنسبة د الى جـ. فخطوط أ، ب، د، جـ متناسبة. فببرهان ٦/١٦ يكون القائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ، جـ مساوياً للقائم الزوايا الذي يحيط به خطا ب، د. لكن د مثل ب. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ، جـ مساوٍ لمربع ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأقول ايضاً: ان كان القائم الزوايا الذي يحيط به أ، جـ مساوياً لمربع ب، فان خطوط أ، ب، جـ متناسبة.

برهانه: انا نجعل د مثل ب. فيكون القائم الزوايا الذي يحيط به أ، جـ مثل القائم الزوايا الذي يحيط به ب، د. فالخطوط الأربعة متناسبة، كما بين ببرهان ٦/١٦: نسبة أ الى ب كنسبة د الى جـ؛ د مثل ب. فنسبة أ الى ب كنسبة ب الى جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

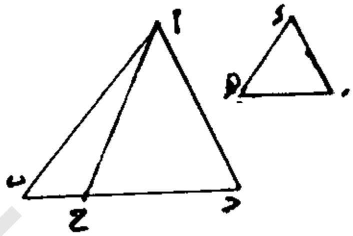
[المبرهنة ٦/١٨، تقابل ٦/١٩ عند هيث]

الشكل الثامن عشر من المقالة السادسة

كل مثلثين متشابهين، فإن نسبة أحدهما إلى الآخر هي نسبة ضلعه إلى ضلعه الذي هو نظيره في النسبة مثناة.

مثاله: ان مثلث أ ب جـ يشبه مثلث د هـ ز: زاوية ب أ جـ مساوية لزاوية هـ د ز، وضلع ب جـ نظير في النسبة لضلع هـ ز. أقول ان نسبة مثلث أ ب جـ إلى مثلث د هـ ز كنسبة ضلع ب جـ إلى ضلع هـ ز، مثناة.

برهانه: انا نستخرج خطاً ثالثاً يتلو ضلعي ب جـ، هـ ز في النسبة، كما بين إخراجه ببرهان ٦/١٠. فليكن خط ب ح. ونخرج خط أ ح. فنسبة ب جـ إلى هـ ز كنسبة هـ ز إلى ب ح. لكن نسبة ب جـ إلى هـ ز كنسبة أ ب إلى د هـ. فنسبة



أ ب إلى د هـ كنسبة هـ ز إلى ب ح. فمثلثا أ ب ح، د هـ ز قد تساوت زاويتان منهما، وهما زاويتا أ ب ح، د هـ ز، وكانت الأضلاع المحيطة بهما [متتالية] في النسبة فمثلثا أ ب ح، د هـ ز متساويان كما بين ببرهان ٦/١٥. وأيضاً فلأن خطوط ب جـ، هـ ز، ب ح متوالية متناسبة، ب جـ الأول، هـ ز الثاني، ب ح الثالث فنسبة ب جـ إلى ب ح كنسبة ب جـ إلى هـ ز مثناة، كما بين في مصادرات مقالة ٥. لكن نسبة ب جـ الى ب ح كنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث أ ب ح، لأنهما على قاعدتي ب جـ، ب ح، وارتفاعهما واحد، على نقطة أ. وذلك ببرهان ٦/١. لكن قد تبين ان مثلث أ ب حـ مساوٍ لمثلث د هـ ز. فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز كنسبة ب جـ الى ب ح. ونسبة ب جـ الى ب ح كنسبة ب جـ الى هـ ز مثناة. فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز كنسبة ضلع ب جـ الى ضلع هـ ز مثناة. وذلك ما أردنا ان نبين.

وها هنا تبين ان كل ثلاثة خطوط متناسبة فان نسبة الأول الى الثالث كنسبة الشبيه المعمول على الأول الى الشبيه المعمول على الثاني، وهذا بين.
[في الهامش: قال ثابت: كنسبة المثلث المعمول على الأول الى المثلث المعمول على الثاني، اذا كان يشبهه].

قال ايرن: فان كان الخط الذي يتلو ب جـ في النسبة أعظم من خط ب جـ، فنخرج خط ب جـ الى ح حتى تكون نسبة ب جـ الى هـ ز كنسبة هـ ز الى ب ح. وسائر البرهان مثل الذي لأوقليدس.

قال النيريزي: ونحن نقول: اذا كان مثلثا أ ب جـ، د هـ ز زاويتا ب، هـ منهما متساويتان، ونسبة [٧٥ ب] مثلث أ ب جـ إلى مثلث د هـ ز كنسبة ضلع ب جـ إلى ضلع هـ ز مثناة، فإن المثلثين متشابهان.

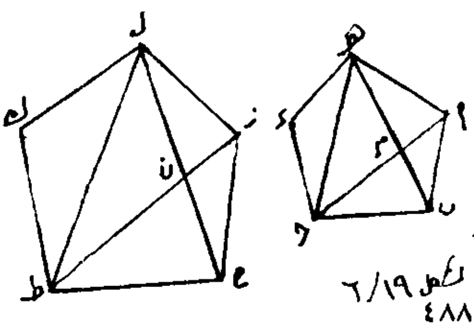
برهانه: انا نخرج خط ب ح يتلو خطي ب جـ، هـ ز في النسبة. فنسبة ب جـ إلى ب ح كنسبة ب جـ إلى هـ ز مثناة. ونسبة ب جـ إلى هـ ز مثناة كنسبة مثلث أ ب جـ إلى مثلث د هـ ز. فنسبة مثلث أ ب جـ إلى مثلث أ ب ح وإلى مثلث د هـ ز: نسبة واحدة. فمثلث أ ب ح مساوٍ لمثلث د هـ ز، فزاوية ب مساوية لزاوية هـ. فالأضلاع المحيطة بزاويتي ب، هـ متكافئة: نسبة أ ب إلى د هـ كنسبة هـ ز إلى ب ح. ونسبة هـ ز إلى ب ح كنسبة ب جـ إلى هـ ز. فزاويتا، ب هـ من مثلثي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان، والأضلاع المحيطة بهما متناسبة فببرهان ٦/٦ فان المثلثين متشابهان. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/١٩، تقابل ٦/٢٠ عند هيث]

الشكل التاسع عشر من المقالة السادسة

السطوح الكثيرة الزوايا، المتشابهة، تنقسم بمثلثات متشابهات، نسبتها كنسبتها، على عدة واحدة، ونسبة الكثير الزوايا إلى الكثير الزوايا: كنسبة ضلعه إلى ضلعه الذي هو نظيره في النسبة: مثناة.

مثاله: أن سطحي أ ب جـ د هـ، ز ح ط ك ل كثيرا الزوايا متشابهان. فأقول انهما ينقسمان بمثلثات متشابهات نسبتها كنسبتها على عدة واحدة. ونسبة سطح أ ب جـ د هـ إلى سطح ز ح ط ك ل: كنسبة ضلع أ ب إلى ضلع ز ح مثناة.



الشكل ٦/١٩

برهانه: انا نخرج خطوط أ جـ، ب هـ، جـ هـ، ز ط، ح ل، ط ل. فلأن سطح أ ب جـ د هـ يشبه سطح ز ح ط ك ل: فان زاوية ب أ هـ

مســاوية لزاوية ح ز ل، فنسبة أ ب إلى ح ز كنسبة أ هـ إلى ز ل؛ فمثلثا أ ب هـ، ح ز ل ساوت زاوية من أحدهما زاوية من المثلث الآخر، وتناسبت الأضلاع المحيطة بهما. فزوايا مثلث أ ب هـ مساوية لزوايا مثلث ز ح ل، ببرهان ٦/٦. فزاوية أ ب هـ مساوية لزاوية ز ح ل. لكن زاوية أ ب جـ مساوية لزاوية ز ح ط. فتبقى زاوية د ب جـ مساوية لزاوية ل ح ط.

وأيضاً فان نسبة أ ب إلى ز ح كنسبة ب جـ إلى ح ط. لكن قد تبين ان نسبة أ ب إلى ز ح كنسبة ب هـ إلى ح ل. فنسبة ب هـ إلى ح ل كنسبة ب جـ إلى ح ط. وزاوية هـ ب جـ قد تبين انها مثل زاوية ل ح ط. فمثلثا هـ ب جـ، ل ح ط قد ساوت زاوية من أحدهما زاوية من الآخر، وتناسبت الأضلاع المحيطة بهما. فزوايا مثلث ب جـ هـ مساوية لزوايا مثلث ح ط ل. فهما متشابهان. وقد تبين ان مثلث أ ب هـ يشبه مثلث ز ح ل.

وأيضاً فلأنه قد تبين ان زاوية ب جـ هـ مساوية لزاوية ح ط ل، وجميع زاوية ب جـ د مساوية لجميع زاوية ح ط ك، فتبقى زاوية هـ جـ د مثل زاوية ل ط ك، وزاوية جـ هـ د مثل زاوية ط ل ك. فزوايا مثلث جـ د هـ مساوية لزوايا مثلث ط ك ل. فمثلث جـ د هـ يشبه مثلث ط ك ل. فقد انقسم سطحا أ ب جـ د هـ، ز ح ط ك ل بمثلثات متشابهات على عدة واحدة.

وأيضاً فان سائر المثلثات التي تحدث من تقاطع هذه الخطوط هي أيضاً متشابهة، كلها، أعني ان مثلث أ ب م يشبه مثلث ح ز ن، ومثلث ب م جـ يشبه مثلث ح ن ط. وكذلك سائر المثلثات التي تحدث على هذه الجهة. وذلك ان زاوية أ ب م مساوية لزاوية ز ح ن، وزاوية ب أ م مساوية لزاوية ح ز ن. فتبقى زاوية ب م أ مساوية لزاوية ح ن ز. وانما طوِّل البرهان بسبب هذه المثلثات. ولولاها لكان البرهان مختصراً لأنه اذا كانت هذه الثلاث المثلثات التي حدثت في سطح أ ب جـ د هـ يُشبه كل واحد منها نظيره من المثلثات التي حدثت في

السطح الآخر، فإن نسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل كنسبة ضلع ب هـ إلى ضلع ح ل مثناة. لكن نسبة ضلع ب هـ إلى ضلع ح ل مثناة هي كنسبة مثلث ب هـ جـ إلى مثلث ح ل ط. فنسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل كنسبة مثلث ب جـ هـ إلى مثلث ح ط ل. وأيضاً فان نسبة جـ هـ إلى ل ط مثناة هي كنسبة مثلث جـ هـ ب إلى مثلث ح ل ط. لكن نسبة جـ هـ إلى ل ط مثناة: كنسبة مثلث جـ هـ د إلى مثلث ط ل ك. [٧٦ أ] فنسبة مثلث ب جـ هـ إلى مثلث ح ط ل كنسبة مثلث جـ هـ د إلى مثلث ط ل ك، وكنسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل.

فمثلثات ح ز ل، ح ط ل، ط ك ل على توالي نسبة مثلثات أ ب هـ، ب جـ هـ، جـ د هـ. فنسبة واحد من المقدمات إلى قرينه من التوالي كنسبة كل المقدمات إلى كل التوالي، كما بين ببرهان ٥/١٣. فنسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل كنسبة جميع سطح أ ب جـ د هـ إلى جميع سطح ز ح ط ك ل لكن نسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل كنسبة ضلع أ ب إلى ضلع ح ز مثناة، كما بين ببرهان ٦/١٨. فنسبة سطح أ ب جـ د هـ إلى سطح ز ح ط ك ل كنسبة أ ب إلى ز ح مثناة. فهذا هو مقدار البرهان.

فأما على مذهب الأصول؛ باستعمال المثلثات التي تحدث عن التقاطع، فكما برهن: وهو أنه أخرج الخطوط، فسطحا أ ب جـ د هـ، ز ح ط ك ل متشابهان. فزاوية أ ب جـ مساوية لزاوية ز ح ط. فنسبة أ ب إلى ز ح كنسبة ب جـ إلى ح ط. فقد تساوت زاويتان من مثلثي أ ب جـ، ز ح ط، وتناسبت الأضلاع المحيطة بهما، فهما متشابهان.

وزاوية ب أ م مثل زاوية ح ز ن، وزاوية أ ب م مساوية لزاوية ز ح ن. فتبقى زاوية أ م ب مثل زاوية ز ن ح. فمثلث أ ب م يشبه مثلث ز ح ن. فنسبة ب م إلى ح ن كنسبة أ م إلى ز ن.

وبمثل هذا البرهان نبين ان مثلث ب م جـ يشبه مثلث ح ز ط، وان نسبة ب م إلى ح ن كنسبة جـ م إلى ط ن. فاذا أسقطنا الوسائط بقيت نسبة أ م إلى ز ن كنسبة م جـ إلى ن ط. فاذا بدلنا كانت نسبة أ م إلى م جـ كنسبة ز ن إلى ن ط. لكن نسبة أ م إلى م جـ كنسبة مثلث أ ب م إلى مثلث ب م جـ. ونسبة ز ن إلى ن ط كنسبة مثلث ز ن ح إلى مثلث ح ن ط.

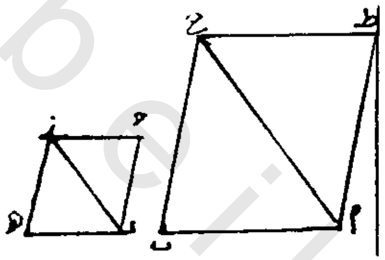
ونسبة أ م إلى م جـ أيضاً كنسبة مثلث أ هـ م إلى مثلث هـ م جـ، وكنسبة مثلث أ ب م إلى مثلث ب م جـ. ونسبة مجموع المقدمين إلى مجموع التاليين كنسبة المقدم الواحد إلى التالي الواحد، ببرهان ٥/١٣. فنسبة مثلث أ ب م إلى مثلث ب م جـ كنسبة جميع مثلث أ ب هـ إلى جميع مثلث ب هـ جـ. وكذلك نسبة مثلث ز ح ن إلى مثلث ح ن ط كنسبة جميع مثلث ز ح ل إلى جميع مثلث ح ط ل. لكن نسبة مثلث أ ب م إلى مثلث ب م جـ كنسبة مثلث ز ح ن إلى مثلث ح ن ط. فجميع مثلث أ ب هـ إلى جميع مثلث ب جـ هـ كنسبة جميع مثلث ز ح ل إلى مثلث ح ط ل. فاذا بدلنا كانت نسبة أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل كنسبة مثلث ب جـ هـ إلى مثلث ح ط ل. وكذلك يتبين ان نسبة مثلث ب جـ هـ إلى مثلث ح ط ل كنسبة مثلث جـ د هـ إلى مثلث ط ك ل. وقد تبين ان نسبة مثلث ب جـ هـ إلى مثلث ح ط ل كنسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل. فنسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل كنسبة مثلث ب هـ جـ إلى مثلث ح ط ل، وكنسبة مثلث جـ هـ د إلى مثلث ط ك ل. ونسبة واحد من المقدمات إلى قرينه من التوالي كنسبة كل المقدمات إلى كل التوالي. فنسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل كنسبة جميع سطح أ ب جـ د هـ إلى جميع سطح ز ح ط ك ل.

لكن نسبة مثلث أ ب هـ إلى مثلث ز ح ل كنسبة ضلع أ ب إلى ضلع ز ح، مثناة. فنسبة سطح أ ب جـ د هـ إلى سطح ز ح ط ك ل: كنسبة ضلع أ ب إلى ز ح مثناة. وذلك ما أردنا ان نبين

[المبرهنة ٢٠/٦، تقابل ١٨/٦ عند هيث]

[٧٦ ب] الشكل العشرون من المقالة السادسة

نريد ان نبين كيف نعمل على خط مستقيم معلوم: سطحاً شبيهاً بسطح معلوم، مثلثاً كان أو كثير الزوايا.



فليكن السطح المعلوم هـ جـ، والخط المعلوم أ ب. ونريد ان نبين كيف نعمل على أ ب سطحاً شبيهاً بسطح هـ جـ. فنخرج قطر د ز. ونعمل على نقطة ب من خط أ ب زاوية مساوية لزاوية د هـ ز، ولتكن زاوية أ ب ح؛ وعلى نقطة أ منه زاوية مساوية لزاوية هـ د ز، ولتكن زاوية ب أ ح. فتبقى زاوية أ ح ب مساوية لزاوية د ز هـ: فزوايا مثلث أ ح ب مساوية لزوايا مثلث د هـ ز. والأضلاع التي توتر الزوايا المتساوية متناسبة، ببرهان ٤/٦. فنسبة ح أ إلى د ز: كنسبة أ ب إلى د هـ؛ وكنسبة ب ح إلى هـ ز.

وأيضاً نعمل على نقطة أ من خط أ ح: زاوية مثل زاوية ز د جـ، ولتكن زاوية ح أ ط؛ وعلى نقطة ح منه زاوية مثل زاوية د ز جـ. ولتكن زاوية أ ح ط. فتبقى زاوية أ ط ح مثل زاوية د جـ ز. فزوايا مثلث أ ح ط مساوية لزوايا مثلث د جـ ز. وأوتار الزوايا المتساوية متناسبة. فنسبة ح أ إلى د ز كنسبة أ ط إلى جـ د، وكنسبة ط ح إلى جـ ز. فاذا أسقطنا نسبة ح أ إلى د ز المتوسطة، بقيت نسبة أ ط إلى د جـ كنسبة أ ب إلى د هـ، وكنسبة ب ح إلى هـ ز، وكنسبة ح ط إلى جـ ز. فأضلاع سطح ط ب مناسبة لأضلاع سطح هـ جـ. وزاوية أ ح ب كانت مثل زاوية د ز هـ. وزاوية أ ح ط مثل زاوية د ز جـ. فجميع زاوية ب ح ط مثل جميع زاوية هـ ز جـ. وكذلك نبين ان جميع زاوية ب أ ط مثل جميع زاوية هـ د جـ. وكنا بينا ان زاوية ط مثل زاوية جـ، وزاوية ب مثل زاوية هـ. فزوايا سطح

ط ب مساوية لزوايا سطح جـ هـ؛ والأضلاع المحيطة منهما بالزوايا المتساوية متناسبة. فسطح ط ب بنسبة سطح جـ هـ. وذلك ما اردنا ان نبين.

قال النيريزي: انما عمل المثلث لأن زوايا المثلثات اذا تساوت كانت الأضلاع متناسبة. وفي المتوازي لا يلزم ذلك.

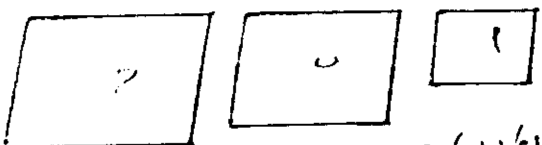
[المبرهنة ٢١/٦]

الشكل الحادي والعشرون من المقالة السادسة

السطوح الشبيهة بسطح واحد فهي أيضاً متشابهة.

مثاله: ان سطحي أ، ب يشبهان سطح جـ. فأقول انهما متشابهان.

برهانه: ان سطحي أ، ب اذا كانا يشبهان سطح جـ. فزوايا سطحي أ، ب مساوية لزوايا سطح جـ، كل زاوية لنظيرتها، أعني أن زوايا سطح أ مساوية لزوايا سطح جـ، وزوايا سطح ب مساوية لزوايا سطح جـ، كل زاوية لنظيرتها. واذا كانت أشياء كل واحد منها مساوٍ لشيء واحد، فالأشياء متساوية. فزوايا سطح أ مساوية لزوايا سطح ب.

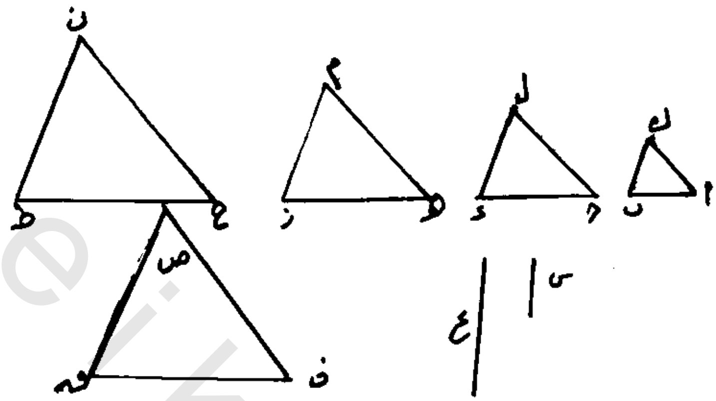


الشكل ٢١/٦

وأيضاً فإن أضلاع سطح أ تناسب اضلاع سطح جـ، وهي الأضلاع التي تحيط بالزوايا المتساوية. وكذلك أضلاع سطح ب تناسب اضلاع سطح جـ، وهي الأضلاع التي تحيط بالزوايا المتساوية. فاذا رفعنا الوسط، كما تبين ببرهان ١١/٥ فان أضلاع سطح أ تناسب أضلاع سطح ب، وهي الأضلاع التي تحيط بالزوايا المتساوية. فسطح أ زواياه مساوية لزوايا سطح ب، والأضلاع التي تحيط بالزوايا المتساوية متناسبة. فسطح أ يشبه سطح ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٢/ ٦

[٧٧ أ] الشكل الثاني والعشرون من المقالة السادسة



اذا كانت سطوح متشابهة على خطوط متناسبة، وكانت معمولة عليها عملاً واحداً، فان السطوح متناسبة. وان كانت سطوح متشابهة متناسبة، على خطوط، وكان عملها عليها عملاً واحداً، فان الخطوط متناسبة.

مثاله: ان خطوط أ ب، جـ د، هـ ز، ح ط الأربعة متناسبة: نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ح ط. وقد عمل عليها سطوح أ ك ب، جـ ل د، هـ م ز، ح ن ط: متشابهة: سطح أ ك ب يشبه جـ ل د، وسطح هـ م ز يشبه ح ن ط. وعملها عمل واحد في تشابه الصور: إما مثلثات، واما ذوات زوايا كثيرة. فنقول ان نسبة سطح أ ك ب الى سطح جـ ل د كنسبة سطح هـ م ز الى سطح ح ن ط.

برهانه: انا نستخرج خطاً ثالثاً يتلو خطي أ ب، جـ د، فليكن خط س؛ ونستخرج أيضاً خطاً ثالثاً يتلو خطي هـ ز، ح ط في النسبة، وليكن خط ع: كما بين استخراجه ببرهان ٦/١٠. فلأن نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ح ط؛ ونسبة جـ د الى س كنسبة ح ط الى ع، فبالمساواة تكون نسبة أ ب الى س كنسبة هـ ز الى ع. لكن نسبة أ ب الى س كنسبة الشبيه المعمول على أ ب الى الشبيه المعمول على جـ د، كما بين ببرهان ٦/١٨. لكن الشبيه المعمول على أ ب

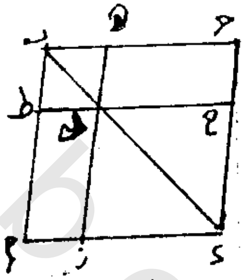
هو سطح أ ك ب، والشبيه المعمول على جـ د هو سطح جـ ل د. فنسبة أ ب الى س كنسبة سطح أ ك ب الى سطح جـ ل د. وكذلك نبين ان نسبة هـ ز الى ع كنسبة سطح هـ م ز الى سطح ح ن ط. وقد تبين ان نسبة أ ب الى س كنسبة هـ ز الى ع. فنسبة سطح أ ك ب الى سطح جـ ل د كنسبة سطح هـ م ز الى سطح ح ن ط. وذلك ما أردنا ان نبين.

ثم نجعل نسبة سطح أ ك ب الى سطح جـ ل د كنسبة سطح هـ م ز الى سطح ح ن ط. وسطح أ ك ب يشبه سطح جـ ل د، وسطح هـ م ز يشبه ح ن ط. فأقول ان الخطوط الأربعة متناسبة. نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ح ط.

برهانه: انا نجعل نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ف ق. ونعمل على ف ق سطح ف ق ص يشبه سطح ح ن ط. فخطوط أ ب، جـ د، هـ ز، ف ق متناسبة: نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ف ق. وسطح أ ك ب يشبه سطح جـ ل د وسطح ف ق ص يشبه سطح هـ م ز، لأنه يشبه سطح ح ن ط. فبما قدمنا أيضاً تكون السطوح المعمولة على الخطوط المتناسبة: متناسبة. فنسبة سطح أ ك ب الى سطح جـ ل د كنسبة سطح هـ م ز الى سطح ف ق ص. وقد كانت نسبة سطح أ ك ب إلى سطح جـ ل د كنسبة سطح هـ م ز الى سطح ح ن ط. فنسبة سطح هـ م ز الى سطح ف ق ص، والى سطح ح ن ط: نسبة واحـدة. واذا كانت مقـادير نسبتهـا الى مقـدار واحد نسبة واحدة، فالمقادير متساوية، كما بين ببرهان ٩/٥. فسطح ف ق ص مثل سطح ح ن ط. ومن أجل ان سطح ح ن ط مساوٍ لسطح ف ق ص وشبيه به، فان الأضلاع التي توتر الزوايا المتساوية متساوية، ولأن نسبة سطح ح ن ط الى سطح ف ق ص كنسبة ح ط الى ف ق مثناة، وسطح ح ن ط مساوٍ لسطح ف ق ص. فخط ح ط مساوٍ لخط ف ق. وكانت نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ف ق. فنسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ح ط. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٢٣ ، تقابل ٦/٢٤ عند هيث]

[٧٧ ب] الشكل الثالث والعشرون من المقالة السادسة



كل سطح متوازي الأضلاع على قطره سطوح متوازية الأضلاع، فهو يشبهها وهي متشابهة.

مثاله: ان سطح أ ب جـ د متوازي الأضلاع، وقطره خط ب د، وعليه سطح ب هـ ك ط، وسطح د ز ك ح وهما متوازيا الأضلاع، وسطح هـ ط يشارك سطح د ب في زاوية أ ب جـ. فأقول ان سطحي ح ز، هـ ط يشبهان سطح د ب، وهما متشابهان.

برهانه: ان مثلث أ د ب فيه خط ك ز يوازي قاعدة أ ب. فنسبة ب ك الى ك د كنسبة أ ز الى ز د. وذلك ببرهان ٦/٢ وأيضاً في مثلث ب د جـ: خط ح ك يوازي قاعدة ب جـ. فنسبة ب ك الى ك د كنسبة جـ ح الى ح د. وقد كانت نسبة ب ك الى ك د كنسبة أ ز الى د ز. واذا كانت مقادير نسبتها كنسبة مقادير أخر، فان المقادير متناسبة، ببرهان ٥/١١. فنسبة أ ز الى د ز كنسبة جـ ح الى ح د. فاذا ركبنا، كانت نسبة أ د الى د ز كنسبة جـ د الى د ح. وزاوية د مشتركة للسطحين، والأضلاع المحيطة بها متناسبة. فسطح ح ز يشبه سطح د ب.

وكذلك نبين ان سطح هـ ط يشبه سطح د ب. فأقول أيضاً ان سطح ح ز يشبه سطح هـ ط، لأنهما يشبهان سطح د ب. وقد تبين ببرهان ٦/٢١ ان السطوح الشبيهة بسطح واحد هي أيضاً متشابهة. وذلك ما أردنا ان نبين.

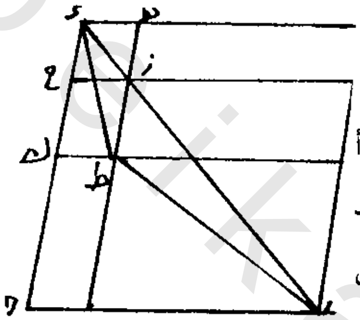
وقد يعلم ببرهان أخف: وذلك ان سطح ح ز متوازي الأضلاع، وسطح د ب متوازي الأضلاع. فخط ح ط يوازي أ د، أ د يوازي جـ ب. وكذلك هـ ز يوازي أ ب. فزاوية د ح ك الخارجة مثل زاوية د جـ ب الداخلة. وذلك ببرهان ١/٢٩. وكذلك زاوية د ز ك الخارجة مساوية لزاوية د أ ب الداخلة. وزاوية أ د جـ للسطحين جميعاً. فتبقى زاوية ح ك ز الداخلة مثل زاوية أ ب جـ الخارجة.

فزوايا سطح ح ز مثل زوايا سطح د ب . وكذلك نبين ان سطح هـ ط يشبه سطح د ب . وهما جميعاً متشابهان . وذلك ما أردنا ان نبين .

[المبرهنة ٦/٢٤ ، تقابل ٦/٢٦ عند هيث]

الشكل الرابع والعشرون ممن المقالة السادسة

اذا فصل من سطح متوازي الأضلاع شكل متوازي الأضلاع مشابه للشكل الأعظم، ووضع وضعاً مشابهاً له: يشتركان في زاوية: فإنه على قطره .



الشكل ٦/٢٤

مثاله : أن متوازي ح هـ قد فصل من متوازي أ جـ ، وهما متشابهان ، ووضعا وضعاً مشابهاً ، وقد اشتركا في زاوية أ د جـ . فأقول ان سطح هـ ح على قطر سطح أ جـ ، والقطر د ز ب .

برهانه : انه لا يمكن غيره . فإن أمكن فليكن على خط د ط ب . ولا يكن خط د ز ب قطراً ، ان امكن ، ولكن يكون القطر د ط ب . ونخرج هـ ز يمر بنقطة ط ، ونخرج ط ك يوازي أ د . فمتوازي هـ ك على قطر متوازي أ جـ ، لأنا جعلنا القطر د ط ب . فببرهان ٦/٢٣ : متوازي هـ ك يشبه متوازي أ جـ ، والأضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة . فنسبة جـ د الى د ك كنسبة أ د الى د هـ .

وأيضاً فانا وضعنا ان متوازي هـ ح يشبه متوازي أ جـ . فنسبة جـ د الى د ح كنسبة أ د الى د هـ . وكانت نسبة جـ د الى د ك كنسبة أ د الى د هـ . والمقادير التي هي على نسبة مقادير أخر فان المقادير متناسبة ، ببرهان ٥/١١ . فنسبة جـ د الى د ك كنسبة جـ د الى د ح . فنسبة جـ د الى د ك ، د ح واحدة . واذا كانت نسبة مقدار الى مقادير نسبة واحدة ، فان المقادير متساوية ، ببرهان ٥/٩ . فخط د ك مساوٍ لخط د ح : الأعظم مساوٍ للأصغر . هذا محال ، غير ممكن . فليس [٧٨ أ] خط د ط ب قطر المتوازي أ جـ . وليس يمكن ان يكون قطره غير د ز

ب الذي عليه متوازي هـ ح. وذلك ما أردنا ان نبين.

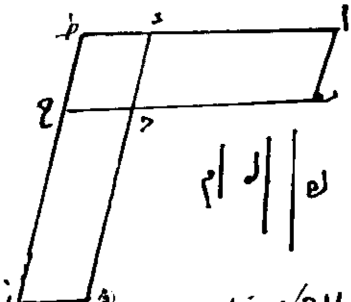
[المبرهنة ٢٥/ ٦، تقابل ٢٣/ ٦ عند هيث]

الشكل الخامس والعشرون من المقالة السادسة

اذا تساوت زاويتان من سطحين متوازيي الأضلاع، فنسبة أحدهما الى الآخر مؤلفة من نسبة أضلاعهما.

وسواء قلنا اذا تساوت زاويتان من سطحين، أو قلنا اذا تساوت زوايا سطحين: لأنه اذا تساوت زاويتان منهما، فان الزاويتين اللتين تقابلانهما تساويان هاتين الزاويتين، ويبقى في كل واحد من السطحين زاويتان متساويتان وتتساويان، فتصير الأربع الزوايا متساوية، أعني ان الزاويتين الباقيتين في أحد السطحين تساويان الزاويتين الباقيتين في السطح الآخر.

مثال الخبر ان سطحي أ جـ، جـ ز متوازيا الأضلاع، وزاوية ب جـ د مثل زاوية هـ جـ ح، فأقول ان نسبة أ جـ الى جـ ز هي نسبة ب جـ الى جـ ح مثناة بنسبة د جـ الى جـ هـ.



الشكل ٥/ ٦

برهانه: ان سطحي أ جـ، جـ ز إن كانا منفصلين فانا نصلهما بزاويتي جـ، لأن خط ب أ يتصل بخط جـ ح ويصيران خطاً واحداً مستقيماً. وكذلك اذا وصلنا ب جـ بخط جـ هـ اتصلا وصارا خطاً واحداً مستقيماً، وتبقى الزاويتان على حالهما: متساويتين. ونتمم سطح جـ ط. ونفرض خطوط ك، ل، م الثلاثة. ونجعل نسبة ب جـ الى جـ ح كنسبة ك الى ل، ونسبة د جـ الى جـ هـ كنسبة ل الى م. فنسبة ك الى م كنسبة ب جـ الى جـ ح مثناة بنسبة د جـ الى جـ هـ. لكن نسبة ب جـ الى جـ ح كنسبة متوازي أ جـ الى متوازي د ح: ببرهان ٦/١. ونسبة د جـ الى جـ هـ كنسبة متوازي د ح الى متوازي جـ ز. فنسبة

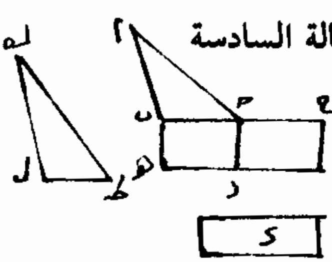
متوازي أ جـ الى متوازي د ح كنسبة ك الى ل؛ ونسبة متوازي د ح الى متوازي جـ ز كنسبة ل الى م. فبالمساواة تكون نسبة متوازي أ جـ الى متوازي جـ ز كنسبة ك الى م.

لكنا قد بينا ان نسبة ك الى م مؤلفة من نسبة ب جـ الى جـ ح ومن نسبة د جـ الى جـ هـ، أعني من نسبة ب جـ الى جـ ح مثناة بنسبة د جـ الى جـ هـ. فنسبة متوازي أ جـ الى متوازي جـ ز كنسبة ب جـ الى جـ ح مثناة بنسبة د جـ الى جـ هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال النيريزي: تثنية النسبة وتأليف النسبة انما هو تضعيف النسبة بعضها ببعض. مثال ذلك انا نفرض ب جـ، جـ ح، د جـ، جـ هـ: من المقادير المشتركة، وليقدرها كلها الذراع الواحدة، حتى يكون ب جـ أربع أذرع، جـ د ذراعين، جـ ح ثماني أذرع، جـ هـ عشر أذرع. فسطح أ جـ يعده السطح المتوازي الأضلاع الذي كل ضلع منه ذراع واحدة، وزواياه مساوية لزوايا سطح أ جـ ثماني مرات. وذلك السطح بعينه هو سطح جـ ز ثمانين مرة. فسطح أ جـ عُشر سطح جـ ز. فاذا ضاعفنا العدد السمّي لنسبة ب جـ الى جـ ح، وهو النصف بالعدد السمي لنسبة د جـ الى جـ هـ، الذي هو الخمس، كان المجتمع العشر، الذي هو نسبة سطح أ جـ الى سطح جـ ز.

[المبرهنة ٦/٢٦، تقابل ٦/٢٥ عند هيث]

الشكل السادس والعشرون من المقالة السادسة



الشكل ٦/٢٦

نريد ان نبين كيف نعمل سطحاً شبيهاً بسطح معلوم متوازي الأضلاع ومساوياً لسطح آخر معلوم فنجعل [٧٨ ب] الشبيه سطح أ ب جـ، والمساوي

سطح د. فنريد ان نبين كيف نعمل سطحاً يشبه سطح أ ب جـ، ويساوي سطح د. فنضيف الى خط ب جـ سطحاً مساوياً لسطح أ ب جـ، كما بين عمله ببرهان ١/٤٤، وليكن سطح ب ز. ونضيف الى خط جـ ز سطحاً [متوازي الأضلاع] يساوي سطح د، وليكن سطح ز ح. ونستخرج بين خطي ب جـ، جـ ح خطاً مناسباً لهما، كما بين استخراجه ببرهان ٦/١٠، وليكن خط ط ك. ونعمل عليه سطحاً يشبه سطح أ ب جـ، كما بين عمله ببرهان ٦/٢٠، وليكن سطح ك ل ط، فنسبة ب جـ إلى ط ك كنسبة ط ك إلى جـ ح. فتكون نسبة ب جـ الأول الى جـ ح الثالث: كنسبة الشبيه المعمول على ب جـ الأول، الذي هو أ ب جـ، الى الشبيه المعمول على ط ك الثاني، الذي هو ط ل ك، ببرهان ٦/١٨.

لكن نسبة ب جـ إلى جـ ح كنسبة سط ب ز إلى سطح ز ح. فاذا بدلنا، كانت نسبة سطح أ ب جـ إلى سطح ن ز: كنسبة سطح ط ل ك إلى سطح ز ح. وسطح أ ب جـ مساوٍ لسطح ب ز، فسطح ط ل ك مساوٍ لسطح ز ح. لكن سطح ز ح عمل مساوياً لسطح د. فسطح ط ل ك مساوٍ لسطح د. وعملناه مشابهاً لسطح أ ب جـ. فقد عملنا سطح ط ل ك شبيهاً بسطح أ ب جـ المعلوم، ومساوياً لسطح آخر معلوم، . وهو د. وذلك ما أردنا ان نبين.

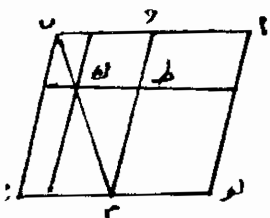
قال النيريزي: وليكن لهذا الشكل مثال على جهة الأعداد: فنجعل مساحة مثلث أ ب جـ أربعة وستين، وقاعدة ب جـ ثمانية. فاذا أضفنا إلى ب جـ سطحاً قائم الزوايا، مثل سطح مثلث أ ب جـ، فان ضلعه الثاني الذي هو جـ ز يكون ثمانية. فمتوازي ب ز متساوي الأضلاع. ونجعل سطحاً مساحته مئة وأربعة وأربعون اذا أضفناه إلى جـ ز، كان ضلعه الثاني الذي هو جـ ح: ثمانية عشر من العدد. فاذا أخرجنا بين خطي ب جـ، جـ ح خطاً ثالثا يناسبهما فيما بينهما، مثل خط ك ط، يكون اثني عشر. فاذا عملنا على ك ل مثلثاً يشبه مثلث أ ب

جـ، فان عمـوده يكون أربعة وعشرين. وذلك ان عمود مثلث أ ب جـ: ستة عشر. وذلك ان نسبة عمود مثلث أب جـ إلى عمود مثلث ط ل ك كنسبة ضلع ب جـ إلى ضلع ل ط. فمثلث ط ك ل يشبه مثلث أ ب جـ، ويساوي متوازي د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٧/٦]

الشكل السابع والعشرون من المقالة السادسة

اذا أضيف سطح متـوازي الأضـلاع معلوم إلى نصف خط معلوم، فان السطوح المتوازية الأضلاع المضافة إلى الخط كله، الناقصة عن تمام الخط سطوحاً متوازية الأضلاع على قطر السطح المضاف إلى نصف الخط، وتكون مشابهة للسطح المعمول على نصف الخط، ووضعها كوضعه، فإن أعظم هذه السطوح كلها: السطح المتوازي الأضلاع المعمول على نصف الخط الآخر المتمم للسطح المعلوم.



الشكل ٢٧/٦

مثاله: ان الخط المعلوم: أ ب، ونصفه ب جـ وقد أضيف اليه سطح جـ ز، وهو متوازي الأضلاع معلوم، وقد تمم سطح جـ هـ، وهو المعمول على خط أ جـ الـذي هو النصف الآخر من الخط؛ وقد أضيف إلى خط أ ب سطح آخر متوازي الأضلاع، وهو متوازي أ ك، ينقص من تمام الخط متوازي ك م، شبيهاً بمتوازي جـ ز المعلوم، المضاف إلى جـ ب الذي هو نصف الخط، وعلى قطره. فأقول ان سطح أ ك أصغر من سطح جـ هـ المعمول على نصف الخط الآخر.

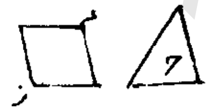
برهانه: ان سطح ك ب يشبه سطح جـ ز، وعلى قطره، ويتمم سطح م ب؛ أ جـ مثل ب جـ ومثل هـ م [٧٩ أ]، ب جـ مثل م ز. فَـ هـ م مثل م ز. فمتوازي هـ ط مثل متوازي ط ز. فاذا أسقطنا سطح م ك، بقي متوازي هـ ط أعظم من

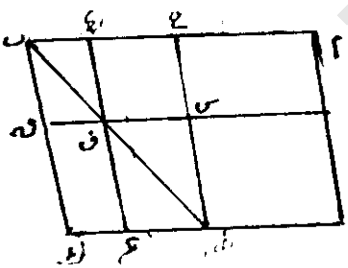
متوازي ك ز. لكن متوازي ك ز مثل متوازي جـ ك، لأنهما متممان عن جنبتي قطر م ب، كما بين ببرهان ١/٤٣. فسطح هـ ط أعظم من سطح ط ل. ونأخذ سطح أ ط مشتركاً، فجميع سطح هـ جـ أعظم من جميع سطح أ ك. وذلك ما أردنا ان نبين.

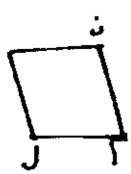
[المبرهنة ٦/٢٨]

الشكل الثامن والعشرون من المقالة السادسة

نريد ان نبين كيف نضيف إلى خط مستقيم معلوم سطحاً متوازي الأضلاع ينقص عن تمامه سطحاً شبيهاً بسطح متوازي الأضلاع معلوم، ويكون المضاف مساوياً لشكل ما مستقيم الخطوط معلوم، ويكون ذلك الشكل المستقيم الخطوط، ليس بأعظم من المتوازي الأضلاع المضاف إلى نصف الخط المعلوم الشبيه بالناقص.







فليكن الخط المعلوم أ ب، والسطح المساوي للمضاف مثلث جـ، وليس هو بأعظم من المتوازي المضاف إلى نصف الخط. ونجعل المتوازي الشبيه بالناقص سطح د ز. ونريد ان نبين كيف نضيف إلى خط أ ب سطحاً متوازياً مساوياً لمثلث جـ، ينقص عن تمام الخط سطحاً يشبه سطح د ز. فنقسم أ ب نصفين على نقطة ح. ونعمل على خط ب ح سطحاً شبيهاً بسطح د ز، كما بين عمله ببرهان ٦/٢٠، وهو ك ح. ونتمم سطح أ ط. فإن كان سطح أ ط مساوياً لمثلث جـ، فقد عملنا ما أردنا، لأنه قد عمل على خط أ ب: متوازي أ ط يساوي مثلث جـ، وينقص عن تمام الخط متوازي ك ح يشبه سطح د ز.

وان كان متوازي أ ط أعظم من سطح جـ. فليكن ما يزيد عليه مساوياً لسطح ل ن. ونجعل سطح ل ن يشبه سطح د ز. لكن متوازي د ز جعلناه يشبه متوازي ح ك. فمتوازي ل ن يشبه متوازي ح ك، ونسبة م ن إلى ط ح كنسبة م ل إلى ط ك، ط ح أعظم من م ن، ط ك أعظم من م ل. فنفصل ط س مثل م ن، ط ع مثل م ل، ونتمم متوازي س ع، وهو على قطر سطح ك ح، أعني على خط ط ف ب. ونتمم أيضاً سطوح هـ ق، ح ف، أ س، ع ق.

فمن أجل ان سطح ك ح أعظم من مثلث جـ، أعني سطح أ ط، وسطح ن ل هو فضل سطح ح ك على مثلث جـ، فسطح ح ك مساوٍ لمجموع سطح جـ، ن ل. لكن متوازي س ع عمل مثل سطح ل ن. فننقص سطح س ع المشترك، فيبقى علم س هـ ق ع مساوياً لمثلث جـ ومتمم ح ف مثل متمم ق ك، ببرهان ٤٣/١، فنأخذ سطح ف ب مشتركاً. فجميع سطح ح ق مثل جميع سطح هـ ك، وخط أ ح مثل خط ح ب. فسطح أ س مثل سطح ح ق، ببرهان ١. لكن سطح ح ق قد تبين انه مساوٍ لسطح هـ ك. ونجعل سطح ح ف مشتركاً فيكون جميع سطح أ ف مساوياً لعلم س هـ ق ع، وعلم س هـ ق ع مساوٍ لمثلث جـ. فسطح أ ف مساوٍ لمثلث جـ. فقد تبين ان قد أضفنا إلى خط أ ب سطح أ ف مساوياً لمثلث جـ، ينقص عن تمام الخط كله سطح ف ب شبيها بسطح د ز المعلوم. وذلك ان سطحي ف ب، س ع على قطر متوازي ح ك. فهما شبيهان. لكن سطح س ع مساوٍ لسطح ن ل ومشابه لسطح د ز. فسطح ف ب يشبه سطح د ز. وأيضاً فان سطح ف ب معمول على قطر سطح ح ك، وسطح ح ك عمل شبيهاً بسطح د ز. فسطح ف ب يشبه سطح د ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال النيريزي: ليس يمكن ان يضاف إلى كل خط سطح ينقص عن تمام الخط [٧٩ ب] سطحاً شبيهاً بسطح قائم الزوايا، الا بعد ان يكون السطح الذي يراد أضافته ليس بأعظم من المضاف إلى نصف الخط المعلوم الشبيه بالناقص،

كما قال. وانما قدم الشكل الذي قبله، لهذا المعنى بعينه. فنجعله على جهة الأعداد ليظهر مثاله ظهوراً بيناً: فنجعل مساحة مثلث جـ الفاً وأربعاً وعشرين ذراعاً. ونجعل طول خط أ ب أربعين ذراعاً. ونجعل طول ضلع د هـ اربعة امثال ضلع هـ ز. فيكون أ ح عشرين ذراعاً. فإذا أضفنا إلى خط أ ح شبيهاً لسطح د ز، وهو سطح أ ط. فظاهر ان خط ح ط المساوي لخط أ ص، يكون ثمانين ذراعاً. فإنه اذا كانت نسبة د هـ إلى هـ ز كنسبة أ ص إلى أ ح، د هـ أربعة أمثال هـ ز، نحتاج ان يكون أ ص أيضاً أربعة أمثال أ ح. فَـ أ ص ثمانون ذراعاً، أ ح يفرض عشرين ذراعاً. فسطح أ ط تكون مساحته الفاً وستمئة ذراع؛ وهو أعظم من مساحة مثلث جـ. فنأخذ من سطح أ ط مثل مثلث جـ. فيكون الباقي خمسمئة وستاً وسبعين ذراعاً. فنعمل منه سطح و ل شبيهاً بسطح د ز، كالذي بيِّن عمله ببرهان ٦/٢٦. فظاهر ان ضلع ن م يجب ان يكون أربعة أمثال ضلع م ل. فضلع ن م إذن ثمان وأربعون ذراعاً، وضلع م ل اثنتا عشرة ذراعاً؛ لأن ثمانية وأربعين أربعة أمثال اثني عشر، ومضروب أحدهما في الآخر خمسمئة وست وسبعون ذراعاً.

واما على جهة الأعداد فانا نريد ان نبين كيف نجد عددين أو خطين يكون أحدهما أربعة أمثال الآخر، ويكون مضروب أحدهما في الآخر خمسمئة وستة وسبعين. فلننزل ان خط ب ز هو الأعظم، وخط ز س الأصغر، وان ب ز أربعة أمثال ز س، ومضروب ب ز في ز س: خمسمئة وست وسبعون ذراعاً. فاذا قسمنا ف ز بأربعة أقسام، فان ضرب كل قسم منها في ز س يكون مئة وأربعاً وأربعين ذراعاً. فَـ ز س في مثله: مئة وأربع وأربعون ذراعاً، وَ م ل اثنا عشر ذراعاً. فنتم سطح أ ك. فسطح ح ك مثل سطح أ ط، وهو ألف وستمئة ذراع. فنفصل من ح ط: ط س مثل ن م، ط ع مثل م ل. ونخرج قطر ب ط، ونتم سطوح أ ب، أ ق، ع س، س ك. فسطح ع س خمسمئة وست وسبعون ذراعاً. فيبقى علم ح ف ك ألفاً وأربعاً وعشرين ذراعاً، وهو مثل جـ. لكن العلم مثل سطح أ ب. فسطح أ ف ألف واربع وعشرون ذراعاً، لكن أ ح عشرون ذراعاً،

ح هـ اثنتا عشرة ذراعاً. فَـ هـ أ اثنان وثلاثون ذراعا. وَ ف هـ أيضاً اثنان وثلاثون ذراعاً، لأن ف ع ثمان وأربعون ذراعاً، هـ ب ثماني اذرع. فقد أضفنا إلى خط أ ب سطح أ ف مثل مثلث جـ، وهو الف وأربع وعشرون ذراعاً، ينقص عن تمام الخط بسطح ف ب: شبيهاً بسطح ن ل. وذلك ان ضلع ن م أربعة أمثال ضلع م ل. وكذلك ضلع ف هـ أربعة أمثال ضلع هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

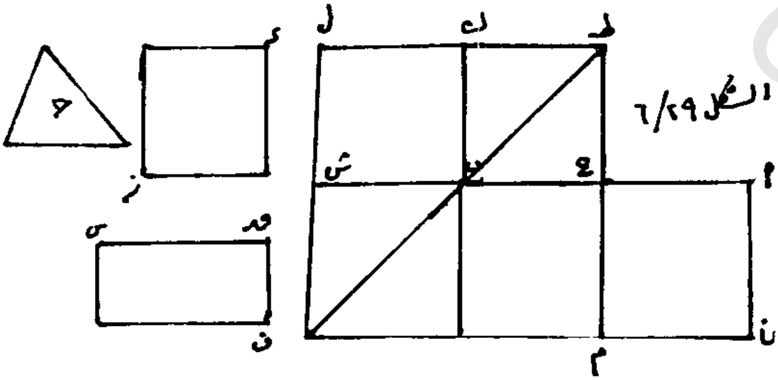
ولو اتفق ان يكون مثلث جـ أكثر من الف وستمئة ذراع، التي هي مقدار مساحة أ ط، لما أمكن ان يضاف إلى خط أ ب سطح مساوٍ له، وينقص عن تمامه سطح هـ ق، ويكون ف هـ أربعة أضعاف هـ ب. اللهم الا ان نجعل نسبة ف هـ إلى هـ ب أعني د هـ إلى هـ ز، بحسب ذلك، أعظم، مثلاً ان يكون مثلث جـ الفي ذراع، فيجب ان يكون أ ص أقل من مئة ذراع. وكذلك جهة سائر الأعمال.

[المبرهنة ٢٩/ ٦]

الشكل التاسع والعشرون من المقالة السادسة

نريد ان نبين كيف نضيف إلى خط مستقيم معلوم سطحاً متوازي الأضلاع يزيد على تمامه سطحاً شبيهاً بسطح متوازي الأضلاع معلوم، ويكون المضاف مساوياً لشكل مستقيم الخطوط معلوم.

فليكن الخط المعلوم أ ب والسطح الشبيه



[٨٠ أ]

بالزائد: سطح د ز، والمساوي للمضاف مثلث جـ. ونريد ان نبين كيف نضيف إلى خط أ ب سطحاً متوزازي الأضلاع شبيهاً بسطح د ز:

فنقسم خط أ ب بنصفين على نقطة ح. ونعمل على خط ب ح: سطح ك ح متوازي الأضلاع شبيهاًبسطح د ز. ونعمل سطحاً متوازي الأضلاع مساوياً لمجموع سطحي ك ح وَ جـ، ويشبه متوازي د ز، كما عملنا ببرهان ٦/٢٦. وليكن سطح ف س. فلأن سطح ك ح يشبه سطح ف س، لأنهما جميعاً عملا مشابهين لسطح د ز. فإن نسبة س ق إلى ط ك كنسبة ف ق إلى ط ح. لكنا عملنا سطح ف س مساوياً لمجموع سطحي ح ك وَ جـ. فسطح ف س اذن أعظم من سطح ح ك؛ والأضلاع المحيطة بزاويتي ق، ط متناسبة، كما قلنا فَـ ف ق أطول من ح ط، س ق أطول من ط ك. فنخرج ط ك إلى ل، ونجعل ط ل مثل س ق، ونخرج ط ح إلى م، ونجعل ط م مثل ف ق، ونتمم سطح م ل، وليكن قطره ط ز. ونخرج أ ح ب يلقى ضلع ل ز على نقطة س. فسطحا ح ك، ب ز على قطر متـوازي م ل. وهما أيضاً متوازيا الأضلاع. فهما متشابهان، ويشبهان سطح ل م. فلأن ط م مثل ق ف، ط ل مثل س ق، وسطح م ل يشبه سطح ح ك، أعني سطح ف س، فإن سطح م ل مساوٍ لسطح ف س. وكنا عملنا سطح ف س مساوياً لمجموع سطحي ك ح وَ جـ. فسطح م ل مساوٍ لسطحي ك ح وَ جـ. فاذا أسقطنا سطح ك ح المشترك، بقي علم م ش ك مساوياً لسطح جـ. فلأن سطحي أ م، م ب على قاعدتين متساويتين، وهما أ ح، ح ب، وبين خطين متوازيين، وهما أ س، ن ز، فان سطح أ م يكون مساوياً لسطح م ب. ومتمم م ب مساوٍ لمتمم ب ل، فسطح أ م مساوٍ لسطح ب ل. ونجعل سطح م س مشتركاً، فيصير جميع علم م ش ك مساوياً لجميع سطح أ ز. وقد كنا بينا أن علم م س ك مساوٍ لسطح جـ. فجميع سطح أ ز مساوٍ لسطح جـ. فقد عملنا على خط أ ب المعلوم سطح أ ز يزيد على تمامه سطحاً شبيهاً بسطح د ز المعلوم، وهو سطح ب ز. وذلك ما أردنا ان نعمل.

وسـواء كان د ز مربعـاً أو مختلف الأضـلاع، فان طريق البرهان واحد. والمربع ان شئت كان قائم الزوايا أو مختلفها.

قال النيريزي: وما عمل على جهة البرهان، فإنا نمثله على جهة الأعداد. فليكن خط أ ب أربعاً وعشرين ذراعاً، ح ب منه نصفه، وهو اثنا عشر ذراعاً، وليكن مثلث جـ ألفاً وأربعاً وعشرين ذراعاً. وليكن سطح د ز. الشبيه بالزائد، ضلع د هـ منه أربعة أضعاف ضلع هـ ز؛ وَ د هـ فرض أربعة أمثال هـ ز، فإن ط ح أيضاً يكون أربعة أضعاف ح ب. وَح ب اثنتا عشرة ذراعاً. فَـ ط ح ثمان وأربعون ذراعاً، فسطح ح ك خمسمئة وست وسبعون ذراعاً. فإذا عملنا سطحاً مساوياً لمجموع مثلث جـ ومتوازي ح ك، الذي هو الف وستمئة ذراع، وكان ذلك السطح يشبه متوازي د ز، وهو سطح س ف، فظاهر أنه يجب ان يكون ف ق أربعة أمثال ق س، فتكون مساحته الفاً وستمئة ذراع. فان عملنا على حسب ما عمل، فإن خط ف ق يكون ثمانين ذراعاً، وخط ق س يكون عشرين. وان طلبنا ذلك على جهة الأعداد والمقادير، فانا نطلب خطين يكون أحدهما أربعة أمثال الآخر، ويكون مضروب أحدهما في الآخر [٨٠ ب] الفاً وستمئة ذراع. فاذا عملنا بحسب عملنا في الشكل المتقدم، فان الخط الأصغر مربعه ربع مربع الجميع، أعني ربع الألف والستمئة الذراع. فهو إذن اربعمئة ذراع. وجذره الذي هو الخط الأصغر: عشرون ذراعاً، والخط الأعظم ثمانون ذراعاً، لأنه فرض أربعة أمثاله. فخط ف ن ثمانون ذراعاً، ن س عشرون ذراعاً.

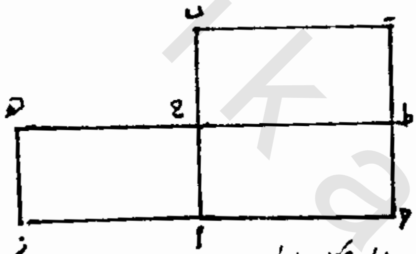
فاذا جعلنـا ط ك ل مثل ق س: عشرين ذراعاً، فخط ح م مثل ف ق: ثمانون ذراعاً، ثم نتم سطح ن ش، م ب، ونخرج ط ب ز، فيصير جميع سطح م ل الفاً وستمئة ذراع. فاذا أخذنا منه سطح ح ك، الذي هو خمسمئة وست وسبعون ذراعاً، بقي علم م ل ز ك: ألفاً وأربعاً وعشرين ذراعاً، وهو مثل مثلث جـ. لكن العلم مثل سطح ن س. فسطح ن س الف وأربع وعشرون ذراعاً، وهو مثل مثلث جـ.

فقد أضفنا إلى خط أ ب سطح ن ش يزيد على تمام خط أ ب: سطح ب ز يشبه سطح د ز. وذلك ان أ ب أربع وعشرون ذراعاً، ح ش عشرون. يبقى ب س ثماني أذرع، ل ز ثمانون ذراعاً، س ل ثمان وأربعون ذراعاً، ش ز يبقى اثنين وثلاثين ذراعاً. فـ ش ز أربعة أمثال ب ش. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٠/ ٦]

الشكل الثلاثون من المقالة السادسة

نريد ان نبين كيف نقسم خطاً معلوماً على نسبة ذات وسط وطرفين.



الشكل ٣٠/ ٦

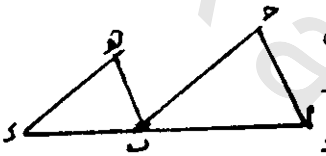
فنجعل الخط المعلوم خط أ ب. ونريد ان نقسمه على نسبة ذات وسط وطرفين، حتى تكون نسبة الخط كله الى القسم الأعظم: كنسبة القسم الأعظم الى القسم الأصغر. فنعمل على خط أ ب سطحاً مربعاً، وليكن سطح أ د. ونضيف الى خط أ جـ سطحاً متوازي الأضلاع مساوياً لمربع أ د، يزيد على تمام خط أ جـ سطحاً شبيهاً بسطح جـ ب. فليكن المضاف متوازي ز ط. فمتوازي ز ط عمل على انه مساوٍ لمربع جـ ب. فاذا أسقطنا أ ط المشترك، بقي سطح ز ح مساوياً لسطح ح د. وزاوية أ ح هـ مساوية لزاوية ب ح ط. فالأضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين: متكافئة. فنسبة ضلع ط ح الى ضلع ح هـ: كنسبة ضلع أ ح الى ضلع ح ب. وَح ط. مثل ب د، ب د مثل ب أ. وَح ط مثل ب أ. وَح هـ مثل ح أ. فنسبة ب أ الى أ ح كنسبة أ ح الى ح ب. فقد قسمنا خط أ ب على نسبة ذات وسط وطرفين، على نقطة ح. فصارت نسبة الخط كله، أعني خط أ ب، الى القسم الأعظم، أعني خط أ ح: كنسبة القسم الأعظم الذي هو خط ح أ الى القسم الأصغر الذي هو خط ح ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

وسواء أكان سطح أ د قائم الزوايا أو غير قائم الزوايا، لأن الذي يجب [هو] ان تكون الأضلاع متساوية. ولذلك قال: وان يكون الزائد شبيهاً بسطح أ د، لأن هذا أعم من القائم الزوايا. ولو كان غرضه ان يكون أ د قائم الزوايا، لكان يقول في الزائد: ينبغي ان يكون مربعاً قائم الزوايا.

[المبرهنة ٣١/ ٦، تقابل ٣٢/ ٦ عند هيث]

الشكل الحادي والثلاثون من المقالة السادسة

اذا ركب مثلثـان على زاوية واحـدة، وضلعـان من زاوية أخرى من أحد المثلثين يوازيان ضلعين آخـرين يحيطان بزاوية أخرى من المثلث الآخـر، والأضلاع المتوازية متناسبة، فان المثلثين على خط واحد مستقيم.



مثاله: ان مثلثي أ ب جـ، ب د هـ مركبان على زاوية جـ ب هـ. والأضلاع المحيطة بزاويتي جـ، هـ متوازية؛ ونسبة أ جـ الى ب هـ كنسبة ب جـ الى د هـ. فأقول ان خط أ ب قد اتصل بخط ب د، وصار جميع خط أ د خطاً واحداً مستقيماً.

برهانه: [٨١ أ] ان ضلع جـ أ لما صار موازياً لضلع ب هـ، وقد وقع عليهما خط ب جـ، فان الزاويتين المتبادلتين متساويتان: زاوية أ جـ ب مساوية لزاوية جـ ب هـ. وأيضاً فمن أجل ان ضلع جـ ب يوازي ضلع د هـ، وقد وقع عليهما خط ب هـ، نفإن الزاويتين المتبادلتين متساويتان: زاوية جـ ب هـ مثل زاوية ب هـ د. وقد كانت زاوية أ جـ ب مثل زاوية جـ ب هـ.

فزاوية أ جـ ب مساوية لزاوية ب هـ د. والأضلاع المحيطة بهما متناسبة:

نسبة أ جـ الى ب هـ كنسبة جـ ب الى هـ د. وكل مثلثين تساوي زاوية من أحـدهمـا زاوية من المثلث الآخر والأضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين

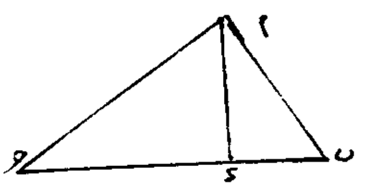
متناسبة، فإن زوايا المثلثين متساوية كل زاوية مساوية لنظيرتها: فزاوية أ ب جـ مساوية لزاوية هـ د ب، وزاوية جـ أ ب مساوية لزاوية هـ ب د. فالزوايا الثلاث، أعني زوايا أ ب جـ، أ جـ ب، ب أ جـ مساوية لزوايا مثلث هـ ب د الثلاث، أعني الزوايا ب د هـ، ب هـ د، هـ ب د. وهذه الزوايا الثلاث التي لمثلث هـ ب د مجموعة مساوية لزاويتين قائمتين. فقد خرج من خط ب هـ، من نقطة ب، خطا أ ب، ب د في جهتين مختلفتين، فجعلا الزاويتين اللتين عن جنبتي خط ب هـ معادلتين لقائمتين. فخط أ ب قد اتصل بخط ب د، وصارا جميعاً خطاً واحداً مستقيماً. فمثلثا أ ب جـ، ب هـ د على خط واحد مستقيم. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٣٢، تقابل ٦/٣١ عند هيث]

الشكل الثاني والثلاثون من المقالة السادسة

كل مثلث قائم الزاوية، فان الشكل المستقيم الأضلاع المضاف الى وتر الزاوية القائمة منه، مثل الشكلين المستقيمي الأضلاع المضافين الى ضلعيه الباقيين جميعاً، اذا كانا يشبهانه، وكانا على وضعه.

مثـالـه: ان مثلث أ ب جـ: زاوية أ منه قائمة، فأقول ان السطح المضاف الى ضلع ب جـ مثل السطحين المضافين الى ضلعي ب أ، أ جـ جميعاً، اذا كانا يشبهانه وكانا على وضعه.



برهانه: انا نخرج عمود أ د. فمثلثا أ ب د، أ جـ د متشابهان، كما تبين ببرهان ٦/٨. فنسبة جـ ب الى ب أ كنسبة ب أ الى ب د. فنسبة الأول وهو جـ ب الى الثالث وهو ب د: كنسبة الشبيه الى الأول، وهو جـ ب، الى الشبيه المضاف الى الثاني، وهو أ ب، كما بين ببرهان ٦/١٨. وكذلك تكون نسبة ب جـ الى جـ أ كنسبة جـ أ الى جـ د. فنسبة الأول

وهو ب جـ الى الثالث وهو جـ د: كنسبة الشبيه المضاف إلى الأول وهو ب جـ إلى الشبيه المضاف إلى الثاني وهو جـ أ.

فنسبة ب جـ إلى ب د وإلى جـ د كنسبة الشبيه المضاف إلى ب جـ إلى الشبيهين المضافين إلى أ ب . أ جـ جميعاً. لكن جـ ب مساوٍ لمجموع خطي ب د، د جـ جميعاً. فمجموع الشبيهين المضافين إلى أ ب، أ جـ جميعاً مساوٍ للشبيه المضاف إلى ب جـ. وذلك ما اردنا ان نبين.

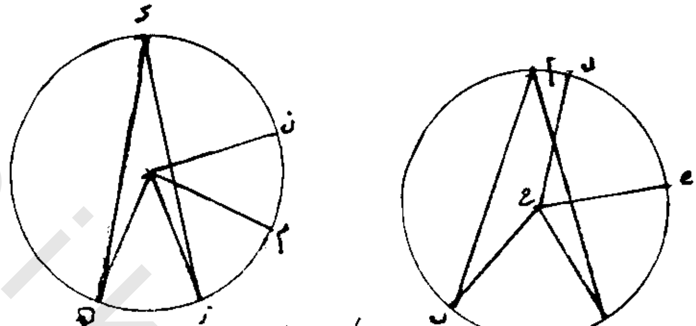
قال النيريزي: واستشهاده هكذا: نسبة جـ ب الأول إلى ب د الثالث: كنسبة الشبيه المضاف إلى الأول وهو ب جـ: إلى الشبيه المضاف إلى الثاني وهو جـ أ، كما بين ببرهان ٦/١٨ . فلأن لنا ستة مقادير: الأول ب جـ، والثاني ب د، والثالث الشبيه المضاف إلى ب جـ، والرابع الشبيه الشبيه المضاف إلى ب أ، والخامس جـ د، والسادس الشبيه المضاف إلى جـ أ، قلنا: لأن نسبة الأول وهو جـ ب إلى الثاني وهو ب د، كنسبة الثالث وهو الشبيه المضاف إلى ب جـ، إلى الرابع وهو الشبيه المضاف إلى ب أ.

وأيضاً فنسبة ب جـ الأول إلى جـ د الخامس كنسبة الشبيه المضاف [٨١ ب] إلى ب جـ وهو الثالث: إلى الشبيه المضاف إلى أ جـ وهو السادس. فبما تقدم برهانه في ٥/٢٤ فإن نسبة الأول إلى الثاني والخامس مجموعين كنسبة الثالث إلى الرابع والسادس مجموعين. ونرجع بالقلب إلى برهان ٥/٢٤ : الأول جـ ب، والثاني والخامس هما ب د، جـ د، والثالث المضاف إلى ب جـ، والرابع والسادس الشبيهان المضافان إلى ب أ، جـ أ. فإن الأول مساوٍ للثاني والخامس مجموعين: أعني ان جـ ب وهو الأول: مساوٍ لمجموع ب د، جـ د وهما الثاني والخامس؛ وان الثالث وهو الشبيه المضاف إلى جـ ب مساوٍ لمجموع الرابع والسادس، أعني الشبيهن المضافين إلى أ ب، أ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٣/ ٦]

الشكل الثالث والثلاثون من المقالة السادسة

اذا كان في دائرتين متساويتين زاويتان على المركز أو على المحيط، فإن نسبة الزاوية إلى الزاوية كنسبة القوسين اللتين عليهما.



الشكل ٢٢/٦

مثاله: ان دائرتي أ ب جـ، د هـ ز متساويتان، وعلى مركزيهما زاويتا ب ح جـ، م ط ز، وعلى المحيط زاويتا أ، د فأقول ان نسبة قوس ب جـ إلى قوس هـ ز كنسبة زاوية ب ح جـ إلى زاوية هـ ط ز؛ وكنسبة زاوية أ إلى زاوية د.

برهانه: أنا نأخذ من دائرة أ ب جـ أي الأضعاف شئنا لقوس ب جـ. فلتكن قسي ب جـ، جـ ك، ك ل. ونخرج خطوط ح جـ، ح ك، ح ل. وأيضاً نأخذ من دائرة د هـ ز أي الأضعاف شئنا لقوس هـ ز، ولتكن قسي هـ ز، ز م، م ن؛ ونخرج خطوط ط ز، ط م، ط ن.

فلأن قسي ب جـ، جـ ك، ك ل متساوية، وهي في دائرة واحدة، فإن زوايا ب ح جـ، جـ ح ك، ك ح ل، اللاتي على المركز متساوية كما بين ببرهان ٢٦/٣. وكذلك نبين ان زوايا هـ ط ز، ز ط م، م ط ن متساوية.

فلأن اضعاف قوس ب ل لقوس ب جـ مثل أضعاف زاوية ب ح ل لزاوية ب ح جـ؛ وأضعاف قوس هـ ن لقوس هـ ز مثل أضعاف زاوية هـ ط ن لزاوية هـ ط ز، تكون نسبة زاوية ب ح ل إلى زاوية ب ح جـ كنسبة قوس ب ل إلى

قوس ب جـ؛ ونسبة زاوية هـ ط ن إلى زاوية هـ ط ز كنسبة قوس هـ ن إلى قوس هـ ز.

فلأن الدائرتين متساويتان؛ وقسي ب جـ، جـ ك، ك ل متساوية؛ وكذلك قسي هـ ز، ز م، م ن متساوية؛ وكذلك الزوايا التي توتر هذه القسي متساوية؛ فان كانت قوس ب ل تزيد على قوس هـ ن، فان زاوية ب ح ل تزيد أيضاً على زاوية هـ ط ن. وان كانت مساوية لها، فان الزاوية أيضاً مساوية للزاوية. وان كانت ناقصة، فالزاوية ناقصة.

لكن قوس ب ل أضعاف لقوس ب جـ، وقوس هـ ن أضعاف لقوس هـ ز. [فزاوية ب ح ل أضعاف لزاوية ب ح جـ] وزاوية هـ ط ن أضعاف لزاوية هـ ط ز. فيكون المقدار الأول قوس ب جـ. والثاني قوس هـ ز، والثالث زاوية ب ح جـ، والرابع زاوية هـ ط ز. وقد أخذنا للأول والثالث أضعافاً متساوية، وهي قوس د ل وزاوية ب ح ل؛ وللثالث والرابع أضعافاً متساوية، وهي قوس هـ ن وزاوية هـ ط ن. وقد تبين ان أضعاف الأول والثالث إما هي زائدة على أضعاف الثاني والرابع، وإما ناقصة عنها، وإما مساوية لها. أعني ان قوس ب ل وزاوية ب ح ل قد تبين أنهما إما زائدتان معاً على قوس هـ ن وعلى زاوية هـ ط ن، واما مساويتان لهما معاً، [٨٢ أ] واما ناقصتان معاً عنهما. فبعكس برهان ٤/٥ فان نسبة الأول وهو قوس ب جـ، إلى الثاني وهو قوس هـ ز: كنسبة الثالث وهو زاوية ب ح جـ، إلى الرابع وهو زاوية هـ ط ز.

ولأن زاوية ب أ جـ نصف زاوية ب ح جـ، وزاوية هـ د ز نصف زاوية هـ ط ز، كذلك تكون نسبة زاوية أ إلى زاوية د كنسبة قوس ب جـ إلى قوس هـ ز وذلك ما أردنا ان نبين.

تمت المقالة السادسة، وفرغ من نسخها صاحبه أبوسعيد محمد البيهقي البرزهي، يوم السبت بعيد صلاة الظهر، الثامن من شهر ربيع الأول سنة سبع وخمسماية.

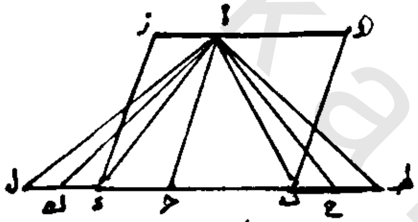
ج ـ مُبرَهنات النَّسَوي

المقالة السادسة من كتاب التجريد

[المبرهنة ١/٦ تقابل ١/٦ عند الحجاج]

المثلثات والسطوح المتوازية الأضلاع التي ارتفاعها واحد، فإن نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض.

كمثلثي أ ب جـ، أ جـ د، على قدر واحد في الارتفاع. وكذلك سطحا هـ جـ، جـ ز المتوازيا الأضلاع. أقول: نسبة قاعدة ب جـ الى قاعدة جـ د كنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث أ جـ د، وكنسبة سطح هـ جـ الى سطح جـ ز.



الشكل ١/٦

برهانه: أن نخرج ب د في جهتين، ونفصل منه مثل ب جـ، كم شئنا، وهو ب ح، ح ط، ونفصل د ك، ك ل مثل جـ د، ونصل أ ط، أ ك، أ ل. فقواعد ط ح، ح ب، ب جـ متساوية، ومثلثات أ ط ح، أ ب جـ متساوية. فأضعاف ط جـ لخط ب جـ كأضعاف مثلث أ ط جـ لمثلث أ جـ د. وكذلك أضعاف جـ ل لخط جـ د كأضعاف مثلث أ جـ ل لمثلث أ جـ د.

فإن كان ط جـ يزيد على [جـ ل، كان مثلث أ ط جـ يزيد على] مثلث أ جـ ل؛ وإن كان مثله فهو مثله؛ وإن نقص منه فهو ناقص منه.

فالأقدار أربعة: خطا ب جـ، جـ د، ومثلثا أ ب جـ، أ جـ د. وقد أخذ خط ط جـ، ومثلث أ ط جـ: أضعافاً متساوية لخط ب جـ [٤٢ و] ولمثلث أ ب جـ؛

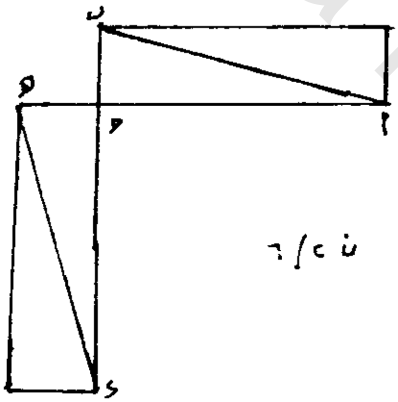
وأخذ خط جـ ل ومثلث أ جـ ل أضعافاً متساوية لخط جـ د، ولمثلث أ جـ د. فخط ط جـ ومثلث أ ط جـ إما أن يزيدا معاً على خط جـ ل ومثلث أ جـ ل، أو يساويانهما، أو ينقصان منهما.

فنسبة ب جـ الى جـ د كنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث أ جـ د. ونسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث أ جـ د كنسبة سطح هـ جـ الى سطح جـ ز.

فيتبين ان نسبة ب جـ الى جـ د أيضاً كنسبة سطح هـ جـ الى سطح جـ ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢/ ٦ تقابل ١٥/ ٦ عند الحجاج]

اذا تساوت زاويتان من مثلثين، أو من سطحين متوازيي الأضلاع، فإن نسبة المثلث الى المثلث، والسطح إلى السطح، مؤلفة من نسبتي أضلاعهما المحيطة بالزاويتين المتساويتين.



كمثلثي أ ب جـ، جـ د هـ، وسطحي أ ب، د هـ: زاويتا ب جـ أ، د جـ هـ منهما متساويتان. أقول ان نسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث جـ د هـ مؤلفة من نسبة أ جـ الى جـ هـ ومن نسبة ب جـ الى جـ د.

برهانه: انا نصل أ جـ، جـ هـ على استقامة. فنصل ب جـ، جـ د على استقامة، لأن زاويتي [٤٢ ظ] جـ المتقابلتين متساويتان. ونصل ب هـ. فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث ب هـ جـ كنسبة أ جـ الى جـ هـ.

وكذلك تكون نسبة مثلث ب جـ هـ الى جـ د هـ كنسبة ب جـ الى جـ د. فقد وجد بين مثلثي أ ب جـ، جـ د هـ مثلث، وهو مثلث ب جـ هـ، ويتوالى

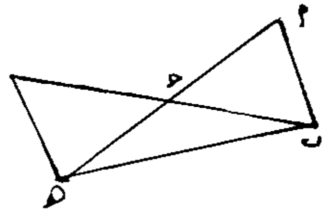
الجميع على نسبتي أ جـ الى جـ هـ، ب جـ الى جـ د. فتكون نسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث جـ د هـ مؤلفة من نسبتي أ جـ الى جـ هـ، ب جـ الى جـ د.

وقد تبين ان نسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث جـ د هـ كنسبة سطح أ ب الى سطح د هـ. [فنسبة سطح أ ب الى سطح د هـ] أيضاً مؤلفة من نسبتي أ جـ الى جـ هـ، ب جـ الى جـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٣ تشمل ٦/١٤ عند الحجاج]

اذا تساوت زاويتان من مثلثين متساويين، أو من سطحين متوازيي الأضلاع متساويين فالأضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متكافئة. وان كانت الأضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متكافئة، فهما متساويان.

كما في مثلثي أ ب جـ، جـ د هـ المتساويين: زاويتا ب جـ أ، د جـ هـ متساويتان [٤٣ و] أقول: ان نسبة ب جـ الى جـ د كنسبة جـ هـ الى جـ أ.

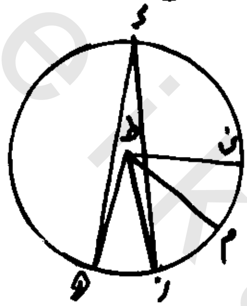


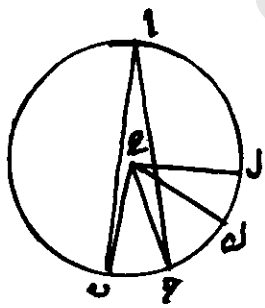
برهانه: أنا نصل أ جـ، جـ هـ على استقامة، فنصل ب جـ، جـ د على استقامة. ونصل ب هـ فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث ب جـ هـ كنسبة أ جـ الى جـ هـ. ونسبة مثلث جـ د هـ الى مثلث د جـ هـ كنسبة د جـ الى جـ ب. ولكن نسبة مثلثي أ ب جـ، جـ د هـ الى مثلث ب جـ هـ واحدة فنسبة جـ أ الى جـ هـ كنسبة د جـ الى جـ ب.

ثم نجعل نسبة أ جـ الى جـ هـ كنسبة د جـ الى ب جـ. فيصير مثلثا أ ب جـ، جـ د هـ متساويين لأن نسبة أ جـ الى جـ هـ، أعني نسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث ب جـ هـ، كنسبة د جـ الى جـ ب، أعني كنسبة مثلث جـ د هـ الى مثلث ب جـ هـ. فتصير نسبة مثلثي أ ب جـ، جـ د هـ الى مثلث ب جـ هـ واحدة.

ثم ليكن سطحا أ ب، د هـ متوازيي الأضلاع متساويين، وفيهما زاويتا ب جـ أ، د جـ هـ متساويتان. ونصل أ جـ، جـ هـ، فيتصل ب جـ، جـ د على استقامة. ونتمم سطح ب جـ هـ؛ ونعيد [٤٣ ظ] التدبير الأول، فيتبين ان نسبة أ جـ الى جـ هـ اذا كانت كنسبة د جـ الى جـ ب، كان السطحان متساويين. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٤/ ٦ تقابل ٣٣/ ٦ عند الحجاج]





اذا كانت في دائرتين متساويتين زاويتان، على المركز، أو على المحيط، كدائرتي أ ب جـ، د هـ ز، وزاويتي ب ح جـ، هـ ط ز، على مركزي ح، ط، وزاويتي ب أ جـ، هـ د ز على المحيطين، فإن نسبة الزاوية إلى الزاوية: كنسبة القوسين اللتين هما قاعدتاهما: نسبة قوس ب جـ الى قوس هـ ز، كنسبة زاوية ب جـ ح إلى زاوية هـ ط ز، وكنسبة زاوية ب أ جـ الى زاوية هـ د ز.

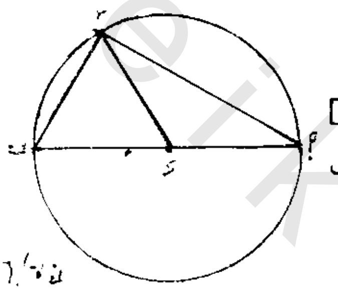
برهانه: ان نفصل من دائرة أ ب جـ مثل قوس ب جـ، كم شئنا، وهي جـ ك، ك ل، ومن دائرة د هـ ز مثل هـ ز، كم شئنا وهي ز م، م ن. ونخرج ك ح، ل ح، م ط، ن ط. فقسي ب جـ، جـ ك، ك ل متساوية. فأضعاف قوس ب ل لقوس ب جـ، كأضعاف زاوية [٤٤ و] ب ح ل لزاوية ب ح جـ. وأضعاف قوس هـ ن لقوس هـ ز كأضعاف زاوية هـ ط ن لزاوية هـ ط ز.

فان كانت قوس ب ل تزيد على قوس هـ ن، فإن زاوية ب ح ل تزيد على زاوية هـ ط ن. وكذلك حالها في التساوي والنقصان. فالأقدار أربعة: قوسا ب جـ، هـ ز وزاويتا ب ح جـ، هـ ط ز؛ وقوس ب ل وزاوية ب جـ ل أضعاف

متساوية لقوس ب جـ؛ وقوس هـ ن وزاوية هـ ط ن أضعاف متساوية لقوس هـ ز، وزاوية هـ ط ز. فنسبة قوس ب جـ الى قوس هـ ز كنسبة زاوية ب أ جـ الى زاوية هـ د ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

وبمثل ذلك نبين ان كانت الزوايا والقوسان في دائرة واحدة، ان نسبة القوس الى القوس كنسبة الزاوية الى الزاوية.

[المبرهنة ٥/ ٦]



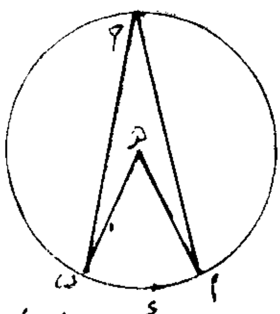
ن ٥/٦

ضلع المسدس في الدائرة مساوٍ لنصف قطرها.

كدائرة أ جـ ب: قطرها أ ب، ومركزها [٤٤ ظ] د، وَجـ ب ضلع سدسها. أقول ان جـ ب مثل نصف أ ب.

برهانه: انا نصل جـ د. فلأن قوس جـ ب سدس المحيط يكون ثلث نصفه. فَ جـ ب ثلث أ جـ ب. فهي اذن نصف أ جـ. فزاوية جـ د ب نصف زاوية أ د جـ التي على المركز. فزاويتا جـ ب د، جـ د ب متساويتان. فخط جـ ب، الذي هو وتر السدس، مثل خط جـ د الذي هو نصف القطر. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/ ٦]



ن ٦/٦

اذا وقع في دائرة زاوية، فإنها: إن كانت على المحيط فان نسبتها الى زاويتين قائمتين كنسبة القوس التي عليها الى جميع المحيط. وان كانت على المركز فان نسبتها الى أربع زوايا قائمة كنسبة قوسها الى جميع المحيط.

مثاله: زاوية أ جـ ب على محيط دائرة أ د ب

جـ، وزاوية هـ على مركزها، وهما على قوس أ د ب. فأقول ان نسبة زاوية أ جـ ب الى زاويتين قائمتين كنسبة قوس أ د ب الى جميع المحيط أ جـ ب د.

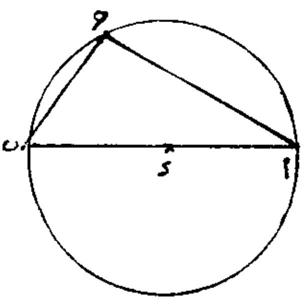
برهانه: انا نصل أ د، ب د. فنسبة زاوية أ جـ ب الى زاوية أ د ب [٤٥ و] كنسبة قوس أ د ب الى قوس أ جـ ب. وبالتركيب تكون نسبة جميع زاويتي جـ، د الى زاوية جـ كنسبة جميع المحيط الى قوس أ جـ ب. وبالعكس تكون نسبة زاوية جـ الى زاويتي جـ، د كنسبة قوس أ د ب الى جميع المحيط.

لكن زاويتا جـ، د مثل قائمتين. فنسبة زاوية جـ الى زاويتين قائمتين كنسبة قوس أ د ب الى جميع المحيط.

وأقـول أيضـاً ان نسبة زاوية هـ، التي هي على المركز، الى أربع زوايا قائمة، كنسبة قوس أ ب الى جميع المحيط.

برهانه: ان زاوية هـ ضعف زاوية جـ، وأربع زوايا قائمة ضعف قائمتين. فنسبة زاوية هـ الى أربع زوايا قائمة كنسبة زاوية جـ الى زاويتين قائمتين. وقد تبين أن نسبة زاوية جـ الى قائمتين كنسبة قوس أ جـ ب الى جميع المحيط. ونسبة زاوية هـ الى أربع زوايا قائمة كنسبة قوس أ د ب الى جميع المحيط. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٧/ ٦]

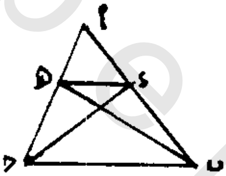


مربع ضلع المثلث في الدائرة ثلاثة أمثال مربع ضلع المسدس فيها. كدائرة أ جـ ب: قطرها أ ب، جـ ب ضلع المسدس. ونصل أ جـ فيكون أ جـ ضلع المثلث. والمـركـز د. فلأن مربع أ ب أربعة أمثال مربع د ب، لكن د ب مثل جـ ب [٤٥ ظ]، فمربع أ ب أربعة أمثال مربع جـ ب. لكن مربع أ ب مثل

مربعي أ جـ، جـ ب. فمربعا أ جـ، جـ ب أربعة أضعاف مربع جـ ب. فمربع أ جـ ثلاثة أضعاف مربع جـ ب، وذلك ما أردنا ان نبين.

وقد تبين من هذا ان مربع ضلع المثلث ثلاثة أمثال مربع نصف القطر، وان مربع القطر مثل مربع ضلع المثلث.

[المبرهنة ٨/ ٦ تقابل ٢/ ٦ عند الحجاج]



الشكل ٢/٦

كل مثلث يخرج من أحد أضلاعه خط الى ضلع آخر، موازياً الضلع الثالث، كضلع أ ب من مثلث أ ب جـ أخرج منه خط د هـ الى ضلع أ جـ موازيا ب جـ: أقول: إن نسبة ب د الى د أ كنسبة جـ هـ الى هـ أ.

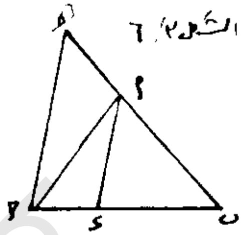
برهانه: ان نخرج د جـ، ب هـ. فمثلثا هـ ب د، هـ جـ د متساويان، لأنهما على قاعدة وبين د هـ، ب جـ المتوازيين. , فنسبتهما الى مثلث أ د هـ واحدة لكن نسبة مثلث هـ ب د الى مثلث أ د هـ واحدة لكن نسبة مثلث هـ ب د الى مثلث هـ د أ كنسبة ب د الى د أ ونسبة مثلث د جـ هـ [إلى د هـ أ كنسبة جـ هـ الى هـ أ].

ثم نجعل نسبة ب د الى د أ كنسبة جـ هـ الى هـ أ. أقول ان د هـ يوازي ب جـ لأن نسبة ب د الى د أ كنسبة مثلث هـ ب د الى مثلث هـ د أ [٤٦ و] ونسبة جـ هـ الى هـ أ كنسبة مثلث د جـ هـ الى مثلث د هـ أ. فمثلثا د ب هـ، د جـ هـ متساويان. وهما على قاعدة د هـ. فَـ د هـ يوازي ب جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٩/ ٦ تقابل ٣/ ٦ عند الحجاج]

اذا أخـرج من زاوية مثلث خط ينصفها ويقع على وترها، فإن نسبة أحد قسمي الوتر الى الآخر كنسبة أحد الضلعين الباقيين الى الآخر. [واذا كانت نسبة

احد قسمي الوتر الى الآخر كنسبة أحد الضلعين الباقيين الى الآخر، فإن الخط ينصف الزاوية].



كمثلث أ ب جـ، وخط أ د ينصف زاوية ب أ جـ، أقول ان نسبة ب د الى د جـ كنسبة ب أ الى أ جـ.

برهانه: أن نخرج جـ هـ يوازي د أ، ونخرج ب أ حتى يلقى جـ هـ على هـ. فلأن د أ يوازي جـ هـ، ووقع عليهما ب هـ، تكون زاوية ب أ د الخارجة مثل زاوية أ هـ جـ الداخلة. وكذلك زاويتا د أ جـ، أ جـ هـ، المتبادلتان، متساويتان. لكن زاوية ب أ د مثل زاوية د أ جـ. فزاوية أ جـ هـ مثل زاوية أ هـ جـ. فَـ أ جـ مثل أ هـ. ونسبة ب د الى د جـ كنسبة ب أ الى أ هـ، أعني أ جـ.

وأيضاً نجعل نسبة ب د الى د جـ كنسبة ب أ الى أ جـ، أقول: ان زاوية ب أ د مثل زاوية د أ جـ: لأن نسبة ب د الى جـ د كنسبة ب أ الى أ هـ. ونسبة ب د الى جـ د كنسبة ب أ الى أ جـ. فنسبة ب أ الى أ هـ، والى أ جـ، واحدة. [٤٦ ظ] فَـ أ جـ مثل أ هـ. فزاوية أ جـ هـ مثل زاوية أ هـ جـ. لكن زاوية أ هـ جـ مثل زاوية ب أ د، الخارجة للداخلة. وزاوية هـ جـ أ مثل زاوية د أ جـ. فزاوية ب أ د مثل زاوية د أ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٠/ ٦ تقابل ٤/ ٦ عند الحجاج]

كل مثلثين زواياهما متساوية، فإن أضلاعهما النظائر متناسبة.

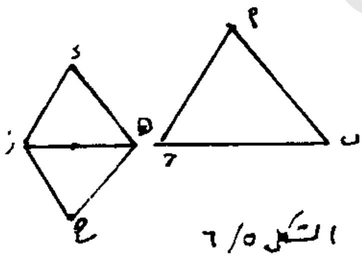
كمثلثي أ ب جـ، جـ د هـ: فإن زاوية أ مثل زاوية د، وزاوية ب مثل زاوية د جـ هـ، وزاوية هـ مثل زاوية ب. أقول إن نسبة أ ب الى د جـ كنسبة ب جـ الى جـ هـ، وكنسبة أ جـ الى د هـ.

الشكل ٦/٤

برهانه: أن نجعل ب جـ على استقامة جـ هـ، ونخرج ب أ، هـ د، فيلتقيان على نقطة ز. فزاوية ب مثل زاوية د جـ هـ، الخارجة للداخلة. فَـ ب ز، جـ د متوازيان. وزاوية أ جـ ب مثل زاوية هـ. فَـ هـ ز، أ جـ متوازيان. فسطح أ جـ د ز متوازي الأضلاع. فَـ أ جـ مثل د ز، وَجـ د مثل أ ز. وَ أ جـ في مثلث ز ب هـ يوازي ز هـ فنسبة ب جـ الى جـ هـ كنسبة ب أ الى أ ز، وَ أ ز مثل جـ د. فنسبة ب جـ الى جـ هـ كنسبة أ ب الى د جـ.

وأيضاً جـ د يوازي ب ز في مثلث ب هـ ز. فنسبة ز د الى د هـ كنسبة ب جـ الى جـ هـ [٤٧ و] وَ أ ز مثل جـ د، ونسبة ب جـ الى جـ هـ كنسبة أ ب الى جـ د. فنسبة أ ب الى جـ د كنسبة أ جـ الى د هـ وكنسبة ب جـ الى جـ هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١١/ ٦ تقابل ٥/ ٦ عند الحجاج]



الشكل ٥/ ٦

كل مثلثين أضـلاعهما متناسبة فإن زواياهما التي توترهـا الأضلاع النظائر متساوية. كمثلثي ب جـ، د هـ ز: فإن نسبة أ ب الى د هـ كنسبة جـ الى د ز، وكنسبة ب جـ الى هـ ز. أقول:

ان زاوية أ مثل زاوية د، وزاوية جـ مثل زاوية د ز هـ، وزاوية أ ب جـ مثل زاوية د هـ ز.

برهانه: نعمل زاوية ز هـ ح مثل زاوية أ ب جـ، وزاوية هـ ز ح مثل زاوية جـ. فتبقى زاوية ح مثل زاوية أ.

فنسبة ب جـ الى هـ ز كنسبة أ ب الى هـ ح. ولكن نسبة ب جـ الى هـ ز كنسبة أ ب الى د هـ. فنسبة أ ب الى د هـ كنسبته الى هـ ح. فَـ د هـ مثل هـ ح.

وكـذلك د ز مثل ز ح، هـ ز مشترك. فزاوية د هـ ز مثل زاوية ز هـ ح. وكذلك زاوية د ز هـ مثل زاوية هـ ز ح. ولكن زاوية ز هـ ح مثل زاوية أ ب جـ،

وزاوية هـ ز ح مثل زاوية جـ. فزاوية د هـ ز مثل زاوية أ ب جـ. وزاوية د ز هـ مثل زاوية جـ. وتبقى زاوية د مثل زاوية أ.

[المبرهنة ٦/١٢ تقابل ٦/٦ عند الحجاج]

وأيضاً إذا [٤٧ ظ] تساوت زاويتان من مثلثين، وتناسبت الأضلاع المحيطة بهما، تساوت الزوايا الباقية. كما في مثلثي أ ب جـ، د هـ ز: زاوية أ ب جـ مثل زاوية د هـ ز، ونسبة أ ب الى د هـ كنسبة ب جـ الى هـ ز. أقول ان زوايا المثلثين متساوية.

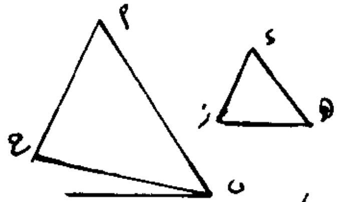
برهانه: أن نعمل زاوية ز هـ ح مثل زاوية أ ب جـ، هـ ز ح مثل زاوية جـ. وتبقى زاوية أ مثل زاوية ح. فنسبة ب جـ الى هـ ز كنسبة أ ب الى هـ ح. فَـ د هـ مثل هـ ح، هـ ز مشترك، وزاوية د هـ ز مثل زاوية ز هـ ح. فَـ ز د مثل ز ح. وزاوية هـ ز د مثل زاوية هـ ز ح، وزاوية د مثل زاوية ح. ولكن زاوية هـ ز ح مثل زاوية جـ، وزاوية ح مثل زاوية أ. فزاوية هـ ز د مثل زاوية جـ، وزاوية د مثل زاوية أ، وتبقى زاوية د هـ ز مثل زاوية أ ب جـ.

[المبرهنة ٦/١٣ تقابل ٦/٧ عند الحجاج]

وأيضاً اذا تساوت زاويتان من مثلثين، وتناسبت الأضلاع المحيطة بزاويتين أخريين منهما، وكانت كل واحدة من الزاويتين الباقيتين منهما حادة، أو غير حادة، فإن زواياهما [٤٨ و] متساوية.

كما في مثلثي أ ب جـ، د هـ ز: زاوية أ مثل زاوية د، ونسبة أ ب الى د هـ كنسبة ب جـ الى د ز، وكل واحدة من زاويتي ج، د، ز، هـ حادة، أو غير حادة. أقول إن زوايا المثلثين متساوية، وإن زاوية أ ب جـ مثل زاوية د هـ ز.

فإن أمكن غير ذلك فلتكن زاوية أ ب جـ أعظم، ولتكن كل واحدة من زاويتي جـ، ب، ز،



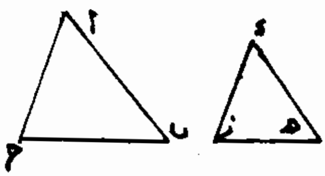
الشكل ٦/٧

هـ غير حادة. ونعمل زاوية أ ب ط مثل زاوية هـ، زاوية أ مثل زاوية د، وتبقى زاوية أ ط مثل زاوية د ز هـ. فنسبة ب ط الى هـ ز كنسبة ب جـ الى هـ ز. فَـ ب جـ مثل ب ط، فزاوية ب ط جـ مثل زاوية جـ. وزاوية جـ غير حادة. فزاوية ب ط جـ غير حادة، وذلك في مثلث واحد، خلف. فزاوية أ ب جـ ليست بأعظم من زاوية هـ. وبمثل ذلك نبين أنها ليست بأصغر منها. فهي مثلها. وزاوية أ مثل زاوية د. وتبقى زاوية جـ مثل زاوية ز.

ثم لتكن كل واحدة من زاويتي جـ، ب، ز، هـ حادة. أقول ان زاوية أ ب جـ مثل زاوية هـ. لأنا نبين ان ب ط مثل ب جـ، فتصير زاوية جـ مثل زاوية ب ط جـ. وزاوية جـ حادة، فزاوية ب ط جـ حادة، وتبقى زاوية ب ط أ منفرجة. لكنها مثل زاوية د ز هـ. فزاوية د ز هـ منفرجة. وقد كانت حادة. وهذا خلف وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٤/ ٦ تقابل ١٨/ ٦ عند الحجاج

كل مثلثين متشابهين، كمثلثي أ ب جـ، د هـ ز فإن نسبة أحدهما الى الآخر، كنسبة أحد أضلاعه، وليكن ب جـ، الى [٤٨ ظ] نظيره من أضلاع الآخر، وليكن ز هـ، مثناة.



برهانه: ان زاوية أ مثل زاوية د، فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز مؤلفة من نسبتي أ ب الى د هـ، أ جـ الى د ز.

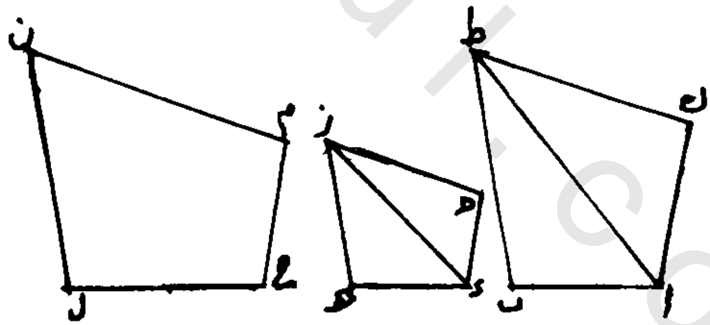
ونسبة أ ب الى د هـ كنسبة أ جـ الى د ز، وكنسبة ب جـ الى هـ ز. فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز كنسبة ضلع ب جـ الى ضلع هـ ز، النظير له، مثناة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/١٥ تقابل ٦/٢٠ عند الحجاج

نريد أن نعمل على خط معلوم، مثل أ ب، سطحاً شبيهاً بسطح معلوم، كسطح هـ جـ، وعلى وضعه. فنخرج د ز؛ ونعمل على ب زاوية أ ب ط مثل زاوية هـ، وزاوية ط أ ب مثل زاوية ز د هـ، وزاوية أ ط ك مثل زاوية د ز جـ، وزاوية ط أ ك مثل زاوية ز د جـ. وتبقى زاوية أ ط ب مثل زاوية د ز هـ، وزاوية ك مثل زاوية جـ. فزوايا مثلثي د ز هـ، أ ط ب متساوية، وكذلك زوايا مثلثي د ز جـ، أ ط ك. فالأضلاع النظائر منهما متناسبة. فنسبة د هـ الى أ ب كنسبة ز هـ الى ط ب، وكنسبة د ز [٤٩ و] الى ط ب. ولكن نسبة د ز الى أ ط كنسبة ز جـ الى ط ك. والزوايا التي تحيط بها هذه الأضلاع المتناسبة متساوية: لأنه بين ان زاوية هـ مثل زاوية ب، وزاوية جـ مثل زاوية ك، وجميع زاوية هـ ز جـ مثل زاوية ب ط ك. فسطح ب ك شبيه بسطح هـ جـ.

[المبرهنة ٦/١٦ تقابل ٦/٢١ عند الحجاج]

وأيضاً السطوح الشبيهة بسطح واحد متشابهة. كسطحي ب ك، ل م شبيهان بسطح هـ جـ. أقول إنهما متشابهان.

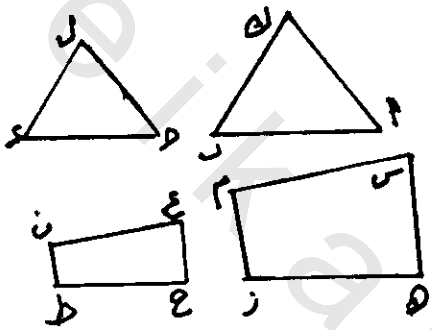


برهانه: ان سطح ب ك شبيه بسطح هـ جـ. فزاوية ب أ ك مثل زاوية هـ د جـ. ونسبة أ ك الى د ح كنسبة أ ب الى د هـ.

وأيضاً سطح ل م شبيه بسطح هـ جـ. فزاوية ح مثل زاوية هـ د جـ. فنسبة ح م الى د جـ كنسبة ح ل الى د هـ. وقد كانت نسبة د جـ الى أ ك كنسبة د هـ الى أ ب. فنسبة أ ك الى ح م كنسبة أ ب الى ح ل؛ وزاوية ب أ ك مثل زاوية ح فسطحا ب ك، ل م متشابهان. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٧/ ٦ تقابل ٢٢/ ٦ عند الحجاج

[٤٩ ظ] اذا كانت السطوح متشابه [على خطوط] متناسبة فالسطوح متناسبة. واذا كانت سطوح متناسبة ومتشابه على خطوط فالخطوط متناسبة. مثل أ ب، جـ د، هـ ز، ح ط: نسبة أب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ح ط، وعلى أ ب، جـ د سطحا أ ك ب، جـ ل د متشابهان.



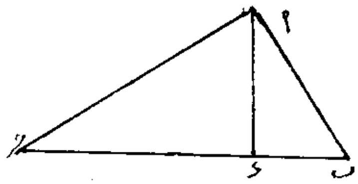
وعلى هـ ز، ح ط سطحا هـ م، ح ن متشابهان. أقول ان نسبة أ ك ب الى جـ ل د كنسبة هـ م الى ح ن:

لأن نسبة أ ك ب الى جـ ل د كنسبة أ ب الى جـ د مثناة. ونسبة هـ ز الى ح ط مثناة كنسبة هـ م الى ح ن. فنسبة أ ك ب الى جـ ل د كنسبة هـ م الى ح ن.

ثم نجعل نسبة أ ك ب الى جـ ل د كنسبة هـ م الى ح ن. أقول ان نسبة أ ب الى جـ د كنسبة هـ ز الى ح ط: لأن نسبة أ ب الى جـ د مثناة كنسبة أ ك ب إلى جـ ل د كنسبة هـ م إلى ح ن، ونسبة هـ م إلى ح ن كنسبة هـ ز الى ح ط مثناة. فنسبة أ ب إلى جـ د كنسبة هـ ز الى ح ط. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٨/ ٦ تقابل ٨/ ٦ عند الحجاج]

كل [٥٠ و] مثلث قائم الزاوية يخرج من زاويته القائمة عمود الى القاعدة، فعن جنبتي العمود مثلثان متشابهان ويشبهان المثلث الأعظم.



الشكل ٨/ ٦

كزاوية ب أ جـ القائمة، من مثلث أ ب جـ، أخرج منها عمود أ د: أقول ان مثلثي أ ب د، أ د جـ متشابهان ويشبهان مثلث أ ب جـ.

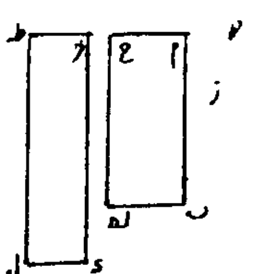
برهانه: ان زاويتي ب أ جـ، أ د ب قائمتان، وزاوية ب مشتركة لمثلثي أ ب جـ، أ ب د. وتبقى زاوية ب أ د مثل زاوية جـ.

فزوايا مثلثي أ ب جـ، أ ب د متساوية؛ فأضلاعهما النظائر إذن متناسبة: نسبة ب جـ الى ب أ كنسبة ب أ إلى ب د، وكنسبة أ جـ الى أ د. فمثلثا أ ب جـ، أ ب د متشابهان.

وكـذلك مثلثا أ ب د، جـ أ د. متشابهان: فأيضاً زاويتا أ د ب، أ د جـ قائمتان، وزاوية ب أ د مثل زاوية جـ؛ تبقى زاوية ب مثل زاوية د أ جـ. فزوايا مثلثي أ ب د، أ د جـ متساوية. فنسبة أ ب إلى أ جـ كنسبة د أ إلى د جـ، وكنسبة ب د إلى أ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

وهنالك استبان ان كل مثلث قائم الزاوية يخرج من زاويته القائمة عمود إلى القاعدة، فإن العمود وسط في النسبة فيما بين قسمي القاعدة [٥٠ ظ] وكل واحد من ضلعي المثلث مناسب لكل القاعدة ولكل واحد من قسمي القاعدة، فيما بينهما.

[المبرهنة ٦/١٩ تقابل ٦/١٦ عندالحجاج]



الشكل ٦/١٦

كل اربعة خطوط متناسبة، مثل أ ب، جـ د، هـ، ز، ونسبة أ ب إلى جـ د كنسبة هـ إلى ز، أقول: إن ضرب أ مبع لأول، في ز الرابع، مثل ضرب جـ د الثاني في هـ الثالث. وبالعكس.

برهانه: أن نخرج عمود أ ح مثل ز، وعمود جـ ك مثل هـ، ونتم سطحي أ ط، جـ ل.

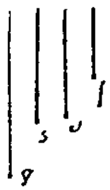
فنسبة أ ب إلى جـ د كنسبة جـ ك إلى أ جـ. فسطحا أ ط، جـ ك متساويان.

ثم نجعل ضرب أ ب في ز مثل ضرب جـ د في هـ، أقول: ان نسبة أ ب إلى جـ د كنسبة هـ إلى ز:

لأن سطحي أ ط، جـ ك متساويان، ، وزاويتا أ، جـ قائمتان، فنسبة أ ب إلى جـ د كنسبة جـ ك، أعني هـ، إلى أ ح، أعني ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢٠/ ٦ تقابل ١٧/ ٦ عند الحجاج]

اذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة، مثل أ، ب، جـ، ونسبة أ إلى ب كنسبة ب إلى جـ، أقول: ان ضرب أ الأول، في جـ الثالث، مثل مربع الثاني. وبالعكس.



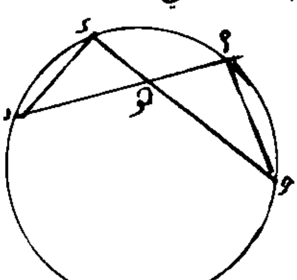
برهانه: انا نفرض خط د مثل ب. فنسبة أ إلى ب كنسبة د إلى جـ. [٥١ و] فضرب أ في جـ مثل ضرب ب في د، وَب مثل د؛ فضرب أ في جـ مثل مربع ب.

٦/١٧ح

ثم نجعل أ في جـ مثل مربع ب. أقول: ان نسبة أ إلى ب كنسبة ب إلى جـ. لأن ب مثل د. فضرب ب في د مثل مربع ب، ومربع ب مثل ضرب أ في جـ فضرب أ في جـ مثل ضرب ب في د. فنسبة أ إلى ب كنسبة د، أعني ب، إلى جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢١/ ٦ تقابل ٣٥/ ٣ عند الحجاج]

كل وترين يتقاطعان في دائرة، كوتري أ ب، جـ د في دائرة أ جـ د، تقاطعا على هـ، أقول: إن ضرب أ هـ في هـ ب. مثل ضرب جـ هـ في هـ د.

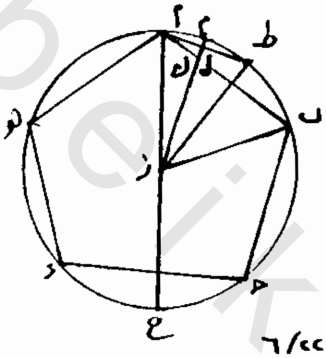


برهـانـه: انـا نصل أ جـ، د ب. فزاويتا أ، د متساويتان، لأنهما على قطعة جـ ب. وزاويتا أ هـ جـ، د هـ ب المتقـابلتـان متساويتان. فتبقى زاويتا

جـ، ب متساويتين. فمثلثا أ هـ جـ، د هـ ب متشابهان. فنسبة أ هـ إلى هـ د كنسبة جـ هـ الى هـ ب. فضرب أ هـ الأول في هـ ب الرابع، كضرب جـ هـ في هـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٢/٦]

[٥١ ظ] ضلع المخمس المتساوي الأضلاع كمخمس أ ب جـ د هـ في دائرة أ ب جـ، يقوى على ضلع المسدس وضلع المعشر جميعاً.



ف ٢٢/٦

فنخرج أ ز ح قطر الدائرة، والمركز ز، ونقسم قوس أ ب بنصفين على ط، ونصل أ ط، ط ز، ونخرج ز ل عموداً على أ ط يقطع أ ب على ك، وقوس أ ط على م.

فلأن قوس ب ط ضعف قوس ط م، وقوس جـ ح مثل قوس ب ط، يكون قوس جـ ح ضعف قوس ط م. وقوس ب جـ ضعف قوس ب ط. فجميع قوس ب ح ضعف جميع قوس ب م. فزاوية ب ز ح ضعف زاوية ب ز م.

لكن ب ز ح ضعف زاوية ب أ ز. فزاوية ب أ ز مثل زاوية ب ز م؛ وزاوية أ ب ز مشتركة. فمثلثا أ ب ز، ك ب ز متشابهان. فنسبة أ ب إلى ب ز كنسبة ب ز إلى ب ك. فضرب ب أ في ب ك مثل مربع ب ز.

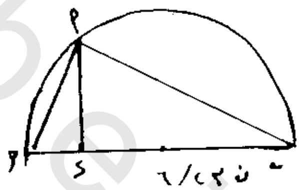
وأيضاً أ ل مثل ل ط، ل ك مشترك، وزاويتا ط ل ك، أ ل ك قائمتان. فزاوية ل ط ك مثل زاوية ل م ك. لكن زاوية ل م ك مثل زاوية ط ب ك. فزاوية أ ط ك مثل زاوية ط ب ك؛ وزاوية ط أ ب مشتركة. فمثلثا أ ط ب، أ ط ك متشابهان. فنسبة ب أ إلى أ ط كنسبة أ ط إلى أ ك. فضرب ب أ في أ ك مثل مربع أ ط.

وَب ز ضلع المسدس، أ ط ضلع المعشر، وضرب أ ب في ب ك، ب أ في أ ك مثل مربع أ ب الذي هو ضلع المخمس. فضلع المخمس يقوى على

ضلع المسدس وضلع المعشر اذا كانا في دائرة واحدة . وذلك ما أردنا أن نبين .

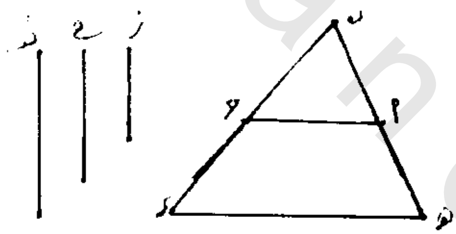
[المبرهنة ٢٣/ ٦ تقابل ٩/ ٦ عند الحجاج]

نريد ان نجد خطاً وسطاً في النسبة [٥٢ و] بين خطي ب د، د جـ.



فنصلهما على استقامة، مثل ب جـ. ونديرعليه نصف دائرة ب أ جـ، ونخرج د أ عموداً ونصل أ ب، أ جـ. فزاوية ب أ جـ قائمة، وقد خرج منها إلى قاعدة ب جـ عمود أ د؛ فهو وسط بالنسبة بين ب د، د جـ؛ وذلك ما أردنا ان نجد.

[المبرهنة ٢٤/ ٦ تقابل ١١/ ٦ عند الحجاج]



نريد أن نجد خطاً ثالثاً يناسب خطين معلومين مثل أ ب، ب جـ فنجعلهما يحيطان بزاوية ب، كيف وقعت؛ ونصل أ جـ. ونزيد أ هـ في أ ب مثل ب جـ، ونخرج من هـ خطاً يوازي أ جـ، ويخرج إلى ب جـ فيلقاه عند نقطة د. فنسبة ب أ إلى أ هـ، أعني ب جـ، كنسبة ب جـ إلى جـ د فَـ جـ د هو الثالث المطلوب.

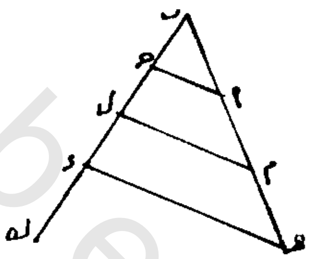
[المبرهنة ٢٥/ ٦ تقابل ١٢/ ٦ عند الحجاج]

وأيضاً نريد خطاً رابعاً يناسب ثلاثة خطوط معلومة، مثل ز، ح، ط.

[٥٢ ظ] نرسم خطي ب هـ، ب د، كيف كانا، يحيطان بزاوية ب، كيف وقعت؛ ونفصل ب أ مثل ز، أ هـ مثل ح، . ب جـ مثل ط. ونصل أ جـ، ونخرج

هـ د يوازي أ جـ. فنسبة ب أ، أعني ز، إلى أ هـ أعني ح. كنسبة ب جـ، أعني ط، إلى جـ د، وهو الرابع المطلوب.

[المبرهنة ٦/٢٦]



ن ٦/٢٦، ٦/٢٧

وأيضاً نريد أن نفصل من خط معلوم، كمثل ب هـ أي جزء شئنا، كالثلث فنجعله يحيط مع ب ك، كيف كانت، بزاوية ب، كيف وقعت؛ ونقسم ب د بثلاثة أجزاء متساوية، وهي ب جـ، جـ ل، ل د. ونصل هـ د ونخرج أ جـ يوازيه. فنسبة د جـ إلى جـ ب كنسبة هـ أ إلى أ ب وَ د جـ مثلا جـ ب. فَـ هـ أ مثل أ ب، وَ هـ ب ثلاثة أمثال أ ب. فَـ أ ب ثلث هـ ب.

[المبرهنة ٦/٢٧ تقابل ٦/١٣ عند الحجاج]

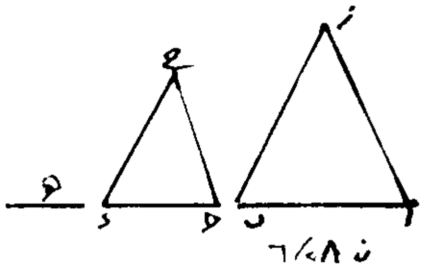
وأيضاً نتوهم خطي ب هـ، ب د معلومين، ب د منهما مقسوم على جـ، ل؛ ونريد أن نقسم ب هـ على أقسام ب د. فنجعلهما يحيطان بزاوية، كيف وقعت، ونصل د هـ، ونخرج جـ أ، ل م يوازيان د هـ. فنسبة د جـ إلى جـ ب كنسبة هـ أ إلى أ ب، ونسبة جـ ب إلى ل ب كنسبة أب إلى أ م.

فبالمساواة، نسبة د جـ إلى ل جـ كنسبة هـ أ إلى أ م.

ونفصل، فنسبة ل د إلى ل جـ كنسبة هـ م إلى م أ. ولكن نسبة ل جـ إلى جـ ب [٥٣ و] كنسبة م أ إلى أ ب وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٢٨]

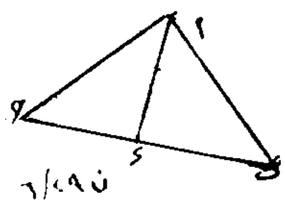
اذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة فان نسبة الأول منها الى الثالث كنسبة الشكل المعمول على الأول الى الشكل المعمول على الثاني، اذا كانا متشابهين وعلى وضع واحد.



كخطوط أ ب، جـ د، هـ المتناسبة، وعمل على أ ب سطح أ ز ب، وعلى جـ د سطح جـ ح د، وهما متشابهان ومعمولان عملاً واحداً، أقول: إن نسبة أ ب الى هـ كنسبة سطح أ ز ب الى سطح جـ ح د.

برهانه: فلأن خطوط أ ب، جـ د، هـ الثلاثة متناسبة، فنسبة أ ب الى هـ كنسبته الى جـ د مثناة. وسطحا أ ز ب، جـ ح د متشابهان فنسبة أ ز ب الى جـ ح د [كنسبة أ ب الى جـ د] مثناة. فنسبة أ ب الى هـ إذن كنسبة سطح أ ز ب الى سطح جـ ح د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٢٩ تقابل ٦/٣٢ عند الحجاج]



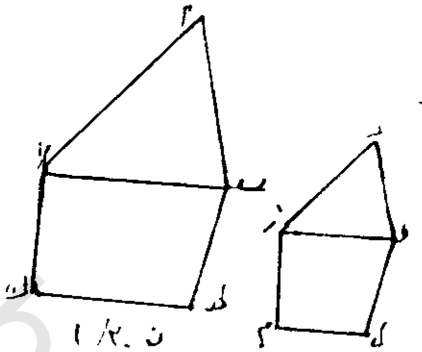
كل مثلث قائم الزاوية، كمثلث أ ب جـ، وزاويته القائمة أ، فإن: السطح المضاف الى وتر الزاوية القائمة مثل السطحين المضافين الى ضلعيه الباقيين، اذا كانا يشبهانه.

برهانه: نخرج عمود أ د. فمثلثا أ ب جـ، أ ب د متشابهان. فنسبة ب جـ الى ب أ كنسبة أ ب الى ب د. فنسبة ب جـ الأول [٥٣ ظ] الى ب د الثالث، كنسبة السطح المضاف الى ب جـ الى السطح المضاف الى ب أ الشبيه به.

وكذلك تكون نسبة ب جـ الى جـ د كنسبة السطح المضاف الى ب جـ الى المضاف الى جـ أ. فنسبة ب جـ الى ب د، د جـ جميعاً كنسبة الشكل المضاف الى ب جـ الى الشكلين المضافين الى ب أ، أ جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٣٠ تقابل ٦/١٩ عند الحجاج]

السطوح المتشابهة الكثيرة الزوايا تقسم بمثلثات متساوية العدة



متشابهة النسب، وتكون نسبة الكثير الزوايا الى الكثير الزوايا كنسبة ضلعه الى ضلعه النظير له، مثناة.

كسطحي أ ب ط ك جـ، د هـ ل م ز، وضلع أ ب نظير د هـ في النسبة، أقول: انهما يقسمان بمثلثات متشابهات متساوية العدة، وتكون نسبة السطح الى السطح كنسبة أ ب الى د هـ مثناة.

برهانه: أن نخرج ب جـ، جـ ط، هـ ز، ز ل. فلأن السطحين متشابهان، تكون زاوية أ مثل زاوية د، وتكون نسبة أ ب الى د هـ كنسبة أ جـ الى د ز.

وكذلك زاوية أ جـ ب مثل زاوية د ز هـ، وزاوية أ ب جـ مثل زاوية د هـ ز. ولكن زاوية أ ب ط مثل زاوية د هـ ل. فتبقى زاوية جـ ب ط [٥٤ و] مثل زاوية ز هـ ل. ونسبة أ ب الى د هـ كنسبة ب جـ الى هـ ز. فنسبة ب ط الى هـ ل كنسبة ب جـ الى هـ ز. وقد بينا ان زاوية جـ ب ط مثل زاوية ز هـ ل. فزاوية ب جـ ط من مثلث ب ط جـ مثل زاوية هـ ز ل من مثلث هـ ل ز؛ وزاوية ب ط جـ مثل زاوية هـ ل ز. وبقيت زاوية جـ ط ك مثل زاوية ز ل م وزاوية ك مثل زاوية م، وتبقى زاوية ط جـ ك مثل زاوية ل ز م. فزوايا مثلثي ك ط جـ، م ل ز متساوية.

فقد قسم سطحا أ ب ط ك جـ، د هـ ل م ز بمثلثات متشابهة متساوية العدة. فأقول ان نظائرها متناسبة.

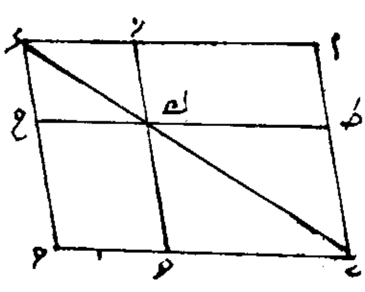
برهانه: ان مثلث أ ب جـ يشبه مثلث د هـ ز. فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز كنسبة ضلع أ ب الى ضلع د هـ النظير له، مثناة. ولكن نسبة أ ب الى د هـ كنسبة ب جـ الى هـ ز. ونسبة ب جـ الى هـ ز كنسبة ب ط الى هـ ل، لأن مثلثي جـ ب ط، ز هـ ل متشابهان. فنسبة أ ب الى د هـ كنسبة ب ط

الى هـ ل مثناة. ونسبة ب ط الى هـ ل مثناة كنسبة مثلث جـ ب ط الى مثلث هـ ز ل. فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز كنسبة مثلث جـ ب ط الى مثلث هـ ز ل.

وكذلك نبين ان نسبة مثلث جـ ب ط الى مثلث ز هـ ل كنسبة مثلث جـ ط ك الى مثلث ز ل م. فتكون نسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز كنسبة مثلث جـ ب ط الى مثلث ز هـ ل، وكنسبة مثلث جـ ط ك الى مثلث ز ل م. ونسبة واحد من المقدمات الى [٥٤ ظ] واحد من التوالي، كنسبة جميع المقدمات الى جميع التوالي. فنسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز كنسبة سطح أ ب ط ك جـ الى سطح د هـ ل م ز. لكن نسبة مثلث أ ب جـ الى مثلث د هـ ز كنسبة ضلع أ ب الى ضلع د هـ مثناة. فنسبة السطح الى السطح كنسبة أ ب الى د هـ مثناة.

ولأن كل ثلاثة خطوط متناسبة فإن نسبة المثلث المعمول على [الأول الى المثلث المعمول على] الثاني، الشبيه به، كنسبة الأول الى الثالث. ونسبة المثلث المعمول على الأول الى المثلث المعمول على الثاني، كنسبة السطح الكثير الزوايا المعمول على الأول، الى السطح الكثير الزوايا المعمول على الثاني، الشبيه به، تكون نسبة الأول الى الثاني على نسبة السطحين. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٣١ تقابل ٦/٢٣ عند الحجاج]

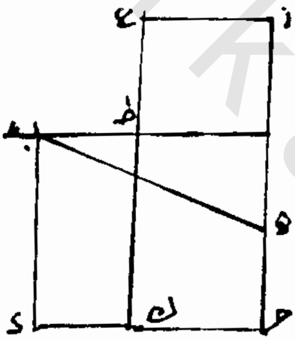


كل سطح متوازي الأضلاع، على قطره سطوح متوازية الأضلاع، فهو يشبهها، وهي متشابهة. كسطح أ ب جـ د وعلى قطره، وهو ب د، سطحا هـ ط، ك د، متوازيا الأضلاع. أقول انهما يشبهان سطح أ جـ، وهما متشابهان.

برهانه: إن ك ح يوازي ب جـ في مثلث ب جـ د. فنسبة ب ك الى ك د كنسبة جـ ح الى ح د.

وأيضاً المتوازيان ز ك، أ ب في مثلث أ ب د: نسبة ب ك الى ك د كنسبة أ ز الى ز د. فنسبة أ ز الى ز د كنسبة [٥٥ و] جـ ح الى ح د. واذا ركبنا فنسبة أ د الى د ز كنسبة جـ د الى د ح. فالأضلاع المحيطة بزاوية أ د جـ متناسبة. فسطح ز ح يشبه سطح أ جـ. وكذلك هـ ط يشبه أ جـ، لأن هـ ط يشبه ز ح. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/٣٤ تقابل ٦/٣٠ عند الحجاج]

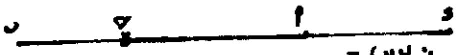


نريد أن نقسم خطاً مفروضاً، كخط أ ب، على نسبة ذات وسط وطرفين. فنعمل عليه مربع أ جـ د ب، وننصف ضلع أ جـ على هـ، ونصل هـ ب، ونخرج هـ أ الى ز، ونجعل هـ ز مثل هـ ب. ونعمل على أ ز مربع أ ز ح ط، ونخرج ح ط الى ك.

فلأن خط أ جـ نصف على هـ، وزيد في طوله أ ز، فضرب جـ ز في ز أ، مع مربع هـ أ، مثل مربع هـ ز. لكن مربع هـ ز مثل مربع هـ ب. فضرب جـ ز في ز أ مع مربع هـ أ، مثل مربع هـ ب. ومربع هـ ب مثل مربعي ب أ، أ هـ. فضرب جـ ز في ز أ مع مربع أ هـ مثل مربعي ب أ، أ هـ [فضرب جـ ز] في ز أ مثل مربع أ ب. لكن ضرب جـ ز في ز أ هو سطح ز ك، وأما مربع أ ب فهو سطح أ د. فسطح ز ك مثل سطح أ د. نسقط سطح أ ك المشترك. يبقى سطح ز ط مثل سطح ط د.

لكن ز ط هو [٥٥ ظ] مربع أ ط؛ ط د هو ضرب أ ب في ط ب. فضرب أ ب في ط ب مثل مربع أ ط. فنسبة أ ب الى أ ط كنسبة أ ط الى ط ب. فقد قسم أ ب على نسبة ذات وسط وطرفين، على نقطة ط. وذلك ما أردنا ان نعمل.

[المبرهنة ٣٣/ ٦ تقابل ١/ ٨]



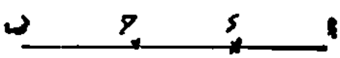
ن ٦/٢٢

كل خط يقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، مثل أ ب قسم على جـ، ويزاد في قسمه الأطول، وهو أ جـ نصف الخط كله، وهو أ د، أقول ان مربع د جـ خمسة أمثال مربع د أ.

برهانه: ان مربع أ ب مثل ضرب أ ب في أ جـ مع ضرب أ ب في ب جـ. لكن ضرب أ ب في ب جـ مثل مربع أ جـ، وضرب أ ب في أ جـ ضعف ضرب أ د في أ جـ، لأن أ ب ضعف د أ. فمربع أ ب مثل ضعف ضرب د أ في أ جـ مع مربع أ جـ. لكن مربع أ ب: أربعة أمثال مربع د أ. واذا جعلنا مربع د أ مشتركاً، يكون ضرب د أ في أ جـ مرتين، مع مربعي أ د، أ جـ: خمسة أمثال مربع د أ. لكن جميع ذلك مساوٍ لمربع د جـ. فمربع د جـ إذن خمسة أمثال مربع د أ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٤/ ٦ تقابل ٣/ ٨]

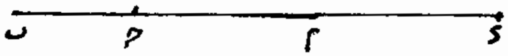
كل خط يقسم بنسبة ذات وسط وطرفين، مثل أ ب قسم على جـ، وقسم أ جـ بنصفين على د، أقول: إن مربع د ب خمسة أمثال مربع أ د.



ن ٦/٢٤

[برهانه: ان مربع أ جـ مثل ضرب أ ب في ب جـ] بالفرض لكن مربع أ جـ أربعة أمثال مربع د جـ. فضرب أ ب في ب جـ أربعة أضعاف مربع د جـ. فنجعل مربع د جـ مشتركاً. يكون ضرب أ ب في ب جـ مع مربع [٥٦ و] د جـ مثل خمسة أمثال مربع د جـ. لكن جميع ذلك مثل مربع د ب. فمربع د ب خمسة أمثال مربع د جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٥/ ٦ تقابل ٥/ ٨]

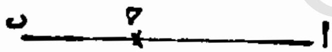


كل خط يقسم بنسبة ذات وسط وطرفين، مثل أ ب [قسم] على جـ، وقسمه الأطول أ جـ، وزيد في أ جـ مثل أ جـ، وهو أ د، فأقول ان جميع د ب مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين، وقسمه الأطول أ ب.

ن ٢٥/ ٦

برهانه: نسبة أ ب إلى أ جـ كنسبة أ جـ إلى جـ ب بالفرض، أ جـ مثل أ د. فنسبة أ ب الى أ د كنسبة أ جـ الى جـ ب. ونسبة د أ الى أ ب كنسبة جـ ب الى جـ أ. وبالتركيب نسبة د ب الى أ ب كنسبة أ ب الى أ جـ، أ جـ مثل د أ. فنسبة د ب الى أ ب كنسبة أ ب الى د أ. فَـ د ب مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين، وقسمه الأطول أ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

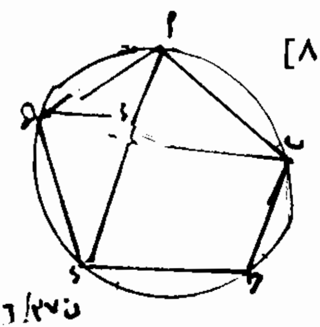
[المبرهنة ٣٦/ ٦ تقابل ٤/ ٨]



كل خط يقسم بنسبة ذات وسط وطرفين، مثل أ ب على جـ، وقسمه الأقصر جـ ب، أقول: إن مربعي أ ب وَ جـ ب [مثل ثلاثة امثال مربع أ جـ لأن مربعي أ ب، جـ ب] مثل ضرب أ ب في جـ ب مرتين مع مربع أ جـ؛ وضرب أ ب في جـ ب مرتين مثل مربع أ جـ مرتين، لأن نسبة أ ب الى أ جـ كنسبة أ جـ الى جـ ب. فمربع أ ب ومربع ب جـ إذن ثلاثة أمثال مربع أ جـ وذلك ما أردنا أن نبين.

ن ٢٦/ ٦

[المبرهنة ٣٧/ ٦ تقابل ٨/ ٨]



ن ٢٧/ ٦

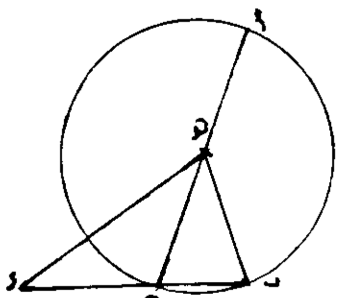
كل مخمس في دائرة، كمخمس أ ب جـ د هـ في دائرة أ جـ، وتقاطع [٥٦ ظ] فيه وتران، وهما أ د، ب هـ على ز أقول ان أ د، ب هـ، كل واحد منهما قسم على نسبة ذات وسط وطرفين على ز، والقسم الأعظم منهما د ز، ب ز، وهما مساويان لضلع المخمس.

برهانه: إن قوس أ ب مثل قوس هـ د. فزاوية أ هـ ب مثل زاوية هـ أ د. لكن زاوية هـ أ د مثل زاوية أ د هـ. فزاويتا أ هـ ز، أ د هـ من مثلثي أ د هـ، أ هـ ز متساويتان. وزاوية هـ أ د مشتركة. فنسبة أ د الى أ هـ كنسبة هـ أ الى أ ز لكن أ هـ مثل هـ د بالفرض. ولأن قوس ب د ضعف قوس أ ب تكون زاوية ب هـ د ضعف زاوية أ هـ ب.

لكن زاوية د ز هـ أيضاً ضعف زاوية أ هـ ز. فزاويتا ز هـ د، هـ ز د متساويتان. فخطا د هـ، د ز متساويان. وقد كان أ هـ مثل هـ د. وان نسبة أ د الى أ هـ كنسبة أ هـ الى أ ز. فنسبة أ د الى د ز كنسبة د ز الى ز أ. فَـ أ د مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين على ز، د ز مثل ضلع المخمس. وكذلك نبين أن ب هـ مقسوم بهذه القسمة على ز، وَ ب ز مثل ضلع المخمس. وذلك ما أردنا ان نبين.

المبرهنة ٣٨/ ٦ تقابل ١٠/ ٨]

كل دائرة فيها ضلع المعشر، كوتر ب جـ، ونصل به على استقامة ضلع المسدس، وهو جـ د، أقول: إن ب د مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين على جـ، وبالعكس.



ن ٢٨/٦

برهانه: انا نصل جـ هـ ونخرجه الى أ، ونصل ب هـ، د هـ. فلأن [٥٧ و] ب جـ عشر الدائرة، يكون قوس أ ب أربعة أمثال قوس ب جـ، فزاوية أ هـ ب أربعة أمثال زاوية ب هـ جـ. لكن زاوية هـ جـ ب نصف زاوية أ هـ ب. فزاوية هـ جـ ب ضعف زاوية ب هـ جـ. لكن زاوية ب جـ هـ أيضاً ضعف زاوية هـ د جـ، وذلك ان هـ جـ مثل جـ د. فزاويتا ب هـ جـ، هـ د جـ متساويتان، وزاوية ب مشتركة فنسبة ب د إلى ب هـ كنسبة ب هـ الى ب جـ. لكن ب هـ مثل جـ د. فنسبة

ب د الى د جـ كنسبة د جـ الى جـ ب. فَـ ب د قسم على نسبة ذات وسط وطرفين. وذلك ما أردنا ان نبين.

ثم نجعل ب د مقسوماً على نسبة ذات وسط وطرفين، على جـ، جـ د ضلع المسدس، أقول: ان ب جـ ضلع المعشر:

لأن نسبة ب د الى د جـ كنسبة د جـ الى جـ ب؛ د جـ مثل هـ ب. يكون ب د الى ب هـ كنسبة ب هـ الى ب جـ، وزاوية ب مشتركة لمثلثي ب هـ جـ، ب د هـ. وأضلاعهما متناسبة. وزاوية ب جـ هـ ضعف زاوية د هـ جـ. لكن زاوية ب جـ هـ، نصف زاوية أ هـ ب. فزاوية أ هـ ب أربعة أمثال زاوية جـ هـ ب. فقوس أ ب أربعة أمثال قوس ب جـ. فجميع أ ب جـ خمسة أمثال قوس ب جـ. فجميع المحيط عشرة أمثال قوس ب جـ. فقوس ب جـ [٥٧ ظ] عشر المحيط. فوتر ب جـ ضلع المعشر. وذلك ما أردنا ان نبين.

تمت المقالة السادسة بحمد الله تعالى

المقالة السادسة

في موازنة ختامية

تتألف هذه المقالة عند الحجاج وهيث من ٣٣ مبرهنة، اتفقا في عرضها محتوى واختلفا في الترتيب اختلافاً كبيراً. وموضوعها العام تطبيق نظرية النسبة والتناسب التي اقامتها المقالة السابعة على الأشكال الهندسية، المتشابهة منها والمتكافئة.

ويعرض النسوي ذلك بِ ٣٨ مبرهنة منها ٢٥ من المقالة السادسة نفسها و ٦ من المقالة الثامنة وواحدة من المقالة الثالثة والمبرهنات الباقية من نواحي متعددة على الدارس أن يتعقبها في كتب اقليدس وفي مجسطي بطليموس وفي غيرها. والنسوي هنا كشأنه في مواضع أخرى يوجز عباراته ويجعل الشكل الهندسي الواحد، احياناً، يخدم مبرهنتين متتاليتين.