

## الباب الثامن

النظومات متعددة لرباط الحرية

obeykandi.com

## 1- مقدمة:

يتطلب تحليل المنظومات الديناميكية المتعددة درجات الحرية التعامل مع عدد كبير من المعادلات والحسابات التفصيلية، ولهذا فإن معالجة المسألة بصورة تؤدي بوضوح إلى نتائج المطلوبة من غير أن تصبح متشابكة في التفاصيل البنوية باستخدام طرق المصفوفات والتي تعتبر مناسبة ومثالية لهذا الغرض عند التعامل مع العدد الكبير من المعادلات والتي يمكن معالجتها بالحاسوب. وهذا الباب سيوضح استخدام طرق المصفوفات لمعالجة وتفهم سلوك المنظومات الميكانيكية متعددة درجات الحرية.

## 2- مصفوفة الجساءة واللدانة **The flexibility and stiffness matrix**

يعرف معامل تأثير اللدانة **(aij) the flexibility and influence coefficient** بأنها الأزاحة نتيجة لتسليط وحدة قوة واحدة عند زومع القوى  $f_1, f_2, f_3$  المؤثرة في النقط 1,2,3 ويمكن تطبيق مبدأ التراكيب **the principle of snperposition** لإيجاد الأزاحات بدلالة معاملات تأثير اللدانة.

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + a_{13}f_3 \\x_2 &= a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + a_{23}f_3 \dots\dots\dots(8.2-1) \\x_3 &= a_{31}f_1 + a_{32}f_2 + a_{33}f_3\end{aligned}$$

وتكون المعادلة باستخدام المصفوفات على الصورة التالية:

$$\{x\} = [a]\{f\} \dots\dots\dots(8.2-2)$$

حيث أن المصفوفة  $[a]$  هي مصفوفة اللدانة **the flexibility matrix** ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8.2-3)$$

وأذا ضربت المعادلة (2) في معكوس مصفوفة اللدانة **the inverse of the flexibility matrix** نحصل على المعادلة التالية:

$$[a]^{-1}\{x\} = \{f\} = [k]\{x\} \dots\dots\dots(8.2-4)$$

ولذا نجد أن معكوس مصفوفة اللدانة هي مصفوفة الجساءة  $[k]$  **the stiffness matrix** أي أن:

$$[a]^{-1} = [k]$$

$$[a] = [k]^{-1} \dots \dots \dots (8.2-5)$$

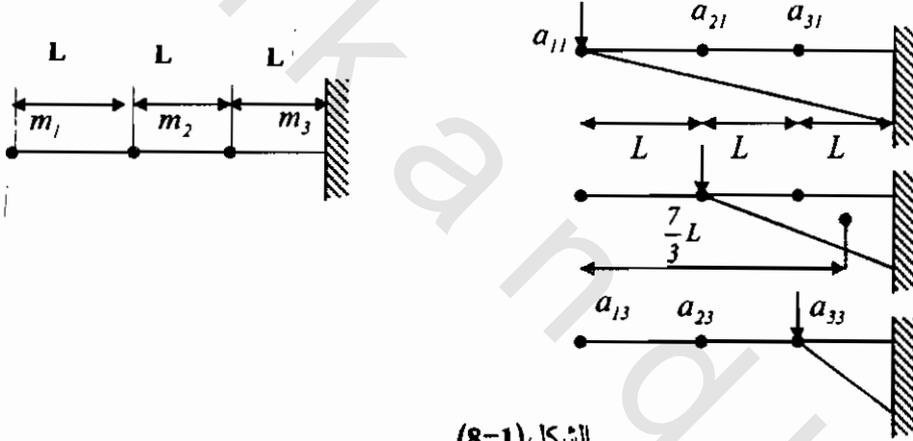
ويمكن كتابة حدود المعادلة (6) على الصورة التالية:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (8.2-6)$$

ونلاحظ من مصفوفة الجساءة أنه إذا كانت  $x_1 = 1$  و  $x_2 = x_3 = 0$  فالقوى عند النقط 1,2,3 والتي تكون لازمة لبقاء هذه الأزاحة طبقاً للمعادلة (6) هي  $k_{31}, k_{21}, k_{11}$  وبالمثل فالقوى  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$  مطلوبة لبقاء الشكل العام للأزاحة  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$  هي  $k_{32}, k_{12}, k_{22}$ ، لذلك فالقاعدة العامة لتكوين عناصر الجساءة لأي عمود هو أن نجعل الأزاحة المناظرة لذلك العمود مساوية لوحدته واحدة وجميع الأزاحات الأخرى بالصفر ثم قياس القوى المطلوبة عند كل نقطة.

(1) Determine the influence coefficient for the points(1),(2),and (3) of the uniform cantilever beam shown in fig(8-1).

(1) أوجد معاملات التأثير للنقاط 1,2,3 للعتبة كابولية والمبينة بالشكل (8-1).



الشكل (8-1)

الحل:

يمكن إيجاد معاملات التأثير بوضع وحدة حمل عند كل من 1,2,3 على التوالي، وأن حساب الانحرافات عند هذه النقط باستخدام طريقة عزم المساحة حيث يكون الانحراف The deflection عند النقط المختلفة مساوياً لعزم المنحنى  $\frac{M}{EI}$  حول النقطة المختارة. ومثال على ذلك إيجاد القيمة  $a_{21} = a_{12}$  من الشكل (8-1) كما يلي:

$$a_{12} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (2L)^2 \times \frac{7}{3} L \right] = \frac{14L^3}{3EI}$$

وتكون القيم الأخرى كمايلي:

$$a_{11} = \frac{27L^3}{3EI}, \quad a_{21} = a_{12} = \frac{14L^3}{3EI}$$

$$a_{22} = \frac{8L^3}{3EI}, \quad a_{23} = a_{32} = \frac{2.5L^3}{3EI}$$

$$a_{33} = \frac{L^3}{3EI}, \quad a_{13} = a_{31} = \frac{4L^3}{3EI}$$

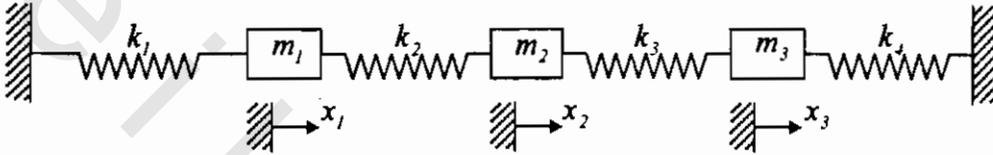
ويمكن أن نكتب مصفوفة اللدانة على الصورة التالية:

$$a = \frac{L^3}{3EI} \begin{bmatrix} 27 & 14 & 4 \\ 14 & 8 & 2.5 \\ 4 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}$$

وبلاحظ أن هذه المصفوفة متماثلة حول المحور القطري.

2-Fig (8-2) shows three degrees of freedom system. Determine the stiffness matrix.

2- يبين الشكل (8-2) منظومة ذات ثلاث درجات من الحرية أوجد مصفوفة الجساءة.



الشكل (8-2)

أفرض أن  $x_1 = 1.5$  و  $x_2 = x_3 = 0$ ، وباعتبار إن القوى إلى اليمين موجبة فإن القوى المطلوبة عند 1, 2, 3 تكون كما يلي:

$f_1 = k_1 + k_2 = k_{12}$  و  $f_2 = -k_2 = k_{21}$  و  $f_3 = 0 = k_{31}$  وبإعادة ذلك باستخدام  $x_2 = 1$  و  $x_1 = x_3 = 0$  نصير القوى كما يلي:

$f_1 = -k_2 = k_{12}$  و  $f_2 = k_2 + k_3 = k_{22}$  و  $f_3 = -k_3 = k_{32}$  فرض  $x_1 = x_2 = 0$ ،  $x_3 = 1$  نصبح القوى كما يلي:

$$f_1 = 0 = k_{13}, \quad f_2 = -k_3 = k_{23}, \quad f_3 = k_3 + k_4 = k_{33}$$

وبالتالي يمكن كتابة مصفوفة الجساءة كما يلي:

$$k = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{bmatrix}$$

### 3- نظرية التبادل Reciprocity Theorem

نظرية التبادل توضح أن المنظومة الخطية تحقق العلاقة الآتية  $a_{ij} = a_{ji}$  - ولبرهان هذه النظرية نلاحظ أن الشغل المبذول بواسطة القوى  $f_i$  و  $f_j$  وحيث أن ترتيب التحميل هو  $i$  تتبعه  $j$  أو العكس ينتج التبادل عندما نجد أن هذا الشغل المنجز لا يعتمد على ترتيب التحميل.

وبتطبيق القوة  $f_i$  يكون الشغل المبذول  $\frac{1}{2} f_i^2 a_{ii}$  ومع ذلك فإن  $i$  تخضع إلى إزاحة أخرى  $a_{ij} f_j$

والشغل الإضافي المبذول بواسطة  $f_i$  هو  $a_{ij}f_jf_i$ ، لذلك يكون الشغل المبذول الكلي يمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية:-

$$W = \frac{1}{2}f_i^2 a_{ii} + \frac{1}{2}f_j^2 a_{jj} + a_{ij}f_jf_i \dots \dots \dots (8.3-1)$$

وبعكس ترتيب التحميل وفي هذه الحالة يكون الشغل المبذول الكلي كما بالمعادلة التالية:

$$W = \frac{1}{2}f_j^2 a_{jj} + \frac{1}{2}f_i^2 a_{ii} + a_{ij}f_jf_i \dots \dots \dots (8.3-2)$$

وحيث أن الشغل المبذول في الحالتين يجب أن يكونا متساويان ولهذا نجد أن:

$$a_{ij} = a_{ji} \dots \dots \dots (8.3-3)$$

#### 4- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية Eigenvalues and Eigenvectors

معادلات الحركة للمنظومات الغير متضائلة والمتعددة درجات الحرية يمكن التعبير عنها في الصورة المصفوفية التالية:

$$[M] = \{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \dots \dots \dots (8.4-1)$$

حيث أن مصفوفة الكتلة المربعة تكون على الصورة التالية:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{nn} \end{bmatrix} = \text{mass matrix (a square matrix).}$$

ومصفوفة الجساءة المربعة تكون على الصورة التالية:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} = \text{stiffness matrix (a square matrix).}$$

ومتجه الأزاحة يعبر عنه كمصفوفة عمود كما يلي:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ويمكن الاستغناء عن الأقواس والأقواس المزدوجة بإستخدام الحروف الكبيرة وتكتب المعادلة المصفوفية على الصورة التالية:

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

وإذا ضربت المعادلة أعلاه مسبقاً بـ  $M^{-1}$  نحصل على الحدود التالية:

$$M^{-1}M = I \text{ (مصفوفة أحادية) a unit matrix}$$

$$M^{-1}k = A \text{ (مصفوفة ديناميكية) a dynamic matrix}$$

$$\therefore \ddot{x} + Ax = 0 \dots\dots\dots(8.4-2)$$

وبفرض أن الحركة توافقية يكون  $\ddot{x} = -\lambda x$  حيث  $\lambda = \omega^2$  وتصبح المعادلة (8.4-2) على الصورة التالية:

$$[A - \lambda I]\{x\} = 0 \dots\dots\dots(8.4-3)$$

وتكون المحدده من المعادلة (8.4-3) على الصورة التالية:

$$|A - \lambda I| = 0 \dots\dots\dots(8.4-4)$$

التي هي المعادلة المميزة للمنظومة، وتدعى الجذور  $\lambda_i$  للمعادلة المميزة بالقيم الذاتية وتحسب الترددات الطبيعية للمنظومة بواسطة العلاقة الآتية:

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

وبالتعويض بـ  $\lambda_i$  في المعادلة المصفوفية (8.4-3) نحصل على شكل النسق المناظر  $x_i$  الذي يدعى بالمتجه الذاتي. لذا فالمنظومة التي لها عدد  $n$  من درجات الحرية يكون لها عدد  $n$  من القيم الذاتية وعدد  $n$  من المتجهات الذاتية، ويمكن كذلك إيجاد المتجهات الذاتية من المصفوفة المرافقة للمنظومة، حيث أن  $B = A - \lambda I$  وبذلك يمكن تعريف معكوس  $B$  كما يلي:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj} B \dots\dots\dots(8.4-6)$$

ويمكننا أن نضرب مسبقاً بواسطة  $|B|$  للحصول على  $|B| = B \text{adj} B$  أوبدلالة الصيغة الأصلية إلى  $B$

$$[A - \lambda I]I = [A - \lambda I] \text{adj}[A - \lambda I]$$

وأذا فرضنا أن  $\lambda = \lambda_i$  هي القيمة الذاتية

$$[A - \lambda_i I]I = [A - \lambda_i I] \text{adj}[A - \lambda_i I] \dots\dots\dots(8.4-7)$$

عندئذ يكون الطرف الأيسر لهذه المعادلة مساوية للصفر أي أن:

$$[0] = [A - \lambda_i I] \text{adj}[A - \lambda_i I] \dots\dots\dots(8.4-8)$$

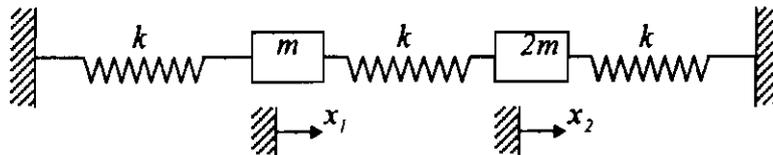
وتكون المعادلة أعلاه نافذة المفعول لجميع قيم  $\lambda_i$  وتمثل  $n$  من المعادلات لمنظومة لها عدد  $n$  من درجات الحرية وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (8.4-3) للنسق  $i^{\text{th}}$  نجد أن:

$$[A - \lambda_i]\{x\}_i = 0$$

ونلاحظ أن المصفوفة المرافقة  $\text{adj}[A - \lambda_i]$  يجب أن تحتوي على أعمدة كل منها هو المتجه الذاتي  $x_i$  مضروب في ثابت اختياري.

3- Consider the system of fig(8-3), determine the eigenvalues, the eigenvector and the two normal nodes.

3- تأمل المنظومة المبينة بالشكل (8-3) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية والعقدتين الاعتباطيتين.



الشكل (8-3)

الحل:

يمكن كتابة معادلتى الحركة على الصورة المصفوفية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

وبمضرب بواسطة معكوس (مقلوب) مصفوفة الكتلة

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{bmatrix}$$

وبفرض أن  $\lambda = \omega^2$  يصبح المعادلة (1) على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2k}{m} - \lambda\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{2m} & \left(\frac{k}{m} - \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

وتكون معادلة التردد أو المعادلة المميزة من محدد المصفوفة أعلاه هي

$$\lambda^2 - \frac{3k}{m}\lambda + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ويمكن إيجاد المتجهات الذاتية (The eigenvectors) من المعادلة (2) بالتعويض عن قيم  $\lambda$  أعلاه ومع ذلك يمكن توضيح استخدام المصفوفة المرافقة في تقدير قيمتها.

• المصفوفة المرافقة من المعادلة (2) تكون على الصورة التالية:

$$adj[A - \lambda, I] = \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{m} - \lambda_1\right) & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{2m} & \left(\frac{2k}{m} - \lambda_1\right) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4)$$

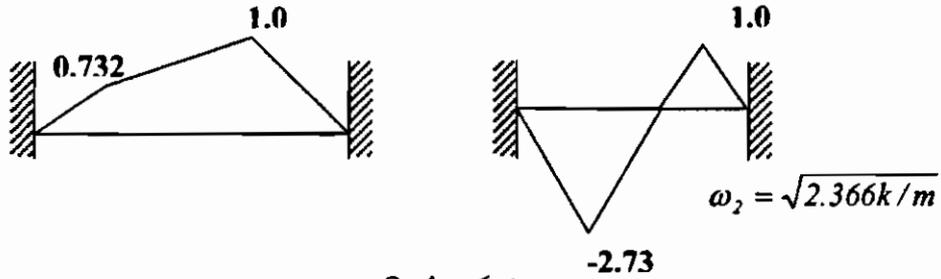
وبالتعويض عن  $\lambda_1 = 0.634Km$  نحصل من المعادلة (4) حيث كل عمود ينسق إلى النتائج الأحادية في المتجه الذاتي الأول (The first eigenvector).

$$\therefore \begin{bmatrix} 0.366 & 1.000 \\ 0.500 & 1.366 \end{bmatrix} \frac{k}{m}$$
$$\therefore \begin{bmatrix} 0.732 & 0.732 \\ 1.000 & 1.000 \end{bmatrix} \text{ or } x_1 = \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

بالمثل عندما نستخدم  $\lambda_2 = 2.366Km$  نحصل على المتجه الذاتي الثاني (the second eigenvector) من أي عمود في المعادلة (4-3) وليكن:

$$x_2 = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

والشكل التالي يبين العقدتين الاعتياديتين (The two normal nodes)



الشكل (8-4)

**(8.5) خواص التعامد للمتجهات الذاتية Orthogonal properties eigenvectors**

الأنساق الاعتيادية أو المتجهات الذاتية للمنظومة يمكن أن تكون متعامدة بالنسبة إلى مصفوفات الكتلة والجساءة وذلك بفرض أن المعادلة للنسق  $i^{th}$  هي كما يلي:

$$kx_i = \lambda_i Mx_i, \dots\dots\dots(8.5-1)$$

وبالضرب بواسطة منقول النسق  $i$  نجد أن:

$$x_i^T kx_i = \lambda_i (x_i^T Mx_i), \dots\dots\dots(8.5-2)$$

بعد ذلك نبدأ بالمعادلة للنسق  $j^{th}$  مع الضرب مسبقاً بواسطة  $x_j^T$  للحصول على:

$$x_j^T kx_j = \lambda_j (x_j^T Mx_j), \dots\dots\dots(8.5-3)$$

وحيث أن  $k$  و  $M$  هما مصفوفتان متماثلتان فإن العلاقات الآتية تبقى مستمرة:

$$x_j^T Mx_i = x_i^T Mx_j, \dots\dots\dots(8.5-4)$$

$$x_j^T kx_i = x_i^T kx_j,$$

لذلك فإنه بطرح المعادلة (8.5-3) من المعادلة (8.5-2) نحصل على:

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) x_i^T Mx_j, \dots\dots\dots(8.5-5)$$

وأذا كانت  $\lambda_i \neq \lambda_j$  فإن المعادلة أعلاه تتطلب أن يكون:

$$x_i^T Mx_j = 0 \dots\dots\dots(8.5-6)$$

وكنذلك يكون واضحاً من المعادلة (8.5-2) أو من المعادلة (8.5-3) والتي هي نتيجة للمعادلة (8.5-6) أن:

$$x_i^T kx_j = 0 \dots\dots\dots(8.5-7)$$

تعرف المعادلات (8.5-6) ، (8.5-7) ، بخاصية التعامد للأنساق الاعتيادية وأخيراً، إذا كان  $i = j$

فالمعادلة (8.5-5) تتحقق عند أي قيمة محده كحاصل الضرب المعطى بواسطة المعادلات (8.5-6) ،

(8.5-7) ولذلك نفرض أن:

$$x_i^T Mx_i = M_i, \quad x_i^T kx_i = k_i, \dots\dots\dots(8.5-8)$$

وتدعى هذه بالكتلة العامة والجساءة العامة على التوالي.

### (8-6) الجذور المكررة Repeated Roots

الجذور المكررة في المعادلة المميزة تدل على أن المتجهات الذاتية المناظرة تكون غير فريدة والتوافق الخطي لمثل هذه المتجهات الذاتية يمكن أن يحقق معادلة الحركة. ولتوضيح ذلك نفرض أن  $X_1$  ،  $X_2$  هي المتجهات الذاتية التي تعود إلى القيم الذاتية المشتركة ( $\lambda_0$ )،  $X_3$  هي المتجه الذاتي الثالث التي ترجع إلى  $\lambda_3$  والتي تختلف عن  $\lambda_0$  وبذلك يمكننا أن نكتب:

$$AX_1 = \lambda_0 X_1, \quad AX_2 = \lambda_0 X_2, \quad AX_3 = \lambda_3 X_3 \dots \dots \dots (8.6-1)$$

بضرب المعادلة الثانية في الثابت  $b$  وبإضافته إلى المعادلة الأولى نحصل على المعادلة التالية:

$$A(X_1 + bX_2) = \lambda_0 (X_1 + bX_2) \dots \dots \dots (8.6-2)$$

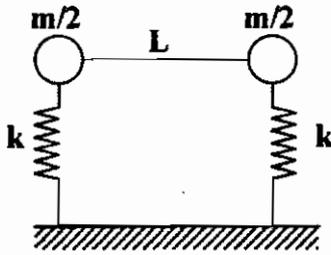
لذلك فإن المتجه الذاتي الجديد  $X_{12} = X_1 + bX_2$  والذي يعتبر هو التوافق الخطي لأول زوج يتم تحقيقهم كما في المعادلة الأساسية:

$$AX_{12} = \lambda_0 X_{12} \dots \dots \dots (8.6-3)$$

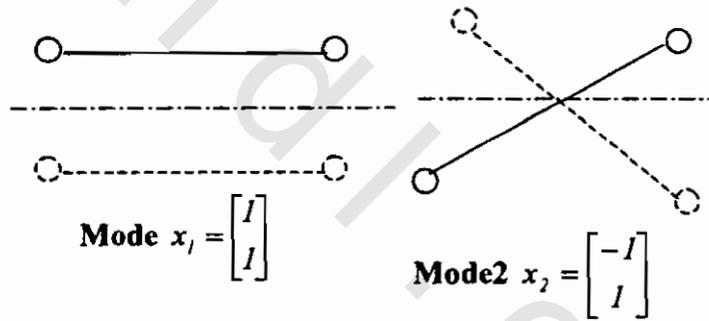
ولذلك لا يوجد نسق منفرد مقابل  $\lambda_0$ ، أي من الأساق المناظرة إلى  $\lambda_0$  يجب أن يكون متعامداً مع  $X_3$ ، إذا كانت هذه النسق طبيعية. وإذا كانت الأساق الثلاثة جميعها متعامده ومستقلة خطياً فيمكن جمعها حتى يمكن وصف الأمتزاز الحر الناتج من أي شرط ابتدائي.

(4) Consider the system shown in Fig(8-5a) where the connecting bar is rigid and negligible in weight. Determine the natural frequency for the two modes.

4- تأمل المنظومة المبينة بالشكل (8-5a) حيث توضح قضيب التوصيل من الصلب ومهمل الوزن. أوجد التردد الطبيعي للنظامين .



(a) الشكل (8-5)



(b)

(c)

النسقتان الأعتياديان للأمتزاز هما نسقتان متعامدان أحدهما إنتقالي والأخر دوراني ومع ذلك تكون

$$\text{الترددات الطبيعية للنسقين متساوية ويمكن حسابها من العلاقة } \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

وهذا المثال يوضح أن المتجهات الذاتية المختلفة يمكن أن يكون لها قيماً ذاتية متساوية.

(5) Determine the eigenvalues and eigenvectors when  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(5) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية عندما يكون  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

الحل:

: المعادلة المميزة  $|A - \lambda I| = 0$  (characteristic Equation) والتي يمكن أن تكتب على الصورة

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 \text{ and } \lambda_3 = -2 \text{ هي القيم الذاتية تكون } (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

وتكون المصفوفة المرافقة كما يلي:

$$\text{adj}[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} (\lambda^2 - 1) & -(\lambda - 1) & (\lambda - 1) \\ -(\lambda - 1) & (\lambda^2 - 1) & (\lambda - 1) \\ (\lambda - 1) & (\lambda - 1) & (\lambda^2 - 1) \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون القيم المناظرة إلى  $\lambda_3 = -2$  والتي يمكن أن توجد من أي عمود للمصفوفة الموجودة أعلاه وبذلك يكون:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ or } X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

: بالتعويض بالقيم  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  في المصفوفة المرافقة يؤدي ذلك إلى أن تكون كل العناصر تساوي

الصفير (all zero) ولذلك نعود إلى معادلة المصفوفة الأصلية  $[A - \lambda I]X = 0$  مع  $\lambda = 1$  وبذلك يكون:

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 0, \quad -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

وبذلك يمكن التعبير عن المعادلات الثلاثة بالمعادلة  $x_1 = x_3 - x_2$  وبذلك يكون للقيمة الذاتية  $x_1$  المقابلة

لـ  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  وبذلك يمكننا أن نكتب المصفوفة التالية:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

والتي وجدت على  $X_3$  لجميع قيم  $x_2$  و  $x_3$  أي أن  $(X_3)(X_1) = 0$  ولذلك يمكن الحصول من القيم

$$x_2 = x_3 = 1 \text{ على المصفوفة}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

القيم  $x_2 = -1, x_3 = 1$  يمكن أن تكتب المتجه الثاني على الصورة  $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  وذلك كما مبين بالمعادلة

(8-2) وبذلك لا تكون  $x_2, x_1$  منفردة وأن أي توافق خطي بين  $x_2, x_1$  سيحقق معادلة المصفوفة الأصلية.

### (8-7) مصفوفة الأنساق (P) The model Matrix

نظراً لأن الترابط الأستاتيكي أو الديناميكي ينتج من إختيار الأحداثيات كما سبق شرحه من الباب السابع والمنظومات الغير متضائلة يكون لها مجموعة من الأحداثيات الرئيسية والتي تعبر عن معادلات الحركة كتكوين غير مترابط **uncoupled form** ومثل هذه الأحداثيات غير المترابطة يكون مرغوب فيها لان في هذه الحالة يمكن حل كل معادلة بصورة مستقلة عن المعادلة الأخرى.

منظومة الكتلة المجمعة المتعددة درجات الحرية يمكن استنتاج الأحداثيات المختارة عند كل نقطة وبالتالي توجد مصفوفة كتلة قطرية، بينما مصفوفة الجساءة تحتوي على مصفوفة قطرية والتي توضح الترابط الأستاتيكي ويمكن أن تنتج الأحداثيات التي تم إختيارها بطريقة أخرى ترابطاً ديناميكياً أو كلاهما (كل من الترابط الأستاتيكي و الديناميكي)، ويمكن فك ترابط معادلات الحركة لمنظومة لها عدد  $n$  من درجات الحرية. بشرط أن يكون معلوم أولاً النسق الاعتيادية للمنظومة وعندما تجمع النسق الاعتيادية  $n$  (أو القيم الذاتية) في مصفوفة مربعة مع كل نسق اعتيادي ممثل بعمود، وتسمى هذه المصفوفة بمصفوفة النسق  $P$  ولذلك يمكن أن تظهر مصفوفة النسق لمنظومة ذات ثلاث درجات من الحرية كما يأتي:-

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = [X_1 X_2 X_3] \dots \dots \dots (8.7-1)$$

وبالتالي يمكن أن تتضمن مصفوفة النسق جميع علاقات التعامد وذلك من البند (8-5) في معادلة واحدة. وكذلك نحتاج لهذه العملية منقولة  $P$  والتي تكون على الصورة التالية:

$$P = \begin{bmatrix} (x_1 \ x_2 \ x_3)_1 \\ (x_1 \ x_2 \ x_3)_2 \\ (x_1 \ x_2 \ x_3)_3 \end{bmatrix} = [X_1 X_2 X_3] \dots \dots \dots (8.7-2)$$

وحيث أن كل صف يقابل نسق، ولذلك فإن حاصل الضرب  $P^1 MP$  أو  $P^1 KP$  ينتج مصفوفة قطرية وتعتبر عن علاقة التعامد والتي تكون مساوية للصفر، فأذا لاحظنا منظومة ذات درجتين من الحرية فأننا نجد أن مصفوفة النسق يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$P^1 MP = [X_1 X_2] [M [X_1 X_2]] = \begin{bmatrix} X_1^1 M X_1 & X_1^1 M X_2 \\ X_2^1 M X_1 & X_2^1 M X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \dots \dots (8.7-3)$$

ونلاحظ من المعادلة السابقة أن المصفوفة قطرية بسبب التعامد والحدود القطرية هي التي يعبر عنها بالكتلة العامة  $M$ ، ومن الممكن أيضاً أن نستخدم صيغة مشابهة لمصفوفة الجساءة  $k$  والتي تنتج المعادلة الآتية:

$$P^1 k P = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (8.7-4)$$

حيث تمثل حدود القطر هنا الجساءة العامة  $k_i$ .

إذا قسمنا كل عمود للمصفوفة  $P$  على الجذر التربيعي للكتلة العامة  $M$ ، فإن المصفوفة الجديدة تسمى بالمصفوفة الوزنية ويرمز لها بالرمز  $\bar{P}$  ومن السهل نرى أن التخطيط القطري لمصفوفة الكتلة بواسطة نموذج المصفوفة الوزنية ينتج مصفوفة إحادية يعبر عنها بالعلاقة التالية:

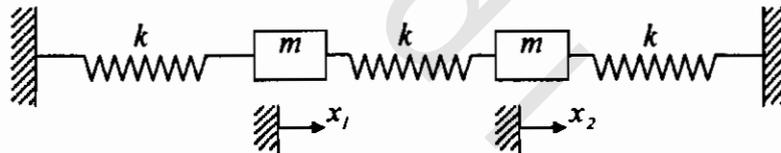
$$\bar{P}' k \bar{P} = I \quad \text{where} \quad k_i / M_i = \lambda_i \quad \dots \dots \dots (8-7-5)$$

ان مصفوفة الجساءة تعامل بالمثل بواسطة نموذج المصفوفة الوزنية وبالتالي تتحول الى مصفوفة قطرية للقيم الذاتية كما يلي:

$$\bar{P}' k \bar{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda \quad \dots \dots \dots (8.7-6)$$

(6) Consider the symmetrical two degrees of freedom system shown in fig (8-6). Determine the eigenvalues and eigenvectors?

(6) تأمل المنظومة المتماثلة ذات درجتين من الحرية والمبينة بالشكل (8-6) وأوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية.



الشكل (8-6)

**الحل**

يمكن تعيين معادلتى الحركة ووضعهم في الصورة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

وبالتالي يمكن تعيين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية كما يلي:

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = 3 \frac{k}{m}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \lambda_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

وتكون الكتلة العامة لكل من النسقين  $2m$  وتكون مصفوفة الأتساق ومصفوفة الأتساق الوزنية على الصورة التالية:

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

وبفك الترابط للمعادلة الأصلية فإننا نستخدم  $\tilde{P}$  في التحويل:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4)$$

وبالضرب مسبقاً بواسطة  $\tilde{P}$  نحصل على:

$$\tilde{P}^1 M \tilde{P} \ddot{Y} + \tilde{P}^1 k \tilde{P} Y = 0 \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

لذلك فإن المعادلة (1) قد تم تحويلها إلى معادلة فك الترابط (5) بواسطة التحويل الأحادي للمعادلة (4). وبالتالي يشار للأحداثيات  $y_1, y_2$  بأنهما أحداثيات عمودية أو رئيسية.

### (8.8) الأهتزاز القسري وفك ترابط الأحداثيات

#### Forced vibration and coordinate decoupling

يمكن تمثيل معادلات الحركة لمنظومة لها عدد  $n$  من درجات الحرية مع تضاؤل لزوج وبأثارة اختيارية  $F(t)$  بالصورة المصفوفية التالية:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + kX = F \dots\dots\dots(1)$$

وأذا كانت مصفوفة التضاؤل تتناسب مع أي من مصفوفة الجساءة أ، الكتلة أو مع توافق خطي لهذه المصفوفات، وعندئذ يسمى التضاؤل بالتضاؤل المتناسب ويمكن أن يكتب على صورة المعادلة التالية:

$$C = \alpha M + \beta k \dots\dots\dots(2)$$

حيث  $\beta, \alpha$  ثوابت مع ملاحظة أن المعادلة (2) يمكن أن تكتب على الصورة  $C = \alpha M^n + \beta k^m$  وتكون أيضاً قطرية.

وتمثل معادلات الحركة لحالة التضاؤل المناسب بالمعادلة (1)، ويمكن فك الترابط بواسطة مصفوفة الأتساق  $P$  أو بواسطة مصفوفة الأتساق الوزنية  $\tilde{P}$  لمنظومة الأهتزاز الحر المقابل باستخدام  $P$  ونفرض أن:

$$X = \tilde{P} Y \dots\dots\dots(3)$$

حيث  $Y$  هي مصفوفة عمود أخرى والمعادلة (3) تمثل تحويل الأحداثيات من  $X$  إلى  $Y$ ، وبالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (1) والضرب مسبقاً بواسطة  $\tilde{P}^1$  نحصل على:

$$\tilde{P}^1 M \tilde{P} \ddot{Y} + \tilde{P}^1 C \tilde{P} \dot{Y} + \tilde{P}^1 k \tilde{P} Y = \tilde{P}^1 F \dots\dots\dots(4)$$

بمساواة  $C$  إلى المعادلة (2) ومن المعادلات (5-8.7)، (6-8.7) تصبح المعادلة أعلاه:

$$I\ddot{Y} + (\alpha I + \beta \Lambda)\dot{Y} + \Lambda Y = \tilde{P}^1 F \dots\dots\dots(8.8-5)$$

وبما أن جميع المعاملات على الطرف الأيسر من هذه المعادلة هي مصفوفات قطرية، لذلك ستمثل المعادلة (8.8-5) مجموعة من معادلات الدرجة الثانية غير المترابطة وبالصورة التالية:

$$\ddot{y}_i + (\alpha + \beta \omega_i^2)\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = Q_i(t) \dots\dots\dots(8.8-6)$$

وبالأمكان تنفيذ الحل للمعادلات أعلاه بصورة مناسبة وبواسطة تحويل لابلاس وإذا كانت مصفوفة التضاؤل غير متناسبة فسوف تترابط انيا او بواسطة الطريقة الموضحة في البند (8.10) القادم.

### (8-9) الأنساق الاعتيادية القسرية للمنظومات المتضائلة

#### Forced normal modes of damped

عند اهتزاز النسق العادية نجد أن كل نقطة في المنظومة تتحرك حركة توافقية وتمر خلال موقع الأتزان أنياً. ولقد وجد أن مثل هذه الحركة تكون ممكنة للاهتزاز غير المتضائل. وكذلك يكون اهتزاز النسق العادي ممكن الحدوث في المنظومة المتضائلة وذلك إذا ما أثير بعدد من القوى التوافقية والمساوية إلى عدد درجات الحرية للمنظومة. ولتوضيح ذلك نتأمل المنظومة المتضائلة تضائلاً لزجاً والتي لها عدد  $n$  من درجات الحرية والمثارة بواسطة قوى توافقية ذات تردد  $\omega$  والمعادلة الحركية للمنظومة تكون على الصورة التالية:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\} \sin \omega t \dots\dots\dots(8.9-1)$$

ويكون الحل على صورة المعادلة التالية:

$$\{x\} = \{X\} \sin(\omega t - \theta) \dots\dots\dots(8.9-2)$$

حيث أن كل من هذه الأنساق يكون متعلق بطور محدد  $\theta$  وتوزيع متجه القوة  $F$  والمطلوب لأثارة المنظومة. وتسمى هذه الاستجابة بالأنساق الاعتيادية القسرية للمنظومات المتضائلة والتي تتحرك فيها كل نقطة بالمنظومة بطور، وتمر خلال موقع إتزانها أنياً بالنسبة إلى النقاط الأخرى كما في حالة الاهتزاز الحر غير المتضائل وتكون علاقات التعامد موجودة بين الأنساق وعند التعويض من المعادلة (8-9-2) في المعادلة (8-9-1) وبمساواة المعاملات للحدود المتشابهة نحصل على المعادلتين التاليتين:

المعاملات للحدود المتشابهة نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$([k] - [m]\omega^2) \sin \theta - [c]\omega \cos \theta \{X\} = \{0\} \dots\dots\dots(8.9-3)$$

$$([k] - [m]\omega^2) \cos \theta - [c]\omega \sin \theta \{X\} = \{F\} \dots\dots\dots(8.9-4)$$

وبإعادة ترتيب المعادلة (8.9-3) إلى الصورة التالية:

$$[I] \tan \theta - ([k] - [m] \omega^2)^{-1} [c] \omega \{X\} = \{0\} \dots \dots \dots (8.9-5)$$

ويتضح أنه يوجد عدد  $n$  من القيم إلى  $\theta_i$  المقابلة إلى  $n$  للقيم الذاتية للمعادلة (8.9-5)، ويوجد لكل  $\{F_i\}$  متجه ذاتي مناظر  $\{X_i\}$ . وعندئذ يمكن الحصول على الدوال القسرية المطلوبة بالتعويض عن  $\theta_i$ ،  $\{X_i\}$  في المعادلة (8.9-4).

ويمكن الحصول على علاقات التعامد بإعادة كتابة المعادلة (8.9-3) إلى  $i^{\text{th}}$  قيمة ذاتية ومتجه ذاتي وذلك بالضرب أولاً بواسطة المنقول إلى  $j^{\text{th}}$  متجه ذاتي وإعادة العملية مع تبادل  $j, i$ .

$$\tan \theta_i \{X_i\}^T ([k] - [m] \omega^2) \{X_j\} - \omega \{X_i\}^T [c] \{X_j\} = 0$$

$$\tan \theta_j \{X_j\}^T ([k] - [m] \omega^2) \{X_i\} - \omega \{X_j\}^T [c] \{X_i\} = 0$$

ونظراً لوجود تماثل بالمصفوفات  $c, k, m$  نحصل على العلاقات التالية بواسطة الطرح

$$\tan \theta_i \neq \tan \theta_j$$

$$\{X_i\}^T ([k] - [m] \omega^2) \{X_j\} = 0 \dots \dots \dots (8.9-6)$$

$$\{X_i\}^T [c] \{X_j\} \dots \dots \dots (8.9-7)$$

وبنفس الطريقة من المعادلة (8.9-4) يمكن الحصول على العلاقة الآتية:

$$\{X_i\}^T \{F_j\} = 0 \dots \dots \dots (8.9-8)$$

#### تحويل الأحداثيات Transformation of coordinates

يمكن تبسيط تحويل الأحداثيات باستخدام المصفوفة النموذجية  $[P]$  للمنظومة غير المتضائلة أو مصفوفة الأنساق الوزنية  $[\tilde{P}]$  التي هي مصفوفة الأنساق  $[P]$  مع العمود  $i^{\text{th}}$  وذلك بالقسمة على الجذر التربيعي للكتلة العامة  $\{X_i\}^T [m] \{X_i\}$  (أنظر البند 6-8) حيث يكون التحويل على الصورة التالية:

$$\{x\} = [\tilde{P}] \{y\} \dots \dots \dots (8.9-9)$$

وذلك أجرى على المعادلة (8.9-1) وبالضرب أولاً بواسطة المنقول  $[\tilde{P}]$  فنتج المعادلة الآتية:

$$[I] \{\ddot{y}\} + [c] \{\dot{y}\} + [\lambda_i] \{y\} = [\tilde{P}]^T \{F\} \sin \alpha t \dots \dots \dots (8.9-10)$$

حيث أن مربعات الترددات الطبيعية غير المتضائلة  $[\lambda_i] = [\tilde{P}]^T [k] [\tilde{P}]$

مصفوفة متضائلة متماثلة  $[c] = [\tilde{P}]^T [c] [\tilde{P}] =$

مصفوفة أحادية  $[1] = [\tilde{P}]^T [m] [\tilde{P}] =$

ونفرض أن الحل على صورة المعادلة التالية:

$$\{y\} = \{Y\} \sin(\omega t - \phi) \dots \dots \dots (8.9-11)$$

ويمكن استبدال نتائج الفقرة السابقة كما يلي:

$$\left[ [1] \tan \phi - \omega \left[ \frac{1}{\lambda_i - \omega^2} \right] [c] \right] \{Y\} = 0 \dots \dots \dots (8.9-12)$$

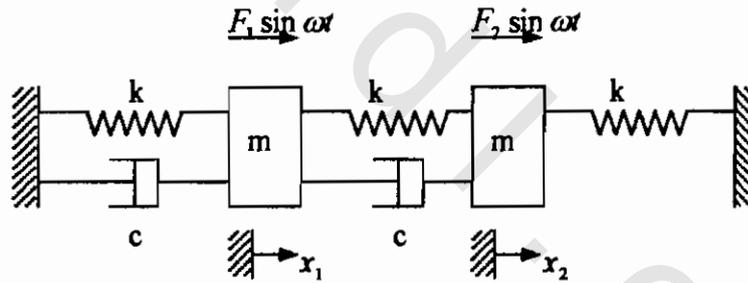
$$\left[ (\lambda_i - \omega^2 [1]) \cos \phi + \omega [c] \sin \phi \right] \{Y\} = [\tilde{P}]^T \{F\} \dots \dots \dots (8.9-13)$$

$$\{Y\}_j [c] \{Y\}_j = 0 \dots \dots \dots (8.9-14)$$

$$[Y]_j [\tilde{P}]^T \{F\}_j = 0 \dots \dots \dots (8.9-16)$$

وعند استعمال مصفوفة الأنساق  $[P]$  بدلا من مصفوفة الأنساق الوزنية  $[\tilde{P}]$  تصبح كل من مصفوفات الكتلة والجماعة قطرية ولكن مصفوفة الكتلة لن تكون مصفوفة أحادية.

(7) Figure (8-7) shows a two degrees of freedom system, find the normal modes, the nodal matrix, the weighted normalized matrix, the eigenvalues and the eigenvector.



الشكل (8-7)

الشكل (8-7) يوضح منظومة ذات درجتين من الحرية أوجد النسق الاعتيادية ومصفوفة الأنساق الاعتيادية ومصفوفة الأنساق الوزنية والقيمة الذاتية والمتجه الذاتي.

الحل: يمكن كتابة معادلتى الحركة للمنظومة (8-7) على الصورة المصفوفية التالية:

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

والانساق الاعتيادية يمكن تعريفها كما يلي:

$$\lambda_1 = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3 \frac{k}{m} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 = -1$$

بما ان الكتلة العامة هي  $2m$  لكلا النسقين ، لذا ستكون مصفوفة الانساق ومصفوفة الانساق الوزنية كالآلا :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [\bar{P}] = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

باستخدام  $[\bar{P}]$ ، نحصل على :

$$[\lambda_i] = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{c}{2m} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

وتصبح المعادلة (8-9-12)

$$\left[ [I] \tan \phi - \frac{\omega c}{2k} \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 m}{k}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3 - \frac{\omega^2 m}{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = 0$$

بفرض  $\mu = (2k/\omega c) \tan \phi$  تختزل المعادلة اعلاه الى :

$$\left[ \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 m}{k}} & \left( \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 m}{k}} \right) \\ \left( \frac{1}{3 - \frac{\omega^2 m}{k}} \right) & \left( \mu - \frac{5}{3 - \frac{\omega^2 m}{k}} \right) \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = 0$$

وعندئذ نجد القيمة الذاتية  $\mu$  من المحددة للمصفوفة اعلاه :

$$\mu^2 - \mu \left[ \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 m}{k}} + \frac{5}{3 - \frac{\omega^2 m}{k}} \right] + \frac{4}{\left( 1 - \frac{\omega^2 m}{k} \right) \left( 3 - \frac{\omega^2 m}{k} \right)} = 0$$

وستحدد القيمة الذاتية من النسبة :

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{\omega^2 m}{k}}}{\frac{1}{1 - \frac{\omega^2 m}{k}} - \mu}$$

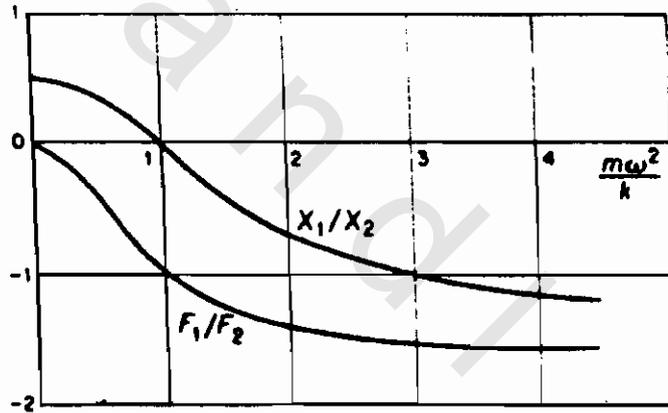
للحصول على القيم العددية ، يكون من الضروري تحديد تردد الاثارة  $\omega$  او عندما يكون  $\omega^2 m/k = 0.5$  ونحصل على :

$$\mu_1 = 1.105 \quad \text{و} \quad \mu_2 = 2.895$$

$$|Y|_{\mu_1} = \frac{2.24}{1.00} \quad \text{و} \quad |Y|_{\mu_2} = \frac{-2.24}{1.00}$$

تحقق هذه الكميات علاقات التعامد المعطاة بوساطة المعادلات (8.9-15) و (8.9-14) وبوساطة المعادلة (8.9-16) ، نستطيع ان نجد نسبة القوى .  
والمعادلة :

$$\{Y\}_{\mu_1} [\bar{P}]' \{F\}_{\mu_1} = 0$$



شكل (8-8) النسق الأول

تنتج  $(F_1/F_2)_{\mu_1} = -0.382$  وبالطريقة نفسها  $\{Y\}_{\mu_1} [\bar{P}]' \{F\}_{\mu_1} = 0$  تؤدي الى

$$\left(\frac{F_1}{F_2}\right)_{\mu_2} = -2.61$$

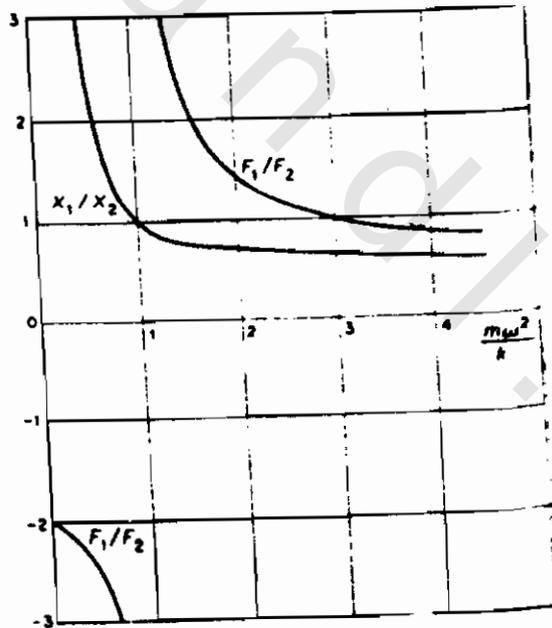
اخيرا ، يمكن ايجاد السعات الحقيقية  $\{X\}$  من التحويل  $\{X\} = [\bar{P}]\{Y\}$  كما يأتى

$$\{X\}_{\omega_1} = \begin{Bmatrix} .382 \\ 1.000 \end{Bmatrix} \quad \{X\}_{\omega_2} = \begin{Bmatrix} 2.61 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

ولاكمال المسألة . يجب اختيار الترددات الأخرى  $w^2m/k$  وتكرر الحسابات اعلاه . والمخطط البياني للسعة ونسبة القوى مبينة للنسقين في الشكلين 8.9-3, 8.9-2 .

### 6.10 طريقة حيز الحالة State Space Method

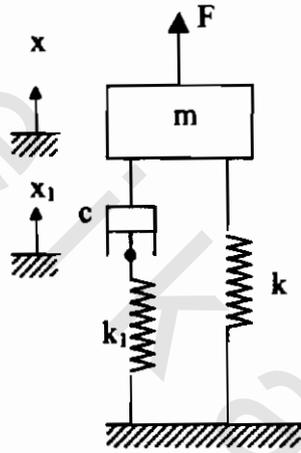
في الحالة الأكثر عمومية حيث لا يوجد تضازل تناسبي فنظام معادلات الدرجة الثانية بصيغة المعادلة (8.8-4) لا يمكن ان يفك تقارنها ما لم تعاد صياغتها بدلالة معادلات الدرجة الأولى . ولإعادة هذه الصياغة ، تعطى كل من المتغيرات الأصلية ومشتقاتها كمتغيرات جديدة تشير الى متغيرات الحالة ومن ثم تصبح المشتقات الثانية مشتقات أولى لمتغيرات الحالة الجديدة . مع ان رتبة المشتقات اختصرت بهذه الطريقة ولكن عدد المتغيرات قد تضاعف وهذا يضيف عبئا جديدا للحسابات ، لهذا السبب يكون استخدام الحاسبة الالكترونية ضروريا في الحسابات العددية .



الشكل (8-9) النسق الثاني

(8) Consider the viscoelastically damped system of Fig (8-10). The system differs from the viscously damped system by the addition of the springs  $k_1$ , which introduces one more coordinate  $x_1$  to the system.

8- تأمل المنظومة المتضائلة تضائلا لزجا مرونيا والمبين بالشكل (8-10) فهي تختلف عن المنظومة المتضائلة لزجيا باضافة النابض  $k_1$  الذي يضيف أحداثيا آخر  $x_1$  إلى المنظومة.



الشكل (8-10)

الحل:

معادلات الحركة للمنظومة في أحداثيات القصور الذاتي  $x_1, x$  هي:

$$m\ddot{x} = -kx - c(\dot{x} - \dot{x}_1) + F \dots\dots\dots(8.10-1)$$

$$0 = c(\dot{x} - \dot{x}_1) - k_1 x_1$$

وباستخدام التعويضات الآتية:  $\alpha = \frac{k_1}{c}$  ،  $\beta = \frac{k_1}{m}$

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

يمكن كتابة المعادلات كما يلي:

$$\ddot{x} = -\omega_o^2 x - \beta x_1 + \frac{F}{m} \quad , \quad \dot{x}_1 = \dot{x} - \alpha x_1 \dots\dots\dots(8.10-2)$$

ويمكن اختيار متغيرات الحالة كما يلي:

$$x_1 = z_1 \quad , \quad \dot{x}_1 = \dot{z}_1 \quad , \quad x = z_2 \quad , \quad \dot{x} = \dot{z}_2 + \dot{z}_1 \dots\dots\dots(8.10-3)$$

ويمكن إعادة كتابة معادلات الحركة بدلالة  $z$  على الصورة التالية:

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta & -\omega_o^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(8.10-4)$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة برموز مختصرة كما يلي:

$$\dot{z} = Az + u \dots\dots\dots(8.10-5)$$

حيث:

$$\dot{z} = \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{Bmatrix}, \quad z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m} \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta & -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

وحل هذه المعادلة من الدرجة الأولى يمكن كتابته على الصيغة المغلقة كالآتي:

$$Z = e^{At} Z_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} u(\tau) d\tau \dots \dots \dots (8.10-6)$$

أن هذه المعادلة بسيطة ظاهريا ليست في الحقيقة بسيطة إطلاقا حيث تحتاج إلى معالجات عددية جديرة بالاعتبار والتي ستعرض في الفقرة الآتية:

الحل (1): نتأمل المعادلة المتجانسة

$$\dot{Z} = AZ \dots \dots \dots (8.10-7)$$

ويكون حلها على صورة المعادلة (8.10-8)  $Z = e^{At} Z_0$

في هذه المعادلة يحتاج الحد  $e^{At}$  إلى تمثيل وسنعمد أسلوبا واحدا لحل المعادلة المتجانسة وذلك باستخدام تحويل لابلاس للمعادلة المتجانسة مع مقارنة النتائج وبفرض أن  $\bar{Z}(s)$  هي تحويل لابلاس إلى المتجه العمودي  $Z$  ولذلك نحصل على:

$$s\bar{Z}(s) - Z_0 - A\bar{Z}(s) = 0 \dots \dots \dots (8.10-9)$$

ولذلك نجد أن

$$Z = L^{-1}[sI - A]^{-1} Z_0 \dots \dots \dots (8.10-10)$$

والتي يمكن أن نستنتج منها

$$Z = L^{-1}[sI - A]^{-1} Z_0$$

وأيضا نستنتج أن:

$$e^{At} = L^{-1}[sI - A]^{-1} = L^{-1} \frac{adj[sI - A]}{[sI - A]} \dots \dots \dots (8.10-11)$$

مع ملاحظة  $L^{-1}$  هو مسد داله لابلاس.

ومن الواضح هنا أن الجذور  $s_i$  للمعادلة المميزة  $|sI - A| = 0$  يجب أن تحسب وسيكون الطرف الأيمن من العملية بعد عملية العكس سوف تصبح مصفوفة مربعة وعناصرها هي  $e^{s_i t}$  مضروبة بثوابت. وإذا وجدت جذور متكررة فستظهر أيضا حدود في المصفوفة مثل  $te^{At}$ .

الحل (2): يمكننا فحص الحل لمعادلة حيز الحالة كمسألة قيمة ذاتية ومنتجه ذاتي ولذلك يمكن أن نستخرج القيمة الذاتية من المعادلة المميزة:

$$[A - \lambda I] = 0 \dots \dots \dots (8.10-12)$$

والمتجهات الذاتية من أحد الأعمدة بمصفوفة المرافق  $adj[\lambda I - A]$  مع  $\lambda_i$  للنسق  $i^{\text{th}}$ ، وقبل الأستمرار بهذه المسألة سنقدم هنا تقنية عمل الخط القطري التي هي ضرورية للحل، وتكتب أولاً المعادلة المتجانسة من المعادلة (8.10-5) للنسق  $i^{\text{th}}$  كالآتي:

$$|A - \lambda I|Z_i = 0 \dots\dots\dots(8.10-13)$$

حيث فرضت القيم الذاتية لتكون مميزة، وتوجد  $n$  من هذه المعادلات (لهذه المسألة  $n = 3$ ) والتي يمكن إعادة ترتيبها كالآتي:

$$AZ_i = \lambda_i Z_i \dots\dots\dots(8.10-14)$$

وبالأمكان جمع  $n$  من معادلات المصفوفة في معادلة مصفوفة منفردة بدلالة مصفوفة الأنساق  $P$  ومصفوفة قطرية بقيم ذاتية والمعرفة كمايلي:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8.10-15)$$

وبذلك تصبح المعادلة المجمعة

$$AP = P\Lambda \dots\dots\dots(8.10-16)$$

والتي يمكن أن تحقق بسهولة بيان  $n$  من المعادلات والتي هي من النوع الذي يرمز له بالمعادلة (8.10-14)، وإذا المعادلة السابقة ضربت في  $P^{-1}$  فأنتنا نحصل على:

$$P^{-1}AP = \Lambda \dots\dots\dots(8.10-17)$$

والمصفوفة  $A$  تكون قطرية في حالة القيمة الذاتية للمنظومة. ونعود الآن إلى حل المعادلة (8.10-15) وذلك بأدخال تحويل الأحداثيات كالآتي:

$$Z = Py \dots\dots\dots(8.10-18)$$

ولذلك نحصل على:

$$P\dot{y} = P Ay + u \dots\dots\dots(8.10-19)$$

وبالضرب أولاً بواسطة  $P^{-1}$  نحصل على:

$$\dot{y} = P^{-1}APy + P^{-1}u = \Lambda y + P^{-1}u \dots\dots\dots(8.10-20)$$

ولذلك فإن المعادلة (8.10-20) يمكن فك ترابطها الآن ونحصل على الحل إلى  $y_i$  ببساطة من تحويل لايبلاس.

لذلك نتأمل المعادلة المتجانسة:

$$\dot{y} = \Lambda y \dots\dots\dots(8.10.21)$$

والحل يكون على الصورة:

$$y = e^{\Lambda t} y_0 \dots\dots\dots(8.10.22)$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}_0 \dots\dots\dots(8.10.23)$$

ومن التحويل إلى الأحداث الأصلية نلاحظ أن  $y = P^{-1}Z$  وبالتعويض في المعادلة (8.10) وبالضرب أولاً بواسطة  $P$  نحصل على:

$$Z = Pe^{\Lambda t} P^{-1} Z_0 \dots \dots \dots (8.10.24)$$

وبالمقارنة مع المعادلة (8.10-8) نستنتج أن:

$$e^{\Lambda t} = Pe^{\Lambda t} P^{-1} \dots \dots \dots (8.10-25)$$

وهي مصفوفة مربعة أيضاً.

9- Two identical disks of centroidal mass moment of inertia  $I$  are attached to a steel shaft that is fixed at the right end as shown in fig (8-11). Each section of shaft has a diameter  $d$  a length  $L$ , and a torsional spring constant  $k$ . Using the system data.

$L = 24$ in (length of each section of shaft).

$d = 1.25$ in (diameter of shaft).

$G = 12(10)^6$  psi (shear modulus).

$I = 12$  lb.in.s<sup>2</sup> (centroidal mass moment of inertia of disk).

- Determine: (a) The eigenvalues of the system.  
 (b) The natural frequencies of the system (Hz).  
 (c) The eigenvectors (normal-mode shapes) of the system.

9- قرصين متماثلين عزم القصور الذاتي الكتلي المركزي  $I$  متصلين بعمود من الصلب حيث مثبت أحدهما عند النهاية اليمنى له كما بالشكل. كل من جزئي القضيب قطره  $d$  وطوله  $L$  ومعامل النابض الألتوائي  $k$  أستخدم المعطيات التالية:

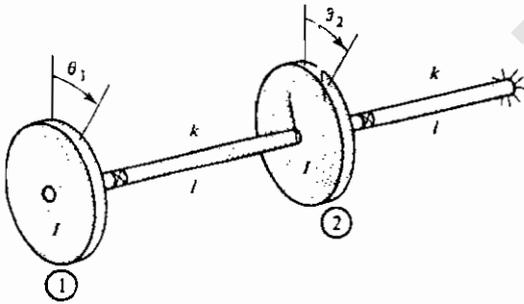
الطول  $L = 24$  بوصة ، قطره  $= 1.25$  بوصة.

إجهاد القص  $G = 12 \times 10^6$

عزم القصور الذاتي الكتلي  $I = 12$  lb.in.s<sup>2</sup>

أوجد:

- (أ) قيمة عامل المصفوفة.  
 (ب) الترددات الطبيعية للمنظومة.  
 (ج) متجه عامل المصفوفة.



$$k = \frac{GJ}{L}$$

الحل:

أولاً: نستخدم الأحداثين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  كما مبين بالشكل (8-11).

ويمكن تعريف معامل الكزازة stiffness coefficients  $k_{11}$  بأنه العزم المطلوب ليعطي

للقرص الأول لعمل وحده دوائية (a unit rotation) بينما  $k_{21}$  هو العزم المطلوب للقرص

الثاني لكي يحافظ عليه من الدوران أي لا يحدث للقرص الثاني دوران وعند ذلك يكون  $\theta_2 = 0$  و

$$\theta_1 = 0 \text{ وبذلك يكون } k_{11} = k \text{ و } k_{21} = -1$$

وعندما يكون  $\theta_1 = 0$  ،  $\theta_2 = 1$  فإن  $k_{22} = 2k$  و  $k_{12} = -k$

ويتكوّن مصفوفة الجساءة (الكراسة) the stiffness matrix

$$\therefore \text{the stiffness matrix} = k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

وتكون مصفوفة الكتلة هي:

$$M = \text{the mass matrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

وبوضع المحدد  $|D|$  لمعاملات المصفوفة ومساويتها بالصفر كما يلي:

$$\therefore |D| = \begin{vmatrix} \frac{k}{I} - \lambda & -\frac{k}{I} \\ -\frac{k}{I} & \frac{2k}{I} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

وبفك المحدد نحصل على معادلة التردد

$$\left(\frac{k}{I} - \lambda\right)\left(\frac{2k}{I} - \lambda\right) - \left(\frac{k}{I}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - \frac{3k}{I}\lambda + \left(\frac{k}{I}\right)^2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ويكون جذور معادلة التردد هما الترددین الطبيعيين (the eigenvalues) لمعادلة الحركة أو للقرصين.

ونظراً لأن معادلة التردد يكون فيها  $\omega^4$  ،  $\omega^2$  فإننا نضع  $\lambda = \omega^2$  حتى تتحول إلى معادلة متجانسة من الدرجة الثانية حتى يمكن إيجاد جذورها بالقانون العام كما سبق شرحه بالأمثلة السابقة.

$$\therefore \left. \begin{aligned} \lambda_1 = \omega_1^2 &= \frac{k}{I} \left[ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right] \\ \lambda_2 = \omega_2^2 &= \frac{k}{I} \left[ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

يمكن حساب ثابت اللي للياي the torsional spring constant

$$\therefore k = \frac{GJ}{L} = \frac{12(10)^6}{24} \left[ \frac{\pi(1.25)^4}{32} \right] = 120(10)^3 \text{ lbin/rad}$$

$$\frac{k}{I} = \frac{120(10)^3}{12} = 10(10)^3 \text{ s}^{-2}$$

بالتعويض عن قيمة  $\frac{k}{I}$  في المعادلات (5)

$$\begin{aligned} \therefore \lambda_1 &= \omega_1^2 = 3.82(10)^3 \\ \lambda_2 &= \omega_2^2 = 26.18(10)^3 \end{aligned} \dots\dots\dots(6)$$

ويمكن إيجاد التردد الطبيعي بالهرتز (Hz) كما يلي:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{3.82(10)^3}}{2\pi} = 9.84 \text{ Hz} \\ f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{\sqrt{26.18(10)^3}}{2\pi} = 25.75 \text{ Hz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ثالثاً:- لإيجاد النسق الطبيعي (the eigenvectors (normal mode shapes) فإنه يمكن كتابة المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} \frac{k}{I} - \lambda & -\frac{k}{I} \\ -\frac{k}{I} & \frac{2k}{I} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

where  $\theta_1, \theta_2$  are the eigenvector components

∴ من المعادلات (8) نحصل على:

$$\left( \frac{k}{I} - \lambda \right) \theta_1 - \frac{k}{I} \theta_2 = 0 \quad , \quad -\frac{k}{I} \theta_1 + \left( \frac{2k}{I} - \lambda \right) \theta_2 = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$\therefore \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\frac{k}{I} - \lambda}{\frac{k}{I}} \dots\dots\dots(10)$$

$$\frac{k}{I} = 10(10)^3 \quad \text{بالتعويض عن كل من } \lambda_1, \lambda_2 \text{ وكذلك عن}$$

$$\left( \frac{\theta_2}{\theta_1} \right)_1 = \frac{10(10)^3 - 3.82(10)^3}{10(10)^3} = 0.62 \dots\dots \text{(frist mode)}$$

$$\left( \frac{\theta_2}{\theta_1} \right)_2 = \frac{10(10)^3 - 26.18(10)^3}{10(10)^3} = 11.62 \dots\dots \text{(second mode)}$$

بالرغم من وجود عدد لا نهائي من القيم  $\theta_1, \theta_2$  فنكون هاتين النسبتين كافيتين.

وبالتعويض عن  $\theta_1 = 1$  فإننا نحصل على

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (0.62) \end{Bmatrix}$$

Eigenvector for first mode

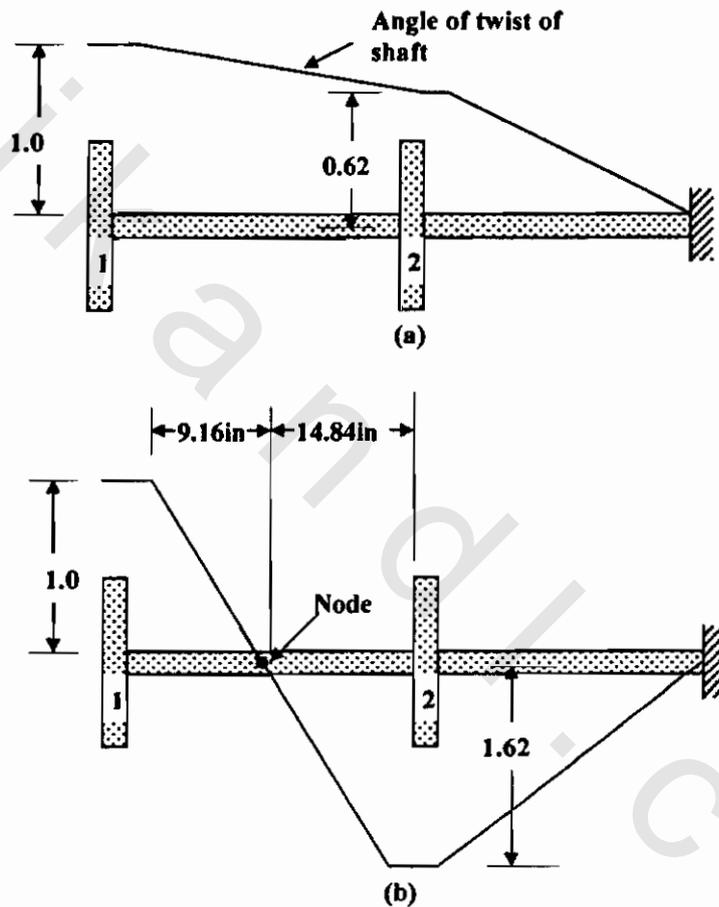
$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.62 \end{Bmatrix}$$

Eigenvector for second mode

وعندما  $f_1 = 9.84\text{Hz}$  فإن عند هذه اللحظة يكون  $\theta_2 = 0.62\theta_1$  وأن النسق الأول يصف الأهرتزاز الحر الغير مخمد المبين في الشكل (8-12) في تناسق أو شكل المنظومة. فعندما تهتز المنظومة عند تردد  $f_1$  حيث أن:  $f_1 = 9.84\text{Hz}$

فإن  $\theta_2 = 0.62\theta_1$  وعند أي لحظة في هذه الفترة ولهذا تكون النسبة موجبة والقرصين يهتزوا في مسار مع كل للأخر. والنسق الثاني يصف شكل وترتيب المنظومة المهتزة والغير مخمدة وأنه عندما تهتز المنظومة عند التردد الثاني  $f_2 = 25.75\text{Hz}$  مع دوران القرص  $180^\circ$  خارج المسار لكل منهم فإن النسبة تكون سالبة.

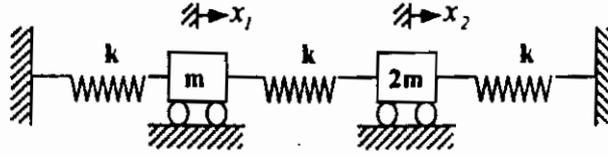
أي أن  $\theta_2 = -0.62\theta_1$  وشكل اللي للقضيب (أشكال النسق) يظهر في الشكل (8-12) ونلاحظ أنه في حالة النسق الثاني فإن الأراحة الزاوية للقرصين تساوي صفر عند العقدة.



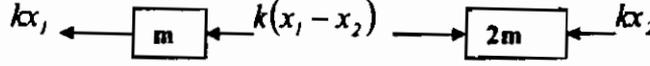
الشكل (8-12) ترتيب وشكل النسق الأول والثاني

10- المنظومة المبينة بالشكل (8-13) أوجد معادلتى الحركة وأكتبها في الصورة المصفوفية وأوجد المعادلة المميزة (معادلة التردد) والتردد الطبيعي لكل كتلة وأوجد كذلك المتجه الذاتي الأول والثاني وأرسم رسماً تخطيطياً ليوضح موقع العقدين الأعتياديين.

الحل:



الشكل (8-13)



القوى المؤثرة على الكتلة m

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$\therefore m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

القوى المؤثرة على الكتلة 2m

$$2m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2$$

$$\therefore 2m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ويمكن وضع المعادلتين (1) ، (2) في الصورة المصفوية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

وبفرض أن الحركة دورية وتتكون من حركات توافقية ذات سعات وترددات مختلفة ولهذا نفرض أن إحدى المركبات على الصورة التالية:

$$x_1 = A \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad x_2 = B \sin(\omega t + \phi)$$

حيث  $A, B, \phi$  ثوابت اختيارية ،  $\omega$  هي أحد الترددات الطبيعية للنظام

$$\dot{x}_1 = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad \dot{x}_2 = \omega B \cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \sin(\omega t + \phi)$$

وبالتعويض في المعادلتين (1) ، (2) من هذه العلاقات نحصل على:

$$\therefore (-m\omega^2 + 2k)A - kB = 0 \dots\dots\dots(4)$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على:

$$(-2m\omega^2 + 2k)B - kA = 0 \dots\dots\dots(5)$$

وبوضع المعادلتين 4 ، 5 في صورة المحدد ونساويه بالصفر كما يلي:

$$\begin{vmatrix} -(m\omega^2 + 2k) & -k \\ -k & (-2m\omega^2 + 2k) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

وبفك المحدد (6) نحصل على معادلة التردد التالية:

$$(-m\omega^2 + 2k)(-2m\omega^2 + 2k) - k^2 = 0$$

و المعادلة المميزة أو معادلة التردد تكون على الصورة:

$$\lambda^2 - 3\frac{k}{m}\lambda + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \dots\dots\dots(7)$$

وذلك بعد التعويض عن  $\omega^2 = \lambda$

وبإيجاد جذور معادلة التردد (7) يمكن إيجاد التردد الطبيعي للكتلتين وذلك باستخدام المعادلة العامة للجذور وهي تسمى أيضاً بالمتجهات الذاتية

$$\therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = 0.634 \frac{k}{m}, \quad \therefore \omega_1 = \sqrt{0.634k/m}$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = 2.366 \frac{k}{m}, \quad \therefore \omega_2 = \sqrt{2.366k/m}$$

وبالجهرب مسبقاً بواسطة مقلوب مصفوفة الكتلة:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

وبذلك تصبح معادلتى الحركة التى فى الصورة المصفوفية (3) على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} \left(2 \frac{k}{m} - \lambda\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{1}{2} \frac{k}{m} & \left(\frac{k}{m} - \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

ويمكن إيجاد المتجهات الذاتية من المعادلة (9) بالتعويض عن قيم  $\lambda$  وبذلك سنوضح استخدام المصفوفة المرافقة فى تقدير قيمتها.

∴ المصفوفة المرافقة من المعادلة (9) هى

$$adj[A - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{m} - \lambda_1\right) & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{2m} & \left(\frac{2k}{m} - \lambda_1\right) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (10)$$

وبالتعويض عن  $\lambda_1 = 0.634$  نحصل من المعادلة (10) نحصل على المتجه الذاتي الأول من أى عمود فى المعادلة (10)

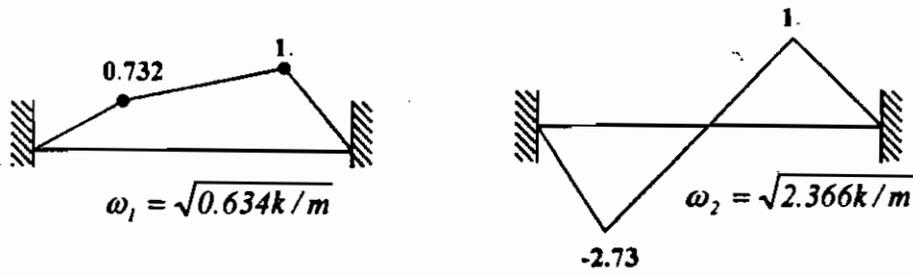
$$\therefore \begin{bmatrix} 0.366 & 1.000 \\ 0.500 & 1.366 \end{bmatrix} \frac{k}{m}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0.723 & 0.732 \\ 1.000 & 1.000 \end{bmatrix} \text{ or } x_1 = \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

بالمثل عندما نستخدم  $\lambda_2 = 2.366$  نحصل على المتجه الذاتي الثانى من أى عمود فى المعادلة (10) وليكن:

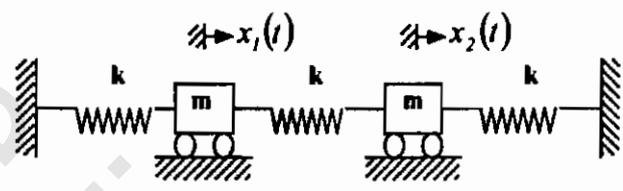
$$x_2 = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

والشكل (8-14) التالى يبين العندين الأعتياديتين.

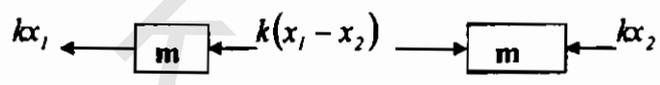


الشكل (8-14)

11 - المنظومة المبينة بالشكل (8-15) أوجد معادلات الحركة وأحسب كم من Eigenvalues و Eigenvectors وأحسب  $x(t)$  لكل كتلة.



الشكل (8-15)



$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\
 \therefore m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \dots\dots\dots(1) \\
 m\ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) - kx_2 \\
 \therefore m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 &= 0 \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

ويمكن كتابة معادلاتي الحركة على الصورة المصفوفية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

وبفرض أن الحركة دورية وتتكون من العديد من حركات توافقية ذات ساعات وترددات مختلفة ولهذا نفرض أن إحدى المركبات على الصورة التالية:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= A_1 e^{i\omega t} & x_2 &= A_2 e^{i\omega t} \\
 \therefore \dot{x}_1 &= i\omega A_1 e^{i\omega t} & \dot{x}_2 &= i\omega A_2 e^{i\omega t} \\
 \ddot{x}_1 &= -\omega^2 A_1 e^{i\omega t} & \ddot{x}_2 &= -\omega^2 A_2 e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

ويمكن كتابة المعادلة (3) على الصورة التالية:

$$\begin{aligned}
 [m]\ddot{x} + [k]x &= [0] \\
 \therefore [m](-\omega^2 x) + [k]x &= [0] \\
 -\omega^2 [m]x + [k]x &= [0] \\
 [-\omega^2 m]x + [k]x &= [0]
 \end{aligned}$$

$$\therefore [k - \omega^2 m][A]e^{i\omega t} = [0]$$

وحيث أن  $e^{i\omega t} \neq 0$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

وحيث أن محددة المصفوفة = 0

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k - k & -k \\ -k & 2k - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أذا وضعنا  $A_2 = 1$

$$\therefore k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_1 - A_2 = 0 \quad \therefore A_1 = A_2$$

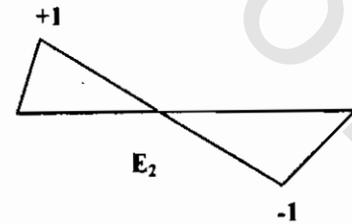
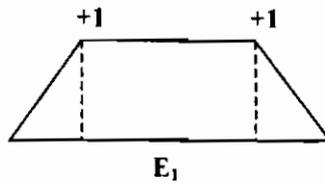
وبالتعويض عن  $A_2 = 1$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k - 3k & -k \\ -k & 2k - 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore k \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_1 + A_2 = 0 \quad A_1 = -A_2$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



الشكل (8-16)

$$[\hat{p}] = \left[ \begin{array}{c} (A_1) \\ (A_2)_{E_1} \end{array} \quad \begin{array}{c} (A_1) \\ (A_2)_{E_2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{p}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [\hat{p}]^T m [\hat{p}]^T [\ddot{x}] + [\hat{p}]^T k [\hat{p}]^T [x] = [0]$$

$$[\hat{p}]^T m [\hat{p}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

$$[\hat{p}]^T k [\hat{p}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

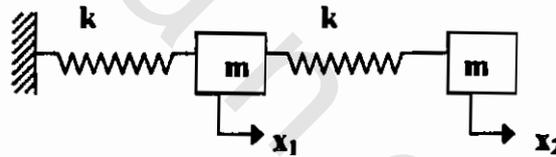
وبالتالي يمكن فصل كل متغير على حدة

$$2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 = 0$$

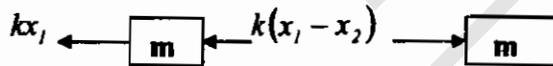
$$2m\ddot{x}_2 + 6kx_2 = 0$$

وبالتالي يمكن حل معادلة على حدة على إنها ذات درجة حرية واحدة.

12- في المنظومة المبينة بالشكل (8-17) أوجد جميع المطالب بالمثال السابق.



الشكل (8-17)



يمكن أستنتاج معادلة الحركة كما يلي:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$$

$$\therefore m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ويمكن وضعهم في الصورة المصفوية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad , \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$$

نعوض بقيم  $x_1, x_2$  في المعادلة التالية:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 & x_1 \\ -\omega^2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -\omega^2 m & 0 \\ 0 & -\omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض بقيمة  $x_2, x_1$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالتعويض عن قيمة  $x_2, x_1$

$$\therefore x_1 = A_1 e^{i\omega t} \quad , \quad \therefore x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 e^{i\omega t} \\ A_2 e^{i\omega t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث  $e^{i\omega t} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2k - \omega^2 m)(k - \omega^2 m) - k^2 = 0$$

$$\therefore 2k^2 - 2k\omega^2 m - k\omega^2 m + \omega^4 m^2 - k^2 = 0$$

$$m^2 \omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0$$

$$Ax^2 + bx + c = 0$$

وباعتبار أن هذه المعادلة على الصورة

$\therefore$  يمكن إيجاد جذورها من القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4AC}}{2A}$$

$$A = m^2 \quad , \quad b = -3km \quad , \quad c = k^2$$

$$\therefore \omega_{1-2}^2 = \frac{+km \pm \sqrt{(-3km)^2 - 4m^2 k^2}}{2m^2}$$

$$\omega_{1-2}^2 = \frac{3km}{2m^2} \pm \sqrt{\frac{9k^2m^2}{4m^2} - \frac{4m^2k^2}{4m^4}}$$

$$\therefore \omega_{1-2}^2 = \frac{3k}{2m} \pm \sqrt{\frac{5k^2m^2}{4m^4}}$$

$$\therefore \omega_{1-2}^2 = \frac{3k}{2m} \pm \sqrt{\frac{5k^2}{4m^2}}$$

$$\therefore \omega_{1-2}^2 = \frac{3k}{2m} \pm \frac{k}{2m} \sqrt{5} \quad , \quad \therefore \omega_{1-2} = \frac{3k}{2m} \pm \frac{2.236}{2m} k$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \omega_1^2 &= 2.62 \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= 0.382 \frac{k}{m} \end{aligned} \right\} \text{Eigenvalues}$$

∴ نعوض بقيمة  $\omega_{1-2}$  في المعادلة

$$\begin{bmatrix} +2k - 2.62k & -k \\ -k & k - 2.62k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بأخذ k مشترك

$$\therefore k \begin{bmatrix} -0.62 & -1 \\ -1 & -1.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

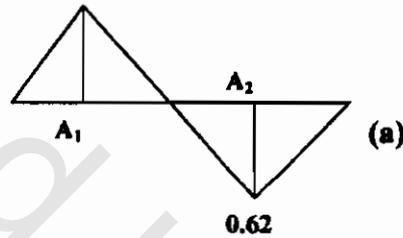
بفرض أن  $A_1 = 1$

$$\therefore \begin{bmatrix} -0.62 & -1 \\ -1 & -1.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore -0.62 - A_2 = 0$$

$$A_2 = -0.62$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{bmatrix}$$



بالتعويض في المعادلة (1) عن  $\omega_{1,2}$

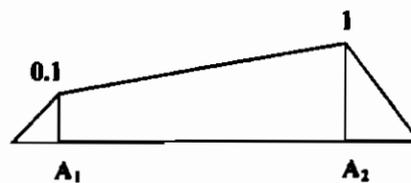
$$\begin{bmatrix} 2k - 0.38k & -k \\ -k & k - 0.38k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبفرض أن  $A_2 = 1$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1.62 & -1 \\ -1 & 0.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-A_1 + 0.62 = 0 \quad \therefore A_1 = 0.62$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 1 \end{bmatrix}$$



∴ بالقسمة على k

(b)

الشكل (8-18 a,b)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.62 \\ -0.62 & 1 \end{bmatrix} [P]^T = \begin{bmatrix} 1 & -0.62 \\ 0.62 & 1 \end{bmatrix}$$

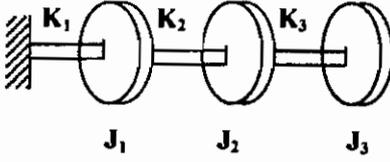
$$\begin{aligned} [P][m][P]^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0.62 \\ -0.62 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.62 \\ 0.62 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0.62 \\ -0.62 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -0.62m \\ -0.62m & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62m & 0 \\ 0 & 1.38m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [P][k][P]^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0.62 \\ -0.62 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0.62 \\ -0.62 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4k & -2.2k \\ 0.4k & 1.6k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.648k & -1.208k \\ -0.468 & 2.564k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 0.62m\ddot{x}_1 + 1.648kx_1 - 0.468kx_2 = 0$$

$$1.38m\ddot{x}_2 - 0.468kx_1 + 2.56kx_2 = 0$$

## تمارين

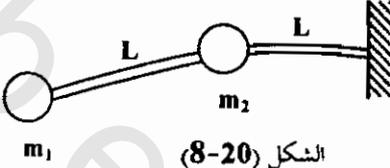


الشكل (8-19)

1- أوجد مصفوفة الجساءة للنظام المبين في الشكل (8-19) وكون مصفوفة اللدانة بوساطة مقلوب مصفوفة الجساءة.

2- كون مصفوفات الجساءة واللدانة للمسألة 8-9.

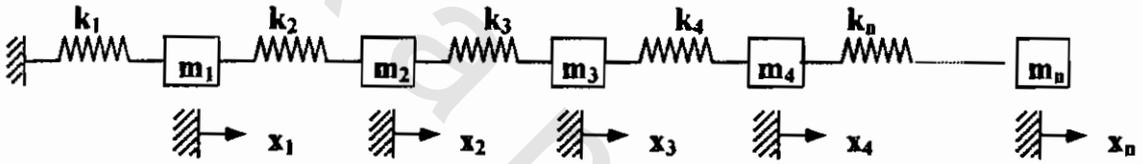
3- عتبة منتظمة مرتكزة على مساند بسيطة بطول  $L$  محملة بأوزان عند المواقع  $0.25L$  و  $0.6L$ . أوجد معاملات تأثير اللدانة لهذه المواقع.



الشكل (8-20)

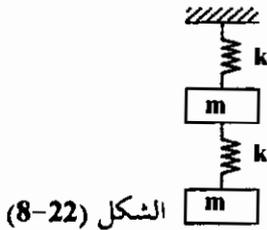
4- أوجد مصفوفة اللدانة لعتبة كابولية مبينة بالشكل (8-20) وأحسب مصفوفة الجساءة من مقلوب مصفوفة اللدانة.

5- تأمل نظام بـ  $n$  من النوابض بالتسلسل كما موضح في الشكل (8-21) وبيّن أن مصفوفة الجساءة هي مصفوفة شريطية على طول القطر.



الشكل (8-21)

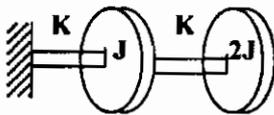
6- أوجد مصفوفة اللدانة للنظام في المسألة 5.



الشكل (8-22)

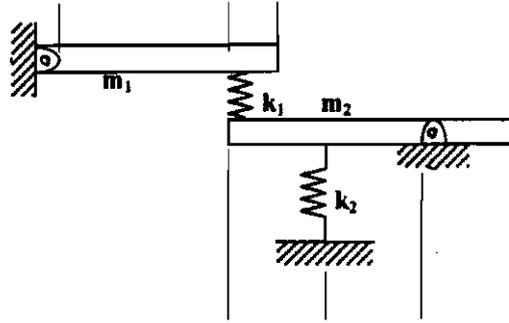
7- باستخدام المصفوفة المرافقة، أوجد الأنساق الاعتيادية لنظام الكتلة والنابض المبين في الشكل (8-22).

8- للنظام في المبين في الشكل (8-23)، أكتب معادلات الحركة بصيغة مصفوفة وحدد الأنساق الاعتيادية من المصفوفة المرافقة.



الشكل (8-23)

9- عارضتان منتظمتان مبينان في الشكل (8-24) ومتساويتان في الطول. ولكن مختلف أوجد معدلات الحركة والترددات الطبيعية وأشكال النسق بأستعمال طرائق المصفوفات.



الشكل (8-24)

## المراجع والمصادر

### المراجع العربية:

- 1- ويليام د.ستيو، شوم، نظريات ومسائل فى الاهتزازات الميكانيكية، الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة - مصر 1994.
- 2- د. محمد فيصرون ميرزا - د. حسن غانم، الاهتزازات والأمواج وتحليل فورييه، دار الأمل للنشر والتوزيع، أريد، الأردن 1999.
- 3- ج حنا، ر.س ستيفر، ترجمة د. أحمد محمد حسين، أ.د صلاح الدين محمد المهدي، النظريات الأساسية فى ميكانيكا الآلات.

### المراجع الأجنبية:

- 1- Daniel J.Inman, Engineering Vibration, Prentice Hall International Educations, 1996.
- 2- Franciss Tse, Iran E. Morse Rolland T. Hinkle Mechanical vibrations, CBS publishers and Distributors, 1983.
- 3- Robert F. steidel, Jr, An Introduction to mechanical vibrations. John Wiley & sins 1989.
- 4- M.L. JAMS, G.M. SMITH, J.C. Wol Ford, P.W.Whaley, vibration of Mechanical and structural Systems with microcompute Applications, Harper coolins college publishbers, 1994.
- 5- C. F. Beards, structural vibration, Analysis and damping, 1996.
- 6- Dr. Eng. R. R. Basily, vibration and waves for engineering students, Darel-Dakeem prees, Cairo.
- 7- Thomas Bevan, The theory of machines, Longmans, Green and Co.LTD of Paternoster Row, 1945.
- 8- R.S. KhumI, J.K. Gupta, Theory of machines, Eurasia Publishing House (P) LTD. 1976.
- 9- P.L. Ballaney, Theory of Machines, Khanna Publishers, 1979.