

الباب السادس

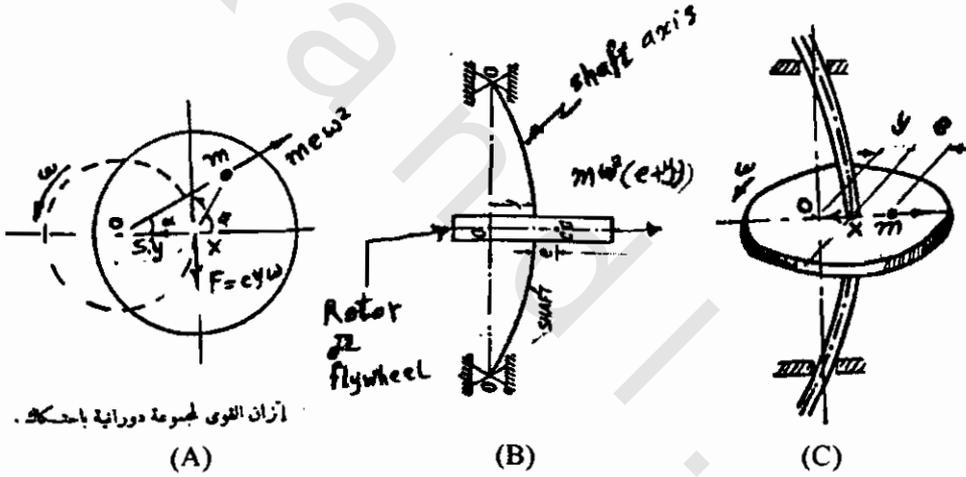
السريّة الحرجة للعمود الإدارة

obeykandi.com

1- مقدمة:

الاعمدة الدورانية تميل الى الاهتزاز في الاتجاه العرضي والسرعة الحرجة في الاعمدة الدورانية تقابل ظاهرة الرنين في المنظومات الميكانيكية التي سبق دراستها في البابين الثالث والرابع والتي يتساوى فيها تردد الاستثارة مع التردد الطبيعي للمنظومة . وعندما يقترب تردد سرعة الدوران من التردد الطبيعي للعمود فان سعة الاهتزاز تزداد وقد تشكل خطرا عليه إذا زادت عن الحد المسموح به لفترة طويلة نسبيا ، وإذا كان إحتكاك الاجزاء الدورانية بالهواء او اي نوع اخر من انواع الكبت صغيرا ، فان العمود يدور تحت تأثير قوتين متزنتين وهما مقاومة العمود للانثناء وقوة الطرد المركزية وذلك لاختلال التوازن بالاجزاء الدورانية.

2- السرعات الحرجة للاعمدة الدورانية:



الشكل (1-6) انحراف العمود الدوراني

الشكل (1-6) يبين مركز الدوران عند النقطة 0 ، محور العمود عند نقطة الانحراف ويدور هذا المحور حول (0) على نصف قطر y ، تمثل كتلة خارجة عن التوازن (الحدافة) تبعد عن محور العمود بالمسافة e ، وبفرض ان مقاومة العمود لوحدة الانحراف (جساءة العمود) عند المحور x هي S وان توازن القوتين السابقتين يعطى بالمعادلة التالية: $S.y = m(e+y)\omega^2$ حيث m هي كتلة الحدافة ووزنها W او تمثل نقل ما خارج عن التوازن متصل بعمود مهمل الوزن. وان مركز الثقل C.G للحدافة يبعد مسافة e عن محور الدوران وباعتبار ان S هي جساءة العمود stiffness of the shaft

وان y هي نصف قطر مسار الدوران للعمود او هي الازاحة الاضافية additional displacement
لمركز الثقل عن محور الدوران the axis of rotation نتيجة قوة الطرد المركزية centrifugal force
وباعتبار ان ω هي السرعة الزاوية المنتظمة للعمود وان ω_c هي السرعة الحرجة للعمود اي ان:

$\omega =$ the uniform angular speed of the shaft in rad/sec
 $\omega_c =$ the critical or whirling speed of the shaft in rad/sec

وتكون قوة الطرد المركزية والمسببة للانحناء تعين من العلاقة الآتية:

$$\text{Outward centrifugal force} = (W/g)\omega^2[y+e] \dots \dots \dots (1)$$

والقوة الكامنة للانحناء يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$\text{Force resisting deflection} = S.Y = \frac{W}{g} \omega^2 (y+e) = \frac{W}{g} \omega^2 y + \frac{W}{g} \omega^2 e \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore S.y - \frac{W}{g} \omega^2 y = \frac{W \omega^2 e}{g} = m e \omega^2 \quad \therefore y = \frac{m e \omega^2}{S - m \omega^2} = \frac{e}{\frac{S}{m \omega^2} - 1} \dots \dots \dots (3)$$

والسرعة الحرجة تسمى ايضا بالسرعة التذبوبية ويرمز لها بالرمز ω_n او بالرمز ω_c ، والانحراف
الاستاتيكي Δ تحت تأثير الوزن W يعين من العلاقة الآتية:

$$\therefore \Delta = \frac{W}{S} \quad \therefore \omega_c = \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

$$\therefore \frac{y}{e} = \frac{1}{\frac{S.g}{W.\omega^2} - 1} = \frac{1}{\frac{g}{\Delta \omega^2} - 1} = \frac{1}{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} \dots \dots \dots (4)$$

$$\therefore y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{\omega^2 e}{\omega_c^2 - \omega^2} \dots \dots \dots (5)$$

وعندما تكون $\omega = \omega_c$ فان المقام للمعادلة (5) يساوي الصفر ولهذا فان (y/e) تؤل الى ما لانهاية وهذه
المرحلة تسمى بمرحلة الرنين وهي اخطر مرحلة حيث يتساوى فيها تردد سرعة العمود مع التردد
الطبيعي للعمود في الاتجاه الجانبي وهي المرحلة او السرعة الحرجة للعمود. واذا كانت $\omega >$
 ω_n i.e $(S.g/W)^{0.5}$ فان الازاحة y تكون سالبة وهذا يعني ان الكتلة m تدور داخل محور
العمود ، ولهذا يمكن وضع الازاحة او نصف قطر الدوران y على صورة المعادلة الآتية:

$$y = \pm \frac{\omega^2 . e}{\omega_c^2 - \omega^2} = \pm \frac{e}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} \dots \dots \dots (6)$$

اما اذا كان تأثير الاحتكاك مع الهواء او الجو المحيط بالقرص كبيرا فيمكن اخذة في الاعتبار بواسطة القوة F التي تؤثر عند محور العمود x كما بالشكل (6-1-c) . وبفرض ان الاحتكاك لزجا فانه يعبر عن القوة F بالعلاقة التالية:

$$F=c.y.\omega \dots\dots\dots(7)$$

حيث c هي معامل الكبت او التضاثل. ويمكن التعبير عن توازن انقوى بالمعادلتين الاتيين للاتجاهين الافقى والراسى على الترتيب:

$$m\omega^2.\cos(\alpha) - S.y = 0 , m\omega^2.\sin(\alpha) - c.y.\omega = 0 \dots\dots\dots(8)$$

ومن الشكل (6-1-c) يمكن ايجاد العلاقة بين الزاويتين α , ϕ كما يلي:

$$e.\sin \alpha = e.\sin \phi , e.\cos \alpha = y + e.\cos \phi \dots\dots\dots(9)$$

$$\text{from (8,9)} \therefore m\omega^2(y + e.\cos \phi) - S.y = 0 , m\omega^2.\sin \phi - c.y.\omega = 0 \dots\dots(10)$$

$$\therefore \text{from (10)} \therefore \tan \phi = \frac{c\omega}{S - m\omega^2} \dots\dots\dots(11)$$

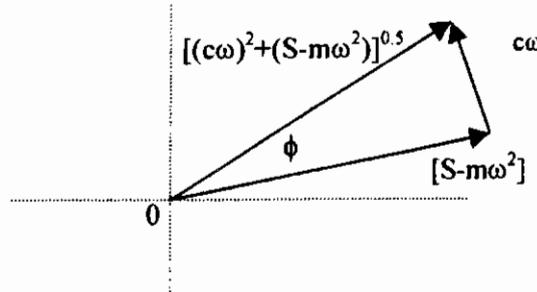
$$\therefore y = \frac{m\omega^2.\cos \phi}{S - m\omega^2} = \frac{m\omega^2}{\sqrt{(c\omega)^2 + (S - m\omega^2)^2}} = \frac{e.r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta.r)^2}} \dots\dots\dots(12)$$

where $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, $S \equiv k$ (stiffness of spring)

ونلاحظ ان المعادلة (11) تناظر المعادلة (13) التالية والخاصة بالاهتزاز الحر ذات الخمد والتي سبق شرحها بالباب الرابع ، وكذلك المعادلة (12) تناظر المعادلة (14) التالية والخاصة بالاهتزاز الجبرى ذات الخمد كما سبق شرحه ايضا بالباب الرابع:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)} \dots\dots\dots(13) , \frac{x}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta.r)^2}} \dots\dots\dots(14)$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا كما بالشكل (6-2) وبالتالي يكون الحل للمعادلتين (6-11,12) هو نفس الحل بالباب الرابع فى حالة الاهتزاز الجبرى مع الخمد لمنظومة تتكون من الكتلة والنايى والخامد.

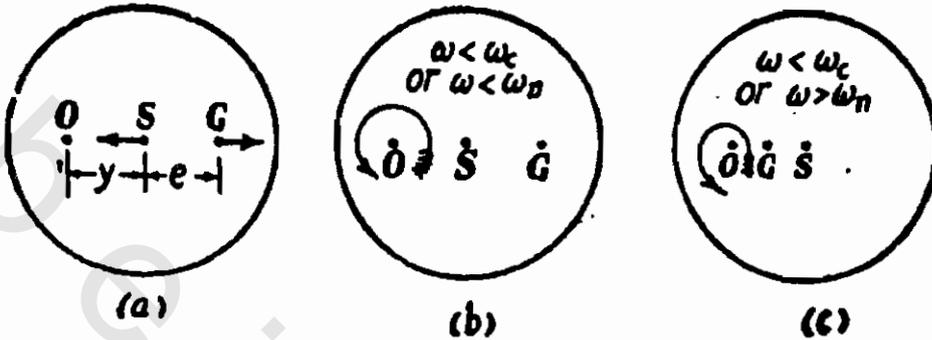


الشكل (6-2)

ويظهر من ذلك ان $y=x$ ، $Ar^2 = x_1$ وبذلك يكون $y \approx Ar^2$ عندما $r=0$ ، عندما r تساوى مالانهاية.

حيث y هي سعة الاهتزاز وبذلك نستنتج انه كلما زاد الكبت كلما قلت السعة y وتحدث حالة الرنين عندما $r=1$

ملاحظات:



الشكل (6-3) يوضح السرعات المختلفة للعمود للدوار

1- النسبة (y/e) تؤل الى مالانهاية عندما $\omega_c = \omega$ وعند هذه السرعة يكون تردد الحركة الاهتزازية هو التردد الطبيعي ω_n ويساوى سرعة العمود ، اي ان $\omega = \omega_c = \omega_n$ وفي هذه الحالة يسمى التردد الطبيعي

بالسرعة الحرجة the natural frequency is called the critical or the whirling speed

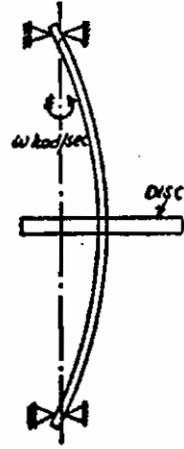
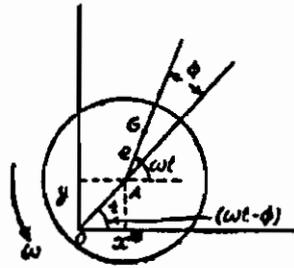
2- يلاحظ ان y تكون موجبة عندما تكون السرعة اقل من السرعة الحرجة وتكون سالبة اذا كانت السرعة اكبر من ω_n اي عندما تكون $\omega < \omega_n$ فان المنظومة تدور على الجانب الثقيل with the heavy side ويكون G خارج S كما بالشكل (6-3-b). واذا كانت $\omega > \omega_n$ فان الجانب الخفيف والمقابل الى G يكون خارج S وهذا يقابل زاوية طور تساوى الصفر وهي الزاوية بين الازاحة وقوة الطرد المركزي اي عندما تكون $\omega \leq \omega_n$.

ويكون الفرق في الزاوية 180° عندما تكون $\omega > \omega_n$. بينما في حالة السرعات العالية جدا نجد ان $y=e$ وتتطبق كل من النقطتين O, G معا . ولهذا فان السرعة الحرجة لاهتزاز العمود تحدث عندما تصل سرعة القرص الى الصفر.

3- السرعات الحرجة للاعمدة الدورانية في حالة الحمل المركزي مع وجود الخمد:

The whirling or the critical speed of the shaft on carrying central load and with damping.

في الشكل (6-4) يركب القرص بالعمود في موضع القوة الديناميكية التي تؤثر في الاتجاه القطري ويكون تحليل السرعات الحرجة للاعمدة الدورانية في وجود الخمد. حيث (0) مركز الدوران ، (A) مركز القرص او العمود ، (G) مركز النقل للقرص ، (e) المسافة اللامركزية centre eccentricity ، (m) كتلة القرص ويمكن كتابه معادلة الحركة في حالة الازاحتين y, x كما يلي:



الشكل (6-4)

أ- إيجاد معادلة الحركة في إتجاه (x)

$$m \frac{d}{dt} [x + e \cdot \cos(\omega t)] = -kx - c \dot{x} \quad \therefore m \ddot{x} + kx + c \dot{x} = m e \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\therefore \ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = e \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \quad ; \therefore c = 2\zeta \cdot m \omega_n \quad , \frac{c}{m} = 2\zeta \cdot \omega_n \quad , \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$\therefore \ddot{x} + 2\zeta \cdot \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = e \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \dots \dots \dots (15)$$

ب- إيجاد معادلة الحركة في إتجاه y:

$$\therefore m \frac{d}{dt} (y + e \cdot \sin(\omega t)) = -ky - c \frac{dy}{dt} \quad \therefore m \ddot{y} - m e \omega^2 \cdot \sin(\omega t) + ky + c \dot{y} = 0$$

$$\therefore \ddot{y} + 2\zeta \cdot \omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = \omega^2 e \cdot \sin(\omega t) \dots \dots \dots (16)$$

ويمكن إيجاد الحل في الحالة المستقرة Steady state كما يلي:

$$X = \frac{e \cdot r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta \cdot r)^2}} \cdot \cos[\omega t - \phi] \dots \dots \dots (17)$$

$$\text{where } r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \cdot r}{1-r^2} \right)$$

$$Y = \frac{e \cdot r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta \cdot r)^2}} \cdot \sin[\omega t - \phi] \dots \dots \dots (18)$$

تمثل المعادلة (15) معادلة الحركة للمنظومة في إتجاه x والمعادلة (16) تمثل معادلة الحركة للمنظومة في إتجاه y ، والمعادلة (17) تمثل الحل في الحالة المستقرة وفي إتجاه المحور x ، بينما المعادلة (18) تمثل الحل في الحالة المستقرة وفي إتجاه المحور y ، ولهذا تكون حركة النقطة خلال المحورين في دائرة مركزها (o) أى مسار حركة النقطة هي دائرة مركزها (o) ونصف قطر الدائرة يمكن تعيينه من المعادلة التالية:

$$R = \frac{e.r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta.r)^2}} \dots \dots \dots (19)$$

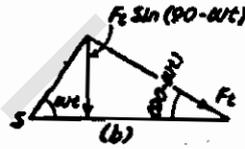
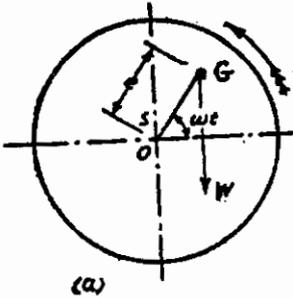
$$\text{without damping } \zeta = 0, R = \frac{e.r^2}{1-r^2} \dots \dots \dots (20)$$

ملاحظات-

- 1- عندما تكون الزاوية ϕ صغيرة عند الترددات المنخفضة فإن نسبة السرعة r تقترب من الصفر ولهذا فإن الزاوية ϕ سوف تقترب من الصفر أيضا نتيجة ان النقط O, A, G على خط عمل واحد اي ان (Points O,A,G to be linear) 2- عندما تكون نسبة السرعة r كبيرة نسبيا فإن الزاوية $\phi = 180^\circ$ لان النقط O, A, G تكون على إستقامة واحدة مع مركز النقل اي ان (Points O, A, G to be collinear with C.G) ويكون في هذه الحالة A هي مركز العمود.
- 3- عندما تكون r كبيرة جدا ، فإن إنحناء العمود مع وجود نسبة من الخمد قريبا من البعد اللامركزي (e) وان $r^2 \approx (1-r^2)$ ونظرا لانه لا توجد نسبة للمقارنة بين المقدار $(2\zeta.r)^2$ والمقدار $(1-r^2)$ فان فى حالة السرعة العالية للقرص فان القرص يدور حول مركز النقل C.G.

4 - السرعة الثانوية الحرجة للعمود: Secondary critical speed

قوة الطرد المركزية الناتجة من عدم إتزان الكتل الدوارة تسبب السرعة الحرجة الاساسية (main critical speed) للاعمدة الدورانية. وبجانب ذلك نلاحظ ان اكثر الاهتزازات توجد عند منتصف السرعة الحرجة فى حالة الاعمدة الاقبية (Horizontal Shaft). ولكن هذه الاهتزازات تختفى فى حالة الاعمدة الرأسية (Vertical Shafts) ولهذا فان نقل الكتل (The Gravity of the Masses) تكون مسئولة عن حدوث هذه الاهتزازات.



الشكل (5-6) يوضح السرعة الثانوية الحرجة للعمود

عندما لا توجد إهتزازات فان المركز الهندسى (S=geometric center) يكون متطابق coincideres مع محور كرسى التحميل (O) bearing axis ، فاذا إعتبرنا ان G هي مركز النقل للقرص وموضوع على مسافة (e) من المركز الهندسى فانه فى حالة دوران العمود مع القرص وفى إتجاه مضاد لإتجاه عقارب الساعة فان العزم الناتج من وزن القرص (W) يؤخر حركة القرص عندما يكون مركز النقل G فى

الربع الاول والرابع ويعمل على تعجيل الحركة (acceleration of motion) عندما يقع مركز النقل G في الربع الثانى والثالث ويمكن تعيين كل من العزم والعجلة المماسية f' والقوة المماسية F_t من المعادلات الآتية:

$$\text{The Torque} = T = W.e.\cos(\omega t) = I\alpha \quad \therefore \alpha = \frac{We.\cos(\omega t)}{I}$$

$$\therefore f' = \alpha.e \quad \therefore f' = \frac{W}{I}.e^2.\cos(\omega t) \dots \dots \dots (21)$$

$$\therefore F_t = \frac{W}{g}.f' = \frac{W}{g}.\frac{W}{I}.e^2.\cos(\omega t)$$

حيث I عزم القصور الذاتى للقرص ومن مثلث القوى المبين بالشكل (6-5-b) نجد ان القوة المماسية فى الاتجاه الراسى تعين كما يلى:

$$\therefore Ft = \frac{W}{g}.\frac{W}{I}.e^2.\cos(\omega t).\sin(90 - \omega t) = \frac{W^2}{gl}.e^2.\cos^2(\omega t) = \frac{W^2}{2gl}.e^2[1 + \cos(2\omega t)]$$

$$\therefore F_t = \frac{W^2}{2gl}.e^2 + \frac{W^2}{2gl}.e^2.\cos(2\omega t) \dots \dots \dots (22)$$

والجزء الاول فى المعادلة (22) يكون ثابت ويمثل اى إنحناء إضافى للعمود ويعبر عنه بالعلاقة $(W^2/2gl).e^2$

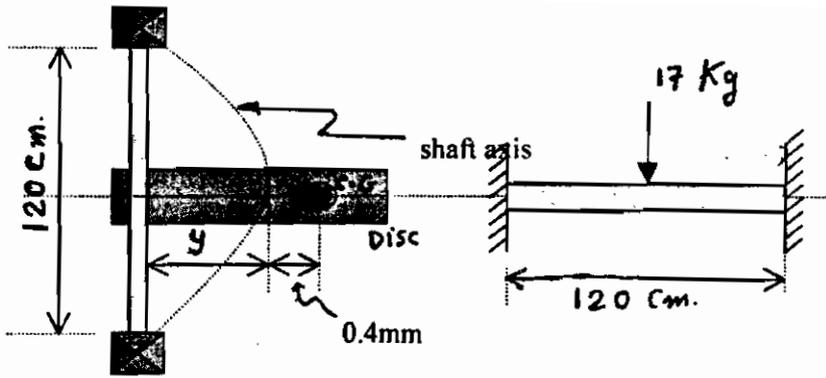
والجزء الثانى يكون ذات تردد $(\omega/2)$ ، واذا دار العمود عند منتصف السرعة الحرجة اى عندما $(\omega_c/2)$ تمثل الاختلاف فى القوة الراسية والذى يحدث عند التردد الطبيعى وتسبب اهتزازات عالية فى العمود.

مسائل محلولة

1-A vertical shaft 18 mm diameter rotates in long bearings and a disc weighing 17 kg is attached to the mid span of the shaft. The span of the shaft between bearings is 1.2 m. The mass centre of the disc is 0.4 mm from the axis of the shaft. Neglecting the mass of the shaft , and taking the deflection as for a fixed beam at both ends. Find (1) the critical speed of rotation, and (2) the range of speed over which the stress in the shaft due to bending will not exceed 750 kg/cm². the young 's modulus for the material of the shaft may be taken as $2(10^6)$ kg/cm²

1- عمود رأسى قطره 18 مم يدور حول كرسى تحميل طويل ، قرص وزنه 17 كجم متصل بمنتصف العمود والمسافة بين كرسى التحميل 1.2 متر ومركز ثقل القرص يكون على بعد 0.4 مم من محور العمود. إهمل كتلة العمود مع أخذ الانحراف كما لو كان عتبة مثبتة من كل من نهايتيها . أوجد (1) السرعة الحرجة للدوران . (2) مدى زيادة السرعة حيث الاجهاد فى العمود نتيجة الانحناء لا يتجاوز 750 كجم/سم² ، اذا علم ان معامل المرونة لمادة القضيب $2(10^6)$ kg/cm²

الحل:



الشكل (6-6)

يمكن تعيين الانحراف الاستاتيكي والسرعة الحرجة للدوران كما يلي:

$$\therefore d = 18 \text{ mm}, W_{\text{disc}} = 17 \text{ kg}, L = 120 \text{ cm}, e = 0.4 \text{ mm}, \sigma_{\text{bending}} = 750 \text{ kg/cm}$$

$$, E = 2(10^6) \text{ kg/cm}, I = \text{moment of inertia} = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} (1.8)^4 = 0.52 \text{ cm}^4$$

$$\therefore \Delta = \frac{WL^3}{192EI} = \frac{17(120)^3}{192(2 \times 10^6)(0.52)} = 0.15 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{Natural frequency of Transverse vibration } (f_n) = \frac{4.897}{\sqrt{\Delta}} = \frac{4.897}{\sqrt{0.15}} = 12.7 \text{ c.p.s}$$

$$(1) \text{Critical speed of rotation} = (f_n)(60) = (12.7)(60) = 762 \text{ r.p.m} = N_c$$

$$(2) \text{Rang of speed assume } N_1 = \text{maximum speed}, N_2 = \text{minimum speed}$$

وبفرض ان اقل سرعة N_1 ، واقصى سرعة N_2 ، وعند بداية دوران العمود فانه يمكن إيجاد الحمل الديناميكي المضاف W_1 الى العمود وكذلك إيجاد الانحراف او الاستطالة المضافة y وإيجاد مدى السرعة كما يلي:

$$\therefore \frac{M}{I} = \frac{\sigma_b}{y} \therefore M = \frac{\sigma_b \cdot I}{y_1} \therefore \frac{W_1 \cdot L}{8} = \frac{\sigma_b \cdot I}{d/2} \text{ where } y_1 = \frac{d}{2} \therefore W_1 = \frac{8\sigma_b \cdot I}{(d/2)L} = \frac{8(2)(750)(0.52)}{(1.8)(120)} = 28.9 \text{ kg}$$

$$\text{The additional deflection due to } W_1, y = \left(\frac{W_1}{W}\right)(\Delta) = \left(\frac{28.9}{17}\right)(0.15) = 0.25 \text{ cm}$$

$$\therefore y = \frac{\pm e}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} \therefore \pm \frac{y}{e} = \frac{1}{\left(\frac{N_c}{N}\right)^2 - 1} \therefore \pm \frac{0.25}{0.04} = \frac{1}{\left(\frac{N_c}{N}\right)^2 - 1} \therefore \left(\frac{N_c}{N}\right)^2 - 1 = \pm 0.16$$

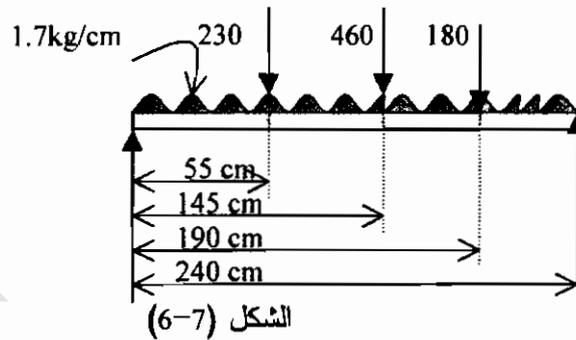
$$\therefore \left(\frac{N_c}{N}\right)^2 = 1 \pm 0.16 = 1.16 \text{ or } 0.84 \therefore \text{at } \left(\frac{N_c}{N}\right)^2 = 1.16 \therefore N_1 = \frac{N_c}{\sqrt{1.16}} = \frac{762}{1.077} = 707 \text{ r.p.m}$$

$$\text{at } \left(\frac{N_c}{N}\right)^2 = 0.84 \therefore N_2 = \frac{762}{\sqrt{0.84}} = 831 \text{ r.p.m} \therefore \text{Range of speed from } 707 \text{ r.p.m to } 831 \text{ r.p.m}$$

2-A shaft 16 cm diameter is supported in two bearing 240 cm apart. It carries three discs of weight 230 kg, 460 kg and 180 kg at 55 cm, 145 cm and 190 cm from the left hand. Assuming the shaft to weight 1.7 kg/cm length determine the critical speed of the shaft. Young's modulus for the material of the shaft is $2.11(10^6) \text{ kg/cm}^2$

2- عمود قطرة 16 سم موضوع على كرتين تحميل ، البعد بينهما 240 سم ، يحمل ثلاث أقراص وزنها 230 كجم ، 460 كجم ، 180 كجم عند 55 سم ، 145 سم ، 190 سم ناحية اليد اليسرى (الجانب الأيسر). افرض ان وزن العمود 1.7 كجم لكل واحد سنتيمتر من الطول ، أوجد السرعة الحرجة للعمود ، معامل يانج (معامل المرونة) لمادة العمود $(2.11(10^6) \text{ كجم} / \text{سم}^2)$

الحل:



$$W_1 = 230 \text{ kg}, W_2 = 460 \text{ kg}, W_3 = 180 \text{ kg}, I = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} (16)^4 = 3215.36 \text{ cm}^4$$

$$w = 1.7 \text{ kg/cm}, E = 2.11(10^6) \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore \text{Static deflection due to a weight } (W) = \Delta = \frac{WL_1^2 L_2^2}{3EIL} \therefore \text{at } W = 230 \text{ kg}$$

$$\Delta_1 = \frac{230(55)^2(185)^2}{3(2.11)(10^6)(3215.36)(240)} = 0.0048 \text{ cm where } L_1 = 55 \text{ cm}, L_2 = 185 \text{ cm}$$

$$\Delta_2 \text{ due to } 460 \text{ kg} = \frac{480(145)^2(95)^2}{3(2.11)(10^6)(3215.36)(240)} = 0.0186 \text{ cm where } L_1, L_2 = 145, 95 \text{ cm}$$

$$\Delta_3 \text{ due to } 180 \text{ kg} = \frac{180(190)^2(50)^2}{3(2.11)(10^6)(3215.36)(240)} = 0.0033 \text{ cm where } L_1, L_2 = 190, 50 \text{ cm}$$

وبذلك يمكن تعيين الانحراف الاستاتيكي (Δ_s) نتيجة الحمل المنتظم التوزيع وحيث ان السرعة الحرجة للعمود هي نفس السرعة عند التردد الطبيعي للاهتزاز العرضي ، والتردد الطبيعي f_n للاهتزاز العرضي يمكن تعيينه أيضا كما يلي:

$$\therefore \Delta_s = \frac{5}{348} \left(\frac{wL^4}{EI} \right) = \frac{5}{348} \left(\frac{1.7(240)^4}{2.11(10^6)(3215.36)} \right) = 0.207(10)^{-6} \text{ cm}$$

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \frac{\Delta_s}{1.27}}} = \frac{4.987}{\sqrt{0.0048 + 0.0186 + 0.0033 + \frac{0.2(10)^{-6}}{1.27}}} = 30.59 \text{ rev/sec}$$

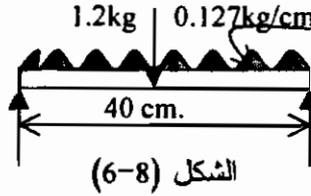
$$\therefore N_c = f_n(60) = 30.59(60) = 1835.7 \text{ rpm}$$

3- Calculate the whirling speed of a shaft 1.8 cm diameter and 0.4m long carrying a load of 1.2 kg at its mid-point. The density of the shaft material is 0.05 kg/cm³ and young's modulus is 2(10)⁶ kg/cm². Assume the shaft to be freely supported.

3- إحصب السرعة الحرجة لعمود قطرة 1.8 سم وطولة 0.4 متر يحمل حمل 1.2 كجم عند منتصفه ، كثافة مادة العمود 0.05 كجم/سم³ ومعامل المرونة (2(10)⁶ كجم/سم² . إفرض ان العمود حر الاسناد.

الحل:

$$L=40 \text{ cm} , W=1.2 \text{ kg} , d=1.8 \text{ cm} , I=(\pi / 64)(1.8)^2=0.52 \text{ cm}^2 , w=(\text{area})(\text{length})(\text{density})$$



حيث w هي وزن العمود لكل وحدة طول weight of the shaft per unit length ويمكن تعيين

الانحناء الاستاتيكي Δ_s نتيجة الحمل 1.2 كجم عند منتصف العمود وكذلك تعيين كل من التردد الطبيعي (f_n) والسرعة الحرجة (N_c) للاهتزاز العرضي كما يلي:

$$\therefore w = A.L.\rho = \frac{\pi}{4}(1.8)^2(1)(0.05) = 0.127 \text{ kg/cm}$$

$$\therefore \Delta = \frac{WL^3}{48EI} = \frac{(1.2)(40)^3}{48(2)(10^6)(0.52)} = 1.538(10)^{-3} \text{ cm}$$

$$\Delta_s = \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{5(0.127)(40)^2}{384(2)(10^6)(0.52)} = 0.00407 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{Frequency of Transverse vibration} = f_n =$$

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta + \frac{\Delta_s}{1.27}}} = \frac{4.987}{\sqrt{0.00154 + \frac{0.00407}{1.27}}} = 72.1 \text{ cycle/sec}$$

$$\therefore N_c = \text{The whirling speed of a shaft} = 72.1(60) = 4342.8 \text{ rpm}$$

4-A rotor weighing 18 kgf is mounted mid-way on a 1.8 cm. diameter horizontal shaft supported at the ends by two bearings. The bearing span is 70 cm. Because of certain manufacturing defect , the centre of gravity of the disc is 0.015 mm away from the gometric centre of the rotor. if the system rotates at 3100 rpm , determine , the amplitude of the steady state vibration and the dynamic force transmitted to the bearing , $E=2(10)^6 \text{ kgf/cm}^2$

4-دوار وزنة 18 kgf مركب في منتصف عمود أفقي قطرة 1.8 cm. مسند عند طرفية بواسطة كرسيان

تحميل. البعد بين كرسى التحميل 70 cm ، نتيجة لعدم دقة التصنيع فان مركز ثقل الدوار ينحرف عن

المركز الهندسي بقدر 0.015 mm ، إذا كانت هذه المنظومة تدور بسرعة 3100 rpm ، أوجد السعة

للاهتزاز في الحالة المستقرة والقوى الديناميكية المنتقلة الى كراسى التحميل ، حيث $E=2(10)^6 \text{ kgf/cm}^2$

لاشارة السالبة توضح ان الازاحة تكون خارج الطور ومع قوة الطرد المركزية ، والحمل على كراسى التحميل يتضمن الحل نتيجة النقل بالاضافة الى الحمل الديناميكي.

$$\therefore k = S = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48(2)(10)^6 \frac{\pi}{64} (1.8)^4}{(70)^3} = 144 \text{ kgf/cm}$$

$$\therefore \omega_n = \omega_c = \sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \sqrt{\frac{S \cdot g}{W}} = \sqrt{\frac{144(981)}{18}} = 88.6 \text{ rad/sec}$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi \cdot n \cdot e}{60} = \frac{2\pi(3100)}{60} = 324.5 \text{ rad/sec} \quad \therefore r = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{324.5}{88.6} = 3.66$$

$$\therefore r^2 = 13.41 \quad \therefore y = \frac{r^2 \cdot e}{1 - r^2} = \frac{13.41(0.0015)}{1 - 13.41} = -0.00162 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{the dynamic load on the bearing} = R_{dynamic} = S \cdot y = 144(0.00162) = 0.233 \text{ kgf}$$

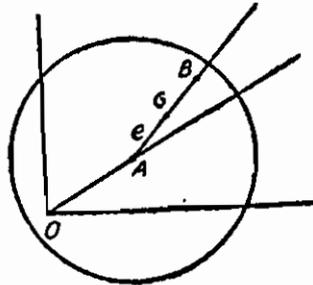
$$\therefore \text{the total load on each bearing} = \frac{W}{2} + \frac{R_{dynamic}}{2}$$

$$\therefore R_{each bearing} = \frac{18}{2} + \frac{0.233}{2} = 9.117 \text{ kgf}$$

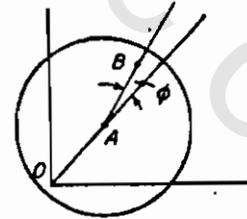
5-A disc attached to the middle of a flexible shaft has a critical speed of 2200 rpm. After the disc had been balanced , an additional balance weight of 45 grm weight was attached to the disc at a distance of 0.3 m from its centre and the shaft was than rotated at 1450 rpm. By means of stroboscope the phase angle ϕ was found to be 12° . Find the radius of the circle described by the centre of the disc when the weight of the disc is 13 kgf.

Fig.(6-8) shows (o) as the centre of rotation , A as the centre of the disc ,and B as the balance weightt of 45

5- قرص مركب في وسط محور مرن يدور بسرعة حرجة مقدارها 2200 rpm ، لقد تم إتزان القرص باضافة وزن مقداره 45 جرام على بعد 0.3 متر من المركز ، بعدها تم تدوير المحور بسرعة 1450 rpm بواسطة جهاز قياس الذبذبات وجد ان زاوية الطور ϕ مقدارها 12° . أوجد نصف قطر الدائرة حول مركز القرص عندما يكون وزن القرص 13kgf ، الشكل (6-8) يوضح ان مركز الدوران ، A مركز القرص ، B ثقل الاتزان بمقدار 45 جرام.



(a)



(b)

الشكل (6-9a,b)

إعتبر ان e هي بعد مركز الثقل للقرص بعد إضافة كتلة 50 جرام للوزن عن المركز الهندسي A كما مبين بالشكل (6-9).

$$\therefore 13 e = (30 - e)(0.045) \therefore e = 0.103 \text{ cm}, \phi = 12^\circ \quad \tan \phi = \tan(12^\circ) = \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) = 0.2125$$

$$\therefore r = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) = \frac{1450}{2200} = 0.66 \therefore r^2 = 0.436 \therefore \frac{2\zeta(0.66)}{1 - (0.436)} = 0.2125 \therefore \zeta = 0.0908$$

$$\therefore R = \text{The radius of the circle} = \frac{er^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} =$$

$$\therefore R = \frac{0.103(0.436)}{\sqrt{[1 - (0.436)]^2 + [2(0.0908)(0.66)]^2}} = 0.079 \text{ cm}$$

6-A steel shaft 60 cm. long and 2 cm. diameter on two spherical bearings , on the mid span , a mass of 14 kg installed , if there is an eccentricity that gives a moment 4 kg.cm. Find the maximum deflection of the shaft at speed 92% of the critical speed.

6-كرسين محورين كروين يدور بينهم عمود من الصلب طولة 60 سم وقطرة 2 سم ، وضع عليه قرص عند منتصفه كتلة 14 كجم ، فاذا وجد لامركزية بالقرص (نتجة الدوران حدث رفة بالقرص) فتولد عنة عزم مقدارة 0.4 كجم.سم . أوجد أقصى إنحراف بالعمود عندما يدور بسرعة 92% من السرعة الحرجة.

الحل:

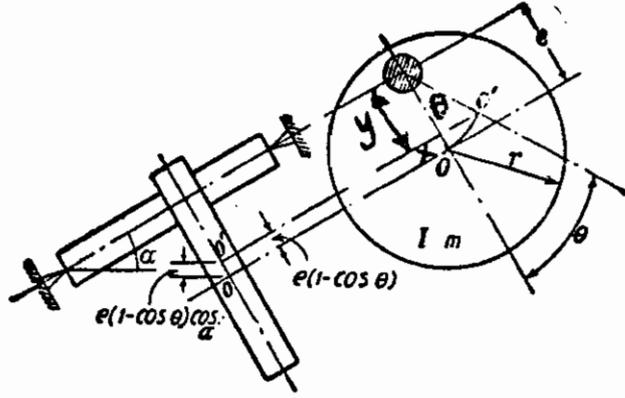
$$\therefore R = \frac{me\omega^2}{k - m\omega^2} \quad \therefore \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad R = \frac{\frac{me\omega}{k - m\omega^2}}{\frac{k}{k - m\omega^2}} = \frac{er^2}{1 - r^2} \quad \therefore r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.92$$

$$\therefore \text{moment} = m.e = 0.4 \text{ kg.cm} \quad \therefore e = \frac{0.4}{m} = \frac{0.4}{14} = 0.0286 \text{ cm}$$

$$\therefore R = \frac{0.0286(0.92)^2}{1 - (0.92)^2} = 0.16 \text{ cm.}$$

7-A circular disc is attached to shaft as shown in fig(6-10). If the eccentricity of the discis (e) end the shaft is inclined at an angle with the horizontal plane, determinethe equation of motion of the system by the energy method , solve the problem by newton;s law of motion also.

7-قرص دائري متصل بعمود كما بالشكل (6-10) ، اذا كانت e هي لامركزية للقرص فى نهاية العمود ويميل بزواية على المستوى الافقى. أوجد معادلة الحركة للمنظومة بطريقة الطاقة وايضا بقانون نيوتن للحركة.



الشكل (6-10)

أ-طريقة الطاقة:

من الرسم المبين بالشكل(6-10)

$$\because x = e - y \quad , \cos \theta = \frac{y}{e} \quad \therefore y = e \cdot \cos \theta \quad \therefore x = e - e \cos \theta = e(1 - \cos \theta)$$

$$oo' = e(1 - \cos \theta) \cos \alpha$$

وعزم القصور الذاتي للقرص حول مركز العمود:

$$\therefore I = I + me^2 = \frac{1}{2}mr^2 + me^2 = m\left(\frac{r^2}{2} + e^2\right)$$

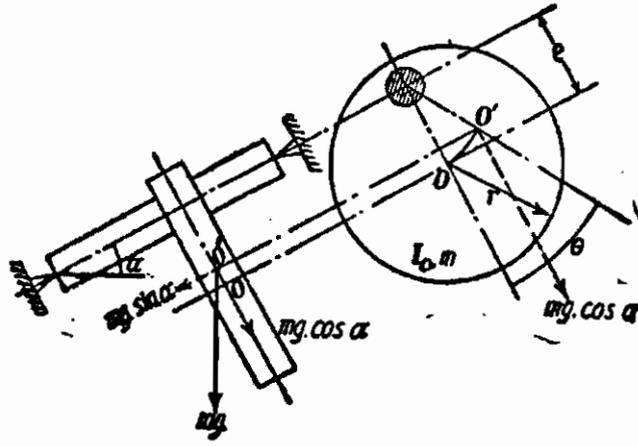
$$K.E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r^2}{2} + e^2\right)\dot{\theta}^2 \quad , \quad P.E = mge(1 - \cos \theta) \cos \alpha$$

$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r^2}{2} + e^2\right)(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + mge \cos \alpha \cdot \sin \theta \dot{\theta} = 0 \quad \text{where } \sin \theta \cong \theta$$

$$\therefore m\left(\frac{r^2}{2} + e^2\right)\ddot{\theta} + mge \cos \alpha \cdot \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left[\frac{g \cdot e \cdot \cos \alpha}{\left(\frac{r^2}{2} + e^2\right)} \right] \theta = 0 \quad \therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \cdot e \cdot \cos \alpha}{\left(\frac{r^2}{2} + e^2\right)}} \text{ c.p..s}$$

طريقة نيوتن:

مع إعتبار ان مركبتين للوزن وهما $mg \cdot \sin \alpha$ عمودية على مستوى القرص ، والمركبة $mg \cos \alpha$ فى مستوى القرص وتمثل عتلة للذراع الذى يمثله $e \cdot \sin \theta$.



الشكل (6-11)

$$I = I_o + me^2 = m\left(\frac{r^2}{2} + e^2\right)$$

$$\therefore I \ddot{\theta} = -mge \cos \alpha \sin \theta = -mge \cos \alpha \theta$$

$$\therefore m\left(\frac{r^2}{2} + e^2\right) \ddot{\theta} + mge \cos \alpha \theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{ge \cos \alpha}{\frac{r^2}{2} + e^2}\right) \theta = 0 \quad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ge \cos \alpha}{\frac{r^2}{2} + e^2}} \text{ c.p.s}$$

تمارين علوالباب السادس

- 1-A vertical shaft 20 mm diameter rotates in long bearings and a disc weighing 24 kg is attached to the mid span of the shaft. The span of the shaft between bearings is 1.6 m. The mass centre of the disc is 0.5 mm from the axis of the shaft. Neglecting the mass of the shaft, and taking the deflection as for a fixed beam at both ends. Find (1) the critical speed of rotation, and (2) the range of speed over which the stress in the shaft due to bending will not exceed 800 kg/cm^2 . the young's modulus for the material of the shaft may be taken as $2(10^6) \text{ kg/cm}^2$
- 2-A shaft 18 cm diameter is supported in two bearing 280 cm apart. It carries three discs of weight 210 kg, 420 kg and 150 kg at 70 cm, 160 cm and 220 cm from the left hand. Assuming the shaft to weight 20 kg/cm length determine the critical speed of the shaft. Young's modulus for the material of the shaft is $2.1(10^6) \text{ kg/cm}^2$
- 3- Calculate the whirling speed of a shaft 1.4 cm diameter and 0.3 m long carrying a load of 1.4 kg at its mid-point. The density of the shaft material is 0.06 kg/cm^3 and young's modulus is $2.11(10^6) \text{ kg/cm}^2$. Assume the shaft to be freely supported.
- 4-A rotor weighing 22 kgf is mounted mid-way on a 2 cm diameter horizontal shaft supported at the ends by two bearings. The bearing span is 90 cm. Because of certain manufacturing defect, the centre of gravity of the disc is 0.018 mm away from the geometric centre of the rotor. if the system rotates at 3400 rpm, determine, the amplitude of the steady state vibration and the dynamic force transmitted to the bearing, $E=2.1(10^6) \text{ kgf/cm}^2$
- 5-A disc attached to the middle of a flexible shaft has a critical speed of 2500 rpm. After the disc had been balanced, an additional balance weight of 60 gm weight was attached to the disc at a distance of 0.4 m from its centre and the shaft was then rotated at 1600 rpm. By means of stroboscope the phase angle ϕ was found to be 15° . Find the radius of the circle described by the centre of the disc when the weight of the disc is 16 kgf.
- Fig.(6-8) shows (O) as the centre of rotation, A as the centre of the disc, and B as the balance weight of gram
- 6-A steel shaft 80 cm. long and 1.8 cm. diameter on two spherical bearings, on the mid span, a mass of 16 kg installed, if there is an eccentricity that gives a moment 5 kg.cm. Find the maximum deflection of the shaft at speed 90 % of the critical speed.
- 7-A heavy rotor weighs 1300 kg and is fixed at mid span to a shaft 12 cm diameter and 184 cm long. The axial length of the rotor is 92 cm. and it may be assumed that over this length the shaft is prevented from bending. If the ends of the shaft are supported in long bearings and young's modulus for the shaft material is $2(10^6) \text{ kg/cm}^2$. Find the whirling speed of the shaft.
- 8- A shaft 1.3 cm. diameter rotates in long bearings and a disc of mass 18 kg is secured to a shaft at the middle of its length. The span of the shaft between the bearing is 52 cm. The mass centre of the disc is 0.6 mm. from the axis of the shaft. Neglecting the mass of the shaft and taking $E=2(10^6) \text{ kg/cm}^2$, Find:
- (1) Critical speed of rotation in rpm and (2)-The range of speed over which the stress in the shaft due to bending will not exceed 1200 kg/cm^2
- 9-A vertical shaft 22 mm diameter and 0.7 m long is mounted in long bearings and carries a pulley of mass 12 kg midway between the bearings. the centre of pulley is 0.6 mm from the axis of the shaft. Find:
- (a)-the whirling speed, and (b)-the bending stress in the shaft, when it is rotating at 1650 rpm. Neglect the weight of the shaft and assume $E=200 \text{ GN/m}^2$.
- 10-A shaft 4 in. dia. is supported in bearing 8 ft. apart. It carries two pulleys which weighs 500 lb. and 300 lb at distances of 3 ft. and 6 ft. respectively from one bearing. Calculate the whirling speed by (a)-Dunkerley's method.
- (b)the energy method. Find the value of the constant C in the equation $N_c = (C/\Delta_n)$, Where N_c is the Whirling speed and Δ_n is the maximum static of the shaft