

## الباب السابع

النظومات ثمانية درجة الحرية

obeykandi.com

## 1- مقدمة:

المنظومات التي لها حركتان مستقلتان وغير توافقيتان وتحتاج الى إحدائين لوصف الحركة تسمى بالمنظومات ثنائية الحركة . ولكن توجد حالة خاصة والتي تتحرك فيها الوجدتان بحركة توافقية وتُردد واحد تسمى بالحالة الرئيسية (Principle mode) وبسمى التردد في هذه الحالة بالتردد الطبيعي ، أما إذا اعتبرنا ان إحدى الوجدات المترددة واحدا صحيحا فانه يطلق على الحركة بالحالة الاعتيادية (normal mode) ويلاحظ ان عدد الحالات الاعتيادية لكل مجموعة يقابل عدد درجات حريتها ، ومثال على ذلك نجد ان المجموعة ثنائية الحركة (ذات درجتين من الحرية) يكون لها حالتان إعتياديتان ، مع ملاحظة ان المنظومات ذات درجتين من الحرية وغير المخددة تكون حركتها دورية وتتكون من العديد من الحركات الترددية ولكن المنظومات ذات درجتين من الحرية ومع الخمد فان حركتها لاتكون دورية وبذلك فهي لاتكون حركات توافقية . والشكل (7-1) يوضح الكثير من الامثلة على المنظومات ذات درجتين من الحرية حيث نلاحظ ما يلي:-

1- المنظومة المبينة بالشكل (7-1-a) تتكون من كتلتين  $m_1, m_2$  ونابضين معاملهما  $k_1, k_2$  وتؤثر على الكتلة  $m_1$  قوة إستثارة  $F_0 \sin \omega t$  ولتحديد موضع الكتلتين في الفراغ نحتاج الى إحدائى واحد فقط لكل كتلة ويمثل كل من الازاحتين  $x_1(t)$  ،  $x_2(t)$  بالنسبة للزمن  $(t)$  ، ولذلك فهذه المنظومة ذات درجتين من الحرية اى هي منظومة ثنائية الحركة.

2- المنظومة المبينة بالشكل (7-1-b) تتكون ايضا من كتلتين  $m_1, m_2$  ونابضين  $k_1, k_2$  وخامدين  $c_1, c_2$  ولوصف حركة هذه المنظومة وتحدد موضعها في الفراغ يلزم إحدائين وهما  $x_1(t)$  ،  $x_2(t)$  وذلك بالنسبة للزمن  $(t)$  ولهذا فهي منظومة ذات درجتين من الحرية اى ثنائية الحركة.

3- المنظومة المبينة بالشكل (7-1-c) تمثل بندول مركب يتكون ايضا من كتلتين  $m_1, m_2$  ونلاحظ وجود ثلاث احداثيات لوصف الحركة وتحديد موضع كل كتلة في الفراغ و الاحداثيات الثلاثة هي ،  $\theta_2(t)$  ،  $x_1(t)$  ،  $x_2(t) - y_1(t)$  ،  $\theta_1(t) - y_2(t)$  ، ويلاحظ انه يكفي احدائين فقط من هذه الاحداثيات الثلاثة لوصف

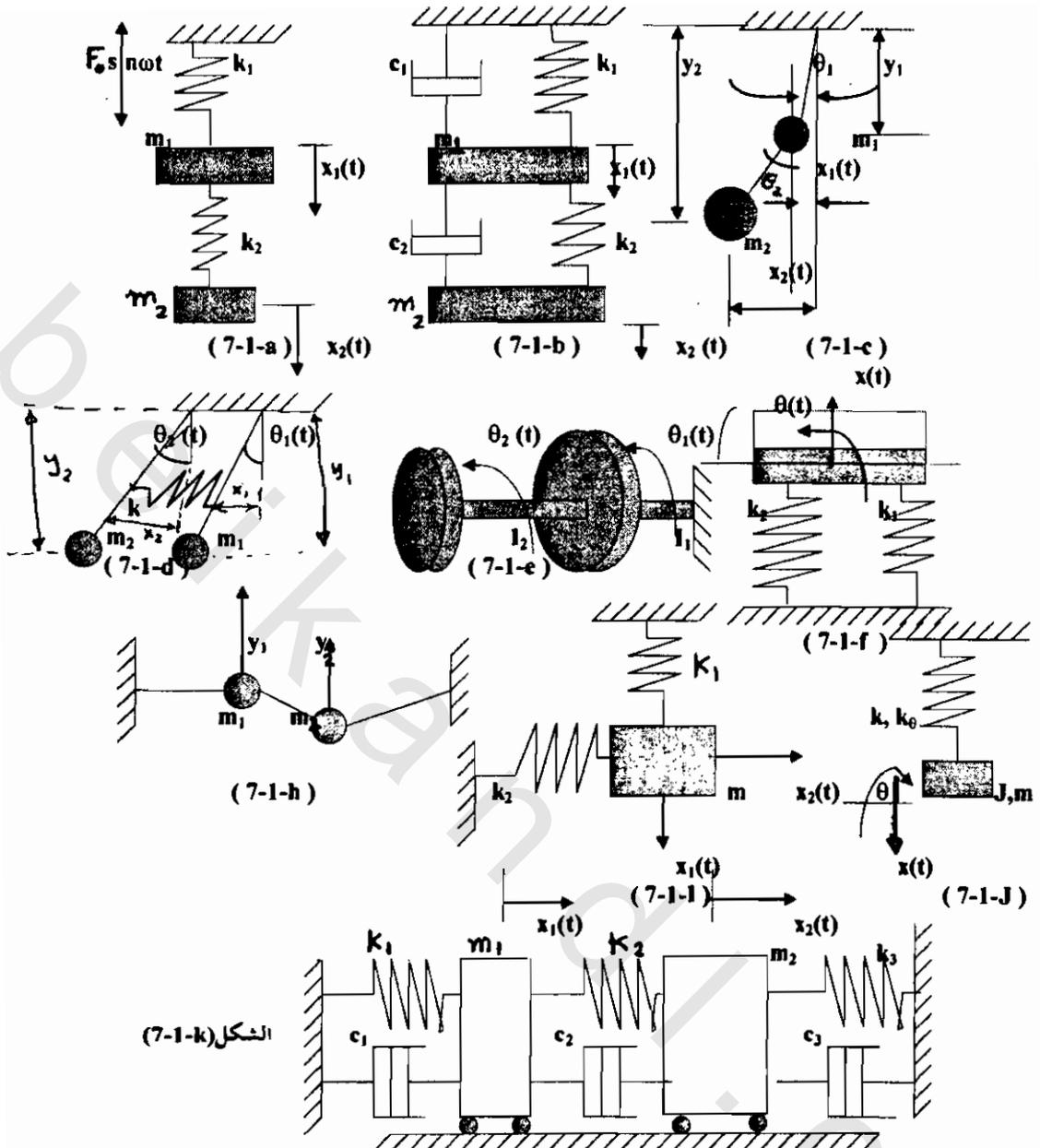
حركة المنظومة وتحديد موضع الكتلتين في الفراغ وذلك تعتبر هذه المنظومة ذات درجتين من الحرية اي منظومة ثنائية الحركة.

4- المنظومة المبينة بالشكل (7-1-d) تعتبر ايضا منظومة ذات درجتين من الحرية حيث انها تمثل بندولان بسيطان مع ملاحظة وجود ثلاث أحداثيات وهما الازاحة الزاوية لكل بندول  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  والاحداثين الاخرين متمثل في الازاحة الخطية الافقية لكل كتلة  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  والازاحة الراسية لكل كتلة  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  ، واي إحدائين منهما كافيان لوصف حركة المنظومة وتحديد موضع كل كتلة في الفراغ. ولذلك فهي منظومة ثنائية الحركة اي منظومة ذات درجتين من الحرية.

5- المنظومة المبينة بالشكل (7-1-e) تتكون من قرصين مثبتين على عمود فاذا تعرضت هذه المنظومة لعزم التواء فيحدث ازاحة زاوية لكل قرص وهما  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  وهما كافيان لوصف حركة المنظومة وتحديد موضعها في الفراغ ولذلك فهي منظومة ذات درجتين من الحرية (ثنائية الحركة).

6- المنظومة المبينة بالشكل (7-1-f) تتكون من كتلة  $m$  مُسندة على نابضين معا ملهم  $k_1$ ,  $k_2$  وعند اهتزاز هذه المنظومة تحدث ازاحتين احدهما ازاحة خطية  $x(t)$  وازاحة زاوية  $\theta(t)$  وهما كافيان لوصف حركة المنظومة وتحديد موضع الكتلة في الفراغ ، وبالمثل للمنظومة (7-1-g) عند حركتها تحدث ازاحة خطية لكل كتلة وهما  $y_1(t)$  ,  $y_2(t)$  ، ولذلك فالمنظومتان تعتبران ذات درجتين من الحرية.(ثنائية الحركة)

7- المنظومة (7-1-h) تتكون من كتلة  $m$  واحدة ونابضين  $k_1$ ,  $k_2$  وعند اهتزاز المنظومة فانها تتحرك في اتجاهين  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  وهذان الاتجاهان هما ايضا الاحداثيان اللذان لوصف حركة المنظومة وموضع الكتلة في الفراغ ، وبالمثل للمنظومة بالشكل (7-1-i) لها احداثيان  $x(t)$ ,  $\theta(t)$  وهما كافيان لوصف حركة المنظومة وتحديد موضع الكتلة في الفراغ ، وكذلك المنظومة بالشكل (7-1-j) لها احداثيان  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  وهما ايضا كافيان لوصف حركة المنظومة في الفراغ وتحديد موضع الكتلتين في الفراغ ، وبالتالي فان المنظومات الثلاثة هي منظومات ثنائية الحركة اي منظومات ذات درجتين من الحرية.



الشكل (1-7) يوضح منظومات ذات درجتين من الحرية

## 2- النسق الطبيعي او الرئيسي (Normal Mode)

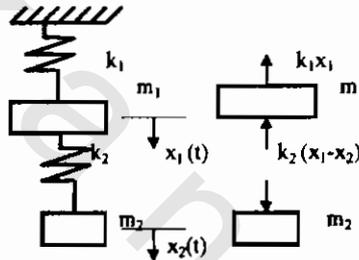
عندما تتذبذب كتل المنظومة وتصل الى اقصى ازاحة وتمر خلال نقاط إتزانها أنيا فان الاجزاء المتحركة في المنظومة تتحرك متطاوره بتردد واحد ، ولايجاد النسق الطبيعي للمنظومات ثنائية درجة الحرية فانه يلزم ايجاد معادلتى الحركة ومعادلة التردد كما سيلي شرحه.

### 3- معادلات الحركة للمنظومات ثنائية درجة الحرية.

عدد درجات الحرية للمنظومات يكون مرتبط بعدد معادلات الحركة ، حيث المنظومات ذات درجة الحرية الواحدة يكون لها معادلة حركة واحدة ، والمنظومات ذات درجتين من الحرية يكون لها معادلتين للحركة ، ولايجاد معادلات الحركة للمنظومات او التجهيزات ثنائية الحركة يلزم ايجاد القوى المؤثرة على كل كتلة او قرص دوار ، ثم بتطبيق طرق وقوانين ايجاد معادلات الحركة مثل طريقة الطاقة Energy method او الطريقة التابعة لقانون نيوتن Newton's law الثانى او معادلة لاجرانج Lagrange equation او طريقة رايليت Rayleigh method .....الخ.

### 4- الازاحة الخطية (الرأسية): مثال (1)

اوجد القوى المؤثرة على كل كتلة واكتب معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-2):



الشكل (7-2)

يلزم ايجاد القوى المؤثرة على الكتلتين ، وبتطبيق قانون نيوتن الثانى

$$\therefore m \ddot{x} = \sum F_x \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0. \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0. (1)$$

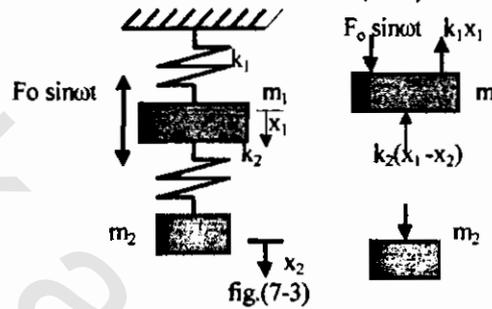
$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = +k_2 (x_1 - x_2) \quad \therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

اي نعين القوى المؤثرة على كل كتلة وبتطبيق قانون نيوتن الثانى على كل كتلة فيمكن كتابة معادلة الحركة لكل كتلة كما فى المعادلة (1) التى تمثل معادلة الحركة للكتلة الاولى  $m_1$  والمعادلة (2) تمثل معادلة الحركة للكتلة الثانية  $m_2$  مع ملاحظة اخذ اتجاه تأثير قوة عجلة الجاذبية الارضية الى اسفل هو الاتجاه الموجب واي قوى تؤثر فى عكس اتجاه عجلة الجاذبية الارضية اى فى الاتجاه لاعلى يكون سالب. ، ونلاحظ ان القوى التى تؤثر على الكتلة الاولى  $m_1$  هى قوة شد النابض الاول الذى معاملته  $k_1$  للكتلة ويكون اتجاها لاعلى بينما الكتلة نفسها تجد قوة مقاومة من النابض الثانى الذى معاملته  $k_2$  تقاوم حركة الكتلة  $m_1$  الى اسفل وبالتالي يكون اتجاها الى اعلى ويعين مقدارها من حاصل ضرب معامل

النايى الثانى  $k_2$  فى الازاحة النسبية وهى الفرق بين اىزاحة الكتلة الاولى  $x_1$  وازاحة الكتلة الثانية  $x_2$  اى ان قوة النايى الثانى  $F_2$  يعبر عنها بالعلاقة التالية  $F_2 = k_2(x_1 - x_2)$  ونلاحظ ايضا ان هذه القوة  $F_2$  الناتجة من النايى الثانى تضغط على الكتلة الثانية الى اسفل وبالتالى يكون تأثيرها على الكتلة الثانية  $m_2$  فى اتجاى معاكس لتأثيرها على الكتلة الاولى  $m_1$  وبنفس المقدار اى ان  $F_2 = k_2(x_1 - x_2)$  مثال (2): اذا اىرت فى الكتلة  $m_1$  بالمنظومة المبينة بالشكل (7-2) بالمثال (1) قوة  $F_0 \sin \omega t$  ، اوجد القوى المؤثرة فى كل كتلة وكذلك اوجد معادلتى الحركة..

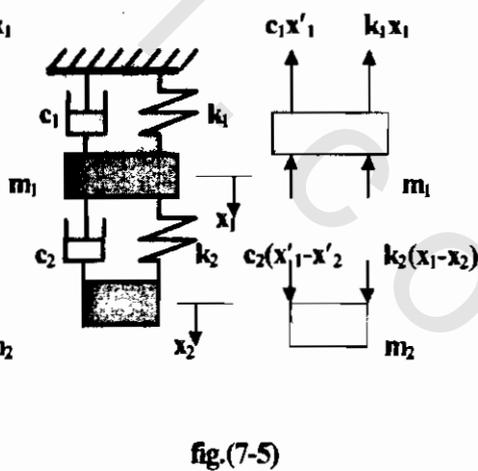
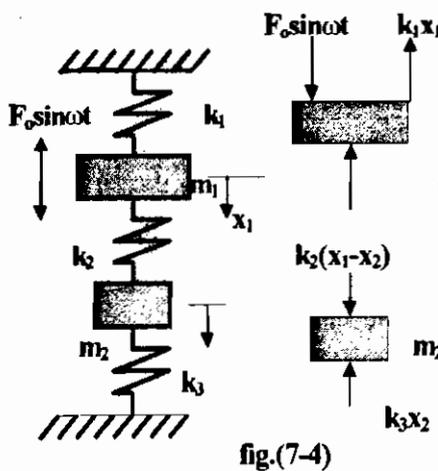
الحل:

عند تأثير القوة  $F_0 \sin \omega t$  يكون تأثيرها دائما موجب واتجاهها الى اسفل وتكون معادلة الحركة هى نفس المعادلة (1) ولكن بفرق ان الطرف الايمن للمعادلة لا يساوى الصفر ولكن يساوى القوة  $F_0 \sin \omega t$  والمعادلة (2) فى المنظومة بالشكل (7-3) تكون نفس المعادلة للمنظومة المبينة بالشكل (7-2) كما يلى:



$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(1) \quad , m_2 \ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

نلاحظ عند حل المسائل الخاصة بالمنظومات ذات درجتين من الحرية يجب ايجاد معادلتى الحركة لهذه المنظومات وهذا يتطلب معرفة القوى التى تؤثر على الكتل او العناصر الفعالة بالمنظومة ، ولتوضيح ذلك يمكننا توضيح هذه القوى وكتابة معادلتى الحركة لبعض المنظومات الهامة الاتية:



ويمكن إيجاد معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-4) بتطبيق قانون نيوتن كما يلي:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_0 \sin \omega t \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \sin \omega t \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 \quad \therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \dots (2)$$

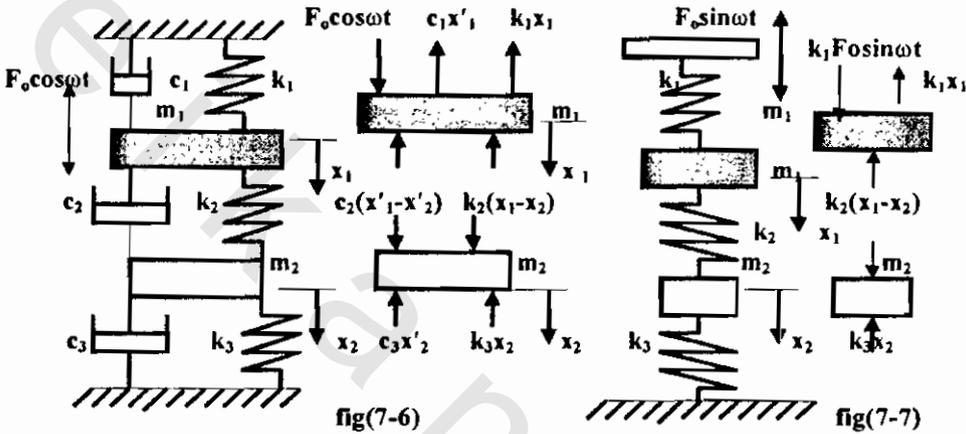
معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-5) بتطبيق قانون نيوتن كما يلي:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 = 0 \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = 0 \dots (2)$$



يمكن إيجاد معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-6) حسب قانون نيوتن كما يلي:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_0 \cos \omega t$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 = F_0 \cos \omega t \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 = 0 \dots (2)$$

وبالمثل للمنظومة المبينة بالشكل (7-7) يلاحظ وجود دعامة مهمة الوزن أى ان (m=0) مثل قاعدة

جهاز لاقط الاهتزاز وهو من الاجهزة الرجفية الخاصة بقياس الازاحة النسبية بين كتلة الجهاز وكتلة

الماكينة المراد قياس حركتها الاهتزازية حيث قاعدة جهاز لاقط الاهتزاز تثبت على الماكينة ويلاحظ ان

الدعامة تحت تأثير القوة  $F_0 \sin \omega t$  ، وهذه القوة تؤثر بطريق غير مباشر على الكتلة  $m_1$  عن طريق

نابض معاملته  $k_1$  وخوا مد معاملته  $c_1$  ولذلك فان الكتلة تقع تحت تأثير القوة المذكورة مضروبة فى معامل

النابض  $k_1$  أى القوة التى تؤثر فى الكتلة يكون مقدارها  $k_1 F_0 \sin \omega t$  ويمكن إيجاد معادلتى الحركة كما

يلى:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) + k_1 F_0 \sin \omega t$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = k_1 F_0 \sin \omega t \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

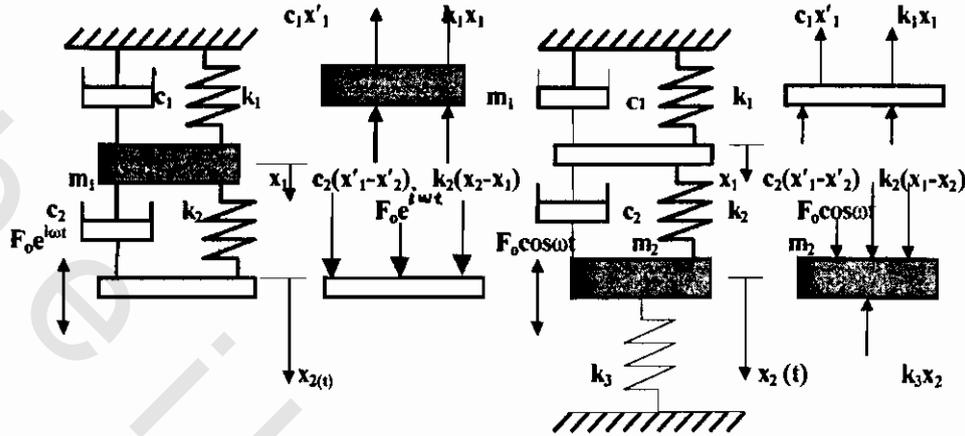


fig.(7-8A)

fig.(7-8B)

يلاحظ في المنظومة المبينة بالشكل (7-8A) وجود دعامة مهمة الكتلة أي ان (m=0) وهي مثل الدعامة الموجودة بجهاز لاقط الاهتزازات كقاعدة تثبت على الماكينة المراد قياس الحركة الاهتزازية لها ، وجهاز لاقط الاهتزازات يعتبر من أجهزة القياس الرجفية التي تستخدم في قياس الحركة النسبية بين كتلة جهاز لاقط الاهتزاز والماكينة وكذلك يستخدم في قياس السرعة والعجلة الراسية مثل القطارات او المركبات وعند ايجاد معادلة الحركة لهذه الدعامة وعناصر المنظومة المتصلة بها نطبق عليها قانون نيوتن الثاني وذلك بعد التعويض عن  $m\ddot{x} = 0$  كما في المعادلة (2) من معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-8A) ، والمعادلة (1) من معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-8B) وبذلك يمكن ايجاد معادلتى الحركة للمنظومتان كما يلي:

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-8A)

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_2 (x_1 - x_2) - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 = 0 \quad \therefore 0 = k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_0 e^{i\omega t}$$

$$\therefore k_2 x_2 - k_2 x_1 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = F_0 e^{i\omega t} \dots \dots \dots (2)$$

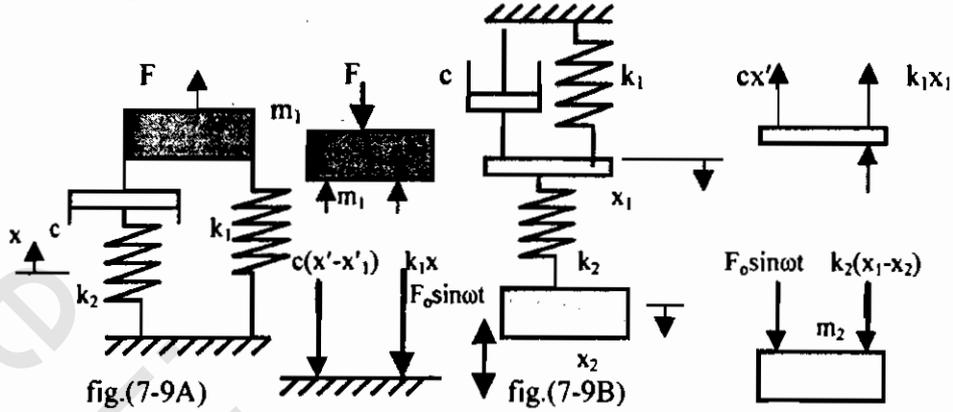
معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-8B) مع ملاحظة وجود دعامة منعدمة الكتلة أي ان (m=0) والكتلة m2 تؤثر فيها القوة  $F_0 \cos \omega t$

$$\therefore m = 0 \quad \therefore 0 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore (k_1 + k_2)x_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3 x_2 + F_o \cos \omega t$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = F_o \cos \omega t \dots \dots \dots (2)$$



معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-9A) :

$$\therefore m \ddot{x} = \sum F_x$$

$$\therefore m_1 \ddot{x} = -k_1 x - c(\dot{x} - \dot{x}_1) + F \quad \therefore m_1 \ddot{x} + k_1 x + c(\dot{x} - \dot{x}_1) = F \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 = 0 \quad \therefore 0 = c(\dot{x} - \dot{x}_1) - k_1 x_1 \quad \therefore k_1 x_1 - c(\dot{x} - \dot{x}_1) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

معادلتى الحركة بالنسبة للمنظومة المبينة بالشكل (7-9B) وذلك مع الاخذ فى الاعتبار ان كتلة الدعامة منعقدة الوزن :

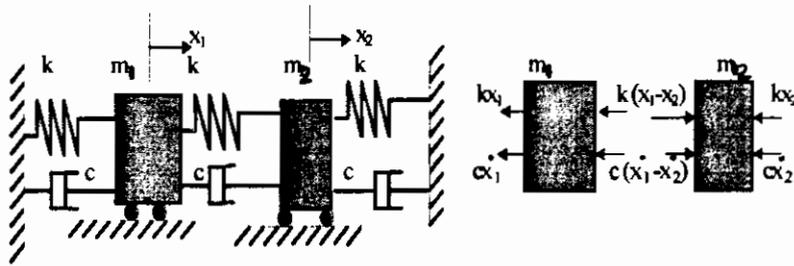
$$\therefore m \ddot{x} = \sum F_x \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 = 0 = -k_1 x_1 - c \dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2)$$

$$\therefore (k_1 + k_2)x_1 + c \dot{x}_1 - k_2 x_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + F_o \sin \omega t \quad \therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = F_o \sin \omega t \dots \dots \dots (2)$$

**5- الازاحة الخطية الافقية**

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-10)



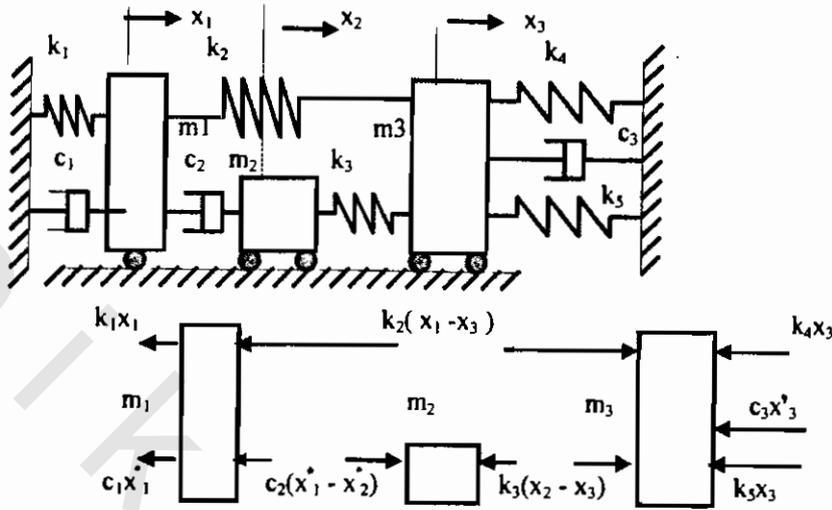
(7-10)

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) - c\dot{x}_1 - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 + 2c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - kx_2 - c\dot{x}_2$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 + 2c\dot{x}_2 - c\dot{x}_1 = 0 \dots \dots \dots (2)$$



الشكل (7-11)

معادلات الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-11)

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

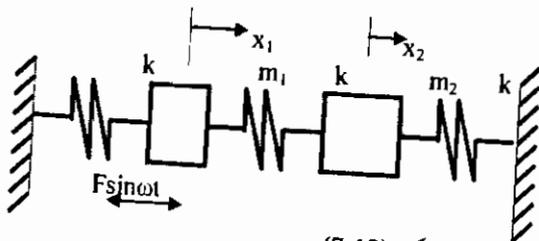
$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3(x_2 - x_3)$$

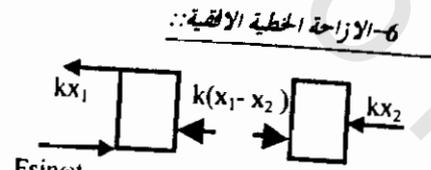
$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 + k_3x_2 - k_3x_3 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore m_3 \ddot{x}_3 = k_2(x_1 - x_3) + k_3(x_2 - x_3) - k_4x_3 - c_3\dot{x}_3 - k_5x_3 \dots \dots \dots$$

$$\therefore m_3 \ddot{x}_3 - k_2x_1 + (k_2 + k_3 + k_4 + k_5)x_3 - k_3x_2 + c_3\dot{x}_3 = 0 \dots \dots \dots (3)$$



الشكل (7-12)



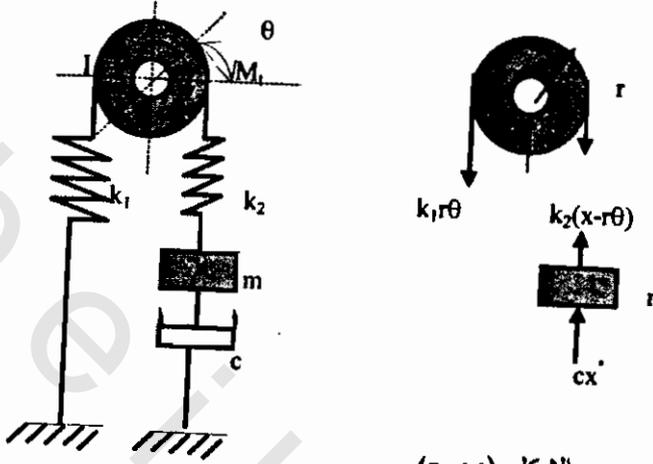
الشكل (7-13)

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-12)

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) + F \sin \omega t \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F \sin \omega t \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2 \quad \therefore m_2 \ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \dots (2)$$

7-الإزاحة الزاوية (الدورانية):

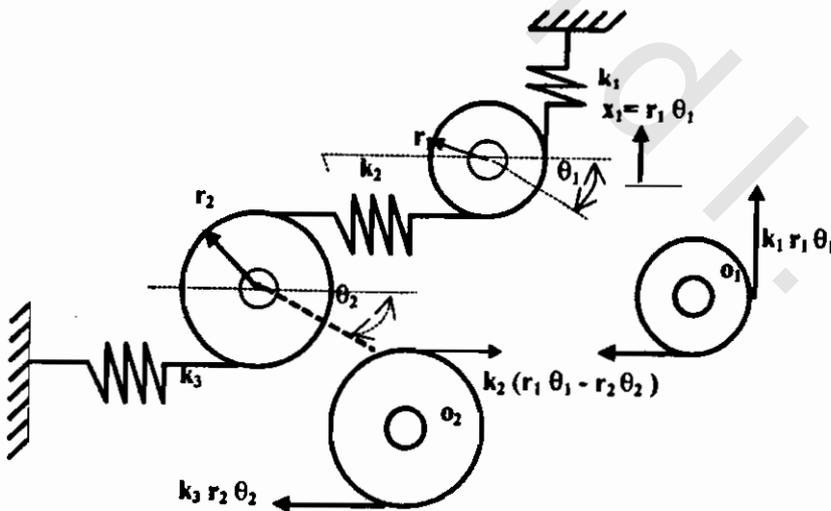


الشكل (7-14)

$$\therefore \sum M_o = I\ddot{\theta} \quad \therefore \sum M_o = k_1 r \theta r - k_2 (x - r\theta) r - M_t$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + k_1 r^2 \theta - k_2 (x - r\theta) r = M_t \dots (1)$$

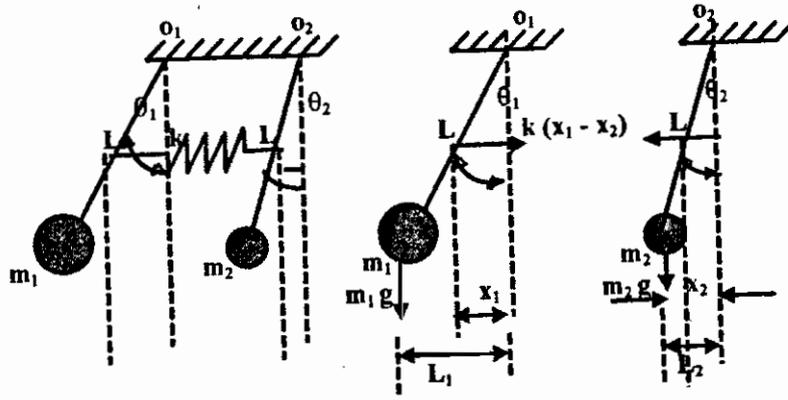
$$\therefore m\ddot{x} = -k_2 (x - r\theta) - c\dot{x} \quad \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + k_2 x - k_2 r\theta = 0 \dots (2)$$



الشكل (7-15)

$$\therefore \sum M_{o_1} = I_1 \ddot{\theta}_1 \quad \therefore I_1 \ddot{\theta}_1 + (k_1 + k_2) r_1^2 \theta_1 - k_2 r_1 r_2 \theta_2 = 0 \dots (1)$$

$$\therefore \sum M_{o_2} = I_2 \ddot{\theta}_2 \quad \therefore I_2 \ddot{\theta}_2 + k_2 r_1 r_2 \theta_1 - (k_2 - k_3) r_2^2 \theta_2 = 0 \dots (2)$$



الشكل (7-16)

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-16)

$$\therefore \sum M_{o_1} = I_1 \ddot{\theta}_1, \therefore \sum M_{o_1} = m_1 gl + k(x_1 - x_2)b = m_1 gl + kb^2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\therefore I_1 \ddot{\theta}_1 + (m_1 gl + kb^2)\theta_1 - kb^2\theta_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore \sum M_{o_2} = I_2 \ddot{\theta}_2, \therefore \sum M_{o_2} = m_2 gl_2 - kb^2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\therefore I_2 \ddot{\theta}_2 - kb^2\theta_1 + (m_2 gl_2 + kb^2)\theta_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

8-خطوات إيجاد معادلة التردد والترددات الطبيعية ونسب السعات للمنظومات ذات درجتين من الحرية:

1-نعين معادلتى الحركة للمنظومة ثنائية الحركة.

2-نفرض ان الحركة للمنظومة غير المخمدة دورية وتتكون من العديد من المركبات التوافقية ذات

الترددات والسعات المختلفة ولذلك نعوض عن إحدى المركبات باحدى العلاقات الاتية :

$$(1) x_1 = D \sin(\omega t + \phi), x_2 = E \sin(\omega t + \phi) \quad (2) x_1 = D \cos(\omega t + \phi), x_2 = E \cos(\omega t + \phi) \quad (3) x_1 = D e^{i\omega t}, x_2 = E e^{i\omega t}$$

حيث x هي الازاحة ،  $\phi$  هي زاوية الطور ، E, D هي ثوابت اختيارية ،  $\omega$  هي إحدى الترددات الطبيعية للمنظومة.

3-نفاضل المركبتين  $x_1, x_2$  بالعلاقة (1) التي(تمثل الازاحتين) بالنسبة للزمن لنحصل على السرعة

والعجلة كما يلي:

$$\dot{x}_1 = \omega D \cos(\omega t + \phi), \ddot{x}_1 = -\omega^2 D \sin(\omega t + \phi), \dot{x}_2 = \omega E \cos(\omega t + \phi), \ddot{x}_2 = -\omega^2 E \sin(\omega t + \phi)$$

4-نعوض من العلاقات  $x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2$  فى معادلتى الحركة فنحصل على معادلات

جبرية خطية فى E, D ويسمى الحل  $E=D=0$  بالحل فى حالة الاتزان للمنظومة.

5- نحصل على الحل المتمثل فى معادلة التردد بوضع المعادلات الجبرية الخطية المتجانسة فى صورة

محدد ومساووة بالصفر اذا كانت المعادلات متجانسة ثم نفك المحدد فنحصل على معادلة التردد ، ويلاحظ وجود إحدى مركبات الترددات على صورة  $\omega^4$

6-للحصول على الترددتين الطبيعيين  $\omega_1, \omega_2$  من معادلة التردد نضع  $\lambda = \omega^2$  فى معادلة التردد فتؤول

معادلة التردد الى معادلة من الدرجة الثانية والتي يمكن إيجاد جذورها باستخدام القانون العام التالي:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث  $\lambda_1 = \omega_1^2$  ,  $\lambda_2 = \omega_2^2$  وبالتالي يمكن إيجاد  $\omega_1, \omega_2$

7- يمكن الحصول على نسب السعات من المعادلات الجبرية في E, D ، اي انة يمكن إيجاد نسبة السعة الاولى  $(D_1/E_1)$  وذلك بقسمة معامل  $E_1$  من المعادلة الجبرية الاولى او الصف الاول في المحدد على معامل  $D_1$  من المعادلة الاولى او الصف الاول من المحدد ، وبالمثل يمكن إيجاد نسبة السعة الثانية للمعادلة الجبرية الثانية  $(D_2/E_2)$  وذلك بقسمة معامل  $E_2$  من المعادلة الثانية الجبرية او الصف الثاني في المحدد على معامل  $D_2$  من المعادلة الثانية او الصف الثاني في المحدد.

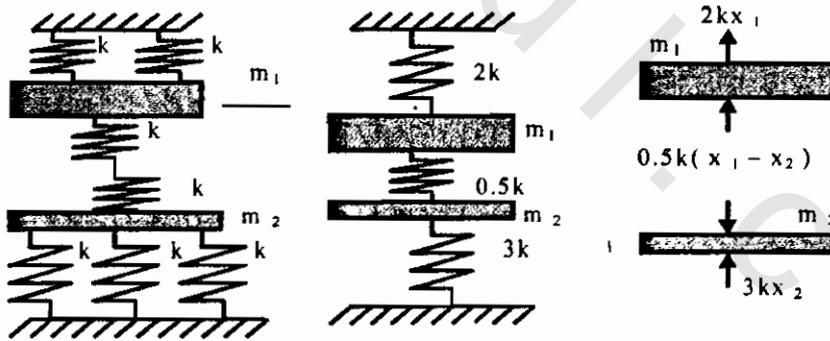
### أمثلة محلولة

1-(a) The system as shown in fig.(7-17) consisting of two masses and identical springs , each spring of stiffness k , with each mass constrained to move only in the vertical direction. Determine the equation of frequency , the two natural frequencies , and the ratio of amplitudes corresponding to those two frequencies.

(b) If the upper mass ( $m_1$ ) is displaced 1 cm. down the static equilibrium position and then released , Determine  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$  for the two masses when  $m_1 = m_2 = m$

1-أ- المنظومة المبينة بالشكل (7-17) تتكون من كتلتين ونابضين معامل كل نابض k ، وكل كتلة تتحرك في الاتجاه الرأسي فقط ، أوجد معادلة التردد والترددين الطبيعيين ونسب السعات المناظرتين لهذين الترددين

ب- إذا تحركت الكتلة العلوية ( $m_1$ ) 1 سم أسفل وضع الاتزان ثم تركت ، أوجد الازاحتين  $x_1(t)$  ,  $x_2(t)$  عندما تتساوى الكتلتين وكل منهما يساوي m



الشكل (7-17)

يمكن تعيين معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-17) كما يلي:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -2kx_1 - 0.5k(x_1 - x_2) \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 + 2.5kx_1 - 0.5kx_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = 0.5k(x_1 - x_2) - 3kx_2 \quad \therefore m_2 \ddot{x}_2 - 0.5kx_1 + 3.5kx_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

وبفرض ان الحركة دورية فهي تتكون من العديد من المركبات التوافقية ذات سعات وترددات مختلفة  
ولذلك نعوض عن إحدى هذه المركبات بالعلاقات الآتية:

حيث  $x_1 = D \sin(\omega t + \phi)$  ,  $x_2 = E \sin(\omega t + \phi)$  هما الازاحتين ،  $D$  ,  $E$  هما سعتي الحركة ،  $\omega$  هي  
أحد الترددات  $\phi$  هي زاوية الطور ثم بتفاضل الازاحتين لتعین كل من السرعة والعجلة كما بالعلاقات  
السابقة ، ثم بالتعويض بهذه العلاقات في معادلتی الحركة للمنظومة (1) ، (2) نتج المعادلتين الآتيتين:

$$\therefore (-m_1 \omega^2 + 2.5k)D - 0.5kE = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$-0.5D + (3.5k - m_2 \omega^2)E = 0 \dots\dots\dots(4)$$

ولايجاد معادلة التردد نضع المعادلتين الجبريتين (3) ، (4) على صورة المحدد وبفكته نحصل على  
معادلة التردد كما يلي:

$$\begin{vmatrix} (2.5k - m_1 \omega^2) & -0.5k \\ -0.5k & (3.5k - m_2 \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (2.5k - m_1 \omega^2)(3.5k - m_2 \omega^2) - (0.5k)^2 = 0$$

$$\therefore m_1 m_2 \omega^4 - (2.5k m_2 + 3.5k m_1) \omega^2 + \frac{34}{4} k^2 = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{assume } \lambda = \omega^2 \therefore \lambda^2 - \left( \frac{2.5k}{m_1} + \frac{3.5k}{m_2} \right) \lambda + \frac{34k^2}{4m_1 m_2} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left( \frac{2.5k}{m_1} + \frac{3.5k}{m_2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{2.5k}{m_1} + \frac{3.5k}{m_2} \right)^2 - \frac{34k^2}{m_1 m_2}}}{2}$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = -\left( \frac{5k}{4m_1} + \frac{7k}{4m_2} \right) \pm \frac{\sqrt{\left( \frac{5k}{2m_1} + \frac{7k}{2m_2} \right)^2 - \frac{34k^2}{m_1 m_2}}}{2} \dots\dots\dots(7)$$

$$\therefore \frac{D_1}{E_1} = \frac{-0.5k}{2.5k - m_1 \omega^2} , \frac{D_2}{E_2} = \frac{3.5k - m_2 \omega^2}{-0.5k} \dots\dots\dots(8)$$

وبذلك أمكن إيجاد نسب السعات من المعادلة (8)

$$\therefore \omega_{1,2}^2 = \lambda_{1,2} = \frac{3k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{2m^2}} , \lambda_1 = 2\omega_1^2 = \frac{3.71k}{m} \therefore \omega_1 = 1.9 \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/sec} \dots\dots(9)$$

$$\therefore \lambda_2 = \omega_2^2 = 2.29 \frac{k}{m} , \therefore \omega_2 = 1.5 \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/sec} \dots\dots\dots(10)$$

ب- إذا إزاحت الكتلة  $m$  مسافة  $l$  سم من موضع إترانها الاستاتيكي يكون عندها  $x_1(0)=0$  ,  $t=0$

مع اعتبار ان  $m_1=m_2=m$  ،

ويمكن إيجاد  $x_1(t)$  ,  $x_2(t)$  بالتعويض في المعادلتين الآتيتين:

$$x_1(t) = D_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + D_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \dots \dots \dots (11)$$

$$x_2(t) = D_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - D_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \dots \dots \dots (12)$$

حيث الثوابت الاربعة للتكامل يمكن الحصول عليها من الاحوال الابتدائية الاربعة الاتية:  $x_1(0)=1$  ,  $x_2(0)=0$  ,  $\dot{x}_1(0)=0$  ,  $\dot{x}_2(0)=0$

وبالتعويض فى المعادلتين (11) , (12) من الاحوال الابتدائية كما يلى:

$$\therefore 1 = D_1 \cos \phi_1 + D_2 \cos \phi_2 \dots \dots \dots (13)$$

$$0 = D_1 \cos \phi_1 - D_2 \cos \phi_2 \dots \dots \dots (14)$$

ويتفاضل المعادلتين (11) , (12) بالنسبة للزمن لاجاد  $x_1'(t)$  ,  $x_2'(t)$  ثم بالتعويض من الاحوال الابتدائية ينتج ما يلى:

$$\therefore 0 = -\omega_1 D_1 \sin \phi_1 - \omega_2 D_2 \sin \phi_2 \dots \dots \dots (15)$$

$$0 = -\omega_1 D_1 \sin \phi_1 + \omega_2 D_2 \sin \phi_2 \dots \dots \dots (16)$$

بحل المعادلتين (13) , (14) معا ينتج ان :

$$1 = 2D_1 \cos \phi_1 \quad , D_1 = \frac{1}{2 \cos \phi_1} \quad \therefore D_2 = \frac{1}{2 \cos \phi_2} \dots \dots \dots (17)$$

وبحل المعادلتين (15) , (16) معا ينتج ان:  $\sin \phi_1 = \sin \phi_2 = 0$  وبذلك يكون  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  وبالتعويض عنهما فى المعادلتين (10) , (11) ينتج ان  $D_1 = D_2 = 0.5$  وبالتالي يمكن تعيين معادلتى الحركة كما يلى:

$$\therefore x_1(t) = 0.5 \cos(1.9 \sqrt{\frac{k}{m}} t) + 0.5 \cos(1.5 \sqrt{\frac{k}{m}} t) \dots \dots \dots (18)$$

$$\therefore x_2(t) = 0.5 \cos(1.9 \sqrt{\frac{k}{m}} t) - 0.5 \cos(1.5 \sqrt{\frac{k}{m}} t) \dots \dots \dots (19)$$

### 9- الإحداثيات العمومية والرئيسية: General and Principal Coordinates

أ- الإحداثيات العمومية:

هى الاحداثيات المستقلة او المتغيرات التى يمكن بواسطتها وصف حركة المنظومة مثل الطول - الزاوية ..... الخ ، أو اى متغيرات طبيعية اخرى.

ب- الاحداثيات الرئيسية:

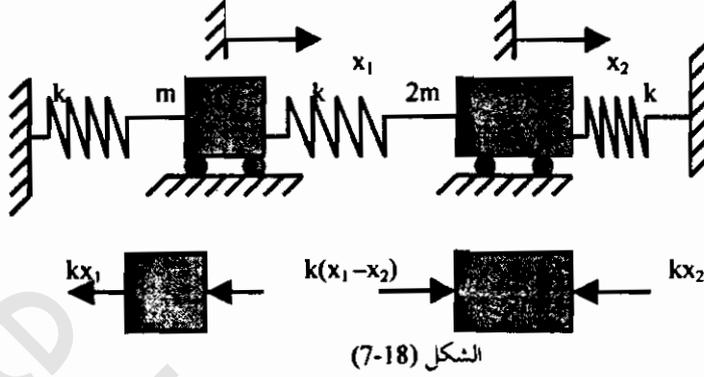
هى مجموعة من الاحداثيات تحتويها كل معادلة للحركة وتكون مجهولة وتحل هذه المعادلات مستقلة عن بعضها البعض لاجاد المجاهيل ولذلك تسمى بالاحداثيات الرئيسية.

### 10- ارتباط او تقارن الاحداثيات: Coordinate Coupling

يوجد نوعان من الارتباط وهو الارتباط الاستاتيكي بسبب الازاحات الاستاتيكية والارتباط الديناميكي بسبب القصور الذاتى ، وارتباط الاحداثيات هو إهتزاز اى جزء من النظام ينشأ عنه إهتزاز فى جزء اخر من نفس المنظومة نتيجة القوة المنقولة من خلال عنصر الربط بينهم سواء كان نابض او خامد او كلاهما معا وسوف يشرح ذلك تفصيلا وبالامثلة التوضيحية .

2-In the undamped system as shown in fig.(7-18). Using coordinates  $x_1, x_2$  measured from reference of position , Determine the differential equations of motion ,the frequency equation and amplitudes ratio or the normal modes.

2-من المنظومة المبينة بالشكل (7-18) , باستخدام المحورين  $x_1, x_2$  ومقاس من موضع الانتساب ، أوجد معادلتى الحركة ومعادلة التردد والتردد الطبيعي لكل كتلة ونسب السعات أو النسب الطبيعية.



ويمكن كتابة معادلتى الحركة طبقا لقانون نيوتن الثانى كما يلى:

$$m \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - kx_1 \dots\dots\dots(1)$$

$$2m \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2 \dots\dots\dots(2)$$

وباعتبار ان الحركة دورية وتتكون من العديد من الحركات التوافقية ذات سعات وترددات مختلفة ، وبفرض ان احدى المركبات يمكن تمثيلها بالعلاقات التالية:

$$\therefore x_1 = De^{i\omega t} \quad , \quad \dot{x}_1 = i\omega.De^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2.De^{i\omega t} \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore x_2 = Ee^{i\omega t} \quad , \quad \dot{x}_2 = i\omega.Ee^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2.Ee^{i\omega t} \dots\dots\dots(4)$$

وبالتعويض من العلاقات (3) ، (4) فى معادلتى الحركة (1) ، (2) ينتج ما يلى:

$$\therefore (2k - \omega^2 m)D - kE = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$-kD + (2k - 2\omega^2 m)E = 0 \dots\dots\dots(6)$$

ويمكن ايجاد معادلة التردد بوضع المعادلتين (5) ، (6) فى صورة المحدد وبفكته نحصل على معادلة التردد كما يلى:

$$\begin{vmatrix} (2k - \omega^2 m) & -k \\ -k & (2k - 2\omega^2 m) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\therefore (2k - \omega^2 m)(2k - 2\omega^2 m) - k^2 = 0 \quad \therefore \omega^4 - \frac{3k}{m}\omega^2 - 1.5\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{put } \lambda = \omega^2 \quad \therefore \lambda^2 - \left(\frac{3k}{m}\right)\lambda + 1.5\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$\therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = 0.634\left(\frac{k}{m}\right) \quad , \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = 2.36\left(\frac{k}{m}\right) \dots\dots\dots(10)$$

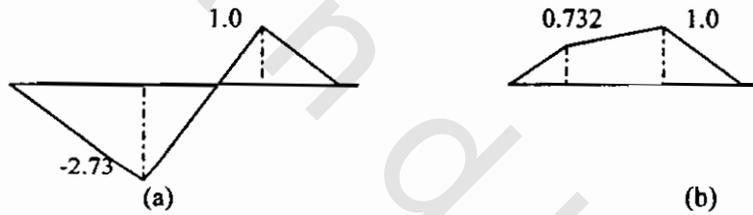
$$\therefore \omega_1 = 0.79\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/sec} \quad , \quad \omega_2 = 1.54\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/sec} \dots\dots\dots(11)$$

وبذلك يمكن إيجاد نسب السعات The ratio of amplitudes كما يلي:

$$\therefore \frac{D_1}{E_1} = \frac{k}{2k - \omega_1^2 m} = \frac{k}{2k - 0.634\left(\frac{k}{m}\right)m} = 0.731 \dots\dots\dots(12)$$

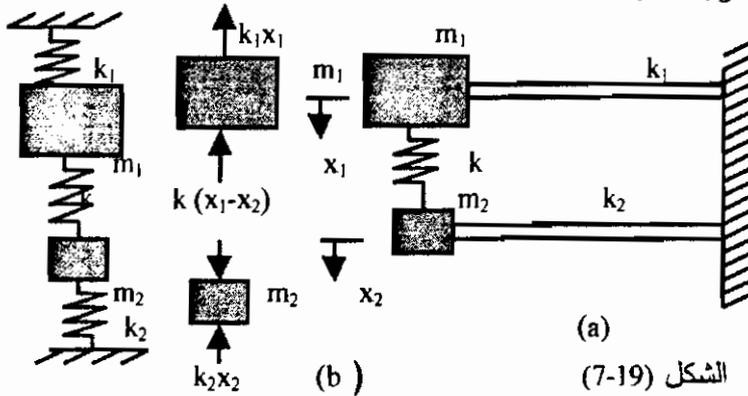
$$\therefore \frac{D_2}{E_2} = \frac{k}{2k - \omega_2^2 m} = \frac{k}{2k - 2.36\left(\frac{k}{m}\right)m} = -2.73 \dots\dots\dots(13)$$

ويمكن رسم النسق بيانيا كما يلي:



3-The system shown in fig.(7-19a) Determine the equations of motion , the equation of frequency and the two natural frequencies. If  $m_1=m_2=m$  ,  $k_1=k_2=k$  determine the amplitudes ratio

3- المنظومة المبينة بالشكل (7-19a) ، أوجد معادلتى الحركة ومعادلة التردد ومعادلتى التردد الطبيعيين، إذا كانت  $m_1=m_2=m$  ,  $k_1=k_2=k$  أوجد نسب السعات.



(a) الشكل (7-19)

الشكل (7-19a) يمثل منظومة تتكون من كتلتين  $m_1$  ,  $m_2$  و نابض بينهما معاملته  $k$  و كل كتلة متصلة بنابض و رقي معامل كل منهما  $k_1$  ,  $k_2$  ن والشكل (7-19b) يوضح القوى المؤثرة على كل كتلة ن والشكل (7-19c) يوضح المنظومة المكافئة ويمكن ايجاد معادلتى الحركة كما يلي:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k_2 x_2 \quad \therefore m_2 \ddot{x}_2 - kx_1 + (k + k_2)x_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

وبفرض ان الحركة دورية وبدون خمد فهي تتكون من العديد من المركبات التوافقية ذهت الترددات والسعات المختلفة ولذلك نعوض عن احدى المركبات كما بالعلاقتين الاتيتين:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi) , \dot{x}_1 = \omega A_1 \cos(\omega t + \phi) , \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \phi) \dots \dots \dots (3)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi) , \dot{x}_2 = \omega A_2 \cos(\omega t + \phi) , \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \phi) \dots \dots \dots (4)$$

بالتعويض من العلاقات (3) , (4) فى المعادلتين (1) , (2) نتج المعادلتين الاتيتين:

$$\therefore (k_1 + k - m_1 \omega^2) A_1 - k A_2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$-k A_1 + (k + k_2 - m_2 \omega^2) A_2 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

ويمكن الحصول على معادلة التردد كما يلي:

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k - m_1 \omega^2) & -k \\ -k & (k_2 + k - m_2 \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (k_1 + k - m_1 \omega^2)(k_2 + k - m_2 \omega^2) - k^2 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

وبالتعويض فى معادلة التردد (7) عن  $m_1 = m_2 = m$  ,  $k_1 = k_2 = k$  يمكن ايجاد الترددين الطبيعيين كما يلي:

$$\therefore (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \quad \therefore m\omega^2 - k = 0 \quad \text{or} \quad m\omega^2 - 3k = 0$$

$$\therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/sec} , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \text{ rad/sec} \dots \dots \dots (8)$$

ويمكن ايجاد نسب السعات كما يلي:

$$\therefore \text{the first mode} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{k}{k + k_1 - m_1 \omega^2} = \frac{k}{2k - m\omega^2}$$

$$\therefore \text{at } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{k}{2k - m(\frac{k}{m})} = +1 \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{or the second mode} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{k_2 + k - m_2 \omega^2}{k} = \frac{2k - m\omega^2}{k}$$

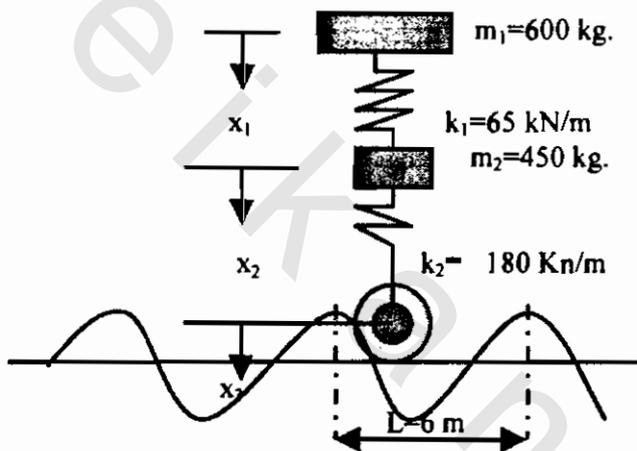
$$\therefore \text{at } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{k}{-k} = -1 \dots \dots \dots (10)$$

4-A two - wheel trailer is drawn over an undulating surface in such a way that the vertical

motion of the tyre may be regarded as sinusoidal , the pitch of the undulations being 6m. The combined stiffness of the tyres is 180 kN/m and that of the main springs is 65 kN/m , the axle and attached parts have a mass of 450 kg. , and the mass of the body is 500 kg. Find (a) the critical speeds of the trailer in km/hr and (b) the amplitude of the trailer body vibration if the trailer is drawn at 60 km/hr and the amplitude of the undulations is 0.15m.

4-مقطورة ذات إطارين (عجلتين) سحبت على طريق سطحه متموج وكانت الحركة الرأسية للإطار تأخذ شكل المنحنى الجيبى ، طول الخطوة (طول دورة موجية كاملة واحدة) 6 cm. ومعامل الاطار التركيبى 180 kN/m ومعامل النابض 65 kN/m وكتلة محور العجلتين والجزء المتصل بهما 450 kg وكتلة جسم المحرك 600 kg. (أ) أوجد السرعة الحرجة للمقطورة بالكيلومتر / ساعة.

(ب) أوجد السعة الاهتزازية لجسم المقطورة إذا سحبت المقطورة بسرعة 60 km/hr وسعة الطريق المموج 0.15 m الحل:



الشكل (7-20)

إذن يمكن إيجاد معادلتى الحركة كما يلى:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2) \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_1(x_1 - x_2) - k_2(x_2 - x_3) \quad \therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_1 x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_2 - k_2 x_3 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

نفرض ان الحركة دورية وتتكون من عدة حركات توافقية ذات سعات وترددات مختلفة وبالتالى نعوض عن إحدى هذه الحركات بالعلاقات التالية:

$$\therefore x_1 = A_1 \sin \omega t \quad , \quad \dot{x}_1 = \omega A_1 \cos \omega t \quad , \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \sin \omega t \dots \dots \dots (3)$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega t \quad , \quad \dot{x}_2 = \omega A_2 \cos \omega t \quad , \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \sin \omega t \dots \dots \dots (4)$$

$$x_3 = A_3 \sin \omega t \quad , \quad \dot{x}_3 = \omega A_3 \cos \omega t \quad , \quad \ddot{x}_3 = -\omega^2 A_3 \sin \omega t \dots \dots \dots (5)$$

إذن بالتعويض من العلاقات (3) , (4) , (5) ينتج أن:

$$\therefore A_1(k_1 - m_1 \omega^2) + A_2(-k_1) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$A_1(-k_1) + A_2(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) = k_2 A_3 \dots \dots \dots (7)$$

وبالتالى يمكن تعيين معادلة التردد كما يلي:

$$(k_1 - m_1\omega^2)(k_1 + k_2 - m_2\omega^2) - k_1^2 = 0 \dots\dots\dots(8)$$

إن يمكن تعيين السرعات الحرجة (the critical speeds) المقابلة للترددات الطبيعية وعندما يحدث الرنين وذلك من معادلة التردد كما يلي:

$$m_1m_2\omega^4 - (m_1k_1 + m_1k_2 + m_2k_1)\omega^2 + k_1k_2 = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$\therefore (600)(450)\omega^4 - [(600)(65) + (600)(180) + (450)(65)](10^3)\omega^2 + (65)(180)(10^6) = 0$$

$$\therefore 0.27\omega^4 - 176.25\omega^2 + 11700 = 0 \dots\dots\dots(10)$$

$$\text{put } \lambda = \omega^2 \therefore 0.27\lambda^2 - 176.25\lambda + 11700 = 0$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{176.25 \pm \sqrt{(176.25)^2 - 4(0.27)(11700)}}{2(0.27)} \dots\dots\dots(11)$$

$$\therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = 577.78 \text{ (rad/sec)}^2 \quad \therefore \omega_1 = 24.04 \text{ rad/sec} \dots\dots\dots(12)$$

$$\therefore \lambda_2 = \omega_2^2 = 75 \text{ (rad/sec)}^2 \quad \therefore \omega_2 = 8.66 \text{ rad/sec} \dots\dots\dots(13)$$

وبذلك يمكن إيجاد السرعات الحرجة كما يلي:

$$\therefore \omega_1 = 2\pi f \quad \therefore f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{24.04}{2\pi} = 3.83 \text{ HZ} \dots\dots\dots(14)$$

$$\therefore f = \frac{v}{3.6L} \quad \therefore v_1 = 3.6(L)f_1 = 3.6(6)(3.83) = 82.728 \text{ km/hr} \dots\dots\dots(15)$$

$$\therefore f_2 = \frac{8.66}{2\pi} = 1.38 \text{ HZ} \quad \therefore v_2 = 3.6(L)f_2 = 3.6(6)(1.38) = 29.81 \text{ km/hr} \dots\dots\dots(16)$$

ويلاحظ ان جر المقطورة عند هذه السرعات سوف يحدث إثارة الرنين للمنظومة وبالتعويض عن قيمة  $A_2$  من المعادلة (6) فى المعادلة (7) نحصل على ما يلي:

$$\therefore A_2 = \frac{A_1(k_1 - m_1\omega^2)}{k_1}$$

$$\therefore A_1(-k_1) + \frac{A_1(k_1 - m_1\omega^2)}{k_1} [k_1 + k_2 - m_2\omega^2] = k_2 A_3$$

$$\therefore A_1 [-k_1^2 + (k_1 - m_1\omega^2)(k_1 + k_2 - m_2\omega^2)] = k_1 k_2 A_3 \dots\dots\dots(17)$$

$$\therefore A_1 = \left[ \frac{k_1 k_2 A_3}{(k_1 + k_2 - m_2\omega^2)(k_1 - m_1\omega^2) - k_1^2} \right] = \left[ \frac{(65)(180)A_3}{0.27\omega^4 - 176.25\omega^2 + 11700} \right] \dots\dots\dots(18)$$

إن يمكن إيجاد سرعة المقطورة اذا سحبت بسرعة 60km/hr ، وسعة الطريق المتزوج  $A_3=0.15\text{m}$  كما يلي:

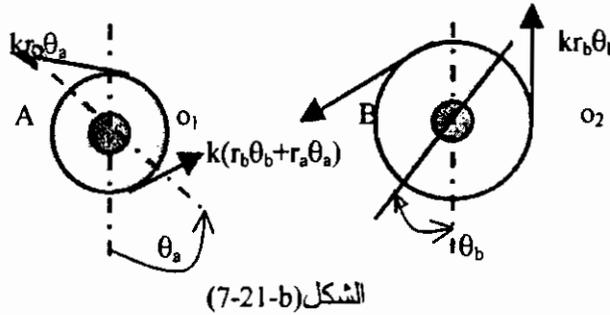
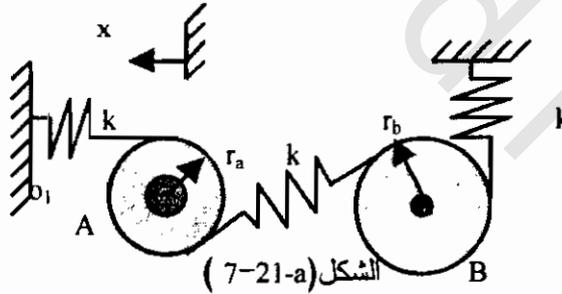
$$\therefore f = \frac{v}{L} = \frac{60}{6(3.6)} = 2.78 \text{ HZ} \quad \therefore \omega = 2\pi f = 2\pi(2.78) = 17.49 \text{ rad/sec} \dots \dots \dots (19)$$

بالتعويض عن  $\omega = 17.49 \text{ rad/sec}$  ،  $a_0 = 0.15 \text{ m}$  يمكن الحصول على السعة الاهتزازية  $A_1$  لجسم المقطورة كما يلي:

$$\therefore A_1 = \left[ \frac{(65)(180)(0.15)}{0.27(17.49)^4 - (176.25)(17.49)^2 + 11700} \right] = -0.104 \text{ m} \dots \dots \dots (20)$$

5-Part of a machine can be modelled by the system shown in fig (7-21). Two uniform discs A and B, which are free to rotate about fixed parallel axes through their centers, are coupled by a spring. Similar springs connect the discs to the fixed frame as shown in the figure. Each of the springs has a stiffness of 3 kN/m which is the same in tension or compression. Disc A has a mass moment of inertia about its axis of rotation of  $0.08 \text{ kg.m}^2$ , and a radius of  $0.15 \text{ m}$ , whilst for the disc B the corresponding figures are  $0.45 \text{ kg.m}^2$  and  $0.3 \text{ m}$ . Damping is negligible. Determine the natural frequencies of small amplitude oscillation of the system and the corresponding of amplitudes ratio.

5-جزء من ماكينة يمكن تمثيلة بالمنظومة المبينة بالشكل (7-21) والمكون من قرصان منتظمان B, A اللذان يدوران بحرية حول محورين ثابتين متوازيين خلال مركزهما  $O_1, O_2$  ومتصلين معا بنابض وكذلك نابضين متماثلين متصلين بالقرصين مع هيكل الماكينة كما مبين بالشكل (7-27) ومعامل كل نابض  $k = 3 \text{ kN/m}$  حيث يكون كل منهما متماثل أثناء الشد أو الضغط ، عزم القصور الذاتي الكتلي للقرص A حول محور دورانه  $I_a = 0.08 \text{ kg.m}^2$  ونصف قطرة  $r_a = 0.15 \text{ m}$  بينما للقرص B يكون عزم القصور الذاتي له  $I_b = 0.45 \text{ kg.m}^2$  ونصف قطرة  $r_b = 0.3 \text{ m}$  ، إهمل الخمد -أوجد الترددات الطبيعية لسعة تذبذبية صغيرة لهذه المنظومة وكذلك نسب السعات المناظرة.



$$\therefore \sum M_{O1} = -I_a \ddot{\theta}_a, \sum M_{O1} = kr_a^2 \theta_a + k(r_b \theta_b + r_a \theta_a) r_a$$

$$\therefore I_a \ddot{\theta}_a + 2kr_a^2 \theta_a + kr_a r_b \theta_b = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore \sum M_{O2} = -I_b \ddot{\theta}_b, \therefore \sum M_{O2} = k(r_b \theta_b + r_a \theta_a) r_b + kr_b^2 \theta_b$$

$$\therefore I_b \ddot{\theta}_b + 2kr_b^2 \theta_b + kr_a r_b \theta_a = 0 \dots \dots \dots (2)$$

وبفرض ان الحركة دورية وتتكون من العديد من الحركات التوافقية ذات سعات وترددات مختلفة ونعوض عن إحدى المركبات كما يلي:

$$\theta_a = A \sin \omega t, \ddot{\theta}_a = -\omega^2 A \sin \omega t, \theta_b = B \sin \omega t, \ddot{\theta}_b = -\omega^2 B \sin \omega t \dots \dots \dots (3)$$

وبالتعويض من (3) في المعادلتين (1)، (2) ينتج ما يلي:

$$\therefore (2kr_a^2 - \omega^2 I_a) A + (kr_a r_b) B = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$(kr_a r_b) A + (2kr_b^2 - \omega^2 I_b) B = 0 \dots \dots \dots (5)$$

ويمكن إيجاد معادلة التردد بوضع المعادلتين (4)، (5) في صورة المحدد كما يلي:

$$\begin{vmatrix} (2kr_a^2 - \omega^2 I_a) & kr_a r_b \\ kr_a r_b & (2kr_b^2 - \omega^2 I_b) \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$\therefore \omega^4 I_a I_b - 2k(I_a r_b^2 + I_b r_a^2) \omega^2 + 3(kr_a r_b)^2 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

وبالتعويض في معادلة التردد (7) عن القيم التال:  $k = 3 \text{ kN/m}, I_a = 0.08 \text{ kg.m}^2, I_b = 0.45 \text{ kg.m}^2, r_a = 0.15 \text{ m}, r_b = 0.3 \text{ m}$

$$\therefore \omega^4 (0.08)(0.45) - 2(3)(10^3)[0.08(0.3^2) + 0.45(0.15^2)] \omega^2 + 3[3(10^3)]^2 (0.15^2)(0.3^2) = 0$$

$$\therefore 0.036 \omega^4 - 6(10^3)(0.0173) \omega^2 + 54.675(10^3) = 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{put } \omega^2 = \lambda \therefore 0.036 \lambda^2 - 103.95 \lambda + 5467 = 0 \dots \dots \dots (9)$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = 2195.83 (\text{rad/sec})^2, \lambda_2 = \omega_2^2 = 691.67 (\text{rad/sec})^2$$

وبالتالى يمكن إيجاد الترددين ونسب السعات كما يلي:

$$\therefore \omega_1 = 46.86 \text{ rad/sec}, \omega_2 = 26.3 \text{ rad/sec} \dots \dots \dots (10)$$

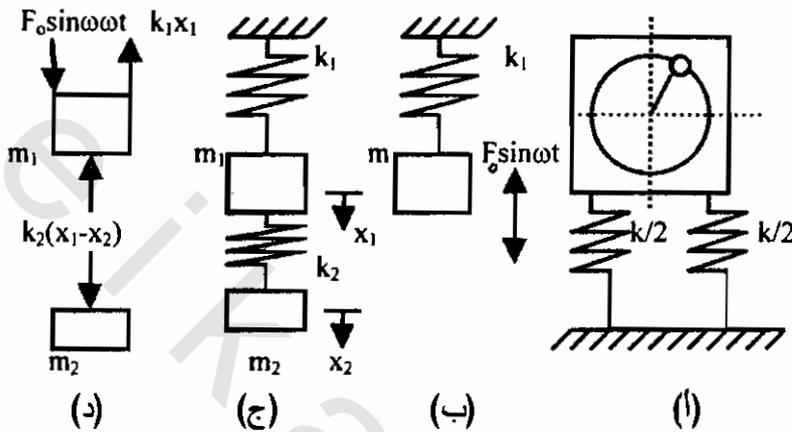
$$\therefore \frac{A_1}{B_1} = \frac{kr_a r_b}{2kr_a^2 - \omega_1^2 I_a} = \frac{135}{-40} = -3.375, \frac{A_2}{B_2} = \frac{2kr_b^2 - \omega_2^2 I_b}{kr_a r_b} = \frac{228.74}{135} = 1.69 \dots \dots (11)$$

6-A rotating machine at constant speed 4000 rpm, the exciting frequency was closed to natural frequency of the system. If the machine mass is 30 ib and the spring coefficient is 15ib/in, find the mass and the spring coefficient of the shock absorber that must be installed in order to get natural frequency for the system equal 25% of the exciting frequency?. How can you reduce the amplitude of vibration for mass m1 as much as possible by using the dynamic of the shock absorber ?

6- عند دوران ماكينة بسرعة ثابتة 4000 rpm ، كان تردد الاستثارة قريب جدا من التردد الطبيعي للمنظومة ، وإذا كانت كتلة الماكينة 30 ib ومعامل النابض 15 ib/in ، أوجد كتلة ومعامل النابض لجهاز ماص الصدمات الواجب إضافة حتى يكون التردد الطبيعي للمنظومة مساويا 25% من تردد الاستثارة ؟ كيف يمكنك تقليل سعة إهتزاز كتلة الماكينة  $m_1$  بقدر الامكان باستخدام منظومة ماص الاهتزاز

الديناميكي ؟

الحل:



الشكل (7-21)

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) + F_0 \sin \omega t \quad \therefore m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 = F_0 \sin \omega t \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_2 (x_1 - x_2) \quad \therefore m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \dots (2)$$

وبما ان المنظومة عديمة الخمد فنكون الحركة دورية وبالتالي فهي تتكون من العديد من الحركات التوافقية والتي يمكن التعويض عن احدى مركباتها  $x_2, x_1$  بالعلاقات الآتية:

$$x_1 = D \sin \omega t, \quad \dot{x}_1 = \omega D \cos \omega t, \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 D \sin \omega t \dots (3)$$

$$x_2 = E \sin \omega t, \quad \dot{x}_2 = \omega E \cos \omega t, \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 E \sin \omega t \dots (4)$$

بالتعويض من (3) ، (4) في المعادلتين (1) ، (2) نتتج المعادلتين (5) ، (6) ومنها نحصل على ما يلي:

$$\therefore (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)D - k_2E = F_0 \dots\dots\dots(5)$$

$$-k_2D + (k_2 - m_2\omega^2)E = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2 \dots\dots(7)$$

$$\therefore \Delta x_1 = \begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = F_0(k_2 - m_2\omega^2) \dots\dots\dots(8)$$

$$\therefore \Delta x_2 = \begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & F_0 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix} = k_2 F_0 \dots\dots\dots(9)$$

$$\therefore D = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{F_0(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \dots\dots\dots(10)$$

$$\therefore E = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \dots\dots\dots(11)$$

يمكن إيجاد معادلة التردد لهذه المنظومة وذلك بوضع  $\Delta=0$  بالمعادلة (7) وفك المحدد كما يلي:

$$\therefore k_1 k_2 + k_2^2 - m_1 \omega^2 k_2 - m_2 \omega^2 k_1 - m_2 \omega^2 k_2 + \omega^4 m_1 m_2 - k_2^2 = 0 \dots\dots\dots(12)$$

$$\therefore 1 - \frac{m_1 \omega^2}{k_1} - \frac{m_2 \omega^2}{k_2} - \frac{m_2 \omega^2}{k_1} + \frac{m_1 m_2 \omega^4}{k_1 k_2} = 0 \dots\dots\dots(13)$$

بالتعويض في المعادلة (12) عن قيم التردد الطبيعيين كما يلي:

$$\therefore \omega_n^2 = \frac{k_1}{m_1}, \omega_n^2 = \frac{k_2}{m_2}, r^2 = \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

$$1 - 2r^2 - \omega^2 \left( \frac{m_2}{k_1} \right) + r^4 = 0 \quad \therefore 1 - 2r^2 - \frac{k_2 \omega^2}{k_1 \omega_n^2} + r^4 = 0$$

$$\therefore r^4 - \left( 2 + \frac{k_2}{k_1} \right) r^2 + 1 = 0 \dots\dots\dots(14)$$

بما أن يجب أن تكون الترددات على الأقل 25% من تردد الاستثارة لكي نتجنب الرنين:

$$\therefore r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{100 - 25}{100} = 0.75 \dots \dots \dots (15)$$

$$\therefore (0.75)^4 - (2 + \frac{k_2}{k_1})(0.75)^2 + 1 = 0 \quad \therefore k_2 = 0.339k_1 \dots \dots \dots (16)$$

$$\text{at resonance } r = \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \quad \therefore \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} \quad \therefore \frac{k_2}{k_1} = \frac{m_2}{m_1} = 0.339 \dots \dots \dots (17)$$

$$\therefore m_2 = 0.339m_1 = 0.339(30) = 10.17 \text{ ib} \dots \dots \dots (18)$$

$$\therefore k_2 = 0.339k_1 = 0.339(15) = 5.085 \text{ ib/in} \dots \dots \dots (19)$$

بذلك لتجنب حدوث الرنين يجب ان يكون  $m_2=10.17 \text{ ib}$  ,  $k_2=5.085 \text{ ib/in}$

ولتقليل سعة إهتزاز الكتلة بقدر الامكان باستخدام ماص الاهتزاز الديناميكي فان المعادلة (10) يجب ان تساوى الصفر وبذلك يكون:

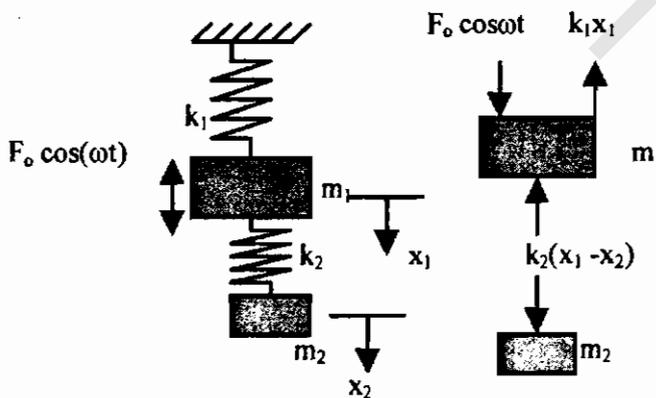
$$\therefore k_2 - m_2\omega^2 = 0 \quad \therefore k_2 = m_2\omega^2 \dots \dots \dots (20)$$

وعندما يحدث ذلك تكون سعة الكتلة  $m_1$  مساوية للصفر عمليا ولهذا تستخدم منظومة الاهتزاز الديناميكي فقط عندما يكون التردد الطبيعي للمنظومة الاصلية قريبة من تردد الاستثارة ولهذا يكون

$$\therefore \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} \dots \dots \dots (21)$$

7-Exciting force  $F_0 \cos(\omega t)$  acting on the system shown in fig(7-22). Determine the amount of damping vibration by mechanical impedance method for  $m_1, m_2$  at steady state ,If the air damping assumed to be  $c=2 \text{ kg.cm/sec}$  and  $k_1=k_2=2 \text{ kg/cm}$  , $m_1=m_2=2 \text{ kg}$  ,and  $\omega=1 \text{ rad/sec}$

7-قوة إستثارة  $F_0 \cos(\omega t)$  تؤثر في المنظومة المبينة بالشكل (7-22). أوجد مقدار الاهتزاز المخمود بطريقة الممانعة الميكانيكية للكتلتين  $m_1, m_2$  في الحالة المستقرة ، إذا فرض ان الخمد الهوائى  $c=2 \text{ kg.cm/sec}$  ، وان  $\omega=1 \text{ rad/sec}$  ،  $m_1=m_2=2 \text{ kg}$  ،  $k_1=k_2=2 \text{ kg/cm}$



الشكل (7-23)

يمكن إيجاد معادلتى الحركة للمنظومة (7-23) مع ملاحظة ان الخمد بالمنظومة خمد هوائى كما يلى:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_0 \cos(\omega t)$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 + c_1 \dot{x}_1 - k_2 x_2 = F_0 \cos(\omega t) \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 \dot{x}_2 + k_2(x_1 - x_2)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

وباستخدام طريقة الاعاقة الميكانيكية نعوض عن قوة الاستنارة والازاحات كما يلي:

$$\therefore F_0 \cos(\omega t) = F_0 e^{i\omega t} \quad , \omega = 1 \text{ rad/sec} \quad \therefore F_0 \cos(t) = F_0 e^{it} \dots \dots \dots (3)$$

$$\therefore x_1 = X_1 e^{it} \quad , \quad \dot{x}_1 = iX_1 e^{it} \quad , \quad \ddot{x}_1 = (i)^2 X_1 e^{it} = -X_1 e^{it} \dots \dots \dots (4)$$

$$\therefore x_2 = X_2 e^{it} \quad , \quad \dot{x}_2 = iX_2 e^{it} \quad , \quad \ddot{x}_2 = -X_2 e^{it} \dots \dots \dots (5)$$

وبالتعويض من العلاقات (3) ، (4) ، (5) في معادلتى الحركة (1) ، (2) ووضعهم فى صورة المحدد وبطريقة كرامر يمكن إيجاد المطلوب كما يلي:

$$\therefore (2 + 2i)X_1 - 2X_2 = F_0 \dots \dots \dots (6)$$

$$-X_1 + iX_2 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} (2+2i) & -2 \\ -1 & i \end{vmatrix} = 2i - 4 \dots \dots \dots (8)$$

$$\Delta X_1 = \begin{vmatrix} F_0 & -2 \\ 0 & i \end{vmatrix} = iF_0 \dots \dots \dots (10)$$

$$\Delta X_2 = \begin{vmatrix} (2+2i) & F_0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = F_0 \dots \dots \dots (11)$$

$$\therefore X_1 = \frac{\Delta X_1}{\Delta} = \frac{iF_0(2i+4)}{(2i-4)(2i+4)} = \frac{(2i+4)iF_0}{-20} = \frac{(-2+4i)F_0}{-20} \dots \dots \dots (12)$$

$$\therefore X_1 = (0.1 - 0.2i)F_0 \quad , \quad |X_1| = F_0 \sqrt{(0.1)^2 + (0.2)^2} = 0.22F_0 \dots \dots \dots (13)$$

$$\therefore X_2 = \frac{\Delta X_2}{\Delta} = \frac{F_0(2i+4)}{(2i-4)(2i+4)} = \frac{(2i+4)F_0}{-20} = -(0.1i + 0.2)F_0 \dots \dots \dots (14)$$

$$\therefore |X_2| = F_0 \sqrt{(0.1)^2 + (0.2)^2} = 0.22F_0$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{-0.2}{0.1} \right) = -26.6^\circ \quad , \quad \theta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{-0.2}{-0.1} \right) = 63.4^\circ \dots \dots \dots (15)$$

ويمكن التعبير عن قوة الاستثارة بالعلاقة ( $F_0 \cos t = \text{Re}(F_0 e^{i t})$ ) والازاحة يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$\therefore X_1 = X_1 e^{i t} \quad \therefore x_1 = R_p(X_1 e^{i t}) = R_p(X_1 e^{i \theta_1} e^{i t}) = X_1 \cos(t + \theta_1) \dots (16)$$

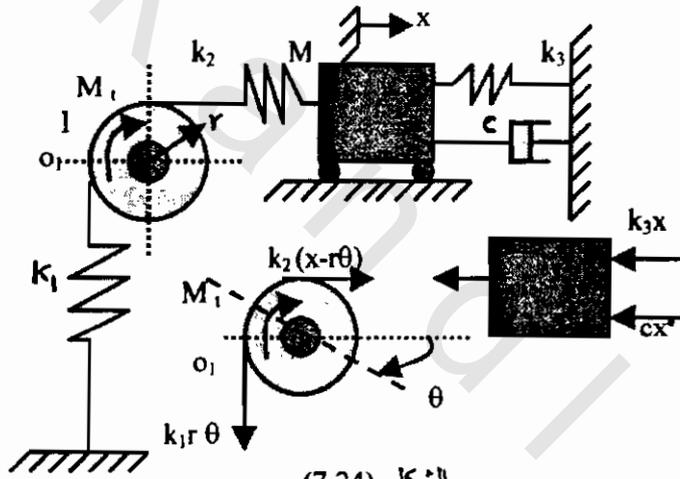
$$\therefore x_2 = X_2 \cos(t + \theta_2) \dots (17)$$

$$\therefore x_1 = 0.22 F_0 \cos(t - 26.6^\circ) , x_2 = 0.22 F_0 \cos(t + 63.4^\circ) \dots (18)$$

وبذلك تكون الاهتزازات المخمودة في الحالة القسرية تكون على الصورة المبينة بالمعادلة (21)

8-The system in fig.(7-24) consists of a pulley , a trolley of mass  $m$  , three springs of stiffness  $k_1$  ,  $k_2$  and  $k_3$  , and a dashpot in the figure. The pulley has a mass moment of subjected to the moment  $M(t)$  shown. Determine the equations of motion of the system and then put them in the matrix form considering that the displacement is  $x > r\theta$ ..

8- المنظومة المبينة بالشكل (7-24) تتكون من بكرة وعربة كتلتها  $m$  وثلاث نوابض معاملهما  $k_1$  ,  $k_2$  ,  $k_3$  وخامد معامل الخمدلة  $c$  , جميعهم إتصلوا معا كما بالشكل , عزم القصور الذاتي الكتل للبكرة حول محور الدوران , البكرة وضعت تحت عزم  $M(t)$  كما موضح بالرسم -أوجد معادلة الحركة للمنظومة وإكتبهم في الصورة المصفوفية مع إعتبار ان الازاحة  $x > r\theta$  .



الشكل (7-24)

بمأن عزم اللي الكامن يساوى عزم اللي الاسترجاعى فى المقدار ويخالفه فى الاتجاه.

وبذلك يمكن تعيين القوى المؤثرة على القرص والبكرة وكذلك معادلة حركتهما كما يلى:

$$\therefore \sum M_o = -I \ddot{\theta} \quad \therefore \sum M_o = k_1 r \theta r - k_2 (x - r\theta) r - M_t$$

$$\therefore I \ddot{\theta} + (k_1 + k_2) r^2 \theta - k_2 r x = M_t \dots (1)$$

$$\therefore M \ddot{x} = \sum F_x \quad \therefore M \ddot{x} = -c \dot{x} - k_3 x - k_2 (x - r\theta)$$

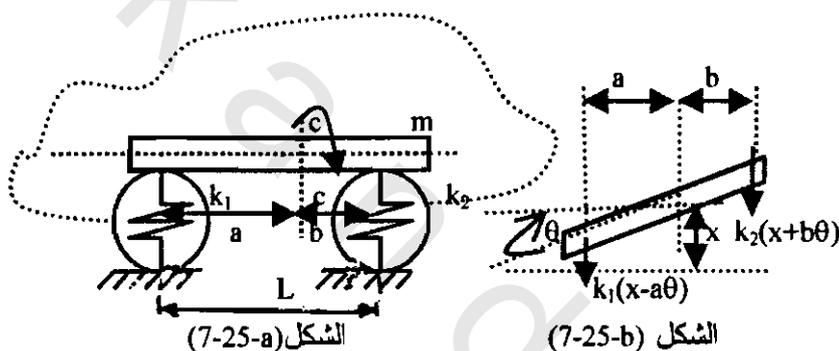
$$\therefore M \ddot{x} + c \dot{x} + k_3 x + k_2 (x - r\theta) = 0 \quad \therefore M \ddot{x} + c \dot{x} + (k_3 + k_2) x - k_2 r \theta = 0 \dots (2)$$

ويمكن كتابة معادلتى الحركة (1)، (2) فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\therefore \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 r^2 + k_2 r^2) & (-k_2 r) \\ (-k_2 r) & (k_3 + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_t \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots(3)$$

### 11- تحويلات الإحداثى والتقارن. Coordinate Transformations and Coupling.

المنظومة المبينة بالشكل (7-25a) تعتبر نموذجا رياضيا للسيارة حيث يمثل الهيكل بواسطة لوحة صلبة ذات كتلة كلية  $m$  ومركز الثقل لها يقع على بعد  $b$  من النوابض  $k_1, k_2$  على التوالى ، حيث تمثل النوابض الية التعليق بالسيارة ، وبفرض ان بدن السيارة لة عزم قصور ذاتى كتلى  $I_c$  حول المركز  $c$  ، ويلاحظ ان كتلة الاطارات قد إهملت كما نفترض ان جساتها ما لانهاية. وبين الشكل (7-25b) مخطط الجسم الحر المناظر للبدن فى الوضع المزاح ، حيث تحتوى الازاحات على الانتقال الرأسى  $x(t)$  للمركز  $(c)$  ، والدوران  $\theta(t)$  حول المركز  $(c)$  وتحدد الانتقالية  $x(t)$  من موضع الاتزان حيث يتعادل وزن السيارة  $W=mg$  مع قوى الانضغاط الابتدائية المناظرة فى النوابض. وبفرض ان الازاحة الزاوية  $\theta(t)$  صغيرة ، فيمكن كتابة المعادلتين للحركة كما يلى:



نلاحظ فى الشكل (7-25b) انه توجد ازاحتان أحدهما إزاحة زاوية  $\theta(t)$  وأزاحة خطية رأسية  $x(t)$  وتكون معادلة الحركة فى حالة الازاحة الزاوية والازاحة الخطية الرأسية كما يلى:

$$\therefore m\ddot{x} = -k_1(x - a\theta) - k_2(x + b\theta) \quad \therefore m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - (k_1 a - k_2 b)\theta = 0 \dots\dots(1)$$

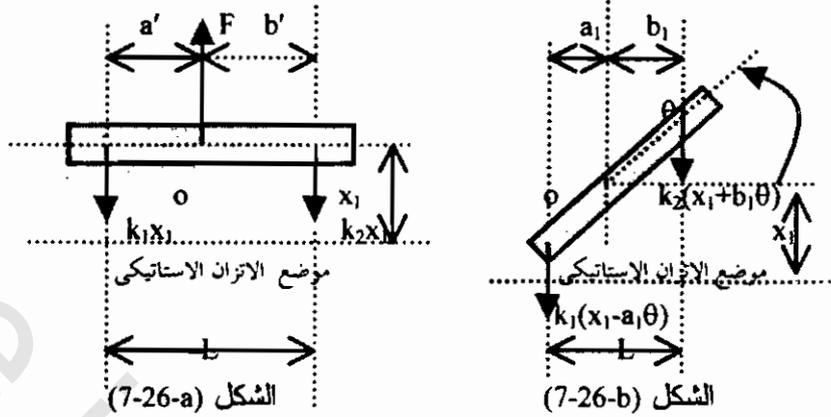
$$\therefore \sum M_c = -I_c \ddot{\theta} \quad \therefore \sum M_c = -k_1(x - a\theta)a + k_2(x + b\theta)b$$

$$\therefore I_c \ddot{\theta} - (k_1 a - k_2 b)x + (k_1 a^2 + k_2 b^2)\theta = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ويمكن وضع المعادلتين (1) ، (2) فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -(k_1 a - k_2 b) \\ -(k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

في حالة تعرض المنظومة لقوة رأسية عند نقطة (o) تتعرض المنظومة الى حركة إنتقالية فقط كما في الشكل (7-26a) ،وبفرض ان النقطة (o) تقع عند البعدين  $b_1$  ,  $a_1$  ومن النوابض  $k_1, k_2$  على التوالي ، عندئذ ترمز  $x_1$  الى الانتقال الراسي للوح (الكتلة) ونستنتج من شرط عزوم التواء الصفر حول (o) بأن :

$$k_1 x_1 a_1 = k_2 x_1 b_1 \quad , \quad \text{i.e. } k_1 a_1 = k_2 b_1 \quad \dots \dots \dots (4)$$


وباستعمال الاحداثيات  $x_1(t)$  ,  $\theta(t)$  حيث  $\theta(t)$  ترمز الى دوران الكتلة في الثانية، والمنظومة المبينة بالشكل (7-26b) توضح ذلك وبالتالي يمكن كتابة المعادلة على الصورة التالية :

$$\therefore -k_1(x_1 - a_1\theta) - k_2(x_1 + b_1\theta) = m \left[ \ddot{x}_1 - (a_1 - a)\ddot{\theta} \right] \dots \dots \dots (4)$$

$$k_1(x_1 - a_1\theta)a_1 - k_2(x_1 + b_1\theta)b_1 = I_o \ddot{\theta} - m \ddot{x}_1(a_1 - a) \dots \dots \dots (5)$$

$$\therefore k_1 a_1 = k_2 b_1 \quad \text{assume } e = a_1 - a$$

$$\therefore m \ddot{x}_1 - me \ddot{\theta} + (k_1 + k_2)x_1 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$\therefore -me \ddot{x}_1 + I_o \ddot{\theta} + (k_1 a_1^2 + k_2 b_1^2)\theta = 0 \dots \dots \dots (7)$$

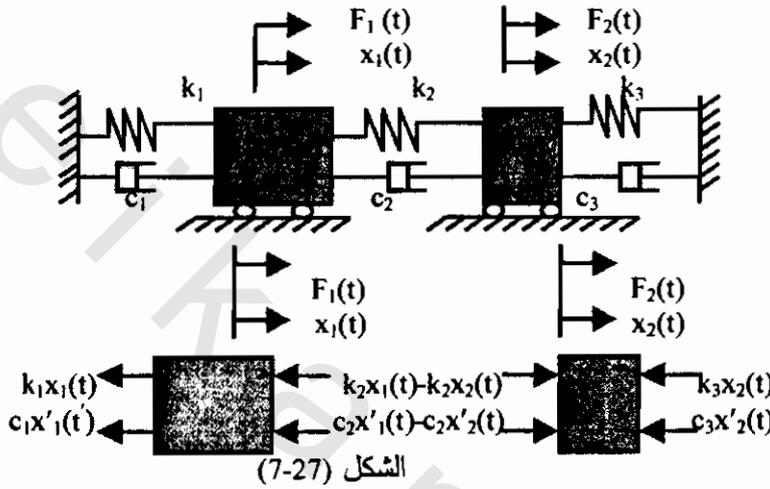
$$\therefore \begin{bmatrix} m & -me \\ -me & I_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & 0 \\ 0 & (k_1 a_1^2 + k_2 b_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

حيث  $I_o$  هي عزم القصور الذاتي الكلي للكتلة  $m$  حول المركز  $o$  والمعادلة (8) تمثل المصفوفة لمعادلتى الحركة (6) , (7) للمنظومة المبينة بالشكل (7-26-b) ، وبالنظر الى المعادلة (3) نستنتج انة عند استعمال إحداثيات الانتقال  $x(t)$  لمركز الكتلة (c) والدوران  $\theta(t)$  حولها بالمنظومة (7-25-b) تقترن معادلتا الحركة بواسطة حدود الجساءة ، ويسمى هذا التقارن او الترابط بالتقارن او الترابط الاستاتيكي او المرني ، ومن جهة اخرى فان معادلات الحركة المبينة بالمعادلة (8) قد ارتبطت بواسطة حدود القصور الذاتي ، ويسمى هذا الترابط بالترابط الديناميكي او بالقصور الذاتي ، ولهذا يتضح ان طبيعة

الترابط تعتمد على الاحداثيات المستعملة وهي ليست خواصا اساسية للمنظومة وبذلك يمكن اعتبار وجود إحداثيات  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  مثلا بحيث تصبح المعادلات عند استعمالها غير مرتبط إستاتيكيًا أو ديناميكيًا. وتكون هذه الاحداثيات موجودة واقعيًا ، وتعرف بالاحداثيات الطبيعية الاساسية ويمكن تمثيل الحركة العامة لمنظومة ذات إزاحة خطية غير متضائلة كتجميع خطي للانساق الطبيعية مضروبة بواسطة الاحداثيات الطبيعية.

## 12- الاحداثيات الطبيعية Natural coordinates

المنظومة المبينة بالشكل (7-27) هي منظومة ثنائية الحركة (ذات درجتين من الحرية).



وباعتبار ان الاحداثين  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  إزاحتين خطيتين كدالة في الزمن  $t$  ، وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على حركة الكتلتين  $m_1$ ,  $m_2$  نحصل على معادلتى الحركة ووضعهما في الصورة المصفوية كما يلي:

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1(t) = -k_1 x_1(t) - c_1 \dot{x}_1(t) - k_2 [x_1(t) - x_2(t)] - c_2 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + F_1(t) \dots\dots\dots (a)$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t) - c_2 \dot{x}_2(t) = F_1(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2(t) = k_2 (x_1(t) - x_2(t)) + c_2 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] - k_3 x_2(t) - c_3 \dot{x}_2(t) + F_2(t) \dots\dots (b)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - c_2 \dot{x}_1(t) + (c_2 + c_3) \dot{x}_2(t) = F_2(t) \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \dots\dots (3)$$

$$[m] \ddot{x}(t) + [c] \dot{x}(t) + [k] x(t) = [F(t)] \dots\dots\dots (*)$$

$-c_2 x_2(t)$  ,  $-k_2 x_1(t)$  in the first equation

and  $-k_2 x_1(t)$  in the second equation

حيث نلاحظ ان حدود الترابط (the coupling terms) بهذه المعادلات تتمثل في :

### 13- الإمتزاز الحر للمنظومات ثنائية الحركة الغير مخمدة:

المنظومة المبينة بالشكل (7-27) في حالة عدم وجود خمد وعدم وجود قوة إستثارة وبالتالي تؤل معادلتى الحركة الى ما يلى:

$$i.e \ c_1 = c_2 = 0 \quad , F_1(t) = F_2(t) = 0$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \dots \dots \dots (5)$$

put  $k_1 + k_2 = k_{11}$  ,  $k_2 + k_3 = k_{22}$  ,  $-k_2 = k_{12} = k_{21}$  in equation(4),(5)

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1(t) + k_{11}x_1(t) + k_{12}x_2(t) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + k_{12}x_1(t) + k_{22}x_2(t) = 0 \dots \dots \dots (7)$$

ونظرا لان المعادلتين (6) , (7) معادلات تفاضلية ومتجانسة فان حلها يكون متمثلا بالعلاقتين  $\alpha x_1(t)$  و  $\alpha x_2(t)$  حيث  $\alpha$  هى ثابت إختيارى ولهذا فان الحل للمعادلتين (4 و 5) يمكن فرضهم على الصورة التالية:

$$x_1(t) = u_1 f(t) \quad , x_2(t) = u_2 f(t) \dots \dots \dots (8)$$

حيث  $u_1, u_2$  تلعب دور السعات الثابتة وبالتالي فان المعادلتين (6) , (7) يمكن كتابتهم على الصورة التالية:

$$\therefore m_1 u_1 \ddot{f}(t) + (k_{11}u_1 + k_{12}u_2)f(t) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

$$\therefore m_2 u_2 \ddot{f}(t) + (k_{12}u_1 + k_{22}u_2)f(t) = 0 \dots \dots \dots (10)$$

$$\therefore \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{k_{11}u_1 + k_{12}u_2}{m_1 u_1} = \frac{k_{12}u_1 + k_{22}u_2}{m_2 u_2} = \lambda \dots \dots \dots (11)$$

حيث  $\lambda$  هى ثابت حقيقى وكذلك  $u_1, u_2, k_{11}, k_{12}, m_1, m_2$  تعتبر ثوابت حقيقتية ولهذا تكون الحركة التزامنية محتملة ويكون الحل المحتمل على صورة المعادلات التالية:

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \dots \dots \dots (12)$$

$$, (k_{11} - \lambda m_1)u_1 + k_{12}u_2 = 0 \quad , k_{12}u_1 + (k_{22} - \lambda m_2)u_2 = 0 \dots \dots \dots (13)$$

وبالتالى يمكن وضع المعادلة (12) على الصورة التالية:

$$f(t) = Ae^{st} \text{ where } s^2 + \lambda = 0 \text{ . and } s_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \dots\dots\dots(14)$$

يكون الحل للمعادلة (14) على الصورة التالية:

$$f(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 \exp(\sqrt{-\lambda}t) + A_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}t) \dots\dots\dots(15)$$

بوضع  $\lambda = \omega^2$  في المعادلة (14) نجد ان :

$$s_{1,2} = i\omega \dots\dots\dots(16)$$

وبالتالي فان المعادلة (15) يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$f(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \dots\dots\dots(17)$$

حيث  $A_1, A_2$  هي ثوابت للاعداد المركبة وان  $e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$  تمثل المتجهات المركبة التي قيمتها الوحيدة وبالتالي يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \dots\dots\dots(18)$$

وبالتالي نستنتج ان :

$$f(t) = (A_1 + A_2)\cos\omega t + i(A_1 - A_2)\sin\omega t \dots\dots\dots(19)$$

$$A_1 + A_2 = c \cos\phi \quad , \quad i(A_1 - A_2) = c \sin\phi \dots\dots\dots \text{حيث}$$

وبالتالي يكون الحل للمعادلة (19) على صورة المعادلة التالي

$$f(t) = c \cos(\omega t - \phi) \dots\dots\dots(20)$$

حيث  $c$  هي ثابت إختياري ،  $\omega$  هي التردد للحركة التوافقية ،  $\phi$  هي زاوية الطور وعندما  $\lambda = \omega^2$  فان المعادلتين المتمثلة في (13) يمكن كتابتهم على الصورة التالية:

$$(k_{11} - \omega^2 m_1)u_1 + k_{12}u_2 = 0 \dots\dots\dots(21)$$

$$k_{12}u_1 + (k_{22} - \omega^2 m_2)u_2 = 0 \dots\dots\dots(22)$$

والتي تمثل معادلتين جبريتين اثنتين متجانستين بالمجاهيل  $u_1, u_2$  مع  $\omega^2$  التي تلعب دور المتغير ، من الجبر الخطي نلاحظ ان المعادلات (21) و (22) تعتبر حلا فقط اذا كان المحدد للمعاملات  $u_1, u_2$  مساويا للصفر ، اي ان :

$$\Delta(\omega) = \det \begin{bmatrix} (k_{11} - \omega^2 m_1) & k_{12} \\ k_{12} & (k_{22} - \omega^2 m_2) \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

حيث  $\Delta(\omega^2)$  والتي تعرف بالمحددة المميزة ، وهي متوالية الحدود من الدرجة الثانية في  $\omega^2$  ، ويمكن ان نكتب بفك المعادلة (23) كما يلي :

$$\Delta(\omega^2) = m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_{22} + m_2 k_{11})\omega^2 + k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = 0 \dots\dots\dots(24)$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{0.5m_1 k_{22} + m_2 k_{11}}{m_1 m_2} \pm 0.5 \sqrt{\left(\frac{m_1 k_{22} + m_2 k_{11}}{m_1 m_2}\right)^2 - 4 \left(\frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{m_1}\right)} \dots\dots\dots(25)$$

وهي تمثل معادلة تربيعية في  $\omega^2$  تدعى بالمعادلة المميزة ، او معادلة التردد وهذه المعادلة لها الجذور

التالية، ولذلك فانه يوجد نسقان يمكن ان تكون الحركة التزامنية فيهما ممكنة الحدوث والنسق الاول بمثلة التردد الاول  $\omega_1$  والآخر التردد الثاني  $\omega_2$  واللذان يعرفان بالترددات الطبيعية للمنظومة ، ولايجاد قيم الثوابت  $u_2, u_1$  والتي تعتمد على هذين الترددين الطبيعيين ، حيث ترمز الى القيمة المناظرة للتردد  $\omega_1$  بالرمزين  $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$  والمناظرة للتردد  $\omega_2$  بالرمزين  $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}$  مع العلم بان الارقام (1) ، (2) لاتشير الى القوى الالسية ، لكن تعرف الترددات التي ترتبط معها الثوابت  $u_1, u_2$  فقط. وحيث ان المعادلتين (21) و (22) متجانستين وبالتالي يمكن ايجاد نسب السعات  $r_1, r_2$  وذلك بعد إدخال  $\omega_1^2, \omega_2^2$  كما يلي:

$$r_1 = \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} = -\frac{k_{11} - \omega_1^2 m_1}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_1^2 m_2} \dots\dots\dots(26)$$

$$r_2 = \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} = -\frac{k_{11} - \omega_2^2 m_1}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_2^2 m_2} \dots\dots\dots(27)$$

ونلاحظ ان النسبتين المقابلة الى  $r_1$  في المعادلة (26) متشابهتان وينطبق ذلك على النسبتين المقابلة الى  $r_2$  في المعادلة (27) ، وحيث ان كتابة ثنائى الثوابت  $u_1^{(1)}, u_2^{(2)}$  في طرف وثنائى الثوابت  $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}$  في الطرف الاخر يحددان شكل المنظومة عندما تحدث الحركة التوافقية التزامنية مع الترددين الطبيعيين على التوالي ويعرف كل منهما بالانساق الطبيعية لاهتزاز المنظومة ، ويمكن كتابة الانساق فى الصورة المصفوفية التالية:

$$[u^{(1)}] = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = u_1^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \dots\dots(28) \quad , \quad [u^{(2)}] = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = u_1^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} \dots\dots(29)$$

حيث كل من  $u^{(1)}, u^{(2)}$  تسمى بالمتجهات الشكلية the model vectors ويكون كل من التردد الطبيعي  $\omega_1$  والمتجهة الشكلية  $[u^{(1)}]$  تعرف بالمعنى الشائع للنسق الاول للاهتزاز وكذلك التردد الطبيعي  $\omega_2$  والمتجهة الشكلية  $[u^{(2)}]$  تسمى بالنسق الثانى للاهتزاز وبذلك تكون الرموز الدليلية الموضوعه أعلى او اسفل النسق والمحصورة بين الاقواس هى التى تميز رقم النسق ، ونلاحظ ان المنظومة ذات درجتين من الحرية يكون لها نسقان من الاهتزاز ونلاحظ أيضا ان عدد الانساق يتطابق مع عدد درجات الحرية. وكذلك نلاحظ ان الانساق الطبيعية والتي تمثل بالترددات الطبيعية والمتجهات الشكلية ، ماهى الا خاصية فريدة للمنظومة المعطاة فيما عدا قيمة المتجهات الشكلية ، حيث ان شكل النسق يكون وحيدا او فريدا (unique) بينما تكون السعة مميزة وبذلك نحصل على الحركة خلال الزمن المحدد بواسطة المعادلتين (20) و (8) والتي يمكن كتابتها على الصورة المصفوفية التالية كما يلي:

$$[x^{(1)}(t)] = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = [u^{(1)}] f_1(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) \dots\dots\dots(30)$$

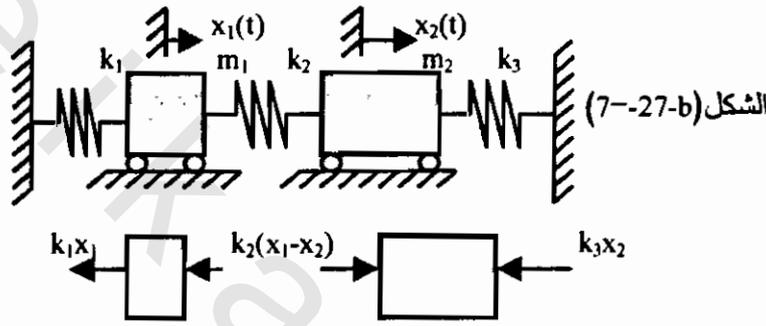
$$[x^{(2)}(t)] = \begin{bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} = [u^{(2)}] f_2(t) = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \dots\dots\dots(31)$$

حيث الثوابت  $u_1^{(1)}$  ,  $u_1^{(2)}$  قد عبر عنها بكل من  $c_1$  ,  $c_2$  على التوالي ، ويلاحظ ان  $f_1(t)$  ,  $f_2(t)$  تمثل الحل للمعادلة (20) في كل من النسق الاول والنسق الثاني ، وهذا يوضح ان الحركة للمنظومة عند أى زمن يمكن ان نحصل عليها كترابك لنسقين طبيعيين ، وبالتحديد تحسب الثوابت  $c_1$  ,  $c_2$  بالاضافة الى زاويا الطور بواسطة الشروط الابتدائية كما بالمعادلة التالية:

$$[x(t)] = [x^{(1)}(t)] + [x^{(2)}(t)] = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \dots (32)$$

9-Consider the system of fig( 7-27 ), let  $m_1=m$  ,  $m_2=2m$  ,  $k_1=k_2=k$  ,  $k_3=2k$  and obtain the natural modes of vibration.

9-لاحظ المنظومة المبينة بالشكل (7-27-b) حيث  $m_1=m$  ,  $m_2=2m$  ,  $k_1=k_2=k$  ,  $k_3=2k$  ، ثم اوجد الانساق الطبيعية للاهتزاز .



الحل :

يمكن ايجاد معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-27-b) كما يلى :

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\because k_1 = k_2 = k \quad , k_3 = 2k \quad , \because m_1 = m \quad m_2 = 2m$$

$$\therefore m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

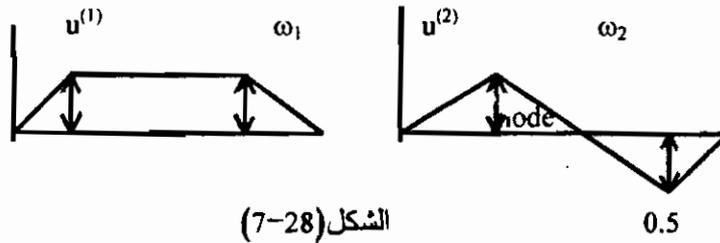
$$2m \ddot{x}_2 - kx_1 + 3kx_2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

باستخدام المعادلة (24) والتعويض من العلاقات (5) نحصل على معادلة التردد التالية والتي يمكن ايجاد جذورها كما يلى :

$$\therefore \Delta(\omega^2) = \frac{2m\omega^4}{7mk\omega^2} + 5k^2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$\therefore \omega_1^2 = \left[ \frac{7}{4} - \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}} \right] \frac{k}{m} = \frac{k}{m} \quad , \omega_2^2 = \left[ \frac{7}{4} + \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}} \right] \frac{k}{m} = \frac{5k}{2m} \dots \dots (6)$$

$$\therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \omega = 1.5811 \sqrt{\frac{k}{m}} \dots \dots \dots (7)$$



الشكل (7-28)

وبادخال  $\omega_1^2$  ,  $\omega_2^2$  فى المعادلتين (26) و (27) نحصل على النسب الآتية:

$$r_1 = \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} = -\frac{k_{11} - \omega_1^2 m}{k_{12}} = -\frac{2k - \left(\frac{k}{m}\right)m}{-k} = 1 \dots \dots \dots (7)$$

$$r_2 = \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} = -\frac{k_{11} - \omega_2^2 m}{k_{12}} = -\frac{2k - \left(\frac{5k}{2m}\right)m}{-k} = -0.5 \dots \dots \dots (8)$$

$$\therefore [u^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [u^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (9)$$

بذلك امكن الحصول على الاتساق الطبيعية من المعادلة (9) ، حيث الثوابت قد اخذت احاديا ، وهى لاتؤثر فى اشكال النسق التى خططت بيانيا فى الشكل (7-28) ونلاحظ ان النسق الثانى يوجد عند نقطة إزاحتها صفر وتسمى هذه النقطة بالعقدة.

ملاحظات على الإحداثيات الطبيعية:

نلاحظ من معادلتى الحركة (6) ، (7) حيث حصلنا على النسب  $r_1 = u_2^{(1)}/u_1^{(1)}$  ،  $r_2 = u_2^{(2)}/u_1^{(2)}$  وذلك بواسطة المعادلتين (26) ، (27) حيث يمكن كتابة حلها على الصورة التالية:

$$x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \dots \dots \dots (33)$$

$$x_2(t) = r_1 q_1(t) + r_2 q_2(t) \dots \dots \dots (34)$$

وبادخال المعادلتين (33) ، (34) فى المعادلة (6) ، (7) نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$m_1(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + k_{11}(q_1 + q_2) + k_{12}(r_1 q_1 + r_2 q_2) = 0 \dots \dots \dots (35)$$

$$m_2(r_1 \ddot{q}_1 + r_2 \ddot{q}_2) + k_{12}(q_1 + q_2) + k_{22}(r_1 q_1 + r_2 q_2) = 0 \dots \dots \dots (36)$$

وبضرب المعادلة (35) بالمقدار  $m_2 r_2$  والمعادلة (36) فى المقدار  $m_1$  ثم بالطرح بينهما نحصل على المعادلة التالية:

$$m_1 m_2 (r_2 - r_1) \ddot{q}_1 + (m_2 r_2 k_{11} + m_2 r_1 r_2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_1) q_1 + (m_2 r_2 k_{11} + m_2 r_2^2 k_{12} - m_1 k_{22} - m_1 k_{22} r_2) q_2 = 0 \dots \dots \dots (37)$$

ثم بضرب المعادلة (35) بالمقدار  $m_1 r_1$  والمعادلة (36) فى المقدار  $m_1$  ثم بالطرح بينهما نحصل على المعادلة (38) التالية:

$$m_1 m_2 (r_1 - r_2) \ddot{q}_2 + (m_2 r_1 k_{11} + m_2 r_1^2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_1) q_1 + (m_2 r_1 k_{11} + m_2 r_1 r_2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_2) q_2 = 0 \dots \dots \dots (38)$$

وباستخدام المعادلات (26) ، (27) يمكن إختصار المعادلتين (37) ، (38) الى المعادلة (39) التالية:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad , i = 1, 2 \dots \dots \dots (39)$$

حيث  $\omega_i$  ( $i=1,2$ ) هما الترددان الطبيعيان للنظام المعكوس الى المعادلتين (6) ، (7) والمعادلات  $q_1, q_2$  والتي تكون معادلات حركة نظامها مستقلة ، تسمى بالاحداثيات الطبيعية او الاساسية ، ونلاحظ ان الحلي للمعادلة (39) يكون على الصورة التالية:

$$q_i(t) = C_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad , i = 1, 2 \dots \dots \dots (40)$$

بالتعويض من المعادلة (40) فى المعادلة (33) ، (34) نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\therefore x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \dots \dots \dots (41)$$

$$x_2(t) = C_1 r_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 r_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \dots \dots \dots (42)$$

والتي يمكن كتابتها بصيغة المصفوفات كما يلى:

$$\begin{aligned} [x(t)] &= C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \\ &= C_1 [u^{(1)}] \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 [u^{(2)}] \cos(\omega_2 t - \phi_2) \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$

حيث  $u^{(1)}, u^{(2)}$  تمثل متجهات المنظومة وتعتمد السعات  $c_1, c_2$  وزوايا الطور  $\phi_1, \phi_2$  على الشروط الابتدائية. وحيث ان المعادلة (43) تكون مشابهة للمعادلة (32) مما يوضح ويؤيد بان الحركة للمنظومة عند اى زمن يمكن الحصول عليها كتراكب للانساق الطبيعية مضروبة بواسطة الاحداثيات الطبيعية.

10-Consider the automobile as shown in fig(7-25), let the system parameters have the values  $m=100 \text{ lb-s}^2/\text{ft}$  ,  $I_c=1600 \text{ lb-s}^2\text{-ft}$  ,  $k_1=2400 \text{ lb/ft}$  ,  $k_2=2700 \text{ lb/ft}$  ,  $a=4.40 \text{ ft}$  ,  $b=5.60 \text{ ft}$  , and find the natural coordinates of the system

10-اعتبر المنظومة المبينة بالشكل (7-25) تمثل سيارة ، افرض قيم متغيرات المنظومة كما يلى:

$m=100 \text{ lb-s}^2/\text{ft}$  ,  $I_c=1600 \text{ lb-s}^2\text{-ft}$  ,  $k_1=2400 \text{ lb/ft}$  ,  $k_2=2700 \text{ lb/ft}$  ,  $a=4.40 \text{ ft}$  ,  $b=5.60 \text{ ft}$  . أوجد

الاحداثيات الطبيعية للمنظومة.

الحل:

لايجاد الاحداثيات الطبيعية ، يجب ان نعين الانساق الطبيعية وادخال قيم المتغيرات المعطاة فى معادلتى الحركة التى وضعت فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\therefore m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - (k_1a - k_2b)\theta = 0, I_c\ddot{\theta} - (k_1a - k_2b)x + (k_1a^2 + k_2b^2)\theta = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -(k_1a - k_2b) \\ -(k_1a - k_2b) & (k_1a^2 + k_2b^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5100 & 4560 \\ 4560 & 131136 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore -\omega^2 \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5100 & 4560 \\ 4560 & 131136 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

والمعادلة (2) توضح معادلات القيمة الذاتية، حيث  $X$ ،  $\Theta$  هما السعتان الى  $x(t)$ ،  $\theta(t)$  على التوالي ولذلك يمكن ايجاد

$$\therefore \det \begin{bmatrix} 5100 - 100\omega^2 & 4560 \\ 4560 & 131136 - 1600\omega^2 \end{bmatrix} = 160000(\omega^4 - 132.96\omega^2 + 4050) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$\therefore$  having the solution

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = 66.48 \mp \sqrt{(66.48)^2 - 4050} = 66.48 \mp 19.22 = 47.26(\text{rad/sec})^2, 85.7(\text{rad/sec})^2$$

$\therefore$  the natural frequencies are  $\omega_1 = 6.88 \text{ rad/sec}$ ,  $\omega_2 = 9.26 \text{ rad/sec}$

ويمكن تعيين المعادلة المميزة للمنظومة وذلك بوضع معادلتى الحركة على صورة المحدد كما بالمعادلة (3) وبالتالي يمكن تعيين الترددات الطبيعية للمنظومة.

وبالتعويض عن  $\omega_1^2$ ،  $\omega_2^2$  فى المعادلات التى تمثل القيمة الذاتية (2) فى الصف الاول نحصل على:

$$\text{at } \omega_1^2 \therefore -47.26(100)X^{(1)} + 5100X^{(1)} + 4560\Theta^{(1)} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$\therefore r_1 = \frac{\Theta^{(1)}}{X^{(1)}} = -\frac{374}{4560} = -0.0820 \text{ rad/ft} \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{at } \omega_2^2 \therefore -85.70(100)X^{(2)} + 5100X^{(2)} + 4560\Theta^{(2)} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

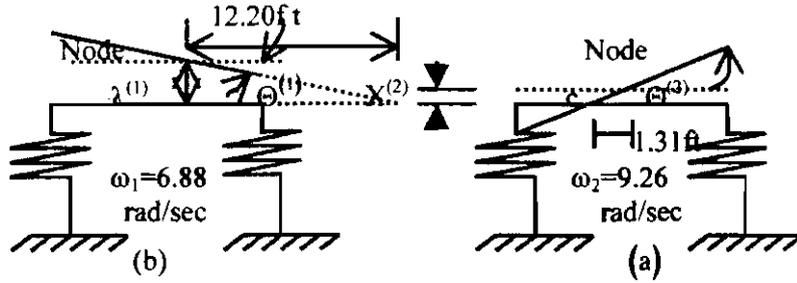
$$\therefore r = \frac{\Theta^{(2)}}{X^{(2)}} = \frac{3470}{4560} = 0.761 \text{ rad/sec} \dots\dots\dots(7)$$

نلاحظ أيضا انه بالتعويض عن  $\omega_1^2$ ،  $\omega_2^2$  فى الصف الثانى بدلا من الصف الاول للمعادلة (2) نحصل

على نفس النتائج، ولذلك فان الانساق الطبيعية يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \Theta^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.082 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X^{(2)} \\ \Theta^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.761 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

ويمكن رسم مخطط بياني للانساق الطبيعية كما يلي:



الشكل (7-29)

وبالتعويض عن  $r_2, r_1$  في المعادلات التي تمثل الاحداثيات الطبيعية كما يلي:

$$\therefore x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \quad , \quad x_2(t) = r_1 q_1(t) + r_2 q_2(t) \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{at } x_1(t) = x(t) \quad , \quad x_2(t) = \theta(t)$$

$$\therefore x(t) = q_1(t) + q_2(t) \quad , \quad \theta(t) = -0.082 q_1(t) + 0.761 q_2(t) \dots \dots \dots (10)$$

وبالتعويض عن هذه الصيغ في معادلتى الحركة (1) التي على الصورة المصفوية وتتبع ما سبق شرحه ، فاننا نحصل على معادلات الحركة غير المقترنة بالاحداثيات الطبيعية  $q_1(t)$  ،  $q_2(t)$  التالية:

$$\ddot{q}_1(t) + 47.26q_1(t) = 0 \quad , \quad \ddot{q}_2(t) + 85.7q_2(t) = 0 \dots \dots \dots (11)$$

لذلك يمكن حل المعادلات بصورة مستقلة عن بعضها الاخر ، حيث يكون الحل في الصورة التالية:

$$q_1(t) = C_1 \cos(6.88t - \phi_1) \quad , \quad q_2(t) = C_2 \cos(9.26t - \phi_2) \dots \dots \dots (12)$$

ذلك يمكن كتابة معادلتى الحركة للمنظومة كما ياتى:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \Theta^{(1)} \end{bmatrix} q_1(t) + \begin{bmatrix} X^{(2)} \\ \Theta^{(2)} \end{bmatrix} q_2(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.082 \end{bmatrix} \cos(6.88t - \phi_1) \\ + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.761 \end{bmatrix} \cos(9.26t - \phi_2) \dots \dots \dots (13)$$

وتعتمد المعاملات  $C_2, C_1$  وزاوية الطور  $\phi_2, \phi_1$  على الشروط الابتدائية  $x(0), x'(0), \theta(0), \theta'(0)$  ويمكن توضيح ذلك كما فى حالة إستجابة منظومة ذات درجتين من الحرية الى الاثارة الابتدائية.

#### 14- إستجابة منظومة ذات درجتين من الحرية الى إثارة ابتدائية:

##### Response of A Two Degree-of-Freedom System To Initial Excitation.

يلاحظ ان حركة المنظومة عند اى زمن يمكن إعتبارها حاصل ضرب الانساق الطبيعية للمنظومة فى إحداثياتها الطبيعية. أى انه يمكن ان نكتب معادلتى الحركة لمنظومة ذات درجتين من الحرية بصيغة عددية كما فى المعادلتين (41) ، (42) السابقتين وهما:

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \dots (41)$$

$$x_2(t) = C_1 r_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 r_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \dots (42)$$

$$\text{where } r_1 = \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}, r_2 = \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} :$$

حيث النسب  $r_2, r_1$  تكون مفردة للمنظومة المعطاة وكذلك الترددات الطبيعية  $\omega_1, \omega_2$  من الجانب الاخر تعتمد على السعات  $C_1, C_2$  وزاوي طور  $\phi_1, \phi_2$  على الشروط الابتدائية التالية:

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dot{x}_1(0) = v_{10}, \dot{x}_2(0) = v_{20} \dots (44)$$

وبالتعويض من الشروط الابتدائية في المعادلتين (41), (42) نحصل على المعادلات الآتية:

$$x_1(0) = x_{10} = C_1 \cos \phi_1 + C_2 \cos \phi_2 \dots (45)$$

$$x_2(0) = x_{20} = C_1 r_1 \cos \phi_1 + C_2 r_2 \cos \phi_2 \dots (46)$$

$$\dot{x}_1(0) = v_{10} = C_1 \omega_1 \sin \phi_1 + C_2 \omega_2 \sin \phi_2 \dots (47)$$

$$\dot{x}_2(0) = v_{20} = C_1 \omega_1 r_1 \sin \phi_1 + C_2 \omega_2 r_2 \sin \phi_2 \dots (48)$$

والمعادلات (45), (46), (47), (48) يمكن إختبارها أربع معادلات جبرية في المجاهيل التالية:

$$C_1 \sin \phi_1, C_2 \sin \phi_2, C_1 \cos \phi_1, C_2 \cos \phi_2$$

هذه المعادلات الاربعة يكون لها الحلون التالية:

$$C_1 \cos \phi_1 = \frac{1}{r_2 - r_1} (r_2 x_{10} - x_{20}) \dots (49)$$

$$C_2 \cos \phi_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} (-r_1 x_{10} + x_{20}) \dots (50)$$

$$C_1 \sin \phi_1 = \frac{1}{r_2 - r_1} \left( \frac{1}{\omega_1} \right) (r_2 v_{10} - v_{20}) \dots (51)$$

$$C_2 \sin \phi_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} \left( \frac{1}{\omega_2} \right) (-r_1 v_{10} + v_{20}) \dots (52)$$

وبالتالي يمكن الحصول على كل من:

$$C_1 = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{(r_2 x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(r_2 v_{10} - v_{20})^2}{\omega_1^2}} \dots (53)$$

$$C_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{(-r_1 x_{10} + x_{20})^2 + \frac{(-r_1 v_{10} + v_{20})^2}{\omega_2^2}} \dots (54)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{r_2 v_{10} - v_{20}}{\omega_1 (r_2 x_{10} - x_{20})} \dots (55)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{r_1 v_{10} - v_{20}}{\omega_2 (r_1 x_{10} - x_{20})} \dots (56)$$

وتسمى المعادلتين (41), (42) وكل من  $C_1, C_2, \phi_1, \phi_2$  بالاستجابة الكاملة للاستثارة الابتدائية.

11-Consider the system of example (9) and obtain the response to the initial  $x_1(0)=1.2$ ,  $x_2(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ .

11- تأمل المنظومة في المثال (9) و اوجد الاستجابة للاستتارة الابتدائية.

الحل:

من المعادلة (7) للمثال (9) نجد ان

$$\omega_2 = 1.5811\sqrt{k/m}, \quad \omega_1 = \sqrt{k/m}$$

و كذلك نجد ان  $r_2 = -0.5$ ,  $r_1 = 1$  وبالإضافة الى ذلك من الشروط الابتدائية نجد ان:

$$x_{10} = 1.2, \quad x_{20} = v_{10} = v_{20} = 0$$

وبادخال هذه القيم في المعادلات (53) و (54) و (55) و (56) فنحصل على ما يأتي:

$$C_1 = \frac{r_2 x_{10}}{r_2 - r_1} = \frac{(-0.5)(1.2)}{-0.5 - 1.0} = 0.4 \dots \dots \dots (1)$$

$$C_2 = \frac{-r_1 x_{10}}{r_2 - r_1} = \frac{-1.2}{-0.5 - 1.0} = 0.8 \dots \dots \dots (2)$$

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

نعوض عن  $C_1, C_2, \phi_1, \phi_2$  في المعادلتين (41) و (42) فنحصل على الاستجابة المطلوبة كما يلي:

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) =$$

$$= 0.4 \cos(\sqrt{k/m} t) + 0.8 \cos(1.5811\sqrt{k/m} t)$$

$$x_2(t) = C_1 r_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 r_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) =$$

$$= 0.4 \cos(\sqrt{k/m} t) - 0.4 \cos(1.5811\sqrt{k/m} t)$$

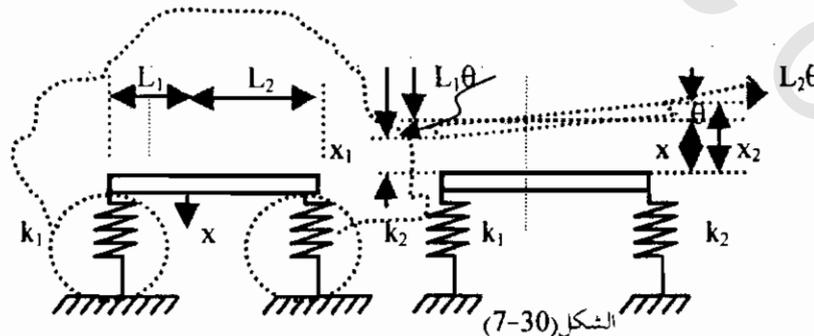
12-In the system shown in fig.(7-30), determine the equation of motion, the two natural frequencies, the amplitude ratios for the two frequencies and the normal modes of vibration of an automobile simulated by the simplified two degrees of freedom system with the following numerical values:  $W=3220$  lb,  $J_c=(W/g)r^2$ ,  $L=10$  ft,  $L_1=4.5$  ft,  $k_1=2400$  lb/ft,  $k_2=2600$  lb/ft,  $r=4$  ft Study the effect of the coupling of the system, and define two separate coordinate system to describe behaviour for the system.

12- فى المنظومة المبينة بالشكل (7-30)، اوجد معادلتى الحركة والترددين الطبيعيين ونسب السعات

والنسق الطبيعي لاهتزاز نموذج بسيط لسيارة ذات درجتين من الحرية مع القيم العددية التالية:

$$W=3220 \text{ lb}, \quad J_c=(W/g)r^2, \quad L=10 \text{ ft}, \quad L_1=4.5 \text{ ft}, \quad k_1=2400 \text{ lb/ft}, \quad k_2=2600 \text{ lb/ft}, \quad r=4 \text{ ft}$$

إدرس تأثير الارتباط للمنظومة وحدد إحداثيين مستقلين لوصف حركة المنظومة.



يمكن تعيين معادلتى الحركة كما يلى :

$$\therefore \sum F = m\ddot{x} \quad \therefore m\ddot{x} + k_1x_1 + k_2x_2 = 0$$

$$m\ddot{x} + k_1(x - l_1\theta) + k_2(x + l_2\theta) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$I_c \ddot{\theta} = M_c \quad \therefore I_c \ddot{\theta} = k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2$$

$$I_c \ddot{\theta} - k_1(x - l_1\theta)l_1 + k_2(x + l_2\theta)l_2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

وباعتبار ان الحركة دورية فهى تتكون من العديد من الحركات التوافقية ذات السعات والترددات المختلفة ولهذا نفرض ان إحدى المركبات للازاحة الخطية يعبر عنها بالعلاقة  $x = X e^{i\omega t}$  وللأزاحة الزاوية  $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$  ويتفاضل هاتين العلاقتين بالنسبة للزمن نحصل على السرعة والعجلة ونعوض بهم فى معادلتى الحركة كما يلى:

$$\therefore x = X e^{i\omega t} \quad \therefore \dot{x} = i\omega X e^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{x} = -\omega^2 X e^{i\omega t} \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore \theta = \theta_0 e^{i\omega t} \quad \therefore \dot{\theta} = i\omega \theta_0 e^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(4)$$

بالتعويض من العلاقات (3), (4) فى معادلتى الحركة (1) و(2) كما يلى:

$$-m\omega^2 X e^{i\omega t} + k_1(x - l_1\theta_0)e^{i\omega t} + k_2(x + l_2\theta_0)e^{i\omega t} = 0$$

$$\therefore X(-m\omega^2 + k_1 + k_2) + \theta_0(-k_1l_1 + k_2l_2) = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\therefore I_c(-\omega^2 \theta_0)e^{i\omega t} - k_1(x - l_1\theta_0)l_1 e^{i\omega t} + k_2(x + l_2\theta_0)l_2 e^{i\omega t} = 0$$

$$\therefore X(-k_1l_1 + k_2l_2) + \theta_0(-I_c\omega^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2) = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\det \begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - \omega^2 m) & -(k_1l_1 - k_2l_2) \\ -(k_1l_1 - k_2l_2) & (k_1l_1^2 + k_2l_2^2 - \omega^2 I_c) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} (2400 + 2600 - (\frac{3220}{32})\omega^2) & -(2400 - 2600) \\ -(2400 - 2600) & [2400(4.5)^2 + 2600(5.5)^2 - (\frac{3200}{32})(4)^2 \omega^2] \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \omega^4 + 128.739\omega^2 - 3928.05 = 0 \quad , \text{ put } \lambda = \omega^2$$

$$\therefore \lambda^2 + 128.739\lambda - 3928.05 = 0 \dots\dots\dots(8)$$

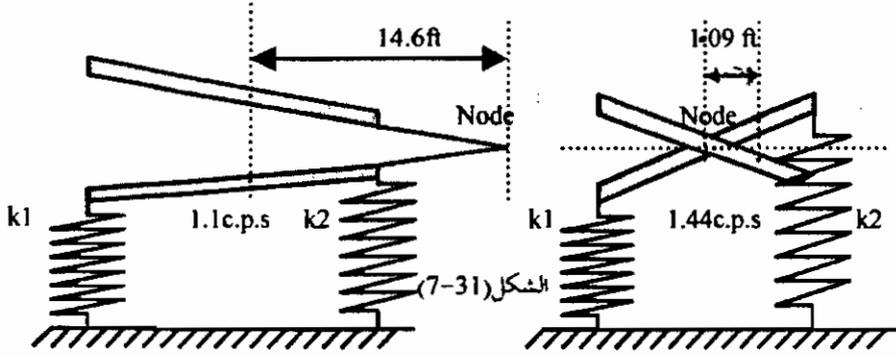
$$\therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = -47.6935 \quad \therefore \omega_1 = 6.9 \text{ rad/sec} = 1.1 \text{ c.p.s.} \dots\dots\dots(9)$$

$$\therefore \lambda_2 = \omega_2^2 = -82.0836 \quad \therefore \omega_2 = 9.06 \text{ rad/sec} = 1.44 \text{ c.p.s.} \dots\dots\dots(10)$$

$$\therefore \text{the amplitude ratios} \quad \left( \frac{x}{\theta} \right)_{\omega_1} = -14.6 \text{ ft/rad} = -3.06 \text{ in./deg.} \dots\dots\dots(11)$$

$$\therefore \left( \frac{x}{\theta} \right)_{\omega_2} = 1.09 \text{ ft/rad} = 0.288 \text{ in./deg} \dots\dots\dots(12)$$

ويمكن رسم النسق الطبيعي Normal modes للمنظومة كما يلي:

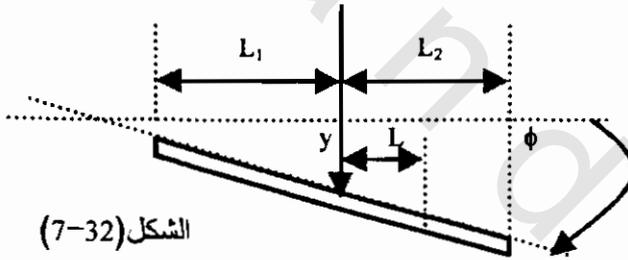


15-دراسة تأثير الارتباط او التقارن بالمنظومة:

معادلتى الحركة (1) و(2) سوف تكونان مستقلتين عن بعضهما اذا كان المقدار  $(k_1L_1 - k_2L_2)$  الخاص بالارتباط مساويا للصفر اى ان  $k_1L_1 = k_2L_2$  واذا كان  $k_1L_1$  لايساوى  $k_2L_2$  فان محصلة حركة الكتلة تتكون من كل من الحركة الانتقالية والدورانية وذلك عندما تؤثر على مركز ثقل الجسم إزاحة أو عزم لى وذلك فى الحالة الابتدائية وتتحرك الكتلة حركة زاوية او دورانية وحركة إنتقالية خطية (رأسية) عندما  $k_1L_1$  لايساوى  $k_2L_2$  وهذا يعرف بالارتباط او التقارن الاستاتيكي او الارتباط او التقارن المرن.

16-تحديد إحداثيين مستقلين لوصف هيئة المنظومة.

يمكن استخدام  $y(t)$ ,  $\phi(t)$  كإحداثيات وبذلك تؤل معادلتى الحركة الى المعادلتين الاتيين:



الشكل (7-32)

$$m\ddot{y} = -k_1(y - l_1\phi) - k_2(y + l_2\phi) - ml\ddot{\phi}$$

$$\therefore m\ddot{y} + ml\ddot{\phi} + (k_1 + k_2)y + (k_2l_2 - k_1l_1)\phi = 0$$

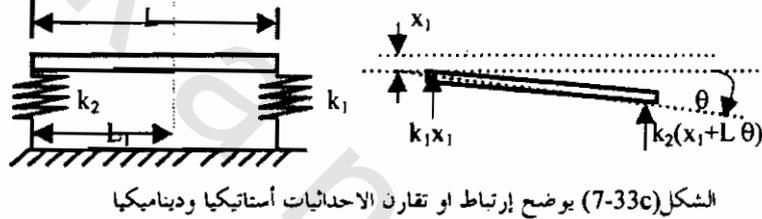
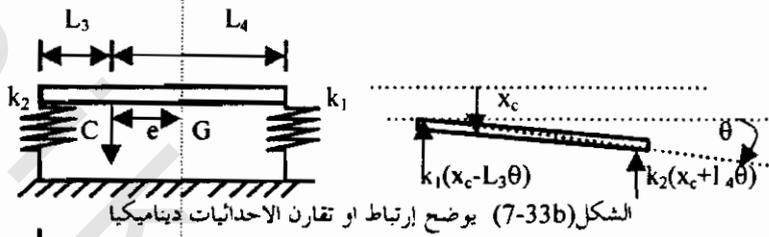
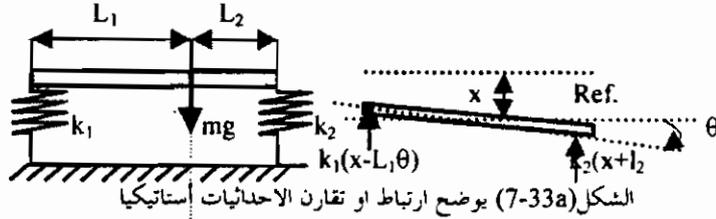
$$I_c\ddot{\phi} = k_1(y - l_1\phi)l_1 - k_2(y + l_2\phi)l_2 - m\ddot{y}l$$

$$\therefore I_c\ddot{\phi} + ml\ddot{y} + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\phi + (k_2l_2 - k_1l_1)y = 0$$

وبذلك تحتوى معادلتى الحركة على إرتباط او تقارن ديناميكى وإرتباط او تقارن أسستاتيكي ، أما إذا كانت  $k_1L_1 = k_2L_2$  فان المنظومة تحتوى على إرتباط ديناميكى فقط وعند ذلك إذا تحركت الكتلة الى اعلى واسفل فى الاحداثى y فان قوة القصور الذاتى "my المؤثرة خلال مركز ثقل الكتلة سيولد حركة فى إتجاه  $\phi$  ويرجع ذلك الى العزم "mLy" وبذلك فان الحركة فى إتجاه  $\phi$  سوف تولد حركة الكتلة

الراسية في اتجاه  $y$  بسبب القوة  $mL\phi''$

13-Fig.(7-33), shows a rigid bar with its center of mass not coinciding with its geometric center ,i.e.,  $L_1 \neq L_2$ , and supported by two springs  $k_1, k_2$ . It represents a two degree of freedom system since two coordinates are necessary to describe its motion . The choice of the coordinates will define the type of coupling which can be immediately determined from the mass and stiffness matrices. Mass or dynamical coupling exists if the mass matrix is nondiagonal , whereas stiffness or static coupling exists if the stiffness matrix is nondiagonal. It is also possible to have both forms of coupling.



13- الشكل (7-33) يوضح قضيب جاسي لا يتطابق مركز كتلته مع المركز الهندسي لـ  $L_1 \neq L_2$  وان هذا القضيب يرتكز على نابضين معاملهما  $k_1, k_2$  وهو يكون نظام ذو درجتين من الحرية اى انه يتعين احدثين يكونوا ضروريين لوصف حركة المنظومة، وان اختيار الاحداثيات سوف يعين نوع الترابط الذي ينتج مباشرة من مصفوفتي الكتلة والجساءة. الكتلة او الترابط الديناميكي يكون واضحا عندما تكون مصفوفة الكتلة غير مرتبطة، بينما الجساءة او الترابط الاستاتيكي يكون في حالة تكون فيها مصفوفة الجساءة غير قطرية، كما انه من الممكن ان يتواجد كلا النوعين من الترابط.

الحل:

17- الترابط او التقارن الاستاتيكي كما بالشكل (7-33a)، نختار الاحداثين او المحورين  $x, \theta$  حيث الاحداثي  $x$  يمثل الازاحة الخطية لمركز الثقل ويكون للمنظومة ترابط استاتيكي عندما تكون معادلتى الحركة في الصورة المصفوفية (1) التالية :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2 - k_1 l_1) \\ (k_2 l_2 - k_1 l_1) & (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

إذا كان  $k_1L_1=k_2L_2$  فإن الترابط يختفى ونحصل على اهتزازات غير مترابطة في  $x, \theta$ .  
 18- الترابط أو التقارن الديناميكي كما بالشكل (7-33b) توجد نقطة  $c$  على القضيب حيث ان القوة تكون عمودية على القضيب وتنتج إزاحة خالصة (واضحة) أي ان  $k_1L_3=k_2L_4$  ويمكن كتابة معادلتى الحركة للاحداثين  $x_c, \theta$  على الصورة المصفوفية (2) كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & 0 \\ 0 & (k_1l_3^2+k_2l_4^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots(2)$$

وهذا يوضح ان نظام المحاور المختارة يلغى الترابط الاستاتيكي وينتج الترابط الديناميكي.

19- الترابط أو التقارن الاستاتيكي والديناميكي كما بالشكل (7-33c).

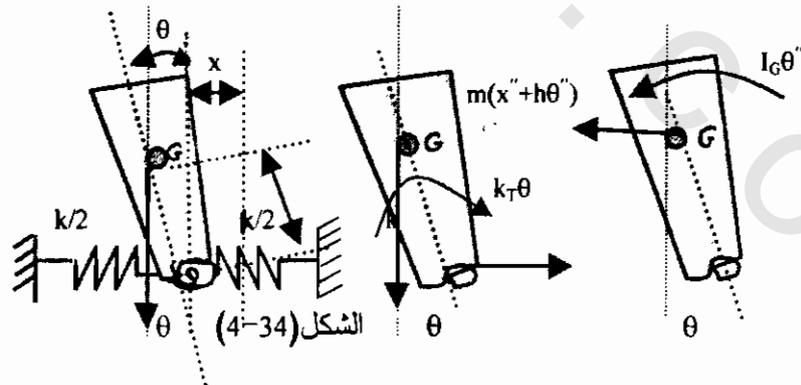
إذا اخترنا  $x=x_1$  عند طرف أو نهاية العمود فانه يمكن كتابة معادلتى الحركة فى الصورة المصفوفية (3) كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & ml \\ ml & J_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & k_2l \\ k_2l & k_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots(3)$$

وبذلك يكون كل من الترابط الاستاتيكي والديناميكي موجدين.

14-In a study of earthquakes , a building is idealized as a rigid body of mass M supported on two springs , one giving translational stiffness k and the other rotational stiffness  $k_T$  as shown . Given that  $I_G$  is the mass moment of inertia of the building about its mass centre G , write down the equations of motion using coordinates  $x$  for the translation from the equilibrium position , and  $\theta$  for the rotation of the building. Hence determine the frequency equation of the motion

14- فى دراسة للهزات الارضية ، حسم جاسئ لمبنى ذات كتلة  $M$  مثبتة على نابضين أحدهما إنتقالى معاملة  $k$  والآخر دورانى معاملة  $k_T$  كما مبين بالشكل (7-34) ، فاذا علم ان  $I_G$  عزم القصور الذاتى الكتلى للمبنى حول مركز تقلة  $G$  . اكتب معادلات الحركة مستخدما المحور الانتقالى  $x$  من موضع الاتزان الاستاتيكي والمحور الدورانى  $\theta$  للمبنى ثم أوجد معادلة التردد للمنظومة.



بفرض ان زاوية الدوران للمبنى  $\theta$  صغيرة نتيجة الهزات الارضية وبتطبيق قانون نيوتن الثانى يمكن إيجاد معادلتى الحركة للمنظومة كما يلى:

$$\therefore m\ddot{x} = \sum F \quad \therefore m(\ddot{x} + h\ddot{\theta}) = -kx \quad \therefore m\ddot{x} + mh\ddot{\theta} + kx = 0 \dots (1)$$

وبما ان عزم اللى الكامن يساوى فى المقدار وىضاد فى الاتجاه عزم اللى الاسترجاعى

$$\therefore I_G \ddot{\theta} + m(\ddot{x} + h\ddot{\theta})h = -(k_T \theta) + (mgh\theta)$$

$$\therefore mh\ddot{x} + (mh^2 + I_G)\ddot{\theta} - (mgh - k_T) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

باعتبار ان الحركة دورية فهى تتكون من العديد من المركبات التوافقية ذات الترددات والسعات المختلفة ولذلك نعوض عن احدى المركبات بالعلاقات التالية:

$$\theta = A_1 \sin(\omega t) , \quad \dot{\theta} = \omega A_1 \cos \omega t , \quad \ddot{\theta} = -\omega^2 A_1 \sin \omega t \dots \dots \dots (3)$$

$$x = A_2 \sin \omega t , \quad \dot{x} = \omega A_2 \cos \omega t , \quad \ddot{x} = -\omega^2 A_2 \sin \omega t \dots \dots \dots (4)$$

بالتعويض من (3) ، (4) فى معادلتى الحركة (1) ، (2) تم بوضعهم فى صورة المحدد وبفك المحدد نحصل على معادلة التردد كما يلى:

$$-m\omega^2 h A_1 - m\omega^2 A_2 + k A_2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

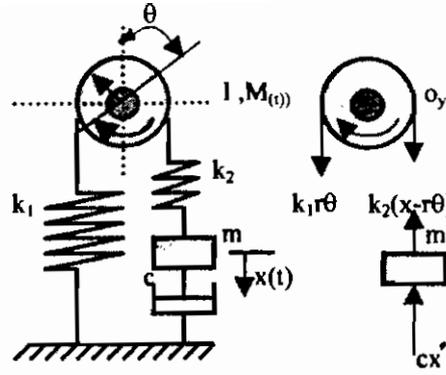
$$m\omega^2 h A_2 + (mh^2 + I_G)\omega^2 A_1 + (mgh - k_T) A_1 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 h & (k - m\omega^2) \\ (mh^2 + I_G)\omega^2 + (mgh - k_T) & m\omega^2 h \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$\therefore mI_G \omega^4 - \omega^2 [mkh^2 + I_G h - m^2 gh + mk_T] - mghk + kk_T = 0 \dots \dots \dots (8)$$

15-The two-degree-of-freedom system shown in fig.(7-35) consists of a pulley , a mass m , two springs of stiffness  $k_1$  and  $k_2$ , a dashpot with a damping coefficient of c, and a cable connecting them as shown. The pulley centroidal mass moment of inertia is I , There is sufficient friction between the cable and pulley to prevent the cable from slipping. Determine the differential equations of motion of the system when the pulley is subjected to be a time varying moment M(t) as shown.

15 -منظومة ذات درجتين من الحرية كما مبينة بالشكل (7-35) تتكون من بكرة وكتلة ونابضان معاملهما  $k_1, k_2$  وخامد معامل الخمدلة c وخيط متصل بينهم كما مبين، عزم القصور الذاتى الكلى المركزى للبكرة I ، يوجد احتكاك كافي بين الخيط والبكرة لمنع الخيط من التزلق (الزحف). أوجد المعادلات التفاضلية لحركة المنظومة عندما تكون البكرة موضوعة تحت عزم  $M(t)$  كما هو مبين بالشكل:



الشكل (7-35)

عندما تتحرك الكتلة  $m$  بمسافة  $x$  فإن البكرة تتحرك حول مركزها  $(o)$  مسافة  $\theta$  وبإخذ العزوم حول مركز البكرة كما بالشكل (7-35) وباعتبارها حرة وبفرض ان  $x > r\theta$  وبالتالي يمكن تعيين معادلة الحركة ووضعها في الصورة المصفوفية كما يلي:

$$\therefore \sum M_o = I \ddot{\theta} \quad \therefore -kr\theta.r + k_2(x - r\theta)r + M(t) = I \ddot{\theta}$$

$$\therefore I \ddot{\theta} + (k_1 + k_2)r^2\theta - k_2rx = M(t) \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore m \ddot{x} = \sum F_x \quad \therefore m \ddot{x} = -k_2(x - r\theta) - c\dot{x} \quad \therefore m \ddot{x} + c\dot{x} + k_2x - k_2r\theta = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)r^2 & -k_2r \\ -k_2r & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(t) \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

where  $M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = \text{Mass matrix}$  ,  $K = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)r^2 & -k_2r \\ -k_2r & k_2 \end{bmatrix} = \text{Stiffness Matrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \text{Damping Matrix}$

**20- معادلة لاجرانج Lagrange's Equations**

وهي تعتبر طريقة من طرق إيجاد معادلات الحركة للمنظومات الهندسية وهي تعتمد اساسا على طاقة المنظومة مثل طاقة الحركة (K.E) وطاقة الوضع (P.E) والطاقة المبذوبة (D.E) ويمكن صياغة معادلة لاجرانج على الصورة التالية لاحداثيات عمومية  $q_i$  (Generalized Coordinates).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K.E)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (K.E)}{\partial q_i} + \frac{\partial (P.E)}{\partial q_i} + \frac{\partial (D.E)}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \dots \dots \dots (1)$$

where:  $Q_i$  is a generalized external force (or non-linear damping force) acting on the system  
the subscript (i) denote s equation for an (n) degree of freedom system

أى ان  $Q_i$  هي القوة الخارجية العامة المؤثرة في المنظومة .  
and  $q_i$  is the generalized coordinate that describes the position of the system .

ايان  $q_i$  هي الاحداثى العام لوصف موضع المنظومة ،  $n$  تدل على عدد المعادلات للمنظومة التي لها عدد  $n$  من درجات الحرية. وبالنسبة للمنظومة المحافظة التقليدية الحرة (a free conservative system) يكون كل من  $Q_i, D.E$  مساوية للصفر. وتؤل معادلة لاجرانج الى:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E.)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(K.E.)}{\partial q_i} + \frac{\partial(P.E.)}{\partial q_i} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

where :  $K.E. = \frac{1}{2} m(\dot{x})^2$  ,  $P.E. = \frac{1}{2} kx^2$  ,  $D.E. = \frac{1}{2} c(\dot{x})^2$

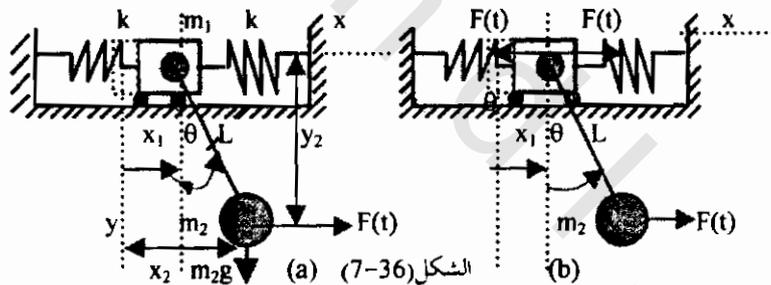
Elements for restoring (K.E.) are mass(m) and moment of inertia(I)

Elements for restoring (P.E) is spring (k).

Elements causing loss of during motion (D.E) is dashpot (c).

16-The system shown in fig.(7-36) consists of two identical springs attached to a trolley of mass  $m_1$  that supports a mass  $m_2$  by means of a rod of length  $L$  and negligible mass pinned at point o. Determine the equations of motion of the system in terms of its generalized coordinates, and then linearize these equations by assuming that the oscillations of the rod supporting  $m_2$  are small.

16-المنظومة المبينة بالشكل (7-36) تتكون من نابضين متماثلين متصلان بعربة (ترولى) كتلتها  $m_1$  والمركب بها كتلة  $m_2$  بواسطة قضيب طولة  $L$  مع إهمال كتلة المفصل (o) ، أوجد معادلات الحركة للمنظومة لكل من الاحداثيات العمومية والخطية لهذه المعادلات بفرض ان إهتزاز القضيب المركب بالكتلة  $m_2$  صغيرة.



باتخاذ  $y, x$  كمحورين كما بالرسم فان إزاحة الكتلة  $m_1$  تعرف بالاحداثى  $x_1$  ولكن إزاحة الكتلة  $m_2$  يمكن وصفها بالاحداثين  $x_2$  او  $y_2$  ،  $\theta$  ، ولهذا يتضح ان الاحداثيات الاربعة الموضحة بالشكل لاتعتمد على إحداثيات المنظومة ولكن بالشكل (7-36-b) يمكن ان ترتبط الاحداثيات الاربعة كما بالعلاقات الاتية:

$$x_2 = x_1 + L \sin \theta \dots \dots \dots (1) \quad , \quad y_2 = L \cos \theta \dots \dots \dots (2)$$

والمعادلتين (1) و(2) تعرف بالمعادلات المقيدة constraint equations حيث  $x_2, y_2$  يمكن التعبير عنهم بالرمزين  $x_1, \theta$  وهذه المعادلات تعتمد على الاحداثيات المطلوبة لوصف المنظومة ونظرا لان هذه المنظومة ذات درجتين من الحرية فاننا نأخذ  $x_1, \theta$  كاحداثين وبذلك يمكن إيجاد السرعة  $x_2', y_2'$  وذلك بتفاضل المعادلتين (1) و(2) كما يلي :

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \cos(\theta)(\dot{\theta}) \dots\dots\dots(3) \quad , \quad \dot{y}_2 = -l \sin(\theta)(\dot{\theta}) \dots\dots\dots(4)$$

$$\therefore K.E = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ (\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2 \right] \dots\dots\dots(5)$$

لايجاد طاقة الحركة للمنظومة متخذاً  $x_1$  ,  $\theta$  كاحداثيات عمومية فانه بالتعويض من المعادلتين (3) و (4) في المعادلة (5) ينتج ان:

$$K.E. = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ (\dot{x}_1)^2 + 2(\dot{x}_1)l \cos(\theta)(\dot{\theta}) + l^2 (\dot{\theta})^2 \right]$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{x}_1)^2 + m_2 (\dot{x}_1)l \cos(\theta)(\dot{\theta}) + \frac{1}{2} m_2 l^2 (\dot{\theta})^2 \dots\dots\dots(6)$$

نظرا لان الكتلة  $m_2$  غير متصلة باى عنصر مرن elastic element ولهذا لا يوجد طاقة مبددة strain energy فى المنظومة عند وضع الاتزان الاستاتيكي ، ولهذا فان التغيير الكلى فى طاقة الانفعال يكون مرتبط بالازاحة الراسية للكتلة  $m_2$  والتي يجب ان تشمل طاقة الوضع كلها كما بالمعادلة التالية:

$$P.E = kx_1^2 + m_2 g(l - l \cos \theta) \dots\dots\dots(7)$$

التي تتكون من الطاقة المبددة فى النابض وطاقة الوضع فى الكتلة  $m_2$  ، ولايجاد الشغل المبذول نتيجة التغيير فى الازاحات  $x_1$  ,  $\theta$  نتيجة تأثير القوة  $F(t)$  كما بالشكل (7-36-b) فيكون معدل الشغل المبذول ممثلا بالمعادلات:

$$dW_{x_1} = Q_{x_1} dx_1 = F(t) dx_1 \dots\dots\dots(8)$$

$$dW_{\theta} = Q_{\theta} d\theta = F(t)l \cos \theta d\theta \dots\dots\dots(9)$$

وبمقارنة المعادلتين (7) ، (8) ينتج ان :

$$Q_{x_1} = F(t) \quad , \quad Q_{\theta} = F(t)l \cos \theta \quad \dots\dots\dots(10)$$

وطبقا لمعادلة لاجرانج نجد ان  $q_1 = x_1$  ومن المعادلتين (7و6) نجد ان:

$$\frac{\partial(K.E.)}{\partial x_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \cos(\theta)(\dot{\theta})$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E.)}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 - m_2 l \sin(\theta)(\dot{\theta})^2 + m_2 l \cos(\theta)(\ddot{\theta}) \dots\dots(11)$$

$$\therefore \left( \frac{\partial(K.E.)}{\partial x_1} \right) = 0 \dots\dots\dots(12) \quad , \quad \left( \frac{\partial(P.E.)}{\partial x_1} \right) = 2kx_1 \dots\dots\dots(13)$$

بالتعويض من المعادلات (10) ، (11) ، (12) ، (13) فى معادلة لاجرانج ينتج ان :

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial(K.E)}{\partial q_i} \right) + \left( \frac{\partial(P.E)}{\partial q_i} \right) = Q_i$$

$$\therefore (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + 2kx_1 - m_2 l \sin(\theta) (\dot{\theta})^2 + m_2 l \cos(\theta) (\ddot{\theta}) = F(t) \dots \dots \dots (14)$$

$$\text{at } q_2 = \theta \text{ for equation (6,7)} \therefore \left( \frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_2 \dot{x}_1 l \cos \theta + m_2 l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_2 \ddot{x}_1 l \cos(\theta) - m_2 \dot{x}_1 l \sin(\theta) (\dot{\theta}) + m_2 l^2 (\ddot{\theta}) \dots \dots \dots (15)$$

$$\left( \frac{\partial(K.E)}{\partial \theta} \right) = -m_2 (\dot{x}_1) \sin(\theta) (\dot{\theta}) \dots \dots \dots (16)$$

$$\left( \frac{\partial(P.E.)}{\partial \theta} \right) = m_2 g l \sin(\theta) \dots \dots \dots (17)$$

وبالتعويض من المعادلات (10 و15 و16 و17) في معادلة لاجرانج:

$$\therefore m_2 l \cos(\theta) (\ddot{x}_1) + m_2 l^2 (\ddot{\theta}) + m_2 g l \sin(\theta) = F(t) l \cos(\theta) \dots \dots \dots (18)$$

ونظرا لان حركة القضيبي الاهتزازية صغيرة فتكون الازاحة الزاوية صغيرة وبالتالى يمكن التعويض عن  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta = 1$ ,  $\theta(\theta')^2 \approx 0$  وذلك يمكن ايجاد معادلتى الحركة وكتابتها فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\therefore (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + 2kx_1 + m_2 l \ddot{\theta} = F(t) \dots \dots \dots (18)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 g l \theta + m_2 l \ddot{x}_1 = F(t) l \dots \dots \dots (19)$$

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & ml \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ F(t) l \end{bmatrix} \dots \dots \dots (20)$$

17-Determine the equation of motion of the system as shown in fig.(7-35) , by using lagrange's equation.

17-أوجد معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-35) باستخدام معادلة لاجرانج.

الحل:

يمكن استنتاج معادلتى الحركة باستخدام معادلة لاجرانج للمنظومة ثنائية الحركة والمبينة بالشكل (35-7) وذلك بان نعتبر الاحداثيات العمومية generalized coordinates هي  $q_1 = \theta$ ,  $q_2 = x$ , وطاقة الحركة للمنظومة تتكون من طاقة حركة نتيجة الحركة الدائرية للبكرة وطاقة حركة نتيجة الحركة الانتقالية للكتلة m وبتطبيق معادلة لاجرانج كما يلى:

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} I(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 \text{ , by applying lagrange s equations}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E.)}{\partial \dot{\theta}} \right) = I\ddot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E.)}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \dots\dots\dots(1)$$

ونظرا لان طاقة الحركة ليست دالة في  $\theta, x$  وبالتالي تكون :

$$\frac{\partial(K.E.)}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial(K.E.)}{\partial x} = 0$$

عند وضع الاتزان لكل من النابض والكتلة يكون  $\theta = x = 0$  ، ونظرا لان التغير في طاقة الوضع لهذه المنظومة يعتمد فقط على الازاحة للنابضين من وضع الاتزان الاستاتيكي وتكون الازاحة  $r\theta$  للنابض  $k_1$  فقط ، وتكون الازاحة النسبية  $(x-r\theta)$  للنابض  $k_2$  . وبالتالي يمكن ايجاد طاقة الحركة للمنظومة وبتطبيق معادلة لاجرانج:

$$\therefore P.E = \frac{1}{2} k_1 (r\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x - r\theta)^2$$

$$\therefore \frac{\partial(P.E.)}{\partial \theta} = k_1 r^2 \theta + k_2 (x - r\theta)(-r) \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{and } \frac{\partial(P.E.)}{\partial x} = k_2 (x - r\theta) \dots\dots\dots(3)$$

وبتفاضل الشغل المبذول  $w$  بواسطة الحركة الناتجة من العزم  $M(t)$  خلال إزاحة صغيرة  $d\theta$  وكذلك الشغل المبذول بواسطة قوة مقاومة الخمد خلال الازاحة  $dx$  وتكون الاشارة سالبة لان قوة مقاومة الخمد تكون دائما في إتجاه عكس إتجاه الحركة يمكن التعبير عنهم بالمعادلات الاتية:

$$\therefore dW_\theta = Q_\theta d\theta = M(t) d\theta \quad \therefore Q_\theta = M(t) \dots\dots\dots(4)$$

$$\therefore dW_x = Q_x dx = -c \dot{x} dx \quad \therefore Q_x = -c \dot{x} \dots\dots\dots(5)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E.)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(K.E.)}{\partial q_i} + \frac{\partial(P.E.)}{\partial q_i} = Q_i \dots\dots\dots(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

حيث  $q_i$  هي الاحداثيات العمومية في حالة الازاحة الخطية او الزاوية ،  $Q_i$  هي القوى او العزوم العمومية الناتجة من قوى الاستثارة او العزوم وذلك بالاضافة الى طاقة المنظومة وقوى الخمد والعزوم المؤثرة ، وباستخدام معادلي لاجرانج تنتج معادلتى الحركة من العلاقات الناتجة من (1) و (2) و (3) و (4) وذلك كما يلي:

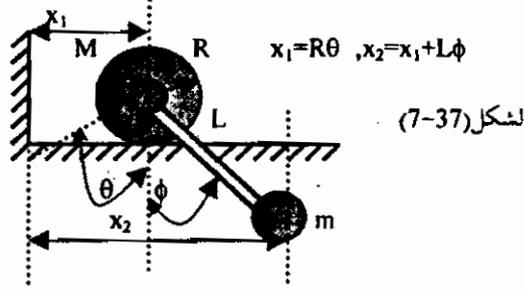
$$I\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)r^2\theta - k_2rx = M(t) \dots\dots\dots(6)$$

$$m\ddot{x} + k_2x + c\dot{x} - k_2r\theta = 0 \dots\dots\dots(7)$$

18-A soild cylinder has a mass M and radius R. Pinned to the axis of the cylinder is an arm of length L which carries a bob of mass m . Obtain the natural frequency of free vibration of the

bob. The cylinder is free to roll on the fixed horizontal surface shown in fig.(7-37).

18- اسطوانة مصممة كتلتها  $M$  ونصف قطرها  $R$  متصلة بمركزها بذراع طولها  $L$  الذي يحمل كتلة كروية كتلتها  $m$  ، أوجد التردد الطبيعي للاهتزاز الحر للكتلة الكروية  $m$  حيث ان الاسطوانة تتحرك بحرية على مستوى افقى كما مبين بالشكل (7-37).



باعتبار ان الاحداثيات العامة هي  $x_1, x_2$  ويمكن تعيين طاقتى الحركة والوضع كما يلى:

$$K.E. = \frac{1}{2} M(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 \right) (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} M \right) (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}_2)^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore l\phi = (x_2 - x_1) \quad \therefore \phi^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{l^2}$$

$$\therefore P.E. = mgl(1 - \cos\phi) = mgl \left( \frac{\phi^2}{2} \right) = mg \left( \frac{(x_2 - x_1)^2}{2l} \right) = \frac{mg}{2l} (x_2 - x_1)^2 \dots \dots \dots (2)$$

وحيث ان  $\phi$  صغيرة وبتطبيق معادلة لاجرانج حيث  $q_1 = x_1$  ينتج الاتى:

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{1}{2} M(2\ddot{x}_1) + \frac{1}{4} M(2\ddot{x}_1) = M\ddot{x}_1 + \frac{1}{2} M(\ddot{x}_1) = \frac{3}{2} M(\ddot{x}_1) \dots \dots \dots (3)$$

$$\therefore \frac{\partial(P.E)}{\partial x_1} = \frac{mg}{2l} (-2x_2 + 2x_1)$$

$$\therefore \frac{3}{2} M\ddot{x}_1 + \left( \frac{mg}{l} \right) (x_1 - x_2) = 0 \text{ is an equation of motion}$$

$$\text{at } q_1 = x_2 \quad \therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{x}_2} \right) = m\ddot{x}_2 \quad \therefore \frac{\partial(P.E)}{\partial x_2} = \left( \frac{mg}{2l} \right) (2x_2 - 2x_1) \dots \dots \dots (4)$$

ويمكن حل معادلات الحركة كما يلى:

$$\therefore m\ddot{x}_2 + \left(\frac{mg}{l}\right)(x_2 - x_1) = 0 \text{ is an equation of motion.....(5)}$$

$$\text{assume } x_1 = X_1 \sin \omega t, \quad x_2 = X_2 \sin \omega t \text{.....(6)}$$

$$\therefore X_1 \left[ \left(\frac{-mg}{l}\right) - \left(\frac{3M}{2}\right)\omega^2 \right] + X_2 \left(\frac{-mg}{l}\right) = 0$$

$$\therefore X_1 \left(\frac{-mg}{l}\right) + X_2 \left[ \left(\frac{mg}{l}\right) - m\omega^2 \right] = 0 \text{.....(7)}$$

وبالتالى يمكن كتابة معادلة التردد والتردد الطبيعي ونسبة السعات كما يلى:

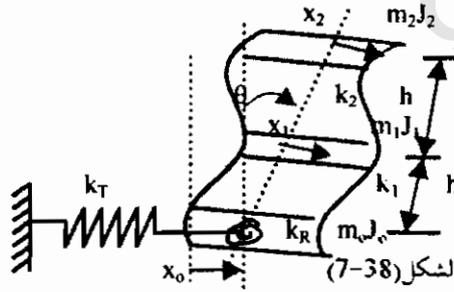
$$\therefore \text{the frequency equation is } \left(\frac{3M}{2}\right)\omega^4 - \left(\frac{g}{l}\right)\omega^2 \left[ m + \left(\frac{3M}{2}\right) \right] = 0 \text{.....(8)}$$

$$\therefore \text{the natural frequencies are } \omega = 0, \quad \omega = \sqrt{\left(1 + \frac{2m}{3g}\right) \frac{g}{l}} \text{ rad/sec....(9)}$$

$$\therefore \text{the amplitude ratio } \frac{X_1}{X_2} = \frac{-2m}{3M} \text{.....(10)}$$

19-A Two-storey building which has its foundation subjected to translation and rotation is modelled by the system as shown in fig.(7-38). Write down expressions for (K.E) and (P.E), and indicate how the natural frequencies of free vibration may be found using the lagrange equation

19- مبنى يتكون من طابقين وله نموذج مركب على نابضين (احدهم) انتقالى (والاخر) دورانى كما مبين بالشكل (7-38). اكتب دالة طاقة الحركة وطاقة الوضع وبين كيف يمكن ايجاد الترددات الطبيعية للاهتزاز الحر بواسطة معادلة لاجرانج.



يمكن كتابة دالة طاقة الحركة وطاقة الوضع عندما تكون سعة الاهتزاز صغيرة كما يلى:

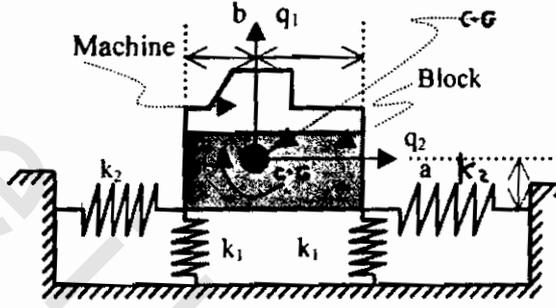
$$\therefore K.E = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0)^2 + \frac{1}{2} J_0 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_0 + h\dot{\theta} + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} J_1 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_0 + 2h\dot{\theta} + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta})^2 \text{.....(1)}$$

$$\therefore P.E = \frac{1}{2} k_T x_0^2 + \frac{1}{2} k_R \theta^2 + 2 \left[ \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 \right] \text{.....(2)}$$

حيث  $x_1, x_2, x_0, \theta$  هي الاحداثيات العمومية وبالتعويض في معادلة لاجرانج مع كل احداثي يعطى اربعة معادلات للحركة يمكن حلها وايجاد الترددات الطبيعية للاهتزاز الحر واشكال النسق كما سبق شرحه بالمسائل السابقة.

20- To isolate a structure from the vibration generated by a machine, the machine is mounted on a large block. The block is supported on springs as shown in fig.(7-39). Find the equations that describe the motion of the block in the plan of the figure as shown.

20- لعزل مبنى عن الاهتزاز المنولد من ماكينة ، الماكينة تتركب على كتلة كبيرة حيث الكتلة مركبة على نوابض كما بالشكل (7-39). اوجد المعادلات التي تصف حركة الكتلة في المستوى المبين بالشكل.



الشكل (7-39)

يمكن استخدام الاحداثيات  $q_1, q_2, q_3$  لوصف حركة المنظومة وذلك باعتبار ان كتلة البلوك (الكتلة الخرسانية) والماكينة  $M$  ، وعزم القصور الذاتي الكتلي  $I_G$  حول مركز النقل  $C.G$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} M (\dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} I_G (\dot{q}_3)^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore P.E. = \frac{1}{2} k_1 (q_1 + b q_3)^2 + \frac{1}{2} k_1 (q_1 - d q_3)^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 + a q_3)^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - a q_3)^2 \dots\dots\dots(2)$$

apply the lagrange equation with  $q_1 = q_1$

$$\therefore \frac{\partial(K.E)}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial(P.E)}{\partial \dot{q}_1} = M \dot{q}_1, \therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{q}_1} \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(P.E)}{\partial \dot{q}_1} \right) = M \ddot{q}_1 \dots\dots(3)$$

$$\therefore \left( \frac{\partial(P.E)}{\partial q_1} \right) = k_1 (q_1 + b q_3) + k_1 (q_1 - d q_3) \dots\dots\dots(4)$$

$$\therefore \text{the first equation of motion is } M \ddot{q}_1 + 2k_1 q_1 + k_1 (b - d) q_3 = 0 \dots\dots\dots(5)$$

put  $q_1 = q_2$  ,  $q_1 = q_3$   $\therefore$  the other equations of motion are obtained

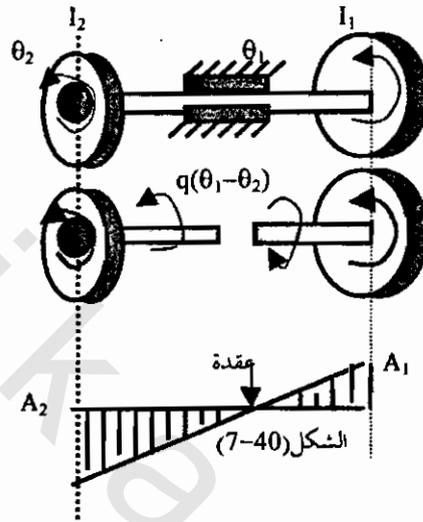
$$\therefore M \ddot{q}_2 + 2k_1 q_2 - 2a k_2 q_3 = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{and } I_G \ddot{q}_3 + k_1 (b - d) q_1 - 2a k_2 q_2 + (b^2 + d^2) k_1 + 2a^2 k_2 q_3 = 0 \dots\dots\dots(7)$$

ولهذا فان المنظومة لها ثلاثة إحداثيات مزدوجة وبالتالي فهي لها ثلاث معادلات ويمكن إيجاد الترددات الطبيعية بالتعويض عن  $q_i = A_i \sin \omega t$  ثم نحل معادلة التردد الناتجة وبالتالي يمكن إيجاد الترددات الطبيعية والتي تكون صغيرة.

21-The system as shown in fig.(7-40). Determine : (a) the equations of motion to the two rotors , (b)the natural frequency of the system . , and (c)the amplitude ratio.

21-المنظومة المبينة بالشكل (7-40) . أوجد معادلتى الحركة للدواين . ، (ب) أوجد التردد الطبيعي للمنظومة . ، (ج)نسب السعات.



بفرض ان  $I_1$  و  $I_2$  هما عزمى القصور الذاتى للدوار الاول والثانى على الترتيب ، وبالتالي يمكن تعين معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-40) كما يلى :

$$\therefore I_1 \ddot{\theta}_1 = -q(\theta_1 - \theta_2) \dots \dots \dots (1) \quad , \quad I_2 \ddot{\theta}_2 = q(\theta_1 - \theta_2) \dots \dots \dots (2)$$

$$assume \quad \theta_1 = A_1 \cos \omega t \quad , \quad \dot{\theta}_1 = -\omega A_1 \sin \omega t \quad , \quad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A_1 \cos \omega t \dots \dots \dots (3)$$

$$\theta_2 = A_2 \cos \omega t \quad , \quad \dot{\theta}_2 = -\omega A_2 \sin \omega t \quad , \quad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 A_2 \cos \omega t \dots \dots \dots (4)$$

وبالتعويض من (3) و (4) فى المعادلتين (1) و (2) يمكن تعين نسبة السعة والتردد الطبيعي كما يلى :

$$\therefore -\omega^2 I_1 A_1 = -q(A_1 - A_2) \dots \dots \dots (5) \quad , \quad -\omega^2 I_2 A_2 = q(A_1 - A_2) \dots \dots \dots (6)$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{-I_1}{I_2} \dots \dots \dots (7) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{q(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}} \dots \dots \dots (8)$$

حيث q هي معامل الرباط الالتوائى للعمود ،  $A_1$  ،  $A_2$  هما سعته الاهتزاز الزاوى ونلاحظ من العلاقة (7) ان اتساع الحركة لكل من القرصين يصاد اتجاه الاخر ويتناسب عكسيا مع عزم القصور الذاتى لكتلتها. وبما ان الحركتين متضادتين فان الحركة يجب ان تتلاشى فى نقطة بينهما تسمى بالعقدة node ونلاحظ من الشكل (7-40) ان المسافتان بين العقدة وكل من القرصين تتناسب عكسيا مع عزم

القصور الذاتي لكافة كل منهما.

22-A Steel shaft of 2" dia. and 36" long. at one end of the shaft fixed a flywheel with 420 lb and radius of gyration of 12", and at the other end installed a rotor with moment of 0.7 of that of the flywheel. Determine the natural frequency, the amplitude ratio for the system and find the node position, assume  $E=12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ .

22- عمود من الصلب قطرة 2 بوصة وطولة 36 بوصة ، ثبت في احد نهايتيه حدافة وزنها 420 باوند ونصف قطر الحركة الترددية 12 بوصة وعند النهاية الاخرى وضع دوار عزم القصور الذاتي له 0.7 من عزم القصور الذاتي للحدافة. أوجد التردد الطبيعي ونسبة السعة واوجد موضع العقدة مع فرض ان  $E=12(10)^6 \text{ lb/in}^2$

الحل:

$$\therefore I_1 = \frac{420(12)^2}{(32.2)(12)} = 156.2 \text{ lb.in.sec}^2$$

$$\therefore I_2 = 0.7I_1 = 0.7(156.2) = 109.57 \text{ lb.in.sec}^2$$

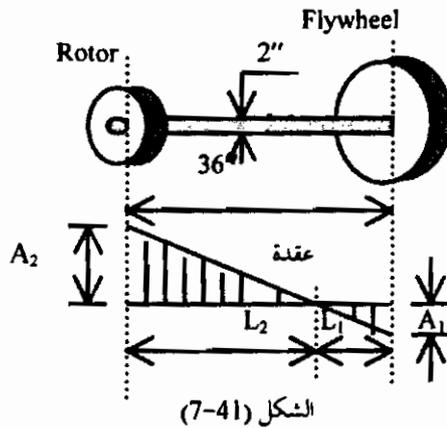
$$\therefore q = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \frac{(12)(10)^6}{36} = \frac{\pi(2)^4(12)(10)^6}{(32)(36)} = 0.532(10)^6 \text{ lb.in / rad}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{q(I_1 + I_2)}{T_1 T_2}} = \sqrt{\frac{0.523(10)^6(156.2 + 109.57)}{(156.2)(109.57)}} = 90.12 \text{ rad / sec}$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{90.12}{2\pi} = 14.35 \text{ c.p.s}$$

$$\therefore L_1 = \frac{L \cdot I_2}{(I_1 + I_2)} = \frac{36(109.57)}{(109.57 + 156.2)} = 14.82 \text{ in}$$

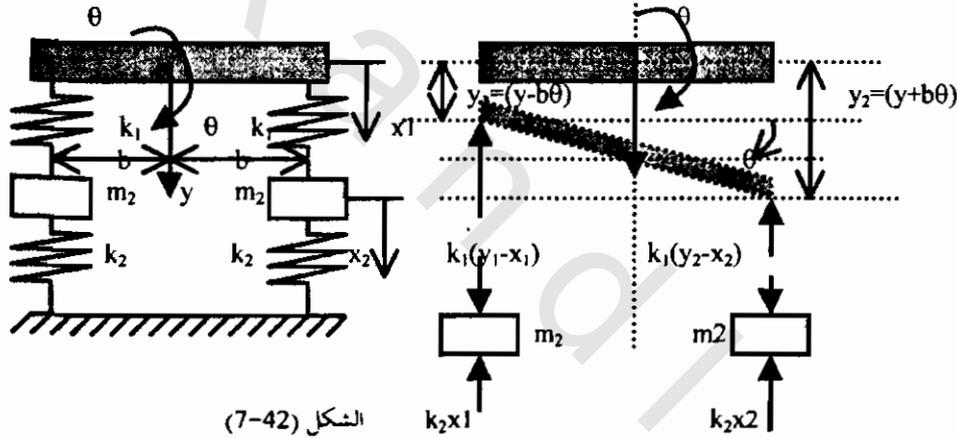
$$\therefore I_1 A_1 = I_2 A_2 \quad \therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{156.2}{109.57} = 1.43 \text{ in}$$



23-A simplified model for studying the dynamics of a motor vehicle is shown in fig. (7-42). The body has a mass  $m_1$ , and a moment of inertia about an axis through its mass centre of  $I$ . It is considered to be free to move in two directions – vertical translation and rotation in the vertical plane. Each of the unsprung wheel masses  $m_2$ , are free to move in vertical translation only. Damping effects are ignored. (1)-Derive equations of motion for this system. Define carefully the coordinates used. (2)-Is it possible to determine the natural frequency of a wheel hop mode without solving all the equations of motion? If not, suggest an approximation that might be made, in order to obtain an estimate of the wheel hop frequency, and calculate such an estimate given the following data:

$k_1=25 \text{ kN/m}$ ,  $k_2=80 \text{ kN/m}$ ,  $m_2=26 \text{ kg}$ .

23- نموذج مبسط يمثل حركة محرك سيارة (مركبة) كما مبينة بالشكل (7-42)، جسم المحرك كتلة  $m_1$  وعزم القصور الذاتى نسبة الى المحور خلال مركز الكتلة  $IG$ . المنظومة تتحرك بحرية فى اتجاهين، إزاحة عمودية (رأسية) ودورانية (زاوية) فى المستوى العمودى. كل من كتلتى العجلتين  $m_2$  تعتبر حرة للتحرك بلازاحة العمودية فقط، حيث يهمل تأثير الخمد. (1) اشتق معادلات الحركة لهذه المنظومة مع توضيح المحاور المستعملة جيدا. (2) هل من الممكن إيجاد الذبذبة الطبيعية لقاعدة القرص دون اللجوء الى حل جميع معادلات الحركة؟ إذا لم يمكن كذلك اقترح طريقة تقريبية للحصول على الذبذبة الطبيعية لقاعدة القرص وإحسب هذه النتائج بالقيم المعطاة الآتية:  $k_1=25 \text{ kN/m}$ ,  $k_2=80 \text{ kN/m}$ ,  $m_2=26 \text{ kg}$



الشكل (7-42)

ويمكن إيجاد معادلات الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-42) كما يلى:

$$\text{for } m_1 \therefore m_1 \ddot{y}_1 = -k_1(y_1 - x_1) - k_1(y_2 - x_2) = -k_1(y - b\theta - x_1) - k_1(y + b\theta - x_2) \dots (1)$$

$$I_G \ddot{\theta} = k_1(y - x_1)b - k_1(y - x_2)b = k_1(y - b\theta - x_1)b - k_1(y + b\theta - x_2)b \dots (2)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_1 = k_1(y_1 - x_1) - k_2x_1 = k_1(y - b\theta - x_1) - k_2x_1 \dots (3)$$

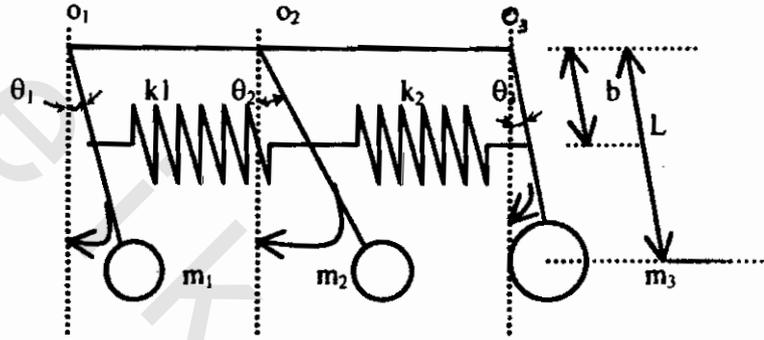
$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 = k_1(y_2 - x_2)b - k_2x_2 = k_1(y + b\theta - x_2)b - k_2x_2 \dots (4)$$

وحيث ان جسم او محرك السيارة لا يتحرك، وبذلك نجد ان  $y = \theta = 0$ ، وبالتالي يمكن إيجاد التردد (الذبذبة) الطبيعية لقاعدة القرص دون اللجوء الى معادلات الحركة كما يلى:

$$\therefore f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_2}\right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{25000 + 80000}{26}\right)} = 10.12 \text{ HZ}$$

24-Part of a building structure is modelled by the triple pendulum shown overleaf. . Obtain the equations of motion of small-amplitude oscillation in the plane of the fig.(7-43) by using the lagrange equation. Hence determine the natural frequencies of the structure and the corresponding mode shapes.

- 24- جزء من تركيبة نشائية (مبنى) إتخذ (إعتبر) كنموذج في ثلاث بندولات كما موضح بالشكل (43-7)، أوجد معادلات الحركة بالنسبة لسعة صغيرة تتذبذب في مستوى الشكل باستخدام معادلة لاجرانج . ثم أوجد الذنبية الطبيعية للمنظومة (للتركيبة) كما بالشكل النموذجي المناظر لها.



يمكن إيجاد معادلات الحركة بطريقة الطاقة كما يلي:

$$\begin{aligned} \therefore K.E. &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 l^2 \dot{\theta}_3^2 \right] = \frac{l^2}{2} \left[ m_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 \dot{\theta}_3^2 \right] \dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P.E. &= m_1 gl(1 - \cos\theta_1) + m_2 gl(1 - \cos\theta_2) + m_3 gl(1 - \cos\theta_3) + \frac{1}{2} k_1 b(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 \\ &+ \frac{1}{2} k_2 b(\sin\theta_3 - \sin\theta_2)^2 \end{aligned}$$

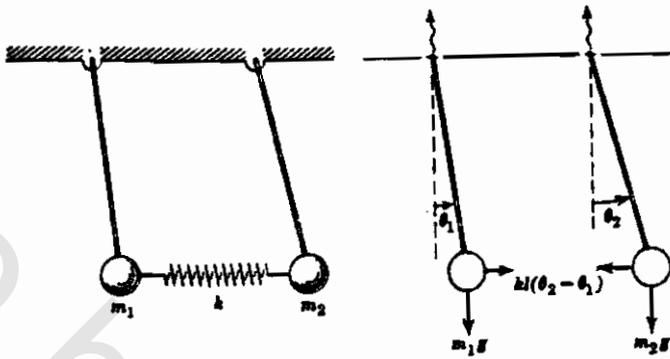
$$\therefore \text{for small oscillations } 1 - \cos\theta \cong \frac{\theta^2}{2}, \sin\theta \cong \theta$$

وبتطبيق معادلة لاجرانج وذلك بوضع  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  يمكن إيجاد معادلات الحركة

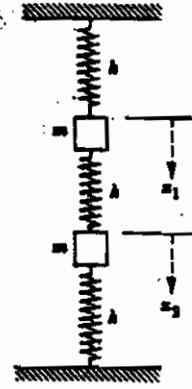
## تمارين

- 1-A vehicle has a mass of 1800 kg and a 2.5m wheelbase. The mass moment of inertia about the centre of mass is  $450 \text{ kg.m}^2$ , and the centre of mass is located 0.8 m from the front axle. Considering the vehicle as a two degree of freedom system. find the natural frequencies and the corresponding modes of vibration, if the front and rear springs have stiffnesses of 48 kN/m and 70 kN/m, respectively. The expansion joints of a concrete road are 4 m apart. These joints cause a series of impulses at equal intervals to vehicles travelling at a constant speed. determine the speeds at which pitching motion and up and down motion are most likely to arise for the above vehicle..
- 2-Exciting force  $F_0 \sin(\omega t)$  acting on the system shown in fig(7-22). Determine the amount of damping vibration by mechanical impedance method for  $m_1, m_2$  at steady state, If the air damping assumed to be  $c=3 \text{ kg.cm/sec}$ ,  $k_1=k_2=3 \text{ kg.cm/sec}$ ,  $m_1-m_2=4 \text{ kg}$  and  $\omega=1 \text{ rad/sec}$
- 3-Consider the system of fig( 7-27 ), let  $m_1=3 \text{ m}$ ,  $m_2=m$ ,  $k_1=k_2=2k$ ,  $k_3=3k$  and obtain the natural modes of vibration.
- 4-Consider the automobile as shown in fig(7-25), let the system parameters have the values  $m=140 \text{ lb- s}^2 / \text{ft}$ ,  $I_c=1300 \text{ lb-s}^2\text{-ft}$ ,  $k_1=1800 \text{ lb/ft}$ ,  $k_2=2000 \text{ lb/ft}$ ,  $a=4.40 \text{ ft}$ ,  $b=5.60 \text{ ft}$ , and find the natural coordinates of the system
- 5-In the system shown in fig.(7-30), determine the equation of motion, the two natural frequencies, the amplitude ratios for the two frequencies and the normal modes of vibration of an automobile simulated by the simplified two degrees of freedom system with the following numerical values:  $W=3000 \text{ lb}$ ,  $J_c=(W/g).r^2$ ,  $L=8 \text{ ft}$ ,  $L_1=3.5 \text{ ft}$ ,  $k_1=2200 \text{ lb/ft}$ ,  $k_2=2700 \text{ lb/ft}$ ,  $r=5 \text{ ft}$  Study the effect of the coupling of the system, and define two separate coordinate system to describe behaviour for the system.
- 6-Fig.(7-33), shows a rigid bar with its center of mass not coinciding with its geometric center, i.e.,  $L_1 \neq L_2$ , and supported by two springs  $k_1, k_2$ . It represents a two degree of freedom system since two coordinates are necessary to describe its motion. The choice of the coordinates will define the type of coupling which can be immediately determined from the mass and stiffness matrices. Mass or dynamical coupling exists if the mass matrix is nondiagonal. whereas stiffness or static coupling exists if the stiffness matrix is nondiagonal. It is also possible to have both forms of coupling
- 7-In a study of earthquakes, a building is idealized as a rigid body of mass  $M$  supported on two springs, one giving translational stiffness  $2k$  and the other rotational stiffness  $3kT$  as shown in fig(7-34). Given that  $I_G$  is the mass moment of inertia of the building about its mass centre  $G$ , write down the equations of motion using coordinates  $x$  for the translation from the equilibrium position, and  $\theta$  for the rotation of the building. Hence determine the frequency equation of the motion
- 8-The two-degree-of-freedom system shown in fig.(7-35) consists of a pulley, a mass  $m$ , two springs of stiffness  $2k_1$  and  $3k_2$ , a dashpot with a damping coefficient of  $2c$ , and a cable connecting them as shown. The pulley centroidal mass moment of inertia is  $I$ , There is sufficient friction between the cable and pulley to prevent the cable from slipping. Determine the differential equations of motion of the system when the pulley is subjected to a time varying moment  $M(t)$  as shown.
- 9-The system shown in fig.(7-36) consists of two springs ( $k_1=2k, k_2=3k$ ) attached to a trolley of mass  $M$  that supports a mass  $m_2$  by means of a rod of length  $L$  and negligible mass pinned at point  $o$ . Determine the equations of motion of the system in terms of its generalized coordinates, and then linearize these equations by assuming that the oscillations of the rod supporting  $m$  are small
- 10-A Steel shaft of 3" dia. and 48" long. at one end of the shaft fixed a flywheel with 490 lb and radius of gyration of 16", and at the other end installed a rotor with moment of 0.6 of that of the flywheel. Determine the natural frequency, the amplitude ratio for the system and find the node position, assume  $E=12(106) \text{ lb/in}^2$ .

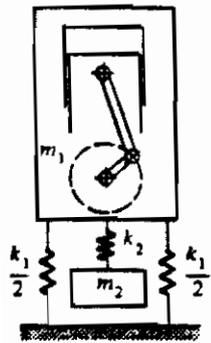
- 11-Let us assume a two mass system consisting of two identical masses and three identical springs as shown in Fig (7-44), with each mass constrained to move only in the vertical direction. (1) Determine the frequency equation and solve for the two natural frequencies. (2)- Determine the two principal modes corresponding to the two natural frequencies.
- 12-Find the equations of motion, the two principal modes and the two principal coordinates for the system shown in Fig (7-45), where two simple pendulum are connected by a linear spring and the supporting are mass less.
- 13-The two mass system of problem (11) is repeated, this time, the first mass  $m_1$ , is displaced 12mm and released at time  $t=0$ , The second mass  $m_2$  is also released at time  $t=0$ , but is not displaced from the equilibrium position before being released. Determine the displacement of each mass as a function of time.
- 14-A rigid block with a mass  $m$  and a centroidal moment of inertia ( $I$ ) is supported by eight equal springs, four vertical and four lateral as shown in fig.(7-46). Determine the coupled natural frequencies and modal fractions for translation in the  $x$  - direction and rotation in the  $x$ - $y$  plane the natural frequency in the  $y$ - direction is  $\omega_y = (4k/m)$  and is uncoupled, provided that the center of gravity is located midway between the vertical supporting springs.
- 15-A vehicle has a mass of 1800 Kg and a wheelbase of 3.6m. The mass center  $c.g$  is 1.6m. From the front axle. The radius of gyration of the vehicle about  $c.g$  is 1.4m. The spring constants of the front and the rear springs are 42kN/m. and 48kN/m, respectively. Determine (a) the natural frequencies, (b) the principal modes of vibration, and (c) the motion  $x(t)$  and  $\theta(t)$  of the vehicle.
- 16-Excessive vibration, due to near resonance conditions, is encountered in a constant speed machine shown in Fig (7-47) The original system consists of  $m_1$ , and  $k_1$ . It is not feasible to change  $m_1$ , and  $k_1$ .
- (a)- Show that a dynamic absorber, consisting of  $m_2$  and  $k_2$ , will remedy the problem.
- (b)- plot the response curves of the system, assuming  $m_2/m_1=0.3$ .
- (c)- Investigate the effect of the mass ratio  $m_2/m_1$ .
- (d)- Consider the dynamic absorber in which a viscous damper (c) installed in parallel with the spring  $K_2$  as shown in (7-47c). Briefly discuss the problem.
- 17- A small electronic package is supported by springs as shown (7-48) opposite. The mass of the package is  $m$ , each springs has a constant axial stiffness  $K$ , and damping is negligible. Considering motion in the plane of the figure only, and assuming that the amplitude of vibration of the package is small enough for the lateral spring forces to be negligible, write down the equations of motion and hence obtain the frequencies of the free vibration of the package. Explain how the vibration mode shapes can be found.



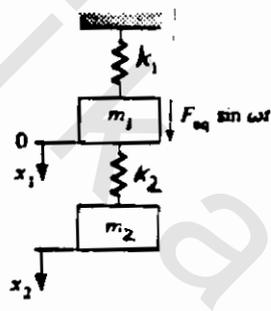
الشكل (7-45)



الشكل (7-44)

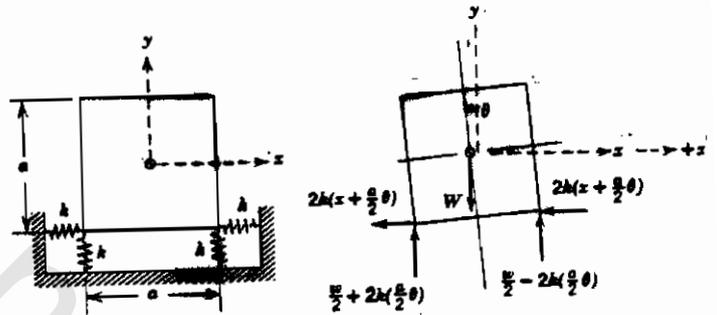


(a) Vibratory system

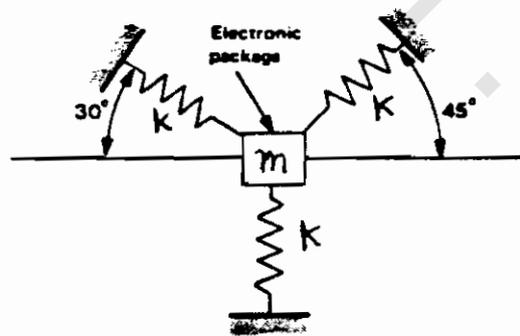


(b) Equivalent system

الشكل (7-47)



الشكل (7-46)



الشكل (7-48)