

## الباب الثالث

المتروك المنظومات الخمسة أحادية الدرجة

obeykandi.com

### 1- الاهتزاز الحر مع تضاؤل لزج: *Free Vibration With Viscous Damping*

الكبت او التضاؤل هو مقاومة الحركة فى جميع انواع الاحتكاك المختلفة ولكن هذه المقاومة تختلف عن مقاومة النابض او القصور الذاتى فى انها تكون مصحوبة بفقد فى الطاقة. وينتج الكبت او الخمد بطرق متعددة منها الاحتكاك وانزلاق الموائع وكذلك الحركة الداخلية فى الاجسام الصلبة فعندما تهتز منظومة ذات درجة واحدة من الحرية ستعتمد استجابتها على نوع الخمد الموجود بالمنظومه . ويمكن كتابة معادلة الحركة على الصورة الاتية :

$$m\ddot{x} + F_d + kx = 0 \quad (1-3)$$

حيث : قوة مقاومة الخمد او التضاؤل هي  $F_d$  ومع ان الوصف الحقيقى لقوة مقاومة التضاؤل يكون صعبا ، فبالامكان فرض نماذج مثالية للتضاؤل التى غالبا ما ينتج عنها تنبأ مقنع للأستجابة . ومن بين هذه الامثلة قوة التضاؤل اللزج التى تتناسب طرديا مع السرعة ، حيث بقودنا هذا الافتراض الى ابسط الحلول الرياضية . وفيما يلى اهم انواع الكبت او الخمد او التضاؤل :

أ - الكبت اللزج *Viscous Damping*

ب - الكبت الجاف او الكولومى *dry or Coulomb Damping*

ج - الكبت الصلب *Solid Damping*

### 2- الكبت او التضاؤل اللزج :

ينتج هذا الكبت عن حركة الاجسام بسرعة منخفضة او متوسطة فى مائع لزج . وتتناسب قوة مقاومة الكبت مع سرعة الحركة .

$$F_d \propto \dot{x} \quad \therefore F_d = c\dot{x}$$

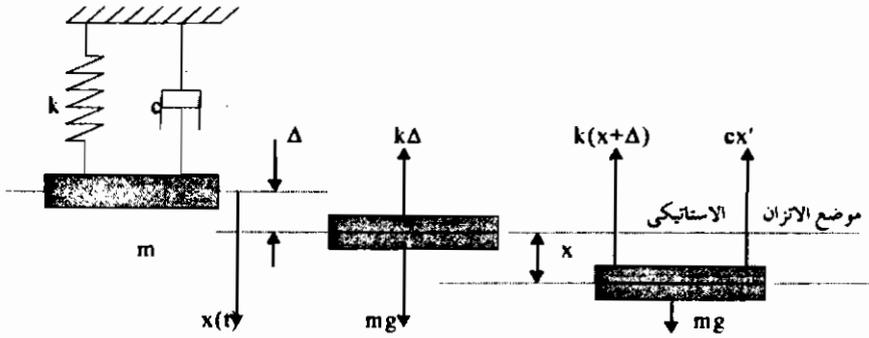
حيث  $\dot{x}$  هي سرعة الجسم

$c$  هي ثابت التناسب ويسمى معامل الخمد *Damping Coefficient*

وينتج هذا النوع من الكبت ايضا فى الالات الكهرومغناطيسية حيث تتناسب مع معدل التقاطع مع خطوط المجال المغناطيسى .

اما اذا كانت حركة الجسم فى المائع سريعة مما يسبب اضطراب المائع فان المقاومة فى هذه الحالة تتناسب مع مربع السرعة ولايسمى الكبت فى هذه الحالة حرجا .

3- استنتاج معادلة الحركة لمنظومة مكونة من النابض والحامد والكتلة للاهتزاز الحر مع تضائل لزج:



الشكل (3-1) يوضح الاهتزاز الحر مع التضائل اللزج لمنظومة ذات درجة حرية واحدة

ان الكبت في الحياة العملية يكون غالبا خليطا من الانواع السالفة الذكر و للتبسيط هنا سيؤخذ الكبت علي انه من النوع اللزج. ونلاحظ من الرسم انه يرمز للكبت بوعاء كبت (Dash Pot) ، ويمكن إستنتاج معادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (3-1) والتي تتكون من كتلة  $m$  ونابض معاملته  $k$  وخامد معامل الخمدلة  $c$  وهي تمثل الاهتزاز الحر مع تضائل لزج وبذلك يمكن إستنتاج المعادلة التفاضلية لحركة هذة المنظومة كما يلي:

طبقا لقانون نيوتن الثاني  $m\ddot{x} = \sum F$  نجد ان :

$$\therefore m\ddot{x} = -k(x + \Delta) - c\dot{x} + mg \quad , \therefore k\Delta = mg$$

$$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \dots\dots\dots(3-2)$$

والمعادلة (3-2) هي المعادلة التفاضلية للحركة من الدرجة الثانية و متجانسة. ولحل هذة المعادلة يمكن

فرض الحل علي الصورة الاسية وذلك بوضع  $x = e^{st}$  ,  $\dot{x} = se^{st}$  ,  $\ddot{x} = s^2e^{st}$  ثم بالتعويض من هذة العلاقات في معادلة الحركة للمنظومة ينتج مايلي :

$$ms^2e^{st} + cse^{st} + ke^{st} = 0$$

$$\therefore ms^2 + cs + k = 0$$

بالقسمة على  $e^{st}$  نحصل على

وحل هذه المعادلة باستخدام القانون العام  $s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  وذلك لايجاد جذور المعادلة كما يلي:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\therefore s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \dots\dots\dots(3-3)$$

ويكون الحل العام للمعادلة في الصورة التالية :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} + Be^{\lambda t} \dots\dots\dots (3-4)$$

حيث  $B, A$  هما ثوابت تحدد قيمتها من الشروط الابتدائية  $x(0)$  ،  $\dot{x}(0)$  وتتوقف طبيعة الاهتزاز على قيمة ما تحت الجذر في المعادلة (3-3) وهي إما ان تساوى صفرا او قيمة موجبة او قيمة سالبة كما سيلي شرحه:

**4- الخمد او الكبت الحرج : Critical Damping**

يحدث ذلك اذا تلاشت قيمة ما تحت الجذر اى يساوى الصفر وذلك عندما يكون المقدار التالى :

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \text{ اى ان}$$

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \quad \therefore \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \omega_n^2 \quad \therefore \frac{c}{2m} = \omega_n$$

وتسمى  $c$  فى هذه الحالة بمعامل الكبت الحرج ويرمز له بالرمز  $c_c$  حيث :

$$c_c = 2m\omega_n = \text{critical damping coefficient} \dots\dots\dots (3-5)$$

ومن المفضل ان نعبر عن قيمة اى تضائل بدلالة التضائل الحرج بواسطة النسبة اللابعدية التى تدعى بنسبة التضائل  $\zeta$  او عامل الخمد ( the damping factor ) حيث :

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad \text{i.e} \quad c = c_c \quad \therefore \zeta = 1$$

$$c_c = \text{the critical damping coefficient} = 2\zeta m \omega_n = 2m\omega_n \quad \text{where} \quad \zeta = 1$$

وفى هذه الحالة يكون الجذران  $s_{1,2}$  متساويان وقيمتها سالبة اى ان  $s_{1,2} = \frac{-c}{2m} = -\omega_n$  ..  
ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة التالية

$$x = (A + B)e^{-\omega_n t} \dots\dots\dots (3-6)$$

$(A + B)$  هو ثابت واحد وعلى ذلك فهو ليس حلا عاما وقد لوحظ ان المقدار  $(te^{-\omega_n t})$  هو ايضا احد

الحلول وذلك بالتعويض فى المعادلة  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  وعلى ذلك يمكن ايجاد الحل العام كالتالى:

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \dots\dots\dots (3-7)$$

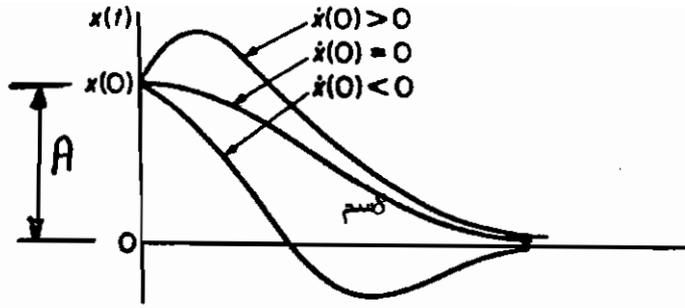
وباستخدام المعادلتين (3-5) ، (3-6) مع المعادلة (3-7) ياخذ الحل العام صورة المعادلة الآتية.:

$$\therefore x = (A + Bt).e^{-\omega_n t} \dots\dots\dots (3-8).$$

ملاحظات على الكبت الحرج :

( أ ) يمكن ايجاد الثابتين  $(A, B)$  من شرطين حديين او ابتدائيين مثل ازاحة الكتلة  $x(t)$  وسرعتها  $\dot{x}(t)$  عند زمن معين  $t$

(ب) الحركة لا ترددية ( a periodic ) ولكن تاخذ شكل دالة تؤول الى الصفر عندما يؤل الزمن الى ما لا نهاية ، وكذلك تبدأ باتساع مقدارة  $(A)$  عندما يكون الزمن صفر كما فى الشكل (3-2).



الشكل (3-2) حركة تضائلية حرجة  $\zeta = 1.0$

والشكل (3-2) يبين ثلاثة انواع من الاستجابة مع الازاحة الابتدائية  $x(0)$  والكثير من العناصر المتحركة للعدد الكهربائية والمقاييس تمتلك تضائلا او كبت حرج وذلك لمنع حدوث التذبذب وتجاوز حدود المقياس .

(ج) بمقارنة هذه الحالة بالحالتين التاليتين يتضح ان هذه هي اسرع حالة يعود فيها الجسم المهتز الى حالة السكون .

(د) قيمة الكبت الحرج يعبر عنها بالعلاقة  $c_c = 2m\omega_n$  حيث عامل الخمد يساوى الوحدة  $\zeta = 1$

**5 - الخمد او الكبت الاكبر من الحرج (over damped or large damping)**

يحدث هذا الكبت عندما تكون قيمة المقدار اسفل الجذر موجب ويكون ذلك عندما  $\frac{k}{2m} > (\frac{c}{2m})^2$  أى

ان  $\frac{c}{2m} > \omega_n$  . ومن ذلك يكون  $c > c_c$  ،  $\zeta = \frac{c}{c_c} > 1$  ولكن من المعادلة يتضح ان المقدار

الموجب اسفل الجذر يكون اقل من المقدار السالب  $(\frac{c}{2m})^2$  كما بالمعادلة (3-3). وبالتالي نستنتج ان جذرى المعادلة فى هذه الحالة كمية سالبة ومختلفان فى المقدار ويكون الحل العام لهما على صورة المعادلة:

$$\therefore \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \therefore c = 2\zeta m\omega_n \dots \dots \dots (3-9)$$

وبالتعويض عن معامل الخمد  $c$  فى معالتي الجذرين  $s_1, s_2$  ينتج ان :

$$\therefore s_1 = \frac{-c}{2m} + \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{2\zeta m\omega_n}{2m} + \sqrt{(\frac{2\zeta m\omega_n}{2m})^2 - \omega_n^2}$$

$$\therefore s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = \omega_n[-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}] \dots \dots \dots (3-10)$$

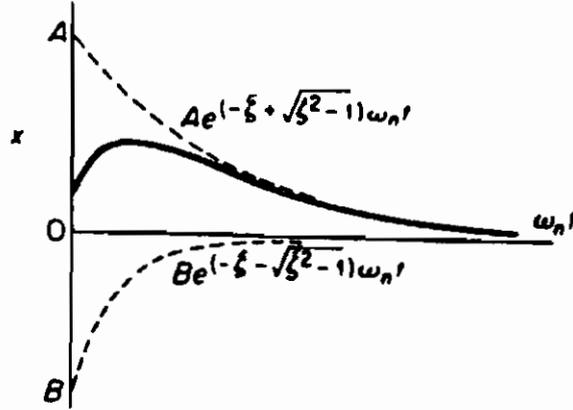
وبالمثل يمكن اثبات ان الجذر الثانى يكون على صورة المعادلة التالية:-

$$s_2 = \omega_n[-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}] \dots \dots \dots (3-11)$$

وبالتعويض عن قيمة الجذرين  $s_1, s_2$  فى المعادلة التى تمثل الحل العام للمعادلة (3-4) تنتج المعادلة التالية:

$$\therefore x(t) = A.e^{[-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}]\omega_n t} + B.e^{[-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}]\omega_n t} \dots \dots \dots (3-12)$$

يمكن ملاحظة ان الثابتين يتحددان بشرطين حديين او ابتدائين وان هذه الدالة لا ترددية ايضا مثل الحالة السابقة ، ولكن الكتل تاخذ وقتا اكثر لتعود الى وضع التعادل نظرا لزيادة الكبت ويبين الشكل (3-3) الاتجاه العام لدالة الحركة وهي دالة زمن اسية تنازلية وتسمى بالحركة الدورية وليست بالحركة الترددية او الاهتزازية.



الشكل(3-3) يوضح الحركة الدورية في حالة الاهتزاز الحر مع التضاؤل الاكبر من الحرج ( $\zeta > 1.0$ ) حيث يمكن تعيين كل من  $A, B$  من المعادلتين الاتيتين :

$$\therefore A = \frac{\dot{x}(0) + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x(0)}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \dots\dots\dots(3-13)$$

$$B = \frac{\dot{x}(0) - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x(0)}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \dots\dots\dots(3-14)$$

#### 6-الخمء او الكبت الاصغر من الحرج Underdamped or Light Damping

تحدث هذه الحالة من الخمء عندما  $\zeta < 1$  اي عندما تكون القيمة اسفل الجذر سالبة اي عندما تكون  $\frac{k}{m} > \left(\frac{c}{2m}\right)^2$  ولهذا تنتج كمية تخيلية ويكون الجذران علي الصورة التالية :

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \dots\dots\dots(3-15)$$

. بالتعويض عن  $c = 2\zeta m \omega_n$  ،  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$  في معادلة الجذور ينتج ان :

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta m \omega_n}{2m} \pm j\sqrt{\omega_n^2 - \frac{4\zeta^2 m^2 \omega_n^2}{4m^2}} = -\zeta\omega_n \pm j(\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n \dots\dots(3-16)$$

$$\therefore s_{1,2} = \omega_n \left[ -\zeta \pm j(\sqrt{1 - \zeta^2}) \right] \dots\dots\dots(3-17)$$

ويسمى المقدار  $\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$  بالتردد الطبيعي ذات الخمء ( $\omega_d$ )

$$\omega_d = \text{the natural frequency of damping vibration} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \dots\dots\dots(3-18)$$

وبالتعويض عن  $\omega_d$  في المعادلة (3-16) ينتج ان :

$$\therefore s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d t \dots\dots\dots(3-19)$$

وباستخدام صيغة اويلر Euler's Formula حيث :

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \dots\dots\dots(3-20)$$

الحل المتمم  $x_c$  يكون على الصورة التالية

$$\begin{aligned} \therefore x_c &= B_1 e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)t} + B_2 e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_d)t} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} [B_1 e^{j\omega_d t} + B_2 e^{-j\omega_d t}] \dots\dots\dots(3-21) \end{aligned}$$

$$\therefore x_c = e^{-\zeta\omega_n t} [(B_1 + B_2) \cos\omega_d t + j(B_1 - B_2) \sin\omega_d t] \dots\dots\dots(3-22)$$

حيث الازاحة  $x_c(t)$  هي كمية فيزيائية حقيقية وانهم مركبتين مترافقتين  $B_1, B_2$  are complex conjugates. المعادلة السابقة (3-22) يمكن كتابتها على الصورة التالية .

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t] \dots\dots\dots(3-23)$$

$$\therefore x_c = A e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \dots\dots\dots(3-24)$$

حيث  $A_1, A_2$  ثوابت حقيقية يمكن تعيينهم من الظروف البدائية (The Initial Conditions)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{A_1}{A_2} \dots\dots\dots(3-25)$$

ولهذا فان المعادلة (3-24) تعبر عن حركة توافقية ذات تردد مُخمد  $\omega$  والسعة يعبر عنها بالعلاقة  $Ae^{-\zeta\omega_n t}$  ملاحظات:

1- الحركة تكون اهتزازية عندما  $\zeta < 1$

2- التردد الطبيعي يكون اكبر من التردد نو الخمد اي ان  $\omega_n > \omega_d$

3- الحل المتمم  $x_c(t)$  يعطي الحركة الانتقالية للمنظومة

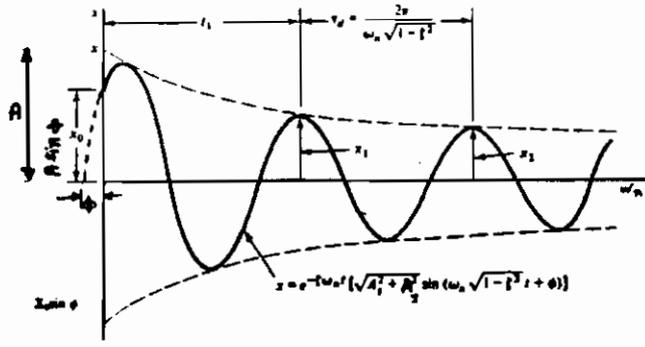
the complementary solution gives the transient motion of the system.

4- ومن ذلك يتضح ان هذه الحركة هي حركة توافقية و بتردد ذات خمد او تضائل  $\omega_d$  وتكون السعة لهذه الحركة كما بالمعادلة التالية :

$$\text{the amplitude} = A e^{-\zeta\omega_n t} \dots\dots\dots(3-26)$$

والشكل (3-4) يوضح هذه الحركة وهي حركة توافقية تكرر نفسها كل فترة زمنية  $(t_d)$  حيث يعين الزمن من العلاقة التالية :

$$t_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \dots\dots\dots(3-27)$$

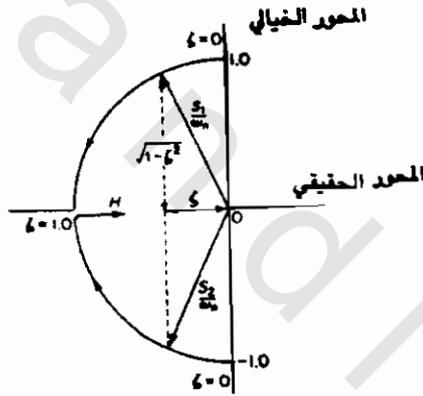


شكل (3-4) يوضح حركة توافقية اهتزازية ذات خمد عندما ( $\zeta < 1$ )

ونلاحظ ان الحالات الثلاثة للتضائل التي نوقشت سابقا تتحدد طبقا لقيمة  $\zeta$  اي اذا كان عامل الخمد اكبر من او اقل او يساوى الوحدة. ويوضح الشكل (3-5) المخطط البياني للمعادلة الخاصة بالجنور التالية:

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \dots \dots \dots (3-28)$$

وذلك فى مستوي مركب مع عامل الخمد  $\zeta$  كاحداثى افقى. فاذا كانت  $\zeta = 0$  تختصر المعادلة السابقة الخاصة بالجنور الى  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$  وبهذا فان الجنور التي تقع على الاحداثى الخيالى توافق حالة انعدام الخمد وللقيم  $0 \leq \zeta \leq 1$  وبذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة فى حالة وجود الجزء التخيلي بها كما يلى:



الشكل (3-5) يوضح المخطط البياني لمعادلتى الجنور على المحور الحقيقي والتخيلي

$$\frac{s_{1,2}}{\omega_n} = (-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}) \dots \dots \dots (3-29)$$

والجنران هما نقطتان مركبتان مترافقتان واقعتان على القوس الدائرى ويتقاربان عند النقطة  $\frac{s_{1,2}}{\omega_n} = 1$  حيث انه بازياد اكثر من وحدة واحدة تفترق الجنور على طول الاحداثى الافقى وتبقى اعداد حقيقية. ومن هذا المخطط نلاحظ ان الحل المعطى بالمعادلة وهى

$$x = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \left[ A e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + B e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \right] \dots\dots\dots(3-30)$$

تكون تحت الاختبار حيث الحد الاول  $e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}$  يمثل ببساطة دالة الزمن التناقصى الاسى . مع ان تصرفات الحدود بين القوسين تعتمد على اشارة القيمة العددية داخل الجذر التربيعى ؛ اى هل تلك القيمة موجبة او سالبة او تساوى الصفر .

فعندما يكون حد التضاثل  $\frac{c^2}{4m^2}$  اكبر من  $\left(\frac{k}{m}\right)$  تكون اسس المعادلة اعلاة اعدادا حقيقية . كذلك عدم

امكانية حصول تذبذبات . ونشير الى هذه الحالة المتضائلة عندما يكون حد التضاثل  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2$  اقل من

$\left(\frac{k}{m}\right)$  يصبح الاس عددا خياليا اى انه يساوي  $1 \pm j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$  . ولذلك نؤل المعادلة الى :

$$e^{\left[\pm j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right]t} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t \pm j \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t \dots\dots\dots(3-31)$$

وبذلك تشير هذه الحالة الى حالة الخمد الناقص الاقل من الحرج .

ملاحظات على الكبت (الخمد) الناقص الاقل من الحرج :-

1- يمكن ايجاد قيمة الثابتين  $A, \phi$  وهما السعة وزاوية الطور من شرطين من الشروط الحدية او الابتدائية

2- تعتبر الحركة اهتزازية *Oscillatory Motion* بفترة زمنية ثابتة  $t_d$  حيث

$$t_d = \frac{2\pi}{\omega_d \sqrt{1-\zeta^2}} \dots\dots\dots(3-32)$$

3 - اتساع الاهتزاز يتناقص بمرور الوقت نتيجة وجود الكبت ويمكن الاعتماد على هذه الظاهرة فى

تقدير قيمة الكبت . فبقياس اتساع الذبذبة فى دورتين متتاليتين  $x_1, x_2$  يمكن ايجاد التناقص اللوغاريتمى (  $\zeta$  ) .

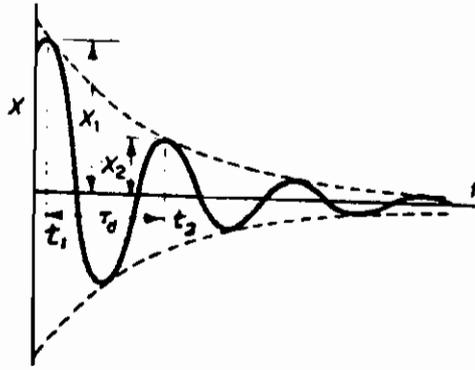
#### 7- التناقص اللوغارتمى ( $\zeta$ ) : *Logarithmic Decrement*

ان اتساع الحركة الاهتزازية يتناقص تدريجيا بمرور الوقت نتيجة وجود الخمد فى المنظومة وان الطريقة المناسبة فى تحديد وتقدير قيمة الخمد هو الاعتماد على تلك الظاهرة وذلك بقياس اتساع الذبذبة فى دورتين متتاليتين وليكن  $x_1, x_2$  وكذلك يمكن قياس معدل تلاشى الذبذبة الحرة بواسطة اجهزة القياس ولنتامل الاهتزاز المتضائل والمعبر عنه بالمعادلة العامة:

$$x = A e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \phi) \dots\dots\dots(3-24)$$

ويكون اقصى سعة ( *the maximum amplitude* ) فى الدورة عندما تكون  $\sin(\omega_d t + \phi) = 1$  فاذا كانت

الحركة تمثل بالشكل (3-6) التالي:



الشكل (3-6) معدل تلاشي التذبذب مقاسة بالتناقص اللوغاريتمي

فان التناقص اللوغاريتمي والذي يعرف باللوغاريتم الطبيعي لنسبة اي سعتين متعاقبتين ويرمز له بالرمز  $(\delta)$  يمكن ايجاده بالصيغة الاتية:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \left( \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t_1}}{Ae^{-\zeta\omega_n t_2}} \right) = \ln \left( \frac{e^{\zeta\omega_n t_2}}{e^{\zeta\omega_n t_1}} \right) = \ln \left( e^{\zeta\omega_n (t_2 - t_1)} \right) = \ln e^{\zeta\omega_n t_d} \dots \dots \dots (3-33)$$

$$\because t_d = \frac{2\pi}{(\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n} \quad \therefore \delta = \ln e^{\zeta\omega_n \frac{2\pi}{(\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \dots \dots \dots (3-34)$$

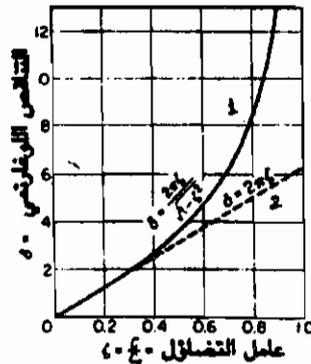
$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = e^\delta = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \dots \dots \dots (3-35)$$

حيث  $\frac{x_1}{x_2}$  هي النسبة بين اي سعتين متتاليتين *the consecutive amplitude ratio*

وإذا كان عامل الخمد  $\zeta$  اصغر بكثير من الواحد ويقترب من الصفر أي ان  $(\zeta \ll 1)$  فانه يهمل عامل الخمد الموجود اسفل الجذر لان قيمة الجذر في هذه الحالة يساوى الوحدة ويؤول التناقص اللوغاريتمي  $\delta$  الى المعادلة التالية:

$$\delta \cong 2\pi\zeta \dots \dots \dots (3-36)$$

والشكل التالي يبين القيم الحقيقية والتقريبية للتناقص اللوغاريتمي  $\delta$  كدالة في عامل الخمد  $\zeta$



الشكل (3-7) يوضح العلاقة بين التناقص اللوغاريتمي  $\delta$  وعامل الخمد  $\zeta$

يوضح الشكل (7-3) العلاقة بين التناقص اللوغاريتمي  $\zeta$  وعامل الخمد  $\zeta$  لحالين وهما في حالة عامل الخمد عندما يكون اصغر بقليل من الواحد ( $\zeta < 1$ ) فان شكل العلاقة ياخذ المنحنى (1) بينما اذا كان عامل الخمد اقل بكثير من الواحد ( $\zeta \ll 1$ ) فان شكل العلاقة توضح بخط مستقيم ومنقط (2) ويحدث انفصال بين الحالتين عندما ( $\zeta \approx 0.3$ ).

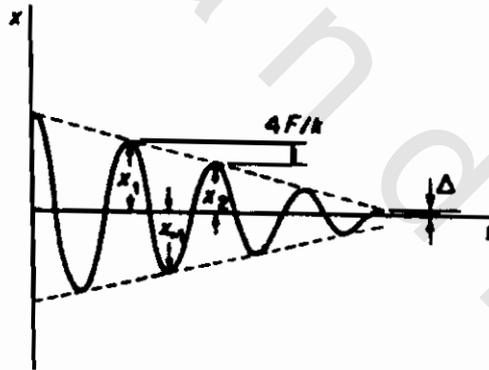
### 8- الكبت الحاف او تضائل كولمب : *Dry or Coulomb Damping*

1-ينتج هذا الكبت عن احتكاك الاجسام الصلبة الجافة وتتناسب المقاومة في هذا النوع مع الضغط العمودى على سطح التماس بين السطحين. ويظل الكبت ثابتا بالنسبة للازاحة والسرعة والعجلة . اى ان قوة التضائل تساوى حاصل ضرب القوة العمودية في معامل الاحتكاك

$$F_d = \mu \cdot F_N$$

حيث  $F_N$  هي القوة العمودية على السطحين (Vertical Force).

وقد افترضت قوة التضائل هنا بانها لا تعتمد على السرعة حال شروع الحركة . وبما ان قوة التضائل معاكسة دائما لاشارة السرعة . وتكون المعادلة التضائلية للحركة لكل اشارة سارية المفعول لكل فترة نصف دورة فقط . ولايجاد تلاشى السعة نلجأ الى مبدأ معادلة الشغل بالطاقة ، اى بمساواة الشغل المنجز بالتغير في الطاقة الحركية . وتختار نصف دورة تبدأ من اقصى موقع وبسرعة تساوى صفر ولنكن السعة مساوية  $x_1$  كما في الشكل (3-8) وبذلك يكون التغير في الطاقة الحركية صفرا والشغل المنجز على الكتلة  $m$  يكون صفرا ايضا .



الشكل (3-8a) الاهتزاز الحر مع تضائل كولمب

حيث:

$$\frac{1}{2} k(x_1^2 - x_2^2) - F_d(x_1 + x_2) = 0$$

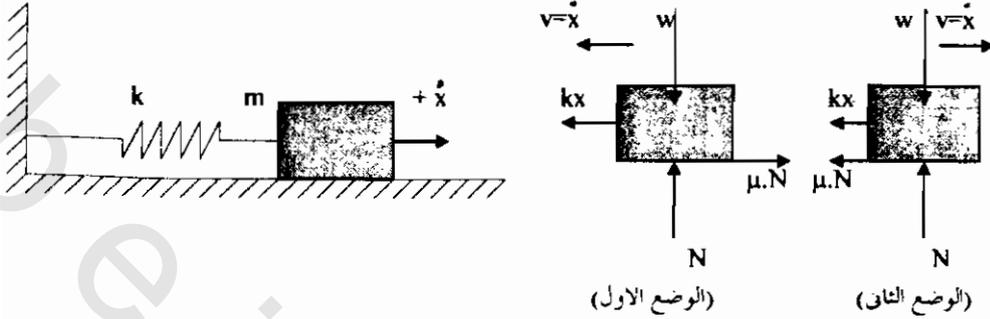
$$\therefore \frac{1}{2} k(x_1 - x_2) = F_d$$

حيث  $x_1$  هي السعة بعد نصف دورة كما مبين في الشكل (3-8) ، وبإعادة هذا الاسلوب لنصف الدورة القادمة، سوف نجد تناقضا اكثر في السعة ففترة  $\frac{2F_d}{k}$  ، بحيث يكون تلاشى في السعة لكل دورة ثابتا

$$x_1 - x_2 = \frac{4F_d}{k} \quad \text{ومساويا الى}$$

وبذلك سوف تتوقف الحركة عندما تصبح السرعة اقل من  $\epsilon$  وفي اى موقع تكون قوة النابض غير كافية للتغلب على قوة الاحتكاك الاستاتيكي ، والتي تكون عموما اكبر من قوة الاحتكاك الحركي . كذلك نستطيع ان نبين ان تردد التذبذب هو  $\omega_\mu = \sqrt{\frac{k}{m}}$  والذي يكون هو نفس التردد في المنظومة عديمة التضاؤل .

2- الشكل (3-8b) يوضح القوى المؤثرة على المنظومة في حالة الخمد الكولمب ومنها نلاحظ ما يلي:



الشكل (3-8b) يوضح الخمد الكولمب او الخمد ذات الاحتكاك الجاف

#### Coulomp Damping or Dry Friction Damping

نلاحظ من الشكل (3-8b) الخمد الكولمب او الخمد ذات الاحتكاك الجاف حيث قوة الخمد لا تعتمد على الازاحة او تفاضلها وهو السرعة ، ولكن تعتمد على القوة بين السطوح المنزلقة ، وإتجاه قوة الاحتكاك تكون مقابلة لاتجاه الحركة وإشارة القوة تتغير عندما يتغير إتجاه الحركة. ولهذا يوجد حلان ضروريان لمعادلة الحركة والتي يعتمد كل منهما على إتجاه الحركة ، والحلان يكونوا خطيان وذلك بعد كل نصف دورة ، فعند الحركة لنصف دورة من اليمين الى الشمال كما فى الوضع الاول وتكون معادلة الحركة طبقا لقانون نيوتن كما يلي:

$$\therefore \sum F = m\ddot{x} \quad \therefore m\ddot{x} = -kx + \mu.N \dots\dots\dots(1)$$

$\therefore$  The solution of equation(1):

$$x = A_1 \cos(\omega_n t) + B_1 \sin(\omega_n t) + \frac{\mu.N}{k} \dots\dots\dots(2)$$

وعند الحركة لنصف دورة من الشمال الى اليمين كما فى الوضع الثانى أى عكس الحركة بالوضع الاول تكون معادلة الحركة فى هذه الحالة وحلها كما يلي:

$$\therefore m\ddot{x} = -kx - \mu.N \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore \text{The solution of equation(3): } x = A_2 \cos(\omega_n t) + B_2 \sin(\omega_n t) - \frac{\mu.N}{k} \dots\dots\dots(4)$$

where  $A_1, B_1, A_2, B_2$  are constant

وهذه الثوابت الاختيارية تعتمد على الشروط الابتدائية لكل نصف دورة ويكون العامل  $\frac{\mu.N}{k}$  ثابت حيث  $\mu.N$  يسمى بقوة الاحتكاك *Friction force* وتكون الحركة لكل نصف دورة حركة توافقية ، ومنحنى الازاحة مع الزمن يكون منحنى نصف جيبى مع تغير موضع الاتزان من  $\mu.N/k +$  الى  $N/k -$  لكل نصف دورة. ، ومن الشروط الابتدائية نجد أن:

$$\therefore \text{at } t=0, x(0)=X_0, \dot{x}(0)=0 \therefore A_1 = X_0 - \frac{\mu.N}{k}, B_1 = 0$$

$$\therefore x = \left( X_0 - \frac{\mu.N}{k} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{\mu.N}{k} \dots \dots \dots (5)$$

حيث بالتعويض بالثوابت فى المعادلة (2) تنتج المعادلة (5) والازاحة تكون على شكل منحنى جيب تمام *cosine wave* وفى الاتجاه الموجب للمقدار  $\mu.N/k$  ويكون ذلك عندما  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_n}$  وعندما يكون

$$\text{i.e at } t = \frac{\pi}{\omega_n} \therefore x = \left( \frac{2\mu.N}{k} \right) - x_0$$

وبالنسبة لنصف الدورة الثانى تعكس الحركة إتجاهها وتكون الثوابت على الصورة التالية:

$$A_2 = X_0 - \frac{3\mu.N}{k} \quad B_2 = 0$$

وبالتعويض بهذه الثوابت فى المعادلة (4) نحصل على المعادلة التالية:

$$\therefore x = \left( X_0 - \frac{3\mu.N}{k} \right) \cos(\omega_n.t) - \frac{\mu.N}{k} \dots \dots \dots (6)$$

وهذه الازاحة تكون على شكل *cosine wave* وتكون فى الاتجاه السالب وتساوى المقدار  $\mu.N/k$  وتقل السعة ويعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$\text{i.e } X_0 - \frac{3\mu.N}{k} \quad \text{at } \frac{\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_n}$$

وعندما يكون الزمن  $t$  كما بالمعادلة التالية:

$$\text{at } t = \frac{2\pi}{\omega_n} \therefore x = X_0 - \left( \frac{4\mu.N}{k} \right) \therefore \text{For the third half cycle } \frac{2\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{3\pi}{\omega_n}$$

اى عند هذه الحالة ، فان الحركة تعكس إتجاهها ثانيا وتكون معادلة الحركة فى هذه الحلة كما بالمعادلة التالية:

$$x = \left( X_0 - \frac{5\mu.N}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu.N}{k}$$

وفى كل دورة تقل السعة بمقدار يساوى  $(\mu.N/k)$  4 وعند توقف الحركة فى نهاية نصف دورة واحدة فان السعة تقل بمقدار  $(\mu.N/k)$  وعند هذه النقطة فان قوة النابض الكامنة  $kx$  تكون اقل من قوة

الاحتكاك  $\mu N$  ويعبر عن ذلك بالعلاقة  $kx < \mu N$  وهذا التناقص الثابت للخمد لا يكون لو غارتمى ولكنة خطى ويعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{4\mu N}{k}$$

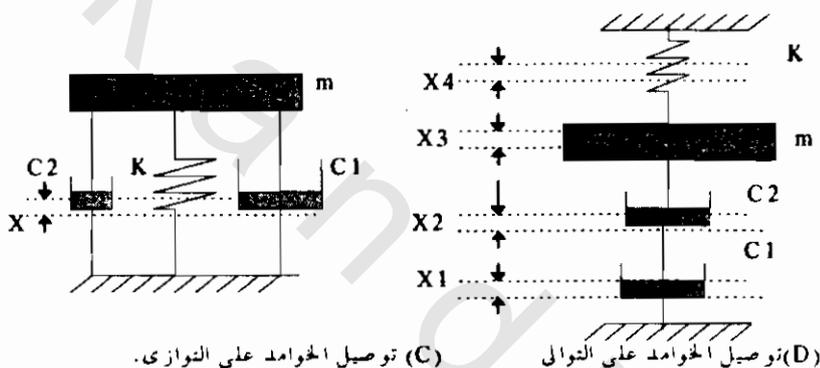
ومنحنى الازاحة مع الزمن كما مبين بالشكل (3-8c) يكون واقع بين غلاف مكون من زوج من الخط المستقيم التى يكونوا تقريبا فى موضع الاتزان مع ميل سالب ومقدارة  $2\left(\frac{\mu N}{\pi k}\right)$

### 9 - الكبت الصلب Solid Damping

ينتج هذا الكبت مع تشوه الاجسام الصلبة وما زال هذا النوع من الكبت موضع دراسة ، غير انه يبدو ان الكبت يكون متساويا لكل موجات الاهتزاز وكذلك يبدو ان قوى الكبت تتناسب مع شدة الاجهاد او الانحراف .

### 10- الخوامد المكافئة Equivalent Dampers

أ- توصيل او ترتيب الخوامد على التوازي. Dampers are connected or arranged in Parallel



(C) توصيل الخوامد على التوازي. (D) توصيل الخوامد على التوالي  
الشكل (3-8C,D) يوضح توصيل الخوامد على التوازي والتوالي

المنظومة المبينة بالشكل (8-c) توصيل الخوامد على التوازي ولايجاد الخامد المكافئ نتبع الاتى:

$$C_{eq} = \text{Equivalent of Viscous Damping} \quad \therefore \text{Damping force} = F_d = c x \dots\dots(1)$$

$$\therefore F_{eq} = F_1 + F_2 \quad \therefore C_{eq} \dot{x} = c_1 \dot{x} + c_2 \dot{x} \dots\dots\dots(2)$$

$\therefore$  The displacement  $x$  is equal for spring , mass and dampers

$\therefore$  Velocity  $\left( \dot{x} \right)$  is also equal for spring , mass and dampers

$$\therefore \text{from equation (2)} \quad C_{eq} = c_1 + c_2 \dots\dots\dots(3)$$

**ب- توصيل أو ترتيب الخواحد على التوالي (3-8c) Dampers are connected or arrangement in Series**

توصيل النوابض على التوالي موضع بالمنظومة المبينة بالشكل السابق والتي تتكون من الكتلة ونابض وخامدان تحدث لهما إزاحات مختلفة ولهذا فإن الإزاحة الكلية للخامدان تكون هي مجموع إزاحة كل خامد كما مبين بالمعادلات الآتية:

From fig.(3-8d) ∴ The total displacement for  $c_1, c_2 = x_1 + x_2$  ∴  $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

∴  $F_{damping} = F_d = c \cdot \dot{x}$  ∴  $\dot{x}_1 = \frac{F_{d1}}{c_1}$  ,  $\dot{x}_2 = \frac{F_{d2}}{c_2}$

∴  $v_{total} = v_1 + v_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \dot{x}_{eq}$  , ∴  $F = c_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}$  ∴  $\dot{x}_{eq} = \frac{F_d}{C_{eq}} = \frac{F_{d1}}{c_1} + \frac{F_{d2}}{c_2}$

∴ The force is effected on mass ,spring and two dampers  $c_1, c_2$  is equall

∴  $F_d = F_{d1} = F_{d2}$  ∴  $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$  ∴  $C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} = \frac{1}{\frac{c_1 + c_2}{c_1 \cdot c_2}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$

∴  $C_{eq} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$

**11- حل المعادلة التفاضلية**

• صورة المعادلة العامة المتجانسة لمنظومة ذات درجة حرية واحدة تحتوى على نابض معاملته  $k$  وخامد معاملته  $C$  وكتلة المنظومة  $m$  يمكن كتابتها على صورة المعادلة التالية :

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  ..... ( 1 )

وهي معادلة تفاضلية متجانسة لان الطرف الايمن للمعادلة يساوى الصفر وهي من الرتبة الثانية ( اكبر درجة تفاضل)

ومن الدرجة الاولى وهو اكبر اس فى المعادلة . ويمكن ايجاد حل المعادلة ( 1 ) بوضع  $x = e^{st}$  ثم

بالتفاضل ينتج ان  $\dot{x} = s^2 e^{st}$  ,  $\ddot{x} = s^2 e^{st}$

وبالتعويض من هذه العلاقات فى المعادلة ( 1 ) ينتج ان :

$ms^2 e^{st} + cse^{st} + ke^{st} = 0$

∴  $ms^2 + cs + k = 0$ .....(2)

ويمكن حل المعادلة ( 2 ) باستخدام القانون العام التالى :

$s_{1,2} = \frac{-c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{4m^2}}$ .....(2)

وتحدد قيمة الحل من المميز  $c^2 - 4mk$  كما يلي :-

أ- إذا كانت جذور المعادلة (3) حقيقية مختلفة يكون  $c^2 > 4mk$  ويكون الحل على الصورة الآتية:

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

ب- إذا كانت جذور المعادلة (3) حقيقية ومتساوية يكون  $c^2 = 4mk$  ويكون الحل على الصورة الآتية:

$$x(t) = (A + Bt)e^{at}$$

ج- إذا كانت جذور المعادلة (3) تخيلية يكون  $c^2 < 4mk$  ويكون الحل على الصورة الآتية:

$$x(t) = [A_1 \cos(bt) + A_2 \sin(bt)]e^{at} \quad \therefore s_{1,2} = a \pm bj$$

$$\text{where } a = -\zeta\omega_n, \quad b = \omega_d \quad \therefore x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi)$$

## 12- مسائل مطولة

أ- إذا كانت معادلة الحركة لمنظومة ما هي  $\ddot{x} + 4\dot{x} + kx = 0$  اوجد حل هذه المعادلة عندما

$$(1) k=3, \quad (2) k=4, \quad (3) k=5 \quad x(0)=0.4, \quad \dot{x}(0)=1 \text{ m/s}$$

الحل:

نضع  $x = e^{st}$ ,  $\dot{x} = se^{st}$ ,  $\ddot{x} = s^2 e^{st}$  في معادلة الحركة ثم بالقسمة على  $e^{st}$  نحصل على المعادلة

التفاضلية المتجانسة والتي من الدرجة الثانية وهي  $s^2 + 4s + k = 0$  وباستخدام معادلة الجذور (3-3)

$$\text{حيث } a=1, \quad b=4, \quad c=k$$

ويمكن إيجاد قيمة الجذور كما يلي

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)k}}{2(1)} = -2 \pm \sqrt{2^2 - k} \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1$$

$$(1) \text{ at } k=3$$

$$\therefore s_1 = -1, s_2 = -3$$

أي أن الجذور حقيقية مختلفة وسالبة ويكون حل المعادلة على الصورة التالية

$$\therefore x(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t} \quad \text{و } at \quad t=0 \quad x(0)=0 \quad \therefore 0 = A+B \quad \text{i.e } A=-B$$

وبتفاضل هذه المعادلة بالنسبة للزمن (t) ينتج أن

$$x(t) = -Ae^{-t} - 3Be^{-3t}$$

$$\text{i.e at } t=0, \quad \dot{x}(0)=1 \text{ m/s} \quad \text{i.e } 1 = -A - 3B = B - 3B = -2B \quad \therefore B = -0.5 \quad \text{i.e } A=0.5$$

ويكون الحل في الصورة التالية:

$$x(t) = 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t}$$

$$(2) \text{ at } k=4 \quad \therefore s_{1,2} = -2$$

أي أن الجذوران متساويان وسالبان

$$\therefore x(t) = (A + Bt)e^{-2t} \quad \text{i.e at } t=0, \quad x(0)=0 \quad \therefore A=0 \quad \therefore x(t) = Bte^{-2t}$$

وبتفاضل دالة الازاحة  $x(t)$  بالنسبة للزمن (t) تنتج دالة السرعة التالية:

$$x(t) = Bt(-2e^{-2t}) + Be^{-2t}$$

$$\text{at } t = 0 \quad \dot{x}(t) = 1 \text{ m/s} \quad \text{i.e.} \quad B = 1$$

ويكون الحل على الصورة التالية:  $x(t) = t.e^{-2t}$

$$(3) \text{ at } k = 5 \quad \therefore s_{1,2} = a \pm bj \quad \therefore s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm j \quad \text{i.e. } a = -2 \text{ و } b = 1$$

ويكون الحل على الصورة التالية:

$$x(t) = [A.\sin(t) + B.\cos(t)]e^{-2t}$$

$$\text{at } t = 0, x(0) = 0 \quad \text{i.e. } 0 = \{A.\sin(0) + B.\cos(0)\}e^0 \quad \text{i.e. } B = 0$$

$$x(t) = A.\sin(t)e^{-2t}$$

وتكون معادلة الازاحة على الصورة الآتية:

وبتفاضل الازاحة بالنسبة للزمن ( t ) تنتج معادلة السرعة الآتية:

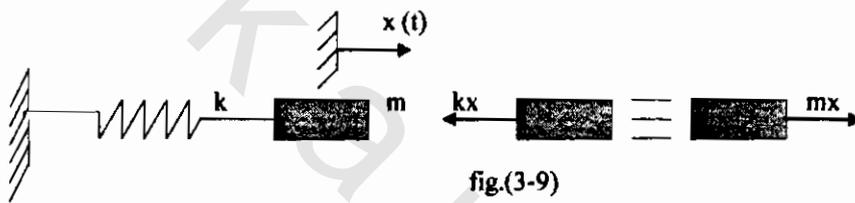
$$\dot{x}(t) = (Ae^{-2t})\cos(t) - 2Ae^{-2t}.\sin(t) \quad \text{at } t = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \text{ m/s}$$

$$\text{i.e. } 1 = A(1)\cos(0) - 2B(1)\sin(0) = A \quad \text{i.e. } A = 1$$

$$x(t) = e^{-2t}.\sin(t)$$

ويكون الحل على الصورة التالية:

2- اوجد معادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (3-9) بطريقة نيوتن وطريقة الطاقة وطريقة لاجرانج .



( أ ) بطريقة نيوتن :

$$\therefore \sum F = m\ddot{x} \quad F_s = -kx$$

$$\therefore -kx = m\ddot{x} \quad \therefore m\ddot{x} + kx = 0$$

وبذلك تكون معادلة الحركة على الصورة

$$T.E = K.E + P.E = \text{const}$$

( ب ) بطريقة الطاقة:

$$K.E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2, \quad P.E = \frac{1}{2}kx^2$$

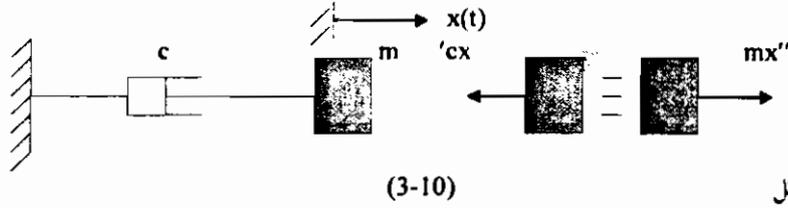
$$\therefore \frac{d(T.E)}{dt} = \frac{d(K.E + P.E)}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) = 0, \quad \therefore \dot{x} \neq 0 \quad \therefore m\ddot{x} + kx = 0$$

( ج ) بطريقة لاجرانج:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K.E)}{\partial \dot{x}} \right] + \frac{\partial (P.E)}{\partial x} = 0, \quad \therefore K.E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2, \quad \therefore P.E = \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore m\ddot{x} + kx = 0$$

3- اكتب معادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (3-10).



أ- طريقة نيوتن:

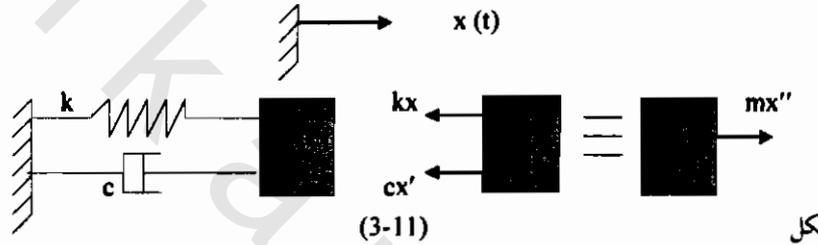
$$\therefore \sum F = m\ddot{x}, \therefore \sum F = F_d = -c\dot{x} \therefore m\ddot{x} = -c\dot{x} \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} = 0$$

ب- طريقة لاغرانج:

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2, D.E. = \frac{1}{2}c(\dot{x})^2, \therefore \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(K.E.) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(D.E.) \right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m(2\ddot{x}) + \frac{1}{2}c(2\dot{x}) = 0 \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} = 0$$

4- أوجد معادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (3-11).



أ- طريقة نيوتن:

$$\therefore \sum F = m\ddot{x}, \therefore \sum F = kx + c\dot{x} \therefore m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

ب- طريقة لاغرانج:

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2, P.E. = \frac{1}{2}kx^2, D.E. = \frac{1}{2}c(\dot{x})^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K.E.)}{\partial (\dot{x})} \right] + \frac{\partial (D.E.)}{\partial (\dot{x})} + \frac{\partial (P.E.)}{\partial (x)} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m(2\ddot{x}) + \frac{1}{2}c(2\dot{x}) + \frac{1}{2}k(2x) = 0 \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

5-A vibrating system as shown in fig. (3-12) is consists of a weight 16 kg compound upon the three dampers of damping coefficient  $C_1=0.095$  kgf.cm/sec,  $C_2=0.08$  kgf.cm/sec, and  $C_3=0.0106$  kgf.cm/ sec and also three springs has stiffness coefficient  $k_1=9$ kgf/cm,  $k_2=6$  kgf/cm,  $k_3=4.4$ kgf/cm.

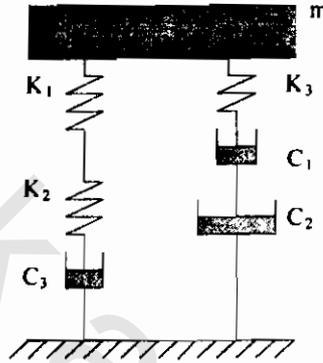
Determine:- (a) the equation of motion and the equivalent of the spring stiffness coefficient the values of damping factor  $\zeta$ , and the logarithmic decrement and the ratio of any two consecutive amplitudes.

5- المنظومة المبينة بالشكل (3-12) تتكون من كتلة وزنها 16 kgf مركبة على ثلاث خوامد معامل كل

منهم  $K_1=9$  و ثلاث نوابض حيث  $c_1=0.095$ kgf.cm/sec,  $c_2=0.08$ kgf.cm/sec,  $c_3=0.0106$ kgf/sec.

أوجد : أ- معادلة الحركة ومعامل النابض المكافئ  $k_1=9$  ,  $K_2=6$  kgf/cm, and  $K_3= 4.4$ kgf/cm

ب- أوجد قيمة كل من معامل الخمد  $\zeta$  والتناقص اللوغارتمى  $\delta$  والنسبة بين أي سعتين متتاليتين.



fig(3-12)

$$\therefore k_{eq.} = k_3 + \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = 4.4 + \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{6}} = 4.4 + 3.6 = 8 \text{ kgf/cm}$$

$$c_{eq.} = c_3 + \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} = 0.0106 + \frac{1}{\frac{1}{0.095} + \frac{1}{0.08}} = 0.0106 + 0.0434 = 0.0540 \text{ kgf.cm/sec}$$

$$\therefore m\ddot{x} + c_{eq.}\dot{x} + k_{eq.}x = 0, \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq.}}{m}} = \sqrt{\frac{8(981)}{16}} = 22.15 \text{ rad/sec}$$

$$\therefore \zeta = \frac{c_{eq.}}{2m\omega_n} = \frac{0.054}{2\left(\frac{16}{981}\right)(22.15)} = 0.075$$

$$\therefore \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi(0.075)}{\sqrt{1-(0.075)^2}} = 0.472 \quad \therefore \frac{x_1}{x_2} = e^\delta = e^{0.472} = 1.6$$

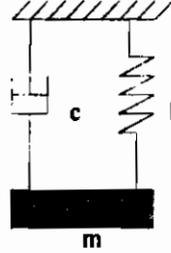
6-In the system as shown in fig. (3-13) , If the mass is displacement to 10 cm down the equilibrium position and released to vibrate, assume the natural frequency  $\omega_n=1$  rad/sec

a-Determine the equation of motion when the damping factor  $\zeta=2, 1, 0.2$

b-Compare between the three cases by sketch.

6- المنظومة المبينة بالشكل (3-13) ، إذا إزاحت الكتلة 10 سم أسفل موضع الاتزان ثم تركت تهتز ،  
افرض ان التردد الدورى الطبيعى يساوى زاوية واحدة نصف قطرية لكل ثانية:-

( ا ) أوجد معادلة الحركة عندما يكون عامل الخمد 0.2 ، 1 ، 2 ،  $\zeta$  .  
(ب) قارن بين الثلاث حالات بالرسم.



شكل (3-13)

أولاً: عندما  $\zeta=2$  أى فى حالة الخمد الاكبر من العرج أى ان  $(\zeta > 1)$  ، ونظرا لانه يعبر عن الازاحة x  
بالمعلاقة التالية:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ Ae^{(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + Be^{(-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \right] \quad \because \omega_n = 1 \text{ rad/sec}, \zeta = 2$$

$$\therefore x = e^{-2t} \left[ Ae^{(\sqrt{3})t} + Be^{(-\sqrt{3})t} \right] \dots (1) \quad \therefore \dot{x} = A[-2 + \sqrt{3}]e^{(-2+\sqrt{3})t} + B[-2 - \sqrt{3}]e^{(-2-\sqrt{3})t} \dots (2)$$

$$\therefore \text{from the first condition and equation(1) at } t=0, x=10 \quad \therefore A+B=10 \dots (3)$$

from the second condition and equation(2) i.e at  $t=0, \dot{x}=v=0$

$$\therefore 0 = A(-2 + \sqrt{3})e^{(0)} + B(-2 - \sqrt{3})e^{(0)} \quad \therefore e^{(0)} = 1 \quad \therefore \text{from equ.(3)}$$

$$\therefore A = 10.8 \text{ cm}, B = -0.8 \text{ cm from equ.(1)} \quad \therefore x = e^{-2t} \left[ 10.8e^{(\sqrt{3})t} - 0.8e^{(-\sqrt{3})t} \right] \dots (4)$$

اوالمعادلة (4) تمثل معادلة الازاحة فى هذه الحالة.

ثانياً: عندما  $\zeta=0.2$  أى فى حالة الكبت الأقل من العرج

كما يمكن إيجاد قيمة كل من  $A, \phi$  من الشرطين الابتدائين كما يلى:

$$x = Ae^{\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) = Ae^{-0.2t} \cdot \sin(\sqrt{0.96}t + \phi) \dots (5)$$

فى حالة الشرط الاول اى عندما  $t=0, x=10 \text{ cm}$  وبالتعويض فى المعادلة (5) نحصل على:

$$10 = A \sin \phi \dots (6)$$

وفى حالة الشرط الثانى اى عندما  $t=0, v=x'=0$  ، وبالتفاضل المعادلة (5) بالنسبة للزمن والتعويض

بالشرط الثانى نحصل على:

$$\dot{x} = Ae^{-0.2t} \left[ \sqrt{0.96} \cos(\sqrt{0.96}t + \phi) - 0.2 \sin(\sqrt{0.96}t + \phi) \right]$$

$$\therefore 0 = A \left( \sqrt{0.96} \cos \phi - 0.2 \sin \phi \right) \quad \therefore \tan \phi = \frac{\sqrt{0.96}}{0.2} = 78^\circ 28'$$

إن الزاوية  $\phi$  تساوى 1.37 زاوية نصف قطرية.

إن يمكن بالتعويض في المعادلة (6) إيجاد قيمة (A) كما يلي:  $A = \frac{10}{\sin(78^\circ 28')} = 10.2 \text{ cm}$

وعلى ذلك نصير معادلة الحركة كما بالمعادلة التالية:

$$\therefore x = 10.2e^{-0.2t} \cdot \sin(\sqrt{0.96}t + 1.37) \dots \dots \dots (7)$$

ثالثاً: عندما  $\zeta = 1$  أى فى حالة الخمد الحرج.

تكون معادلة الحركة فى حالة الخمد الحرج على الصورة التالية:

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} = (A + Bt)e^{-t} \dots \dots \dots (8)$$

from the frist condition at  $t = 0$ ,  $x = 10$ ,  $\omega_n = 1$

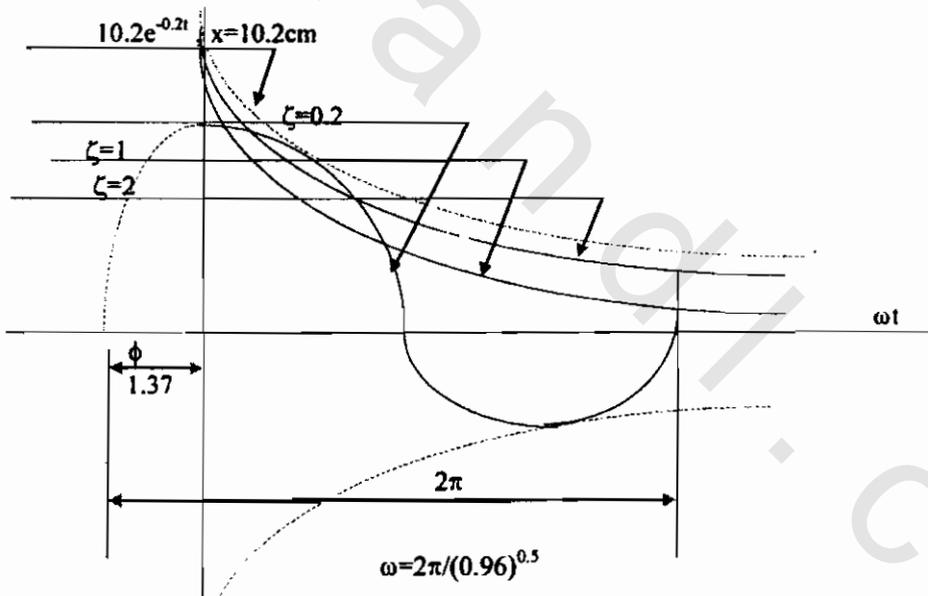
$$\therefore 10 = (A + B(0))e^0 \quad \therefore A = 10 \text{ cm.}$$

$\therefore$  from the second condition  $\therefore$  at  $t = 0$ ,  $\dot{x} = 0$

$\therefore$  from equation(8)

$$\therefore \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -Ae^{-t} + B(-te^{-t} + e^{-t}) \quad \therefore 0 = -Ae^0 + B(0 + e^0) \quad \therefore e^0 = 1$$

$$\therefore -A + B = 0 \quad \therefore A = B = 10 \text{ cm.} \quad \therefore x = 10(1 + t)e^{-t} \dots \dots \dots (9)$$

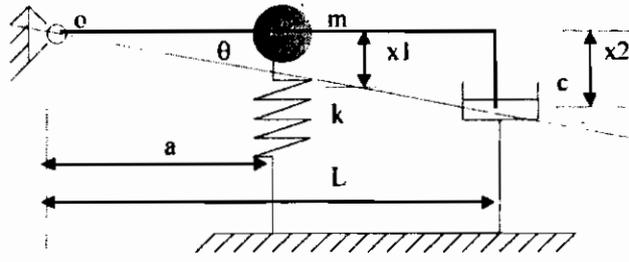


الشكل (3-14) يوضح منطط بيان عندما  $\zeta = 0.2, 1, 2$

7-Determine the differential equation of motion , the natural frequency of damped oscillation and the critical damping co-efficient for the system in fig.(3-15),when it is giving a small angular displacement  $\theta$ .

7-أوجد معادلة الحركة التفاضلية ، والتردد الطبيعي ذات الخمد ، ومعامل الخمد الحرج للمنظومة المبينة

بالشكل (3-15) ، عندما تعطى المنظومة إزاحة زاوية صغيرة ( $\theta$ ) .



الشكل (3-15)

$$x_1 = a \cdot \sin \theta \cong a\theta \quad \therefore \dot{x}_1 = a\dot{\theta} \quad \ddot{x}_1 = a\ddot{\theta} \quad \text{where } \theta \text{ is very small angle}$$

$$x_2 = l \cdot \sin \theta \cong l\theta \quad \therefore \dot{x}_2 = l\dot{\theta} \quad \ddot{x}_2 = l\ddot{\theta}$$

$$\therefore \sum M_0 = 0 \quad \therefore m \cdot \ddot{x}_1 \cdot a + k \cdot x_1 \cdot a + c \dot{x}_2 \cdot l = 0$$

$$\therefore ma^2 \cdot \ddot{\theta} + cl^2 \cdot \dot{\theta} + ka^2 \cdot \theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{cl^2}{ma^2} \cdot \dot{\theta} + \frac{ka^2}{ma^2} \cdot \theta = 0 \dots \dots \dots (1)$$

وبمقارنة المعادلة (1) بالمعادلة العامة (2) للاهتزاز في هذه المنظومة وهي:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m} \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore \frac{c}{m} = 2\zeta \omega_n \therefore \frac{cl^2}{ma^2} = 2\zeta \omega_n \quad c = \frac{2\zeta \omega_n ma^2}{l^2} \therefore \zeta \omega_n = \frac{cl^2}{2ma^2}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{ka^2}{ma^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore c = \frac{2\zeta a^2 \sqrt{km}}{l^2}$$

$$\therefore \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \omega_d^2 = \omega_n^2 - \zeta^2 \cdot \omega_n^2 = \frac{k}{m} - \left( \frac{cl^2}{2ma^2} \right)^2$$

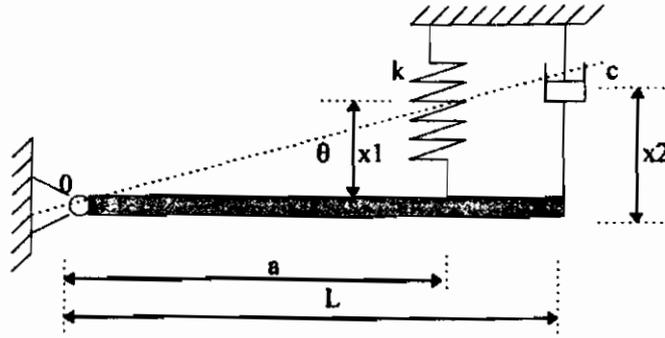
$$\therefore \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left( \frac{cl^2}{2ma^2} \right)^2} \quad \therefore f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \left( \frac{cl^2}{2ma^2} \right)^2} \dots \dots \dots \text{HZ}$$

$$\therefore \text{at critical damping } \zeta = 1 \quad \therefore c_c = 2m \omega_n = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}$$

8-For the system as shown in fig.(3-16), Determine the differential equation of motion ,the undamped natural frequency and critical viscous damping co-efficient . And if the system is less than critical damped , determine the frequency of the damping oscillation , assume the moment of inertia of the bar  $\left( I = \frac{ml^2}{3} \right)$  around (o) .

8-من المنظومة المبينى بالشكل (3-16) ، أوجد المعادلة التفاضلية للحركة والتردد الطبيعي عديم الخمد

ومعامل الخمد الحرج اللزج- وإذا كانت المنظومة في حالة الخمد الاقل من الحرج ، أوجد التردد الطبيعي للاهتزازات ذات الخمد.



الشكل (١٦-١)

بما ان عزم اللي الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاه عزم اللي الاسترجاعى أى إن

$$I\ddot{\theta} = -\sum M_0 \quad \therefore x_1 = a\theta \quad \dot{x}_1 = a\dot{\theta} \quad \ddot{x}_1 = a\ddot{\theta} \quad x_2 = l\theta \quad \dot{x}_2 = l\dot{\theta} \quad \ddot{x}_2 = l\ddot{\theta}$$

$$\therefore \sum M_0 = kx_1 \cdot a + c\dot{x}_2 \cdot l = ka^2 \cdot (\theta) + cl^2 \cdot (\dot{\theta})$$

$$\therefore I\ddot{\theta} = -\left[ cl^2 \cdot (\dot{\theta}) + ka^2 \cdot (\theta) \right] \quad \therefore \frac{ml^2}{3} \cdot \ddot{\theta} + cl^2 \cdot \dot{\theta} + ka^2 \cdot \theta = 0 \dots\dots (1)$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{3c}{m} \cdot \dot{\theta} + \frac{3ka^2}{ml^2} \cdot \theta = 0 \dots\dots\dots (2)$$

وتمثل المعادلة (1) معادلة الحركة التفاضلية ومنها يمكن إيجاد مايلى:

$$\omega_n^2 = \frac{3ka^2}{ml^2} \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{3ka^2}{ml^2}} = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{3k}{m}} \dots\dots\dots c.p.s$$

ولإيجاد معامل الخمد الحرج  $c_c$  نعوض عن الازاحة الزاوية  $\theta$  بالعلاقة التالية  $\theta = e^{st}$  وبالتالي نفاضل الازاحة الزاوية بالنسبة للزمن لنعين كل من السرعة والعجلة الزاوية كما يلى:

$$\dot{\theta} = se^{st} \quad \ddot{\theta} = s^2 \cdot e^{st} \quad \therefore \frac{ml^2}{3} s^2 \cdot e^{st} + cl^2 \cdot se^{st} + ka^2 \cdot e^{st} = 0$$

$$\therefore \frac{ml^2}{3} s^2 + cl^2 \cdot s + ka^2 = 0 \quad \therefore s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{where } a = \frac{ml^2}{3} \quad , b = cl^2 \quad , c = ka^2$$

$$\therefore s_{1,2} = \frac{-cl^2 \pm \sqrt{(cl^2)^2 - \frac{4ml^2 \cdot ka^2}{3}}}{2 \left( \frac{ml^2}{3} \right)} = \frac{-3c}{2m} \pm \sqrt{\frac{9c^2}{4m^2} - \frac{3ka^2}{ml^2}}$$

وفي حالة الخمد الحرج أى عندما  $\zeta=1$  يتلاشى المقدار اسفل الجذرو عامل الخمد الحقيقي  $c$  يؤل الى معامل الخمد الحرج  $c_c$  ويحدث ذلك عندما  $\frac{9c_c^2}{4m^2} = \frac{3ka^2}{ml^2}$  ومن ذلك يمكن إيجاد معامل الخمد الحرج كمايلى:

$$\therefore c_c = \frac{2a}{l} \sqrt{\frac{km}{3}}$$

ولتعيين التردد الطبيعي ذات الخمد  $\omega_d$  نتبع الاتى:

$$\therefore \zeta = \frac{c}{c_c} \quad \therefore \zeta = \frac{\sqrt{3}cl}{2a\sqrt{km}}$$

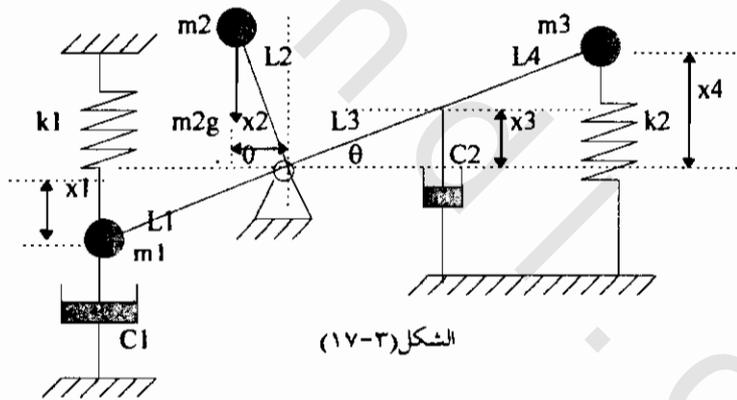
$$\therefore \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{3k}{m}} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{3} \cdot cl}{2a\sqrt{km}} \right)^2} \right] = \sqrt{\frac{3ka^2}{ml^2} - \frac{9c^2}{4m^2}}$$

$$\therefore \omega_d = \frac{1}{2ml} \sqrt{12kma^2 - 9c^2 l^2} \dots \dots \dots c.p.s$$

9-A component of a machine is represented schematically in fig.(3-17). , Determine:-

a-The differential equation of motion , b-The equivalent mass and the equivalent spring stiffness, c-The natural frequency and damping factor.

9-تركيبية لألة تمثل بالشكل (3-17) ، أوجد:- أ-المعادلة التفاضلية للحركة ، ب-الكتلة المكافئة ومعامل النابض المكافئ ج-التردد الطبيعي وعامل الخمد.



الشكل (3-17)

$$\therefore x_1 = l_1 \cdot \theta \quad , \quad x_2 = l_2 \cdot \theta \quad , \quad x_3 = l_3 \cdot \theta \quad , \quad x_4 = (l_3 + l_4) \theta$$

$$\therefore \dot{x}_1 = l_1 \cdot \dot{\theta} \quad , \quad \dot{x}_3 = l_3 \cdot \dot{\theta} \quad \therefore J_0 \cdot \ddot{\theta} = \sum (Torque)_0 = \sum M_0$$

$$\therefore [m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3 + l_4)^2] \ddot{\theta} = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + m_2 g x_2 - c_2 \dot{x}_3 l_3 - k_2 x_4 (l_3 + l_4)$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{(c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2)}{[m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3 + l_4)^2]} \cdot \dot{\theta} + \frac{[k_1 l_1^2 + k_2 (l_3 + l_4)^2 - m_2 g l_2]}{[m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3 + l_4)^2]} \cdot \theta = 0 \dots \dots \dots (1)$$

والمعادلة (1) هي المعادلة التفاضلية لحركة المنظومة ، ويمكن إيجاد التردد الطبيعي والكتلة المكافئة ومعامل النابض المكافئ وعامل الخمد كما يلي:

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_1 l_1^2 + k_2 (l_3 + l_4)^2 - m_2 g l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3 + l_4)^2}} = \sqrt{\frac{k_{eq.}}{m_{eq.}}} \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore k_{eq.} = k_1 l_1^2 + k_2 (l_3 + l_4)^2 - m_2 g l_2 \quad , m_{eq.} = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3 + l_4)^2$$

ولايجاد عامل الخمد  $\zeta$  نقارن المعادلة (1) بالمعادلة العامة للحركة الزاوية التالية:

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{c}{m} \dot{\theta} + \frac{k}{m} \theta = 0$$

$$\therefore \frac{c}{m} = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3 + l_4)^2} = 2\zeta \omega_n \quad , \text{ where } \quad \frac{c}{m} = 2\zeta \omega_n$$

$$\therefore \zeta = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2}{2m_{eq.} \omega_n} = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2}{2m_{eq.} \sqrt{\frac{k_{eq.}}{m_{eq.}}}} = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2}{2\sqrt{m_{eq.} k_{eq.}}}$$

10-A vibrating system consists of a weight of 12 kgf , a spring of stiffness 8kgf/cm and damper of damping co-efficient 0.024 kgf.cm/sec , Find the damping factor , the logarithmic decrement and the ratio of any two consecutive amplitudes.

10-منظومة إهتزازية تتكون من كتلة وزنها 12kgf ونابض معاملته 8kgf/cm وخامد معامل الخمد له 0.024kgf.cm/sec ، أوجد عامل الخمد والتناقص اللوغارتمي والنسبة بين أي سعتين متتاليتين.

الحل:

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8(981)}{12}} = 25.57 \quad \text{rad./sec} \quad , f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 4.07 \text{ HZ}$$

$$\therefore \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{0.024}{2\left(\frac{12}{981}\right)(25.57)} = 0.038 \therefore \zeta \ll 1 \quad , \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\zeta$$

$$\therefore \delta = 2\pi(0.038) = 0.23 \quad \therefore \delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = 0.23 \quad \therefore \frac{x_1}{x_2} = e^\delta = e^{0.23} = 1.26$$

11-A vibrating system consists of a weight of 160kgf, a spring of stiffness 50 kgf/cm , and damper with a damping co-efficient of 0.4 kgf.cm/sec. Determine the damping factor and the natural frequency of damped vibration.

11-منظومة إهتزازية تتكون من كتلة وزنها 160kgf ونابض معاملته 50 kgf/cm ، وخامد معامل الخمد له 0.4 kgf.cm/sec ، أوجد عامل الخمد  $\zeta$  والتردد الطبيعي المتضائل  $\omega_d$ .

الحل:

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50(981)}{160}} = 17.51 \text{ rad./sec} \quad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 2.79 \text{ c.p.s.}$$

$$\therefore c_c = 2m\omega_n = 2\left(\frac{160}{981}\right)(17.51) = 5.71, \text{ kgf.cm/sec} \quad \therefore \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{0.4}{5.71} = 0.07$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 17.51 \sqrt{1 - (0.07)^2} = 17.467 \text{ rad./sec}$$

12-A vibrating system with viscous damping consists of a weight of 8.5 kgf, a spring of stiffness 6 kgf/cm. and the amplitude decreases to 0.25 of the initial value after five consecutive cycles. Determine the damping coefficient of the damper in the system.

12- منظومة إهتزازية ذات خمد لزج تتكون من كتلة وزنها 8.5 kgf و نابض معاملته 6 kgf/cm، وان السعة

تقل الى 0.25 من السعة البدائية وذلك بعد خمس دورات متتالية. أوجد عامل الخمد للخامد في هذه المنظومة.

الحل:

$\therefore$  the amplitude ratio of any two consecutive amplitude =  $e^\delta$

$$\therefore e^\delta = \frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_4}{x_5} \quad \therefore \frac{x_0}{x_5} = \frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \frac{x_4}{x_5} = e^{5\delta} = \frac{1}{0.25}$$

$$\therefore \delta = \frac{1}{5} \ln \frac{1}{0.25} = 0.278 \quad \therefore \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\zeta = 0.278 \quad \therefore \zeta = 0.0441$$

13- Prove that is the solution to the critical damping of vibration .  $b.t.e^{-\omega_n t}$

13- إثبت إن  $b.t.e^{-\omega_n t}$  هو الحل للاهتزاز ذات الخمد المرجح.

الحل:

نفرض ان الازاحة x يعبر عنها بالعلاقة التالية :

$$i.e \quad x = b t e^{-\omega_n t} \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore \dot{x} = b [t(-\omega_n e^{-\omega_n t}) + e^{-\omega_n t}] = b [-\omega_n t e^{-\omega_n t} + e^{-\omega_n t}]$$

$$\therefore \dot{x} = b e^{-\omega_n t} (1 - \omega_n t) \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore \ddot{x} = b [\omega_n^2 t e^{-\omega_n t} - \omega_n e^{-\omega_n t} - \omega_n e^{-\omega_n t}] = b e^{-\omega_n t} [\omega_n^2 t - 2\omega_n] \dots\dots\dots(3)$$

$$m \ddot{x} + c_c \dot{x} + kx = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$m b e^{-\omega_n t} (\omega_n^2 t - 2\omega_n) + c_c b e^{-\omega_n t} (1 - \omega_n t) + k b t e^{-\omega_n t} = 0$$

$$\therefore m (\omega_n^2 t - 2\omega_n) + c_c (1 - \omega_n t) + k t = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad c_c = 2m\omega_n = 2\sqrt{k.m} \dots\dots\dots(6)$$

$$\therefore m \left[ \frac{k}{m} t - 2\sqrt{\frac{k}{m}} \right] + 2\sqrt{k.m} \left( 1 - \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + k t = k t - 2\sqrt{k.m} + 2\sqrt{k.m} - 2k t + k t = 0$$

أى ان بالتعويض من العلاقات بالمعادلة (6) فى المعادلة (5) نجد انها تحقق المعادلة وبالتالي يثبت المطلوب.

14-A machine of 30 kgf is mounted on springs and dampers as shown in fig.(3-18). , The total stiffness of the springs is 15 kgf/cm and the total damping is 0.2 kgf.cm/sec. Find:-

(a)The natural frequency, the damping factor and the damped natural frequency. (b) If the system is initially at rest and a velocity of 10 m/sec is imparted to the mass , Find the displacement and velocity of the mass as a time function. , (d) The displacement and velocity at the time (t=1 sec).

14-ماكينة وزنها 30 kgf مركبة على نوابض وخامد كما مبين بالشكل (3-18) فإذا كان معامل (الكزازة) النوابض الكلي 15 kgf/cm ومعامل الخمد الكلي 0.2 kgf.cm/sec أوجد:- (أ) التردد الطبيعي وعامل الخمد والتردد الطبيعي ذات الخمد.

(ب) إذا كانت المنظومة مستقرة في البداية ثم إعطى للكتلة سرعة 10 m/sec ، أوجد كل من الازاحة والسرعة للمنظومة كدالة في الزمن ، (ج) أوجد الازاحة والسرعة عندما يكون الزمن واحد ثانية.

الحل:

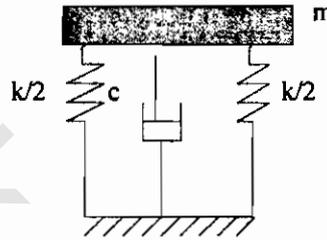


fig.(3-18)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15(981)}{30}} = 22.15 \text{ rad/sec} \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{0.2}{2\left(\frac{30}{981}\right)(22.15)} = 0.148$$

$$\therefore \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 22.15 \sqrt{1 - (0.148)^2} = 21.91 \text{ rad./sec}$$

$$\therefore \zeta \cdot \omega_n = (0.148)(22.15) = 3.28 \text{ rad./sec}$$

$$\therefore x(t) = e^{-\zeta \cdot \omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore x(t) = e^{-3.28t} [A_1 \cos(21.91t) + A_2 \sin(21.91t)] \quad \therefore \text{at } t = 0, x(0) = 0$$

$$\therefore 0 = A_1(1) + A_2(0) \quad \therefore A_1 = 0$$

وبتفاضل المعادلة (1) بالنسبة للزمن (t) كمايلي:

$$\therefore \text{at } A_1 = 0 \quad \therefore x(t) = e^{-\zeta \cdot \omega_n t} \cdot A_2 \sin(\omega_d t)$$

$$\therefore \dot{x}(t) = A_2 [e^{-\zeta \cdot \omega_n t} \cdot \omega_d \cdot \cos(\omega_d t) + \sin(\omega_d t) (-\zeta \cdot \omega_n) e^{-\zeta \cdot \omega_n t}] \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore \dot{x} = e^{-3.28t} \cdot A_2 [21.91 \cos(21.91t) - 3.28 \sin(21.91t)]$$

from boundary condition  $\therefore \dot{x} = 10 \text{ m/sec}$  at  $t = 0$

$$\therefore 10 = e^0 \cdot A_2 [21.91 \cos(0) - 3.28 \sin(0)] \quad \therefore 10 = A_2 [21.91 - 0]$$

$$\therefore A_2 = \frac{10}{21.91} = 0.456$$

اذن بالتعويض في معادلة الإزاحة (1) ومعادلة السرعة عن قيمة  $A_1, A_2$  ينتج أن:

$$\therefore x = e^{-3.28t} \cdot (0.456) [21.91 \cos(21.91t) - 3.28 \sin(21.91t)]$$

$$\therefore \text{at } t = 1 \text{ sec} \quad \therefore x = 0.64 \text{ cm.}$$

$$\therefore \dot{x} = e^{-3.28t} \cdot (0.456) [(21.91) \cos(21.91t) - 3.28 \sin(21.91t)]$$

$$\therefore \text{at } t = 1 \text{ sec} \quad \therefore \dot{x} = 0.314 \text{ m / sec.}$$

15-Determine the logarithmic decrement of damped vibrating simple pendulum of length 45 cm., if it loses 95 % of its initial energy after 6 minutes form starting vibration.

15-أوجد التناقص اللوغارتمى للاهتزاز المخمّد لبندول بسيط طولهُ 45 سم إذا فقد البندول 95 % من الطاقة البدائية له بعد 6 دقائق من بداية الاهتزاز.

الحل: بفرض أن طاقة البندول بعد 6 دقائق هي  $E_t$

$$\therefore \frac{E_t}{E_{100}} = \frac{5}{100} \quad \therefore \text{the vibration energy} \propto (\text{displacement})^2$$

$$\therefore \frac{A_t}{A_0} = \sqrt{\frac{5}{100}} = 0.224$$

وبفرض أن  $A_0$  هي السعة عندما الزمن  $t=0$  وأن  $A_t$  هي السعة عند الزمن  $t$

$$\therefore A_t = A_0 e^{-\frac{\delta t}{t_p}} \quad \therefore \frac{A_t}{A_0} = e^{-\frac{\delta t}{t_p}} = 0.224$$

$$\therefore \text{the equation of motion of simple pendulum} \quad \ddot{x} + \left(\frac{g}{l}\right)x = 0$$

$$\therefore \text{the time of period} = t_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ sec.}$$

$$\therefore \delta = \frac{t_p}{t} \ln\left(\frac{A_0}{A_t}\right) = \frac{2\pi}{t} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \ln\left(\frac{1}{0.224}\right) = \frac{2\pi}{6(60)} \sqrt{\frac{45}{981}} \cdot \ln\left(\frac{1000}{224}\right)$$

$$\therefore \delta = 0.00374(1.496) = 0.0056$$

16-A mass suspended from a helical spring vibrates in a viscous fluid medium whose resistance varies directly with the speed. it is observed that the frequency of damped vibrations 85 per minute and that the amplitude decreases to 25% of its initial value in one complete vibration. Find the frequency of the free undamped vibration of the system.

16-كتلة معلقة في نابض حلزوني تهتز في وسط مائع لزج حيث المقاومة تتغير مباشرة مع سرعته ويلاحظ أن تردد الاهتزاز ذات الخمد يكون 85 لكل دقيقة وأن سعة الاهتزاز تقل إلى 25 % عن القيمة البدائية لاهتزازة واحدة كاملة. أوجد التردد الحر لمنظومة ذات اهتزاز حر بدون خمد.

الحل: نفرض أن التردد الطبيعي للاهتزاز ذات الخمد  $f_d$  والزمن الدوري للاهتزاز ذات الخمد  $t_d$

والتردد الطبيعي للاهتزاز الحر الغير مخمد  $f_n$  ،  $x_1$  ،  $x_2$  هما السعة الابتدائية والنهائية قبل وبعد عمل اهتزازة واحدة كاملة ، ولايجاد التردد الطبيعي ذات الخمد نتبع الاتي:

$$\therefore f_d = 85 \text{ per minute} = \frac{85}{60} \text{ c.p.s} , t_d = \frac{1}{f_d} = \frac{60}{85} , f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$$

$$\therefore x_2 = \text{final amplitude after one complete vibration} = \frac{25}{100} x_1$$

$$\therefore x_2 = \frac{1}{4} x_1 \quad \text{assume } a = \frac{c}{2m} = \zeta \omega_n \quad \therefore t_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - (\zeta \omega_n)^2}}$$

$$\therefore t_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \quad \therefore \frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta \omega_n (t_d)} = e^{a t_d} \quad \therefore \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = a t_d = a \left(\frac{60}{85}\right) = a \left(\frac{12}{17}\right)$$

$$\therefore \ln(4) = \frac{12}{17} a \quad \therefore 1.39 = 0.71a \quad \therefore a = 1.96 \quad \therefore f_d = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n^2 - a^2}$$

$$\therefore \frac{85}{60} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n^2 - (1.96)^2} \quad \therefore \omega_n = 9.1 \text{ c.p.s} \quad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{9.1}{2\pi} = 1.45 \text{ c.p.s}$$

17-A coil of spring stiffness 50 N/mm. supports vertically a load of 230 N at the free end.. The motion is resisted by the coil dashpot. It is found that the amplitude at the beginning of the fourth cycle is  $\frac{4}{5}$  of the amplitude of the previous vibration. Determine the damping force per unit velocity. Also find the ratio of the frequencies of damped and undamped vibration.

17- نابض حلزوني معاملته 50 نيوتن لكل مم (علق راسيا من احد طرفية) ركب به رأسيا حمل 230 نيوتن بالطرف الحر لة ، الحركة تقاوم بخامد زيتي فوجد ان السعة الابتدائية للدورة الرابعة تكون  $\frac{4}{5}$  من السعة السابقة. أوجد قوة الخمد لكل وحدة سرعة وايضا أوجد نسبة الترددات ذات الخمد الى الترددات الطبيعية للاهتزاز.  
الحل:

$$\therefore k = 50 \text{ N/mm} = 50(10)^3 \text{ N/m} \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50(10)^3}{230}} = 14.74 \text{ rad./sec.}$$

وباعتبار ان c هي قوة الخمد لكل وحدة سرعة Damping force per unit velocity

let  $x_n = \text{Amplitude at the beginning of the third cycle}$

$$x_{n+1} = \text{Amplitude at the beginning of the fourth cycle} = \frac{4}{5}x_n$$

$$f_n = \text{Frequency of undamped vibration} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$f_d = \text{Frequency of damped vibration} = \frac{\omega_d}{2\pi}$$

$$\therefore \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = a t_d = \frac{2\pi a}{\omega_d} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{(14.74)^2 - a^2}}$$

$$\therefore \ln \frac{x_n}{\frac{4}{5}x_n} = \ln \frac{5}{4} = 0.223 = \frac{2\pi a}{\sqrt{(14.74)^2 - a^2}} \quad \therefore a = 0.52 \quad \therefore a = \frac{c}{2m} = 0.52$$

$$\therefore c = 2(230)(0.52) = 240.6 \text{ N.sec/m} = 0.2406 \text{ N.sec/mm.}$$

$$\therefore \text{Ratio of frequency} = r = \frac{F_d}{F_n} = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{\sqrt{(14.74)^2 - (0.52)^2}}{14.74} = 0.99$$

18-A machine weighting 90 kgf is mounted on springs and is fitted with a dashpot to damp out vibrations. There are three springs each of stiffness 15 kgf per cm. and it is found that the amplitude of vibration diminishes from 4.5 cm. to 0.8 cm. in two complete oscillations. Assuming that the damping force varies as the velocity, determine the resistance of the dashpot at unit velocity and compare the frequency of the damped vibration with the frequency when dashpot is not in operation.

18-ماكينة وزنها 90 كيلوجرام مركبة على نوابض و ماص للصدمات لخدم الاهتزاز ، يوجد ثلاث نوابض معامل كل نابض 15 كيلوجرام لكل سم ووجد بعد سعة الاهتزاز تتراوح من 4, 5 سم الى 0.8 سم في دورتين (ذبذبتين) كاملتين ، افرض ان قوة الخمد تتغير مع السرعة. اوجد مقاومة الخمد (ماص الصدمات) لكل وحدة سرعة ، وقارن تردد الخمد مع التردد عندما لايعمل ماص الصدمات.  
الحل:

بفرض ان السعة الابتدائية  $x_1$  ، وان  $x_2$  هي السعة بعد ذبذبة واحدة كاملة ، وان  $x_3$  هي السعة النهائية بعد عمل ذبذبتين

$$W = 90 \text{ kgf} \quad , k = 15 \text{ kg/cm.} \quad \therefore \text{mass of the machine} = \frac{90}{9.81} = 9.2 \text{ kg.}$$

$\therefore 3$  springs are connected in parallel

$$\therefore \text{the equivalent spring} = k_{eq} = 3(15) = 45 \text{ kg/cm} = 4500 \text{ kg./m.}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{4500}{9.2}} = 22.12 \text{ rad./sec} \quad \therefore \text{initial amplitude} = x_1 = 4.5 \text{ cm.}$$

وبفرض ان  $c$  هي مقاومة الخمد أو معامل الخمد لكل وحدة سرعة Resistance of daspot or damping coefficient per unit velocity

$$\therefore x_3 = 0.8 \text{ cm} \quad \therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} \dots\dots\dots(1)$$

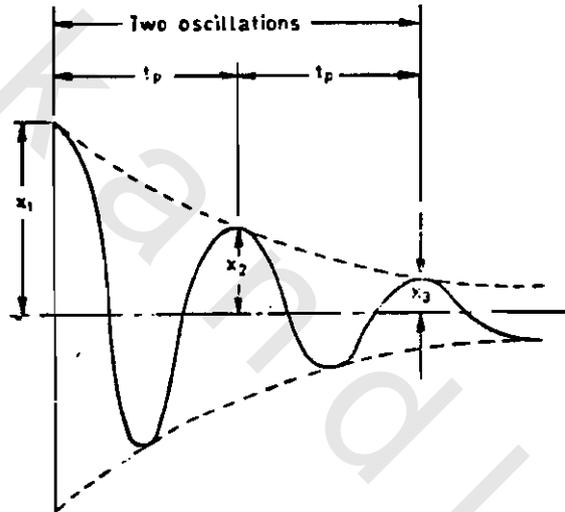
$$\therefore \left( \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1}{x_2} \right) = \left( \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_1}{x_2} \right) \therefore \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^2 = \left( \frac{x_1}{x_3} \right) \dots\dots(2)$$

$$\therefore \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \sqrt{\frac{x_1}{x_3}} = \sqrt{\frac{4.5}{0.8}} = 2.37 \quad \therefore \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi a}{\omega_d} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}}$$

$$\therefore \ln(2.37) = 0.863 = \frac{2\pi a}{\sqrt{(22.12)^2 - a^2}} \quad \therefore a = 3 = 2\omega_n$$

$$\therefore a = \frac{c}{2m} \quad \therefore a = 6(9.2) = 55.2 \text{ kg.sec/cm}$$

$$\therefore r = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}}{\omega_n} = \frac{\sqrt{(22.12)^2 - (3)^2}}{22.12} = 0.991$$



الشكل (19-3)

19-A body weighting 25 lb is suspended from a spring with a scale  $k=10 \text{ lb/in}$ . A dashpot is attached between the weight and the ground and has a resistance of 0.1lb at a velocity of 2 ips. Determine:- (a)The natural frequency of the system. , (b)The critical damping factor of the dashpot , (c)The ratio of successive amplitudes. , (d)The amplitude of the body 10 cycle after it was released from an initial displacement of  $(3/4) \text{ in}$ . , (e)The displacement of the body exactly 1.25 sec after it was released from the initial displacement of  $(3/4) \text{ in}$ .

19-جسم وزنة 25 باوند علق في نابض معاملته 10 باوند لكل بوصة ، ووصل خامد بين الجسم والارض ومقاومته (معامل الخمد لماص الصدمات) 1 . باوند عند سرعة 2 بوصة لكل ثانية. أوجد:-  
 أ-التردد الطبيعي للمنظومة. (ب)معامل الخمد الحرج لماص الصدمات. (ج)النسبة بين أي سعتين.  
 (د)سعة الجسم للدورة العاشرة بعد تركها لعمل إزاحة ابتدائية  $(4/3)$  بوصة. (و)سعة الجسم عند الزمن 1.25 ثانية بعد تركه عند الإزاحة الابتدائية  $(4/3)$  بوصة.

الحل:-

(أ) - لإيجاد معامل الخمد (c) نتبع الآتي:

$$\text{the damping factor} = c = \frac{\text{resistance of dashpot}}{\text{velocity}} = \frac{0.1}{2} = 0.05 \text{ ib-sec/in}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10(386)}{25}\right)^2 - \left(\frac{0.05(386)}{2(25)}\right)^2} = 12.42 \text{ rad/sec where } \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$\therefore f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{12.42}{2\pi} = 1.977 \text{ c.p.s} = 118.6 \text{ c.p.m.}$$

(ب) لإيجاد معامل الخمد الحرج  $c_c$  نتبع الآتي:

$$\therefore c_c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\frac{10(25)}{386}} = 1.6 \text{ ib.sec/in} \quad \therefore \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{0.05}{1.61} = 0.031$$

(ج) لإيجاد التناقص اللوغارتمى ( $\delta$ )

$$\therefore \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi(0.031)}{\sqrt{1-(0.031)^2}} = 0.195 \quad \text{or} \quad \delta = \frac{\pi \cdot c}{m \cdot \omega_{dn}} = \frac{\pi(0.05)(386)}{25(12.42)} = 0.195$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = e^{-\delta} = e^{-0.195} = 0.822$$

(د) لإيجاد الزمن الدوري  $t_p$  ونسبة إنخفاض السعة للدورة العاشرة والسعة عند نهاية الدورة العاشرة

$$\therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{12.42} = 0.506 \text{ sec}$$

$\therefore$  The time required for 10 complete cycle is  $10t_p = 10(0.506) = 5.06 \text{ sec}$ .

$\therefore$  The amplitude reduction ratio in 10 cycles  $= e^{-1.95} = 0.1417$

$\therefore$  The amplitude at the end of 10 cycles is  $x_{10} = \frac{3}{4}(0.1417) = 0.106 \text{ in}$

$$\text{or} \quad x_{10} = \frac{3}{4} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{10} = \frac{3}{4} (0.822)^{10} = 0.106 \text{ in}$$

(و) لإيجاد الإزاحة بعد 25 ثانية وبعد تركها عند إزاحة ابتدائية

$$\therefore x = x_0 \cdot e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \left[ \cos \omega_d \cdot t + \frac{c}{2m\omega_d} \cdot \sin \omega_d \cdot t \right] =$$

$$\therefore x = \frac{3}{4} e^{-\left[\frac{(0.05)(386)}{2(25)}\right](1.25)} \left[ \cos(12.42 \cdot 1.25) + \frac{0.05 \cdot 386}{2 \cdot 25 \cdot 12.42} \sin(12.42 \cdot 1.25) \right] = -0.428 \text{ in}$$

20-If the logarithmic decrement of oscillating pendulum is 0.03 , How many times the amplitude of the vibration decreased after 95 complete oscillation.

20- إذا كان التناقص اللوغارتمى لاهتزاز بندول ( $\delta=0.03$ ) ، كم من الزمن الذى يمضى حتى تقل سعة الاهتزاز بعد 95 دورة كاملة.

الحل:

عند بداية الاهتزاز يكون الزمن  $t=0$  وتكون نسبة السعة كما بالعلاقة التالية:

$$\therefore \frac{A}{A_0} = e^{-\zeta \omega_n t} = e^{-\frac{\delta}{t_d} t} \quad \therefore t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$\therefore$  after 95 complete oscillation  $t = 95t_d$  and the amplitude is given by

$$A_{95} = A_0 e^{-\frac{\delta}{t_d} t} \quad \therefore \frac{A_0}{A_{95}} = e^{-\frac{\delta}{t_d} (95t_d)} = e^{-95\delta}$$

$$\therefore \frac{A_0}{A_{95}} = \frac{1}{e^{-95\delta}} = e^{95(0.03)} = e^3 = 20.1$$

If  $y = A_0 e^{\zeta \omega_n t} \cdot \sin \omega_d t$  21-A mass undergoes damped motion given by the equation

$$A_0 = 10 \text{ cm.}, \omega = \pi \text{ 1/sec and } \zeta \omega_n = 0.8 \text{ 1/sec}$$

Find the periodic time of the vibration and the logarithmic decrement

20- كتلة تتحرك لاسفل بحركة ذات خمد يعبر عنها بالمعادلة  $y = A_0 e^{\zeta \omega_n t} \cdot \sin \omega_d t$  ، اذا كانت

$$A_0 = 10 \text{ cm.}, \omega = \pi \text{ 1/sec and } \zeta \omega_n = 0.8 \text{ 1/sec}$$

الحل:

$$\therefore t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ sec}$$

$$\therefore \delta = \ln \frac{x_{n-1}}{x_n} = \ln e^{\zeta \omega_n t} = \zeta \omega_n t = (0.8)(2) = 1.6$$

22-A light rigid rod of mass 4 kg and length  $L=1.8$  m. is pinned at one end (o) and has a disc of mass  $m=8$  kg attached at the other end and the radius of the disc is very small if it is compare with the length of the rod. Three spring and Three viscous dampers connected in the system as shown in fig.(3-19) , where are fastened to the rod at a distance  $b=1.2$  m. from the support. The system is set up in a horizontal plane with neglect the weight of the rod, a plane view is shown. where:

$$k_1 = 4 \text{ kN/m}, k_2 = 6 \text{ kN/m}, k_3 = 2.6 \text{ kN/m and } c_1 = 0.15 \text{ kN.s/m}, c_2 = 0.25 \text{ kN.s/m and } c_3 = 0.03 \text{ kN.s/m}$$

Determine (a) The equivalent spring stiffness coefficient , and the equivalent damping coefficient.

(b) The differential equation of motion and the natural frequency, and the damping factor.

Assuming that the dampers are adjusted to provide critical damping , obtain the motion of the rod as a function of time if it is rotated through a small angle ( $\theta$ ) and then released. If ( $\theta=3$  degree) and the undamped natural frequency of the system is 4 rad/sec.

(c) Calculate the displacement at 1 sec after release. (d) Explain the term logarithmic decrement as applied to such a system and calculate its value assuming that the damping is reduced to 70 % of its critical value

22- قضيب خفيف جاسئ كتلته 4 كيلو جرام وطولها 8, 1 متر ممسوك عند إحدى نهايتيه في مفصل (o)، وقرص كتلته 8 كيلو جرام متصل بالنهاية الاخرى لة ونصف قطر القرص صغير جدا إذا ما قورن بطول القضيب، ثلاث نوابض وثلاث خوامد متصلة بالمنظومة كما مبين بالشكل (3-20) ومتصلة بالقضيب على مسافة 2, 1 متر من موضع التركيب والمنظومة موضوعة في مستوى افقى مع إهمال وزن القضيب، حيث:

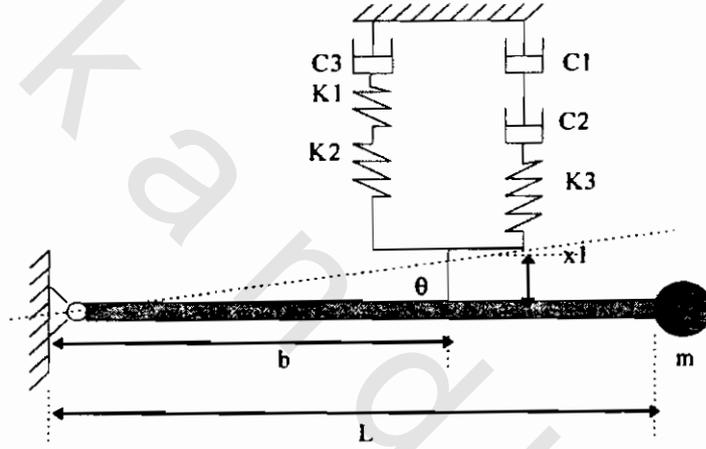
$$k_1, k_2, k_3 = 4, 6, 26 \text{ kN/m and } c_1, c_2, c_3 = 0.15, 0.25, 0.03 \text{ kN sec/m are respectively}$$

أوجد: (أ)-معامل النابض المكافئ ومعامل الخمد المكافئ. (ب)-المعادلة التفاضلية للحركة والتردد الطبيعي وعامل الخمد. افرض ان الخوامد موضوعة تماما في حالة الخمد الحرج - أوجد معادلة

الحركة كدالة في الزمن ، إذا دار القضيب زاوية صغيرة ثم ترك. وإذا كانت الازاحة الزاوية  $\theta = 3$  degree ، والتردد الطبيعي  $\omega_n = 4 \text{ rad./sec}$

(ج) أوجد الازاحة بعد ثانية واحدة من ترك القضيب.

(د) استنتج الجزء الخاص بالتناقص اللوغارتمى واحسب قيمة بفرض ان الخمد يقل 70% من الخمد الحرج.



الشكل (3-20)

الحل:

$$\therefore k_{eq} = k_3 + \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 2.6 + \frac{4 \cdot 6}{10} = 5 \text{ kN/m}$$

$$\therefore c_{eq} = c_3 + \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} = c_3 + \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = 0.03 + \frac{0.15 \cdot 0.25}{0.40} = 0.124 \text{ kN.s/m}$$

$$\therefore I \ddot{\theta} = -\sum M_o \quad \therefore \sum M_o = k_{eq} x_1 \cdot b + c_{eq} \dot{x}_1 \cdot b = k_{eq} b^2 \theta + c_{eq} b^2 \dot{\theta}$$

$$\therefore I \ddot{\theta} + c_{eq} b^2 \dot{\theta} + k_{eq} b^2 \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left( \frac{c_{eq} b^2}{I} \right) \dot{\theta} + \left( \frac{k_{eq} b^2}{I} \right) \theta = 0$$

وعزم القصور الذاتي للمنظومة (1) يساوي عزم القصور الذاتي للقضيب  $I_{bar} = \frac{m_{rod} l^2}{3}$  وعزم

$$I_{sphere} = \frac{2m_{sphere} \cdot r^2}{5} + m_{sphere} \cdot (l^2) \quad \text{القصور الذاتي للكرة}$$

أى ان عزم القصور الذاتي للكرة حول محور الدوران (o) يساوي عزم القصور الذاتي للكرة حول مركزها بالإضافة الى عزم القصور الذاتي حول المحور o والذي يساوي كتلة الكرة فى مربع بعد مركزها عن محور الدوران  $l^2$  ونظرا لان نصف قطر الكرة r يكون صغير جدا إذا ما اقورن بطول

$$\frac{2m_{sphere} \cdot r^2}{5} \quad \text{لذلك يهمل المقدار}$$

$$\therefore I = \frac{m_{rod} l^2}{3} + m_{sphere} \cdot (l^2) = \frac{4 * (1.8)^2}{3} + 8 * (1.8)^2 = 30.24 \text{ kg.m}^2$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{(124) * (1.2)^2}{30.24} \dot{\theta} + \frac{(500) * (1.2)^2}{30.24} \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + 5.9 \dot{\theta} + 238 \theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{238} = 15.4 \text{ rad./sec} , \quad \therefore \frac{c}{m} = 2\zeta \cdot \omega_n = 5.9 \quad \therefore \zeta = \frac{5.9}{2\omega_n} = \frac{5.9}{2(15.4)} = 0.192$$

ج- عندما تكون المنظومة تماما فى وضع الكبت الحرج فان  $\zeta = 1$  ويكون الحل لمعادلة الحركة على صورة المعادلة التالية

$$\theta = (A + Bt)e^{-\zeta \omega_n t}$$

$$\text{from the initial condition } \therefore \text{at } t=0 \quad \therefore \theta = \theta_0 , \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\therefore \theta = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \quad \therefore \dot{\theta} = (A + Bt)[- \omega_n e^{-\omega_n t}] + (0 + B)e^{-\omega_n t}$$

$$\therefore \text{at } t=0 \quad \dot{\theta} = 0 = (A + 0)[- \omega_n e^0] + (0 + B)e^0 = -\omega_n A + B$$

$$\therefore B = \omega_n A \quad , \quad \therefore A = \theta_0 \quad \therefore B = \omega_n \theta_0$$

$$\therefore \text{at } A = \theta_0 \quad B = \theta_0 \omega_n \quad , \text{ after 1 sec } \therefore t=1 \quad \therefore \theta = \theta_0 [1 + \omega_n] e^{-\omega_n}$$

$$\therefore \text{at } \omega_n = 4 \text{ rad/sec} , \quad \theta_0 = 3^\circ \quad \therefore \theta = 3(1 + 4)e^{-4} = 15(0.018) = 0.27^\circ$$

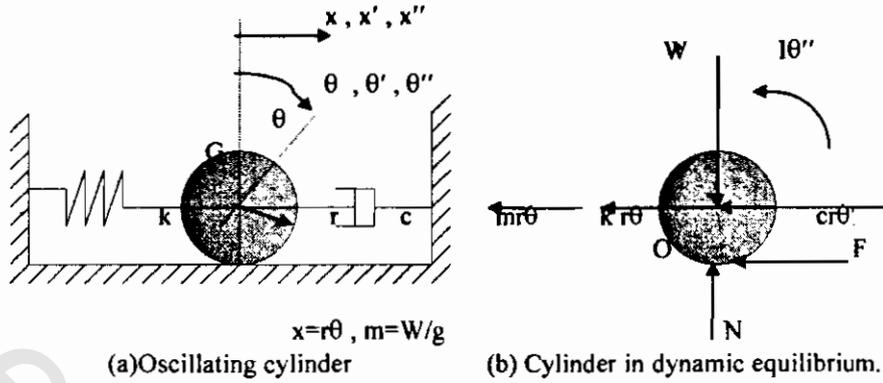
(د)- لايجاد التناقص اللوغارتمى  $\delta$  عندما يقل الخمد % 70 عن الخمد يكون معامل % 70  $\zeta = 70$

وبالتالى يعين التناقص اللوغارتمى من العلاقة التالية:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi(0.7)}{\sqrt{1 - (0.7)^2}} = 6.16$$

23-Determine the differential equation of motion of the solid cylinder shown in fig.(3-21) which is of radius r and mass m. It is attached to a spring of stiffness k and a dashpot of damping coefficient c which provides viscous damping in the system. Assume that there is sufficient friction for the wheel to roll without slipping. Find the natural frequency and damping factor.

23- أوجد المعادلة التفاضلية للحركة لاسطوانة مصمّنة كما مبين بالشكل (3-21) حيث نصف قطرها  $r$  وكتلتها  $m$  ، متصلة بنابض معاملته  $k$  وخامد معاملته  $c$  حيث المنظومة ذات خمد لزج افترض انه يوجد احتكاك كافي يجعل العجلة (الاسطوانة) تتحرك بدون إنزلاق أوجد التردد الطبيعي وعامل الخمد.



الشكل (3-21)

الحل: طبقا لنظرية المحاور المتوازية فان عزم القصور الذاتي لجسم ما حول اي محور يساوي عزم القصور الذاتي للجسم حول محور موازي يمر بمركز الكتلة ومضافا اليه حاصل ضرب الكتلة في مربع البعد بين المحورين.

$$\therefore x = r\theta, \dot{x} = r\dot{\theta}, \ddot{x} = r\ddot{\theta}, F_{spring} = kx = kr\theta, F_d = c\dot{x} = cr\dot{\theta}$$

$$\therefore I\ddot{\theta} = -\sum M_0 \therefore \sum M_0 = F_s \cdot r + F_d \cdot r = kr^2 \theta + cr^2 \cdot \dot{\theta}$$

$$\therefore I = I_G + m \cdot r^2$$

$$\therefore (I_G + m \cdot r^2) \cdot \ddot{\theta} + kr^2 \cdot \theta + cr^2 \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left( \frac{cr^2}{I_G + mr^2} \right) \cdot \dot{\theta} + \left( \frac{kr^2}{I_G + mr^2} \right) \cdot \theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{kr^2}{I_G + mr^2}} \dots \dots c.p.s \quad \therefore \frac{c}{m} = 2\zeta \cdot \omega_n = \frac{cr^2}{I_G + mr^2}$$

$$\therefore 2\zeta \omega_n = \frac{cr^2}{I_G + mr^2} \quad \therefore \zeta = \frac{cr^2}{(I_G + mr^2) \omega_n}$$

24-In the system shown in fig.(3-21) , If weight(w) of rod =16 ib , Spring constant (k)=6 ib/in , Length(L) of the rod =26 in , b= 20 in (Location of dashpot from o) , The damping coefficient (c)=0.18 ib.sec/in , Determine (a)the differential equation of motion. (b)the undamped natural circular frequency (c)the damping factor. (d)the damped natural frequency.

24- المنظومة المبينة بالشكل (3-21) ، إذا كان وزن القضيب 16 باوند ، ثابت النابض 6 باوند/ بوصة ، طول القضيب 26 بوصة ، نقطة إتصال الخامد (ماص الصدمات) تبعد 20 بوصة من المفصل o ، معامل الخمد 0.18 باوند/ثانية/بوصة ، أوجد:-

(أ) المعادلة التفاضلية للحركة. (ب) التردد الطبيعي الدائري الغير مخمد. (ج) عامل الخمد. (د) التردد الطبيعي ذات الخمد.

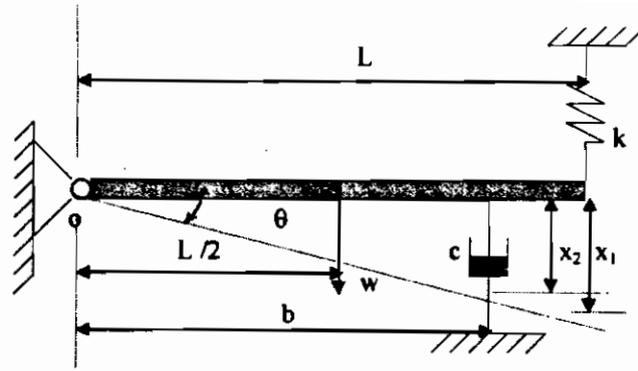


fig.(3-22)

بما ان عزم اللي الكامن يساوى فى المقدار وبضاد فى الاتجاه عزم اللي الاسترجاعى.

$$\therefore \sum M_o = -I\ddot{\theta}, \therefore \sum M_o = kx_1 L + c\dot{x}_2 \cdot b = kl^2 \theta + cb^2 \dot{\theta}$$

$$\therefore I = \frac{ml^2}{3} = \frac{wL^2}{3g} = \frac{(16) \cdot (26)^2}{3(386)} = 9.34 \text{ ib.in.sec}^2$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + kl^2 \theta + cb^2 \dot{\theta} = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{cb^2}{I} \dot{\theta} + \frac{kl^2}{I} \theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{kl^2}{I}} \text{ c.p.s} \quad \therefore \frac{c}{m} = 2\zeta \omega_n = \frac{cb^2}{I} \quad \therefore \zeta = \frac{cb^2}{2I\omega_n}$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{(0.18) \cdot (20)^2}{9.34} \dot{\theta} + \frac{(6) \cdot (26)^2}{9.34} \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + 7.71\dot{\theta} + 434.26\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n^2 = 434.26 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{434.26} = 20.84 \text{ rad./sec}$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{20.84}{2\pi} = 3.32 \text{ HZ} \quad , \zeta = \frac{(0.18) \cdot (20)^2}{2(9.34) \cdot (20.84)} = 0.185$$

$$\therefore f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi} = \frac{(20.84) \sqrt{1-(0.185)^2}}{2\pi} = 3.26 \text{ HZ}$$

25-The inverted pendulum shown in fig.(3-23) consists of a sphere of mass  $m$  and radius  $r$  attached to a slender rod of length  $L$  and mass  $M$ , The rod is pinned at  $o$  and a spring and dashpot are attached to the sphere as shown in figure. If it is giving a small angular displacement ( $\theta$ ) to the pendulum from its static -equilibrium position , Determine:-

(a)The differential equation of motion of the system. (b)The natural frequency and the damping factor.

24-البندول المقلوب المبين بالشكل (3-23) يتكون من كرة كتلتها  $m$  ونصف قطرها  $r$  متصلة بذراع طولها  $L$  وكتلتها  $M$  ، والذراع ممسوك بالمفصل  $o$  ، والنايظ والحامد متصل بالكرة كما بالشكل. فإذا إعطى للبندول إزاحة زاوية صغيرة ( $\theta$ ) من موضع الاتزان الاستاتيكي أوجد:- (أ)-المعادلة التفاضلية لحركة المنظومة. (ب)-التردد الطبيعى وعامل الخمد.

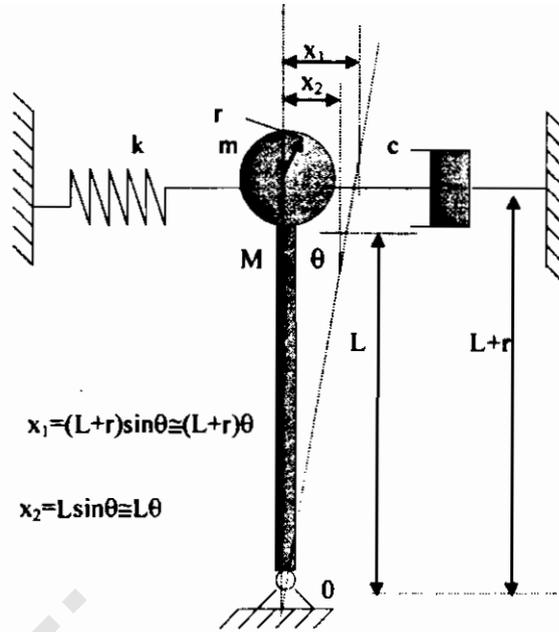


fig.(3-23)

:الحل

$$\therefore \sum M_o = -I\ddot{\theta}$$

$$\therefore \sum M_o = kx_1 \cdot (l+r) - mg(l+r)\theta - Mg\left(\frac{l}{2}\right)\theta + c\dot{x}_1(l+r)$$

$$\therefore \sum M_o = k(l+r)^2\theta - mg(l+r)\theta - Mg\left(\frac{l}{2}\right)\theta + c(l+r)^2\dot{\theta}$$

$$\therefore I = I_{rod} + I_{spher} = \frac{Ml^2}{3} + \frac{2mr^2}{5} + m(l+r)^2 \quad ; \therefore r \lll l$$

$$\therefore I_{spher} = m(l+r)^2 \text{ only}$$

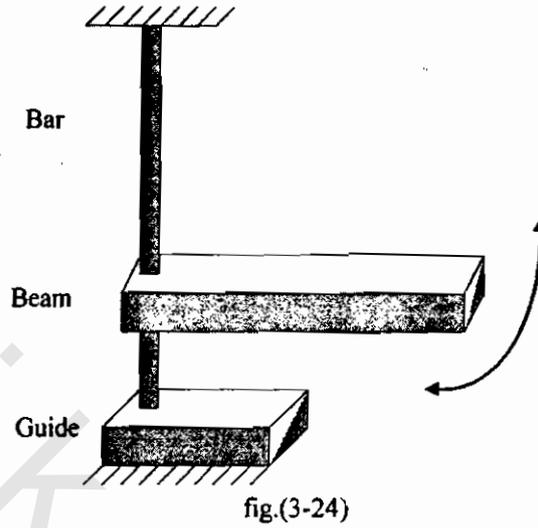
$$\therefore I\ddot{\theta} + \left[ k(l+r)^2 - mg(l+r) - Mg\left(\frac{l}{2}\right) \right] \theta + c(l+r)^2\dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k(l+r)^2 - mg(l+r) - Mg(l/2)}{I}} \text{ rad/sec}$$

$$\therefore \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n = \frac{c(l+r)^2}{I} \quad \therefore \zeta = \frac{c(l+r)^2}{2I\omega_n}$$

26-Part of a structure can be modelled as a torsional system comprising a bar of stiffness 15 kN.m/ rad and a beam of moment of inertia about the axis of rotation of 60 kg.m<sup>2</sup>, The bottom guide imposes a friction torque of 15 N.m as shown in fig.(3-24). If the beam is displaced through 0.08 rad from its equilibrium position and released, find the frequency of the oscillation, the number of cycles executed before the beam motion ceases.

26- جزء من تركيبية تكون نموذج لمنظومة ذات إهتزاز التوائي وتشمل قضيب معاملته 15 kN.m/rad. كما بالمنظومة المبينة بالشكل (3-23)، وعتبة عزم القصور الذاتي لها  $50 \text{ kg.m}^2$  حول محور الدوران بشرط ان يكون عزم الاحتكاك عند الدليل الأسفل 10 N ، فاذا حدثت إزاحة زاوية للعتب قدرها 0.05 rad. من وضع الاتزان ، أوجد التردد الطبيعي وعدد الدورات التي نفقت قبل توقف حركة العتب.



$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_T}{I}} = \sqrt{\frac{15(10)^3}{60}} = 15.81 \text{ rad/sec} \quad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 2.52 \text{ HZ}$$

$$\text{loss in amplitude/cycle} = \frac{4F_d}{k_T} = \frac{4 * (15)}{15 * (10)^3} = 0.004 \text{ rad.}$$

$$\therefore \text{Number of cycles for motion to cease} = \frac{\text{angula rdisplament}}{\text{loss in amplitude/cycle}} = \frac{0.08}{0.004} = 20$$

27-In the system as shown in fig.(3-25). , One third of the mass is contained in a rotor that rotates at an angular speed ( $\omega$ ) with an eccentricity of 2 mm. The kinetic coefficient of dry friction is 0.2. The mass is 10 kg and the spring modulus is 1600N/m. What is the amplitude of motion at ( $\omega=100$  1/cycle)?

What happens when ( $\omega=10$  1/cycle). What does this physically mean.?

25- في المنظومة المبينة بالشكل (3-25) كتلة الدوار تساوي ثلث الكتلة m التي التي تدار عند سرعة  $\omega$  حول نقطة لامركزية 2mm معامل الاحتكاك الجاف للحركة 0.2 ، الكتلة 10 kg ومعامل النابض 1600 N/m ، أوجد سعة الحركة إذا كانت السرعة الزاوية  $\omega=100$  1/cycle ؟ ، ماذا يحدث عندما تكون  $\omega=10$  1/cycle ؟ ، ماذا يعني ذلك عمليا ؟

الحل:

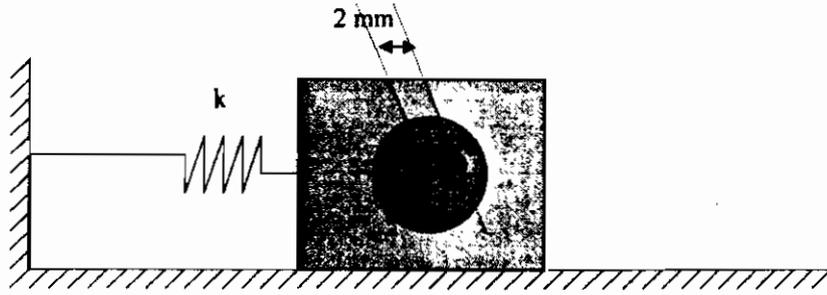


fig.(3-25)

∴ The applied Force  $F(t) = m_0 e \omega^2 \sin \omega t$  , at  $\omega = 10$  1/sec  $\sin \omega t = 1$

$$\therefore F_1 = m_0 e \omega^2 = \left(\frac{10}{3}\right)(0.002)(10)^2 = 0.667 \text{ N} \quad \therefore \frac{\mu N}{F_1} = \frac{(0.2)(10)(9.81)}{0.667} = 29.72$$

أى ان الحركة تكون غير محتملة الحدوث عندما يكون  $\frac{\mu N}{F_1} > \frac{\pi}{4}$  ولهذا فان القوة المؤثرة تكون غير

كافية للتغلب على الاحتكاك الاستاتيكي ، وعندما تكون  $\omega = 100$  1/sec نلاحظ مايلي :

$$F_1 = m_0 e \omega^2 = \frac{(10)(0.002)(100)^2}{3} = 66.7 \text{ N}$$

$$\therefore \frac{\mu N}{F_1} = \frac{(0.2)(10)(9.81)}{66.7} = 0.294 \text{ N} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\mu N}{F_1} < \frac{\pi}{4}$$

وتكون الحركة فى هذه الحالة محتملة وتكون مستمرة ، وبذلك يمكن إيجاد السعة من المعادلة التالية:

$$\frac{x}{F_1/k} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_1}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2}} = \frac{\sqrt{1 - \left[\frac{4}{\pi}(0.294)\right]^2}}{\sqrt{[1 - (0.625)^2]^2}} = 1.52$$

$$\text{where } \omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{1600}{10} = 160 \text{ 1/sec}^2 \quad \therefore r^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \frac{100}{160} = 0.625$$

إن بالتعويض فى هذه العلاقات ينتج أن:

$$\therefore \frac{x}{F_1/k} = 1.52 \quad , \quad x = 1.52 \left(\frac{F_1}{k}\right) = 1.52 \left(\frac{66.7}{1600}\right) = 0.064$$

28-A single degree of freedom system has viscous damping , with  $\zeta=0.03$  , Find the energy dissipated per cycle as a function of the energy in the system at the start of that cycle . Also find the amplitude of the 14th cycle if the amplitude of the 4th cycle is 1.6 mm.

28- منظومة ذات درجة حرية واحدة مع خمد لزج ( $\zeta=0.03$ ) . أوجد الطاقة المبذولة لكل دورة كدالة فى

طاقة المنظومة عند بداية الدورة الرابعة عشرة اذا كانت سعة الدورة الرابعة 1.6 mm .

الحل:

$$\because \zeta < 1 \therefore \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cong 2\pi\zeta = 2\pi(0.03) = 0.1884 \therefore \frac{x_1}{x_2} = e^\delta = e^{0.1884} = 1.207$$

$$\therefore \text{Energy at start of cycle} = \frac{1}{2}kx_1^2 = (\text{stored as strain energy in spring})$$

$$\text{Energy at end of cycle} = \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$\therefore \frac{\text{Energy dissipated during cycle (E.D)}}{\text{Energy at start of cycle (E}_1)} = \frac{\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}{\frac{1}{2}kx_1^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{1.207}\right)^2 = 0.3136$$

أي ان حوالي 31.36 % من الطاقة البدائية مبددة في دورة واحدة.

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1.207$$

$$\therefore \frac{x_4}{x_{14}} = (1.207)^{10} = 6.56 \quad \therefore x_{14} = \frac{x_4}{6.56} = \frac{1.6}{6.56} = 0.243 \text{ mm.}$$

29-A 300 gm body is hung to a spring. 30 gm can stretch this spring 1 cm. The logarithmic decrement of damped vibration of the oscillating body is 1.4, Find (a) the period of oscillation at resonance. (b) the resonance amplitude if the amplitude of the driving force equals to 170 cm.

29 - جسم كتلته 300 جرام علق في نابض ، علق كتلة 30 جرام في نفس النابض فأمكن تمديد هذا النابض اسم والتناقص اللوغارتمي للجسم المهتز إهتزازا ذات خمد 1.4 ، أوجد (أ) الزمن الدوري عند الرنين. (ب) السعة عند الرنين ( $A_{res}$ ) إذا كانت السعة لقوة الاستثارة تساوي 170 سم.

الحل: عندما يكون الخمد صغير فان  $\omega_n = \omega_d$  ولتعيين الزمن الدوري والسعة عند الرنين نتبع الآتي:

$$\therefore \delta = \frac{2\pi}{\omega_d} \cdot B \quad \therefore B = \frac{\omega_n \delta}{2\pi} \quad \text{where } t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\therefore mg = k\Delta \quad \therefore k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{30(981)}{1}$$

$$\therefore \omega_{resonance} = \omega_{res} = \sqrt{\omega_n^2 - 2B^2} = \omega_n \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1.4}{\pi}\right)^2} = 0.95 \omega_n$$

$$\therefore t_{res} = \frac{1}{0.95} t_0 = 1.053 t_0 \quad \therefore t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{300(1)}{30(981)}} = 0.634 \text{ sec}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30(981)}{300}} = 9.9 \text{ rad./sec} \quad B = \frac{9.9(1.4)}{2\pi} = 2.21$$

$$\therefore t_{res} = 1.053(0.643) = 0.667 \text{ sec}$$

$$\therefore A_{res} = \frac{h}{2B\sqrt{\omega_n^2 - B^2}} = \frac{\frac{H}{m}}{\omega_n^2 \frac{\delta}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2}} = \frac{170}{(9.9)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1.4}{\pi}\right)^2}} = 1.78 \text{ cm}$$

### مسائل على الباب الثالث

1- نظام مهتز متكون من وزن  $22.25\text{N}$  ونابض بجساءة  $1750\text{N/m}$  ومتضائل لزوجياً بحيث تجعل النسبة بين أي سعتين متعاقبتين تكون  $1.0$  إلى  $0.98$  أوجد التردد الطبيعي للمنظومة المتضائلة والتناقص اللوغارتمي وعامل ومعامل التضاؤل.

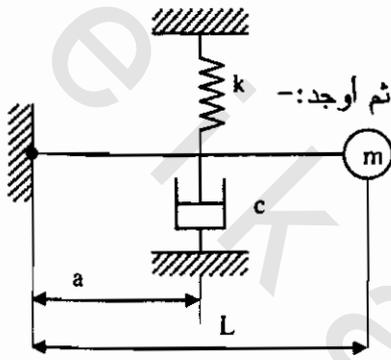
2- يتكون نظام مهتز من وزن  $44.5\text{N}$  ونابض ذي جساءة  $3500\text{N/m}$  ونبيطه متضائلة معامل تضاؤلها  $12.4\text{N.s/m}$  أوجد: أ- عامل التضاؤل. ب- التناقص اللوغارتمي. ج- النسبة بين أي سعتين متعاقبتين.

3- نظام مهتز يملك الثوابت الآتية  $W=172\text{N}$  ،  $k=7000\text{N/m}$  ،  $C=70\text{N.s/m}$  أوجد:

أ- عامل التضاؤل و التردد الطبيعي للتذبذب المتضائل.

ب- التناقص اللوغارتمي والنسبة بين أي سعتين متعاقبتين.

4 - كون المعادلة التفاضلية لحركة النظام المبين في الشكل (3-1) ثم أوجد:-

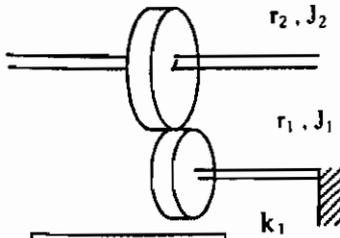


الشكل (3-1)

1- معامل التضاؤل الحرج.

2- التردد الطبيعي للتذبذب المتضائل.

5- أوجد عزم القصور الذاتي للكتلة الفعالة للعمود (1) في النظام المبين بالشكل (3-2).



الشكل (3-2)

6- ربط وزن مقداره  $9\text{N}$  إلى نهاية النابض الذي جساءته  $1700\text{N/m}$ ، أوجد معامل التضاؤل الحرج

7- لتدريج نبيطة متضائلة، تقاس سرعة الكباس عند

تسليط القوة عليه. إذا كان  $2.22\text{N}$  ينتج سرعة ثابتة

$30.5\text{mm/sec}$  أوجد عامل التضاؤل  $\zeta$  عندما يستعمل

مع النظام في المسألة (6).

8- أكتب المعادلة التفاضلية لحركة النظام المبين بالشكل

(3-3) وأوجد التردد الطبيعي للتذبذب المتضائل

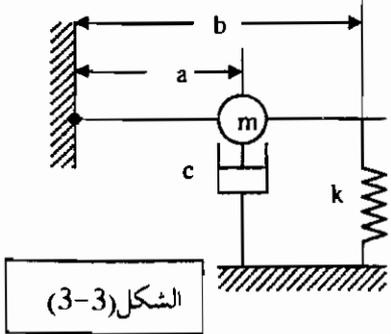
ومعامل التضاؤل الحرج.

9- أزيح نظام كتلة - نابض وبالتضاؤل اللزج من موقع

التوازن ثم ترك كي يتذبذب. إذا تضاعلت السعة

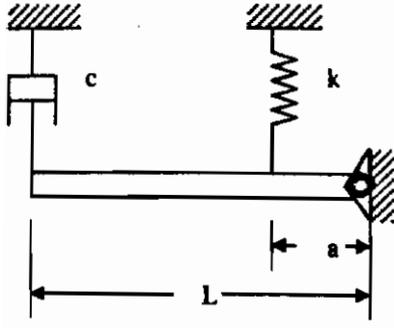
بـ  $5\%$  لكل دورة ماذا يجب أن يكون كسر التضاؤل

الحرج الذي يمتلكه النظام.

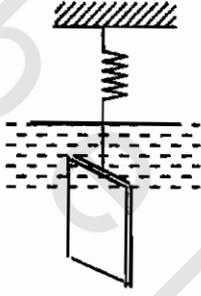


الشكل (3-3)

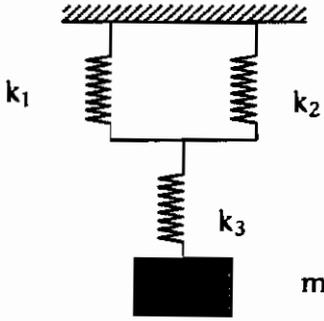
10- يبين الشكل (3-4) قضيباً منتظماً وصلباً كتلته  $m$  وطوله



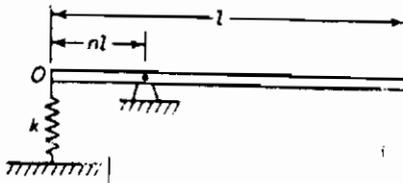
الشكل (3-4)



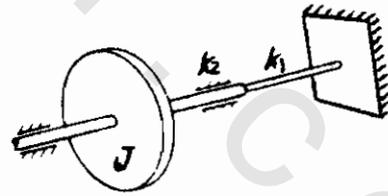
الشكل (3-5)



الشكل (3-6)



الشكل (3-8)



الشكل (3-7)

L قد ثبت بمسمار عند النقطة o وحمل بواسطة نابض ومضائل لزج. قياس  $\theta$  من موقع التوازن الأستاتيكي، أوجد (أ) المعادلة التفاضلية للمنظومة مع اعتبار أن عزم القصور الذاتي للقضيب حول (o) هو  $mL^2$ .

(ب) أوجد التردد الطبيعي ومعامل التضاؤل الحرج.

11- صفيحة نحيفة ذات مساحة A ووزن W ربطت إلى

نهاية النابض ثم تركت تتذبذب في مائع لزج كما مبين

بالشكل (3-5) إذا كان  $\tau_1$  هو زمن الدورة الطبيعية

للتذبذب غير المتضائل والذي يكون مع نظام متذبذب في

الهواء و  $\tau_2$  زمن الدورة المتضائلة عندما تغمس

$$\mu = \frac{2\pi w}{gA\tau_1\tau_2} \sqrt{\tau_2^2 - \tau_1^2}$$

حيث إن قوة التضاؤل على الصفيحة هي  $F_d = \mu 2Av$  ،  $2A$  هي

المساحة السطحية الكلية للصفيحة،  $v$  سرعة الصفيحة.

12- أوجد الجساء الفعالة للنوابض المبينة بالشكل (3-6).

13- أوجد الجساء الفعالة للنظام الاتوائي المبين بالشكل

(3-7) حيث الجساء الاتوائيه للمحورين المربوطين

على التوالي  $K_1, K_2$ .

14- أوجد مقدار الكتلة الفعالة عند النقطة (5) لقضيب منتظم

كتلته  $m$  طوله  $L$  مركز عند المسافة  $nl$  من  $o$  كما مبين

بالشكل (3-8).

15- أوجد قيمة  $\omega/\omega_n=0$  لمجموعة اهتزازية حرة الحركة فيها

16- مجموعة تتذبذب تحت تأثير الخواص الآتية:  $c = 7.5 \text{ kg/cm/sec}$  ،  $k = 7.5 \text{ kg/cm}$  ،  $m = 17.5 \text{ kg}$

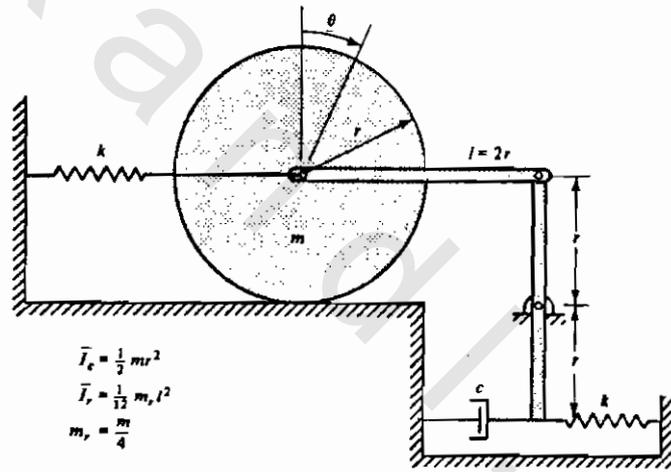
(ب) تردد المجموعة تحت تأثير الكبت.

أوجد: (أ) نسبة الكبت.

(ج) معامل التناقص اللوغارتمى. (د) نسبة سعنى إهتزازين متتاليين.

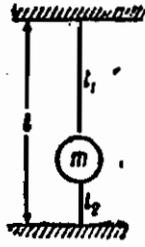
- 17- جسم يزن 40 lb معلق من نابض يحدث به استطاله 0.625 بوصة تحت هذا الحمل. أحسب تردد الاهتزازات الحرة وحقق أن قوة كبت لزجة بقيمة تقريبية 5 رطل/ قدم/ ث كافية لجعل الحركة دورية.
- 18- كتلة تزن 50 رطل معلقة من باى معامله 100 رطل/ بوصة. ركب للمجموعة وعاء كبت مما أدى إلى تناقص سعة الاهتزاز الأولى من قيمتها (1) بوصة إلى 0.25 بوصة فى دورتين. أوجد معامل الكبت (c)، والسرعة الزاوية ( $\omega$ ) والنسبة  $\omega/\omega_n$ .

- 19- المنظومة المبينة بالشكل (3-9) عبارة عن اسطوانة نصف قطرها r وكتلتها m تتدحرج بدون انزلاق ومتصله بقضيب طوله 2r من مركزها ومتصل بالقضيب قضيب آخر من الطرف الحر وعمودك عليه وطوله 2r أيضاً والقضيب الرأس يتحرك بحرية حول مفصل فى منتصف القضيب الرأسى والنهية السفلى للقضيب الرأس مثبت فى أحد جانبيه نابض معاملته k وخامد معامل الحمى له c ، وكذلك يتصل بابض آخر معاملته k أيضاً بمركز الاسطوانة والطرف الأخر مثبت بجدار كما مبين بالرسم. وكتله كل قضيب تساوى mr حيث  $m_r = 1/4 m$  فإذا أعطى حركة تذبذبيه  $\theta$  للمنظومة. أوجد معادلة الحركة التفاضلية والتردد الطبيعى للدورة وعامل الخمد  $\zeta$  وذلك باعتبار أن  $I_c = 0.5mr^2$  و  $I_r = m_r L^2/12$

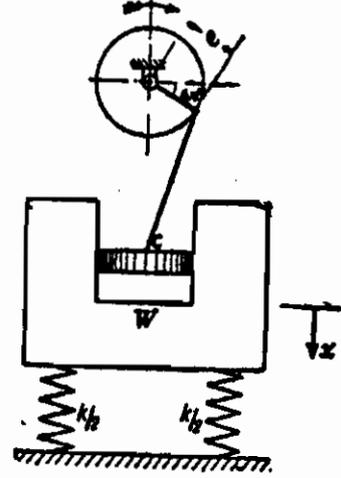


الشكل (3-9)

- 20- أوجد المعادلة التفاضلية للحركة للمنظومة المبينة بالشكل (3-10) آخر من وجود خمد لسزج بين الكبس والجسم.
- 21- الكتلة m فى المنظومة المبينة بالشكل (3-11) متصل من طرفيها بسلك مع وجود قوة شد (T Kgf) بفرص حدوث سعة صغيرة للمنظومة أوجد التردد الطبيعى للاهتزاز فى المستوى العمودى للسلك، وإيضاً وضح أن دورة الاهتزاز تزداد عندما يكون  $L_1 = L_2$ .



الشكل (3-11)



الشكل (3-10)

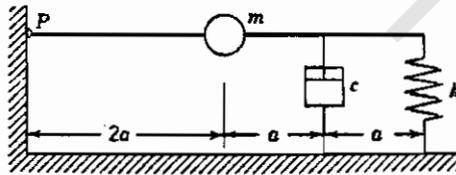
22- ما سؤرة مدفع كئئئها 400 Kg مركبة على باى ارتداد معاملة 300 Kg\cm أؤؤد الكبت اللؤؤ اللؤؤم ءركببه (c) ءئى ءعود الماسؤرة إلى وؤعها بعد الإءلاق بأسرع ما بمكن.

23- المنؤومة المببنة بالشكل (3-12) إذا أعطى لها إؤاحة زؤوبة صؤبيرة  $\theta$  أؤؤد ما بلى مع إهمال كئئة القؤبب البؤسب وبتءرك فى الإءباه ءؤل المفضل p.

أ- المعادلة ءفاضلبة للءركة. ب- ءرءؤ البؤبببى  $F_n$  ومعمل الخمد ءرؤ  $C_c$ .

ؤ- عامل الخمد. د- ءرءؤ البؤبببى المخدم  $\omega_d$ .

البؤاب

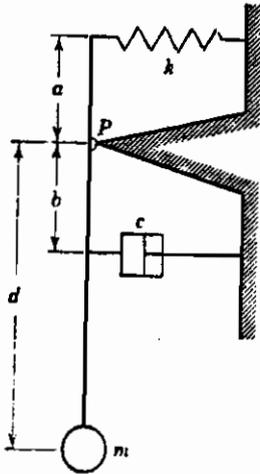


$$4m\ddot{x} + 9c\dot{x} + 16kx = 0$$

$$f_{nd} = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{m} - \left(\frac{9c}{8m}\right)^2}$$

$$c_c = \frac{4}{3} \sqrt{mk}$$

الشكل (3-12)



24- المنؤومة المببنة بالشكل (3-13) إذا أعطى للعمود أو القؤببب البؤسب المهمل الوزن إؤاحة زؤوبة ءؤل المفضل P أؤؤد:

أ- معادلة اللءركة للمنؤومة ب- ءرءؤ البؤبببى المخدم  $\omega_d$ .

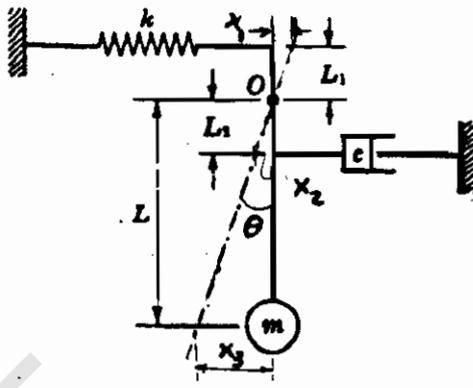
ؤ- معامل الخمد ءرؤ  $C_c$ .

البؤاب

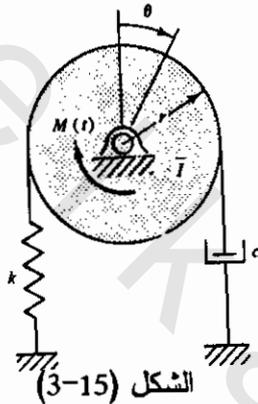
$$\omega_{nd} = \sqrt{\frac{ka^2 + mgd}{md^2} - \left(\frac{b^2c}{2md^2}\right)^2}$$

الشكل (3-13)

$$c_c = \frac{2}{b^2} \sqrt{md^2(ka^2 + mgd)}$$



الشكل (3-14)

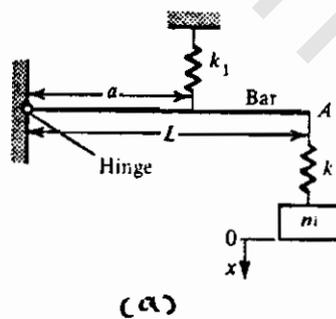


الشكل (3-15)

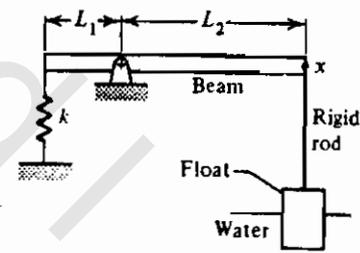
25- المنظومة المبينة بالشكل (3-14) هي بندول هي بندول بسيط ذي مفصل عند  $o$  فاذا كانت كتلة القضيب مهملة ، وكانت الذبذبات صغيرة أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي  $\omega_n$  وعامل الخمد  $\xi$  والتردد الطبيعي المخمود  $\omega_d$

25- لمنظومة المبينة بالشكل (3-15) تتكون من قرص عزم القصور الذاتي لة  $I$  ويقع تحت تأثير عزم  $M(t)$  ومن نابض معاملته  $k$  وخامد معامل الخمد لة  $c$  ، اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي  $\omega_n$  وعامل الخمد  $\xi$ .

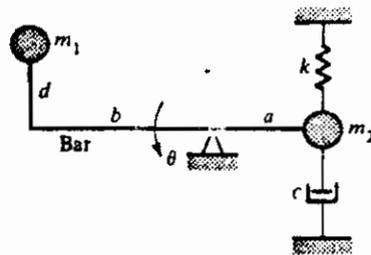
26- اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومات المبينة بالشكل (3-16a,b,c and d)



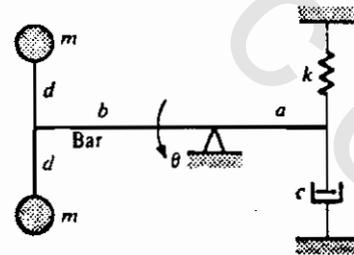
(a)



(b)



(c)

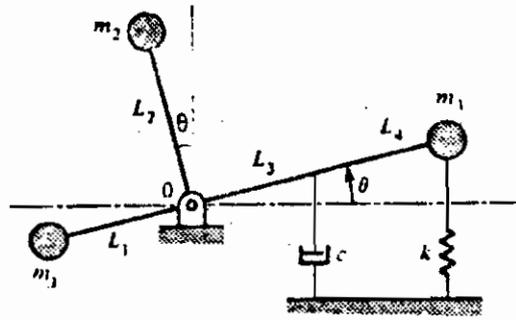


(d)

الشكل (3-16 a,b,c and d)

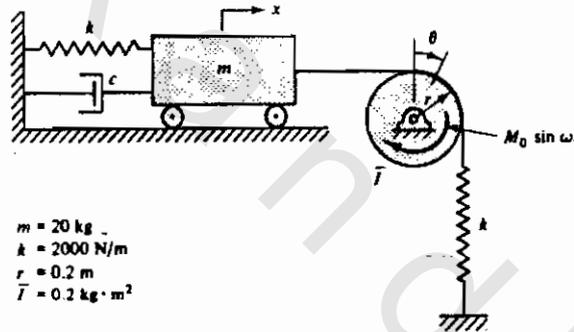
27- اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي ومعامل النابض المكافئ والكتلة المكافئة للمنظومة المبينة

بالشكل (3-17).



الشكل (3-17)

28- Adamping factor of  $\zeta=0.12$  is determined experimentally from its damped free vibrations for the system shown in the figure (3-18). Assuming that there is no slippage between the light cable and the cylinder and that the cylinder is subjected to the moment  $M_0 \sin \omega t$  shown, determine (a) the differential equation of motion of the system and (b) the amplitude  $|X|$  of the forced response of the mass  $m$  if  $M_0=10 \text{ N.m}$  and  $\omega =10 \text{ rad/sec}$



الشكل (3-18)