الباب الثالث

انتقال الحرارة المتعدد الاتجاه

Chapter Three

Multi Directional

Heat Transfer

3.0 مقدمة

إن قانون فورير المتمثل بالمعادلة (2 – 1) والتي تم التطرق إليها في الباب السابق يصلح للتطبيق عند انتقال الحرارة باتجاه واحد أو عند كون النظام في الحالة المستقرة حيث تكون المسألة بسيطة وغير معقدة ونحتاج فقط إلى إجراء التكامل للمعادلة أعلاه للحصول على علاقة تربط بين درجة الحرارة والزمن وباستخدام الظروف الحدية لإيجاد قيم الثوابت في التكامل الناتج.على أية حال إذا كانت درجة حرارة مادة صلبة متغيرة مع الزمن أو باتجاهات متعددة كما هو عليه واقع الحال أو هناك مصادر أو أحواض حرارية فإن الوضع سيكون أكثر تعقيداً ولذلك سنعتبر الحالة العامة وهي أن درجة الحرارة خلال مادة صلبة ربما تتغير مع الزمن وأن مصادر الحرارة ربما تكون موجودة خلال الجسم نفسه وأن هذا السريان الحراري سيكون خلال حجم معين من الجسم الصلب كما سيتم توضيحه في أدناه.

1.3 انتقال الحرارة بالتوصيل الثنائي الاتجاه

Two Dimensional Heat Transfer by Conduction

لو أخذنا شريحة في جدار صلب مستوي وكانت الشريحة مساوية لـ " dx " ومساحة مقطع الشريحة مساوية لـ " A " وعلى افتراض أن الجسم الصلب يقوم بتوليد حرارة مقدارها " q " لكل وحدة حجم و بفرض أن تلك الحرارة تنتقل في كلا الإتجاهين x و y كما يوضح الشكل (3 – 1) أدناه :-

و بإجراء موازنة حرارية على شريحة من الجدار ينتج أن :-

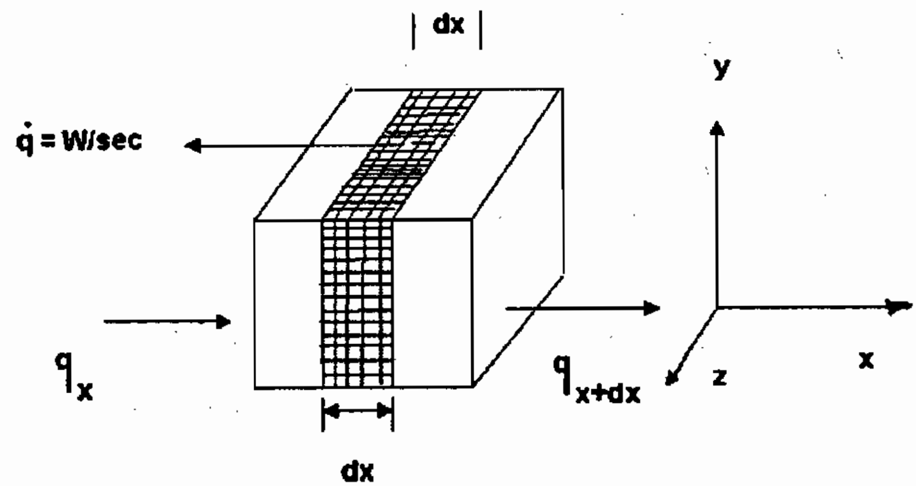
الحرارة الكلية الداخلة + المتولدة = الحرارة الخارجة + المتراكمة أو المتبقية وهذه تعرف بمعادلة التوازن الحراري أما التفاصيل لكل مفردة من المفردات أعلاه فهي :

درجة حرارة السطح الداخلي للأنبـوب $330\ °C$ ودرجـة حـرارة العـازل الخارجي $50\ °C$ أحسب ما يلي:-

(A) معدل الفقد الحراري لكل متر من الأنبوب.

(B) درجتي الحرارة الداخلية بين الأسطح المختلفة.

س**26**:نافذة معزولة حرارياً أبعادها $40\ cm \times 60\ cm$ مصنوعة من قطعتـين من الزجاج سمك كل منهما $10\ mm$ تحجزان بينهما فجوة من الهواء سـمكها $8\ mm$.أوجد مقدار الفقد الحراري بطريقة التوصيل إذا كانت درجة حـرارة الهواء الداخلي $20\ °C$ ودرجة حرارة الهواء الخارجي $-20\ °C$.إن معامـل انتقال الحرارة بالحمل للسطح الداخلي $10\ W/m^2.°C$ وللسطح الخارجي هو $100\ W/m^2.°C$.



الشكل (3 - 1)

انتقال الحرارة بالتوصيل في اتجاهين

1- الحرارة الداخلة input Heat: ويمكن الحصول عليها من المعادلة التالية:

$$q_x = -k\,A\frac{dT}{dx} \qquad (1-3)$$

2- الحرارة المتولدة Generated Heat: ونحصل عليها من المعادلة التالية:

$$q_{gen} = q^{\circ}\,A\,dx \qquad (2-3)$$

3- الحرارة المتراكمة Accumulated Heat: ونحصل عليها من المعادلتين:

$$\Delta H = m\,Cp\,dT \qquad (3-3)$$

$$\Delta u = \frac{du}{dt} = \rho\,A\,dx\,Cp\,\frac{dT}{dt} \qquad (4-3)$$

4 - إن كمية الحرارة الخارجة = كمية الحرارة الداخلة + مشتقتها أي أن:-

$$q_{x+dx} = -k\,A\frac{dT}{dx} + \left[-k\,A\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)dx\right]$$

$$q_{x+dx} = -k\,A\frac{dT}{dx} - k\,A\frac{d^2T}{dx^2}dx \qquad (5-3)$$

وبتعويض المعادلات من (3 – 2) إلى (3 – 5) في معادلة التوازن الحــراري وإعادة ترتيبها سنحصل على :-

$$-k\,A\frac{dT}{dx} + q^{\circ}A\,dx = -k\,A\frac{dT}{dx} - k\,A\frac{d^2T}{dx^2}dx + \rho\,Cp\,A\frac{dT}{dt}\,dx \qquad (6-3)$$

حيث أن t يمثل الزمن.نلاحظ هــنا أن الحد الأول في كل طرف من المعادلة هو نفســه ولذلك يمكن حذفهما.

وبقسمة المعادلة الأخيرة بعد الحذف على المقدار k A نحصل على :-

$$q^{\circ} = -k\frac{d^2T}{dx^2} + \rho\,Cp\frac{dT}{dt}$$ أو:-

$$\frac{q^{\circ}}{k} + \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\rho Cp}{k}\frac{dT}{dt} \Rightarrow q' + \frac{d^2T}{dx^2} = \alpha\,\frac{dT}{dt} \qquad (7-3)$$

حيث أن :- $\alpha = \dfrac{\rho\ Cp}{k}$

q' : هي الحرارة المتولدة لكل وحدة حجم

Cp : الحرارة النوعية أو السعة الحرارية للمادة $\frac{Joule}{kg\,.K^{\circ}}$

ρ : الكثافة

تمثل المعادلة (3 – 7) المعادلة العامة لانتقال الحرارة بالتوصيل في الأجسام الصلبة وفي اتجاه واحد ومستوي.

2.3 انتقال الحرارة بالتوصيل خلال المستويات ثلاثية الأبعاد
Heat Transfer Through Three Dimensional Planes

لغرض اشتقاق المعادلة لنتخيل وجود مكعب ضمن جدار سمكه " dx " وارتفاعه " dy " و عمقه " dz " كما موضح في الشكل (3 – 2)

وبتطبيق المعادلة العامة لانتقال الحرارة باستخدام الموازنة نحصل على :-

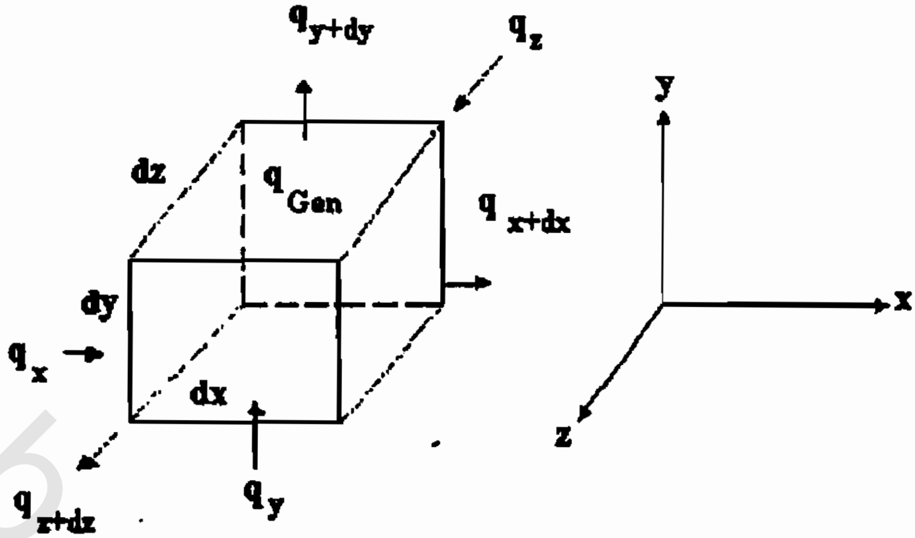
$$q_x + q_y + q_z + q_{gen} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + \frac{du}{dt} \qquad (8-3)$$

وسنقوم بتفصيل كل مفردة من مفردات المعادلة (3 – 8) على حدة

<u>أولاً</u>: في المحور x

$$q_x = -k\,dy\,dz\,\frac{dT}{dx} \qquad (9-3)$$

$$q_{x+dx} = -k\,dy\,dz\,\frac{dT}{dx} + \left[-k\,dy\,dz\,\frac{d}{dx}.\frac{dT}{dx}\right] \qquad (10-3)$$



الشكل (3 - 2): انتقال الحرارة الثلاثي الأبعاد

ثانيا: في المحور y

$$q_y = -k\, dx\, dz \frac{dT}{dy} \qquad (11-3)$$

$$q_{y+dy} = -k\, dx\, dz \frac{dT}{dy} + \left[-k\, dx\, dz \frac{d}{dy} . \frac{dT}{dy} \right] \qquad (12-3)$$

ثالثا: في المحور z

$$q_z = -k\ \ dx\ \ dy \frac{dT}{dz} \qquad (13-3)$$

$$q_{z+dz} = -k\, dx\, dy \frac{dT}{dz} + \left[-k\, dx\, dy \frac{d}{dz} . \frac{dT}{dz} \right] \qquad (14-3)$$

أما الحرارة المتولدة فيمكن حسابها من المعادلة التالية:

$$q_{gener} = q^{\circ} \; dx \; dy \; dz \qquad (15-3)$$

والحرارة المتراكمة $\frac{du}{d\theta}$ تحسب من المعادلة التالية:-

$$q_{accum} = \rho \, Cp \; dx \; dy \; dz \, \frac{dT}{dt} \qquad (16-3)$$

وبتعويض جميع الحدود أعلاه في المعادلة (3 – 8) وأبعادها بالترتيب سوف نحصل على المعادلة التالية:-

$$-k\,dy\,dz\frac{dT}{dx} - k\,dx\,dz\frac{dT}{dy} - k\,dx\,dy\frac{dT}{dz} + q^{\circ}dx\,dy\,dz$$
$$= -k\,dy\,dz\frac{dT}{dx} - k\,dy\,dz\frac{d}{dx}.\frac{dT}{dx} - k\,dx\,dz\frac{dT}{dy}$$
$$-k\,dx\,dz\frac{d}{dy}.\frac{dT}{dy} - k\,dx\,dy\frac{dT}{dz} - k\,dx\,dy\frac{d}{dz}.\frac{dT}{dz} +$$
$$\rho\;Cp\,dx\,dy\,dz\frac{dT}{dt} \qquad (17-3)$$

باختصار المقادير المتشابهة وبقسمة طرفي المعادلة (3 – 17) على المقدار $dx\;dy\;dz$ وأخذ النهايات (Limits) نحصل على المعادلة التالية:

$$k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]+q^{\circ}=\rho Cp\frac{dT}{dt} \qquad (18-3)$$

إن المعادلة(3 – 18) تدعى بالمعادلة العامة لانتقال الحرارة في الأجسام المستوية ويمكن كتابتها بالصورة التالية:-

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q^\circ}{k}=\frac{1}{\propto}\frac{dT}{dt} \qquad (19-3)$$

حيث أن المقدار $\propto=\frac{k}{\rho\, Cp}$ ويدعى بمعامل الانتشار الحراري أو الانتشارية الحرارية (Thermal Diffusivity).

إن المعادلة (3 – 19) تمثل المعادلة العامة لانتقال الحرارة في الأجسام المستوية ثلاثية الأبعاد.

3.3 انتقال الحرارة بالتوصيل خلال الأسطوانات ثلاثية الأبعاد
Heat Transfer Through Three Dimensional Cylinders

إن انتقال الحرارة بالتوصيل في الإحداثيات الأسطوانية الثلاثية الأبعاد سوف يتم التعبير عنه بدلالة الأبعاد(z ، r ، θ) وكما يوضح ذلك الشكل(3 – 3) أدناه.

أولاً: انتقال الحرارة في الاتجاه r

كمية الحرارة الداخلة إلى المقطع في الاتجاه r يمكن حسابها كما يلي :-

$$Input\ Heat=q_r=-k\,dz\,r\,d\theta\frac{dT}{dr} \qquad (20-3)$$

أما كمية الحرارة الخارجة من المقطع في الاتجاه r + dr فتحسب كما يلي:

$$Output = q_{r+dr} = -k\,dz\,r\,d\theta\frac{dT}{dr} - k\left[r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr}\right]d\theta\,dz\,dr \quad (21-3)$$

ثانياً: كمية الحرارة المنتقلة في اتجاه الزاوية θ تحسب كما يلي:-

$$Output = q_{\theta+d\theta} = -k\,dr\,dz\frac{1}{r}\frac{dT}{d\theta} - k\,dr\,dz\frac{1}{r}\frac{d^2T}{d\theta^2}d\theta \quad (22-3)$$

ثالثاً: كمية الحرارة المنتقلة في الاتجاه z:-

$$Output = q_{z+dz} = -k\,r\,dr\,d\theta\frac{dT}{dz} - k\,r\,dr\,d\theta\frac{d^2T}{dz^2}dz \quad (23-3)$$

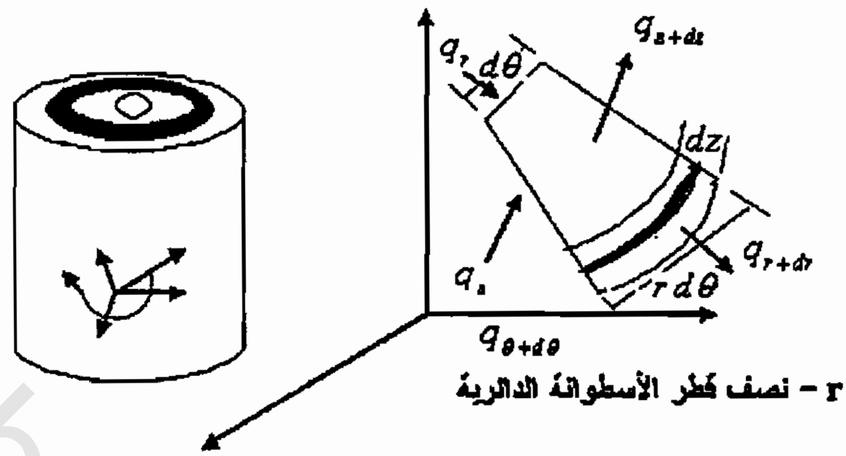
$$Input = q_z = -k\,r\,dr\,d\theta\frac{dT}{dz} \quad (24-3)$$

بتعويض المعادلات أعلاه في المعادلة العامة واختصار الحدود المتشابهة وإعادة الترتيب نحصل على الصيغة العامة التالية :-

$$r\frac{\partial^2T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial^2T}{\partial z^2} + \frac{q^\circ r}{k} = \frac{\rho Cpr}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \quad (25-3)$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2T}{\partial z^2} + \frac{q^\circ}{k} = \frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t} \quad (26-3)$$

إن المعادلة(3 – 26) تـدعى بالمعادلة العامة لانتـقال الحرارة في الأجسام الأسطوانية ثلاثية الأبعاد.



الشكل (3 - 3)
انتقال الحرارة في الأسطوانة ثلاثية الأبعاد

4.3 ملاحظات عامة حول معادلات انتقال الحرارة

General Notes About Equations

1 – عندما يكون انتقال الحرارة في حالة استقرار، فإن التراكم = صفر.

2 – إذا تم ذكر انتقال الحرارة باتجاه المحور x فإن المعادلة (3 – 26) سوف تختصر لتكون بالشكل التالي:-

$$\frac{\partial T^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{q^{\circ}}{k} = 0 \qquad (27 - 3)$$

5.3 انتقال الحرارة في جدار مستوي في وجود التوليد الحراري

Heat Transfer through Plane Wall with Heat Generation

يمثل الشكل أدناه مقطع من جدار مستوي منتظم الحرارة وبسمك يعادل 2 L على اعتبار أن الأبعاد الأخرى أي الطول والعرض كبيرة جدا عن سمك الجدار وأن هذا الجدار يولد حرارة لكل وحدة حجم منه وبمقدار " q° " ولحساب أو إيجاد معادلة توزيع درجات الحرارة لمثل هذا الجدار نقوم بما يلي

وسنبدأ بالمعادلة العامة للتوصيل الحراري للأجسام المستوية ونقوم باختصار الأجزاء غير المطلوبة منها والتوصل إلى الشكل النهائي للمعادلة:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}+\frac{q^\circ}{k}=\cancelto{0}{\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}}$$

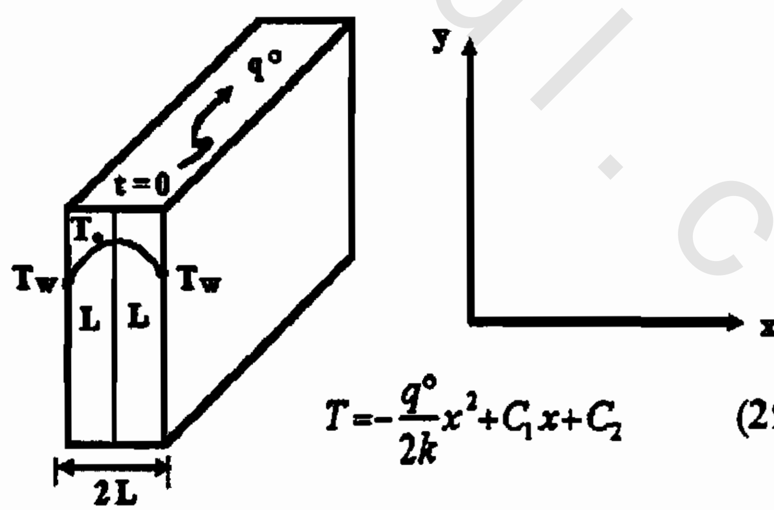
عدم وجود تراكم

لأنهما صغيران جدا

وعلى اعتبار أن هذا الجدار في حالة استقرار حراري فإن التراكم الحراري سيكون مساويا للصفر.أي أن المعادلة ستختصر لتكون بالصورة التالية:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q^\circ}{k}=0 \qquad (28-3)$$

وبإجراء التكامل للمعادلة (3 – 28) لمرتين نحصل على الصيغة التالية:-



$$T=-\frac{q^\circ}{2k}x^2+C_1x+C_2 \qquad (29-3)$$

ولحل المعادلة (3 – 29) يتوجب توفر ظروف حدية لإيجاد قيم الثوابت C_1 وC_2.

1- الظرف الحدي الأول: عندما x = صفر فإن: $\frac{dT}{dx}=0$ وبـالتعويض فـي المشتقة الأولى للمعادلة (3 – 29) نستنتج ما يلي:-

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q^\circ}{k}x + C_1$$

$$0 = -\frac{q^\circ}{k}(0) + C_1 \quad \Rightarrow \therefore C_1 = 0$$

2 – الظرف الحدي الثاني: عندما x = L فإن T = T_w.وبالتعويض عن قيمة C_1 في المشتقة الثانية نحصل على:-

أو نستخدم الظرف التالي
$$\begin{cases} T_w = -\dfrac{q^\circ}{2k}L^2 + C_2 \\ \therefore C_2 = T_w + \dfrac{q^\circ L^2}{2k} \end{cases}$$

عندما x = صفر فإن T = T_o وعندما نعوض في المعادلة(3 – 29) نجد بأن قيمة $C_2 = T_o$.وبذلك نستنتج أن:-

$$T = -\frac{q^\circ}{2k}x^2 + T_o \qquad (30 - 3)$$

والتي نحصل منها على معادلة توزيع درجات الحرارة فـي جـدار مـستوي وبوجود التوليد الحراري.

$$T - T_o = -\frac{q^\circ}{k} x^2 \qquad (31-3)$$

وعند التعويض بالظرف الحدي الثاني في المعادلة (3 – 31) سنحصل على:

$$T_w - T_o = -\frac{q^\circ}{k} L^2 \qquad (32-3)$$

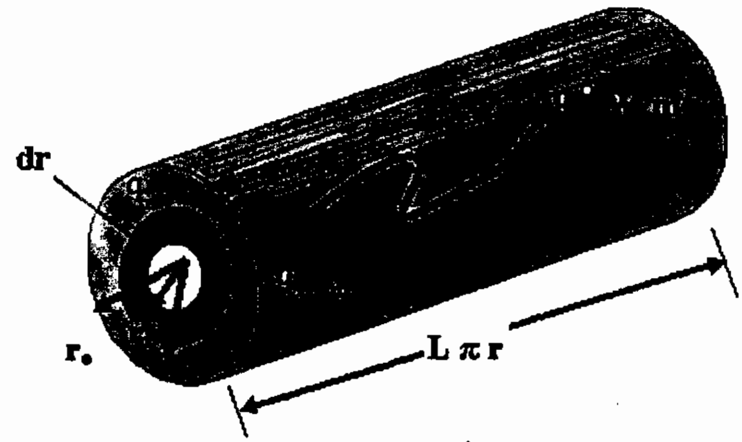
وبقسمة المعادلة(3 – 31) على المعادلة(3 – 32) نحصل على الشكل النهائي لمعادلة توزيع درجات الحرارة في الجدار المستوي.

$$\frac{T - T_o}{T_w - T_o} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \qquad (34-3)$$

6.3 انتقال الحرارة في أسطوانة طويلة صلبة(مركبة) بوجود التوليد الحراري
Heat Transfer through Composite Cylinder with Heat Generation

الشكل أدناه يمثل أسطوانة بنصف قطر هو r وهي منتظمة الحرارة باتجاه المحورr. إن طول الأسطوانة كبير جدا مقارنة مع قطرها.والأسطوانة تقوم بتوليد حرارة قدرها q° .

ولإيجاد المعادلة العامة لتوزيع درجات الحرارة في هذه الأسطوانة نقوم بإجراء موازنة مادية على شريحة من الأسطوانة وهي " dr " وكما مبين في أدناه.



انتقال الحرارة خلال أسطوانة بوجود توليد حراري.

1 – الحرارة الداخلة تحسب من المعادلة التالية:-

$$q_r = -k\,(2\pi r L)\frac{dT}{dr} \qquad (35-3)$$

2 – الحرارة الخارجة تحسب من المعادلة التالية:-

$$q_{r+dr} = -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr} + \left[-k\,(2\pi L)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)dr\right] \qquad (36-3)$$

3 – الحرارة المتولدة تحسب من المعادلة التالية:-

$$q_{Gen} = q^\circ \underbrace{(2\pi L)\,dr}_{\text{(حجم الشريحة)}} \qquad (37-3)$$

وبما أن مجموع الحرارة الداخلة – الحرارة الخارجة + الحرارة المتولدة = صفر أي أن:-

$$\therefore -k(2\pi r L)\frac{dT}{dr}+k(2\pi r L)\frac{dT}{dr}+$$

$$\left[k(2\pi L)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)dr\right]+q^{\circ}(2\pi r L)\,dr=0$$

$$(38-3)$$

$$\therefore 2\pi r k L\left[r\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{dT}{dr}\right]dr+q^{\circ}(2\pi r L)\,dr=0$$

$$(39-3)$$

وبقسمة المعادلة (3 – 39) على المقدار $2\pi r L\,dr$ نحصل على:-

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{q^{\circ}}{k}=0 \qquad (40-3)$$

والتي يمكن تبسيطها لتصبح بالشكل التالي:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{q^{\circ}}{k}r \qquad (41-3)$$

وبإجراء التكامل للمعادلة أعلاه نحصل على:

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{q^{\circ}}{k}r^2+C_1 \qquad (42-3)$$

إن الظرف الحدي الأول المستخدم لحل هذه المعادلة هو أنه عندما r = صــفر فإن $\frac{dT}{dr} = 0$ وعند التعويض في المعادلة (3 – 42) ينتج أن:

$$at \ \ r = 0 \quad , \frac{dT}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \therefore C_1 = 0$$

$$\therefore r\frac{dT}{dr} = -\frac{q^\circ}{2k} r^2 \qquad (43-3)$$

وبقسمة المعادلة (3 – 43) على المقدار r ينتج أن:-

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q^\circ}{2k} r \qquad (44-3)$$

وعند إجراء التكامل للمعادلة (3 – 44) نحصل على:-

$$T = -\frac{q^\circ}{4k} r^2 + C_2 \qquad (45-3)$$

وعند استخدام الظرف الحدي الثاني وهو عندما $r = r_o$ فإن $T = T_w$ وبتطبيق هذا الظرف على المعادلة (3 – 45) نحصل على:

$$T_w = -\frac{q^\circ}{4k} r_o^2 + C_2$$

$$\therefore C_2 = T_w + \frac{q^\circ}{4k} r_o^2 \qquad (46-3)$$

وبتعويض المعادلة (3 – 46) في المعادلة (3 – 45) نحصل على:

$$T = -\frac{q^{\circ}}{4k} r_o^{2} + T_w + \frac{q^{\circ}}{4k} r_o^{2}$$

$$\therefore T - T_w = \frac{q^{\circ}}{4k}\left(r_o^{2} - r^{2}\right) \qquad (47 - 3)$$

إن المعادلة أعلاه تمثل المعادلة العامة لتوزيع درجات الحرارة في الأسطوانة الصلبة (المركبة) بوجود التوليد الحراري.

بما أنه في مركز الأسطوانة(عندما $r = 0$) فإن درجة الحرارة هي T_o أي أن

$$\therefore T_o - T_w = \frac{q^{\circ}}{4k} r_o^{2} \qquad (48 - 3)$$

وبقسمة المعادلة (3 – 47) على المعادلة (3 – 48) نحصل على:–

$$\frac{T - T_w}{T_o - T_w} = 1 - \frac{r^{2}}{r_o^{2}} \qquad (49 - 3)$$

حيث إن T = درجة الحرارة عند أي نصف قطر.

Tw = درجة الحرارة عند السطح أو الجدار.

T_o = درجة الحرارة عند مركز الأسطوانة.

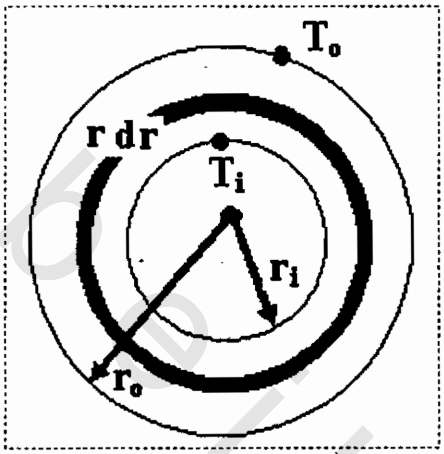
r = نصف القطر عند أي نقطة.

r_o = نصف القطر الخارجي.

7.3 انتقال الحرارة خلال أسطوانة مجوفة بوجود التوليد الحراري
Heat Transfer Through Hollow Cylinder with Heat Generation

الشكل المجاور يوضح تلك الحالة

ولو عدنا للمعادلة (3 – 41) لوجدنا أن:



$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{q^{\circ}}{k}r$$

وبإجراء التكامل للمعادلة أعلاه يمكن الحصول على الصيغة أدناه.

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{q^{\circ}}{2k}r^{2}+C_{1}$$

$$\therefore\ \frac{dT}{dr}=-\frac{q^{\circ}}{2k}r+\frac{C_{1}}{r}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة في dr وإجراء التكامل للمعادلة نحصل على:

$$T=-\frac{q^{\circ}}{4k}r^{2}+C_{1}\ln r+C_{2} \qquad (50-3)$$

ولإيجاد ثوابت المعادلة يجب الحصول على ظروف حدية وهي بالشكل التالي:

الظرف الحدي الأول: عندما $r=r_i$ فإن $T=T_i$

الظرف الحدي الثاني: عندما $r=r_o$ فإن $T=T_o$ باستخدام هذا الشرط نجد

$$T_o = -\frac{q^\circ}{4k} r^2 + C_1 \ln r_o + C_2 \qquad (51-3)$$

وبطرح المعادلة (3 – 51) من المعادلة (3 – 50) نحصل على:-

$$T - T_o = -\frac{q^\circ}{4k}(r^2 - r_o^2) + C_1 \ln(r/r_o) \qquad (52-3)$$

والتي ترتب لتصبح بالشكل التالي:-

$$T - T_o = \frac{q^\circ}{4k}(r_o^2 - r^2) + C_1 \ln(r/r_o) \qquad (53-3)$$

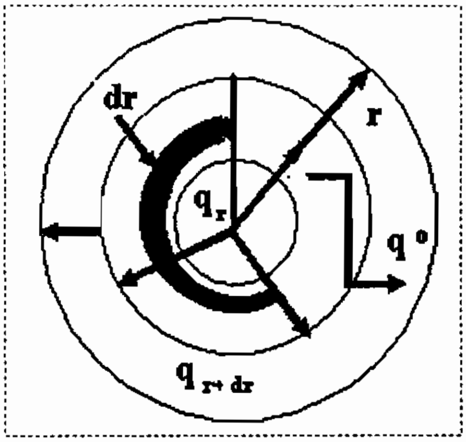
وبالتعويض بالظرف الحدي الأول نحصل على قيمة C_1 التي تعادل:-

$$C_1 = \frac{(T_i - T_o) + \frac{q^\circ (r_i^2 - r_o^2)}{4k}}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \qquad (54-3)$$

8.3 انتقال الحرارة خلال كرة صلبة (مركبة) بوجود توليد حراري
Heat Transfer through Composite Cylinder with Heat Generation

الشـــكل المجاور يمثل كرة مصمتة مع وجود توليد حراري في الكرة مقداره q° ولغرض إيجاد المعادلة العامة لتوزيع درجات الحرارة نقوم بعمل موازنة حرارية على شريحة سمكها يكون مساويا لـــ dr وكما يلي:

$$q_{\text{داخلة}} - q_{\text{خارجة}} + q_{\text{متولدة}} - q_{\text{متراكمة}} = 0$$



وسيتم تفصيل كل مفردة من المفردات أعلاه كل على حدة.

$$k\,4\pi\, r^2 \frac{dT}{dr} + \left[4\pi\, k\left(\frac{d}{dr} r^2 \frac{dT}{dr}\right) dr\right]$$
$$+ q^\circ 4\pi\, r^2 dr = 0$$

$$q_r\,(Input\ Heat) = -k\,4\,\pi\, r^2 \frac{dT}{dr}$$

$$q_{r+dr}(output\ Heat) = -k\,4\,\pi\, r^2 \frac{dT}{dr}$$
$$+ \left[-4\,\pi\, k\left(\frac{d}{dr} r^2 \frac{dT}{dr}\right) dr\right]$$

$$q_{gen}(generated) \quad = q^\circ 4\,\pi\, r^2 dr$$

وبما أن الحالة هي مستقرة فإن التراكم = صفر وعليه تصبح المعادلة كالتالي:

$$4\pi k\left(\frac{d}{dr}r^2\frac{dT}{dr}\right)dr + k4\pi r^2\frac{dT}{dr} + q^\circ 4\pi r^2 dr = 0$$

وبقسمة المعادلة على المقدار $4\pi k\, dr$ نحصل على:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) + \frac{q^\circ r^2}{k} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{q^\circ r^2}{k} \qquad (55-3)$$

وعند إجراء التكامل للمعادلة (3 -- 55) نسبة لــ r نحصل على ما يلي:-

$$r^2\frac{dT}{dr} = -\frac{q^\circ r^3}{3k} + C_1 \qquad (56-3)$$

وبقسمة المعادلة (3 – 56) على المقدار r^2 نحصل على:-

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q^\circ r}{3k} + \frac{C_1}{r^2} \qquad (57-3)$$

وبإجراء التكامل للمعادلة أعلاه ينتج ما يلي:-

$$T = -\frac{q^\circ r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2 \qquad (58-3)$$

ولغرض الحصول على الثوابت يجب استعمال ظروف حدية كالتالي:-

1- الظرف الحدي الأول: عندما $r = 0$ فإن $\frac{dT}{dr} = 0$. وبالتعويض عن هـذه الظرف في المعادلة أعلاه ينتج أن: C_1 = صفر.

من المعادلة (3 – 58) نستنتج أن:-

$$T = -\frac{q^{\circ}}{6k} r^2 + C_2 \qquad (59-3)$$

2 – الظرف الحدي الثاني: عندما $r = r_o$ فإن $T = T_w$ بالتعويض في المعادلة أعلاه ينتج أن:-

$$T_w = -\frac{q^{\circ}}{6k} r_o^2 + C_2 \qquad (60-3)$$

ومنها نستنتج أن:-

$$C_2 = T_w + \frac{q^{\circ}}{6k} r_o^2 \qquad (61-3)$$

وبطرح المعادلة (3 – 61) من المعادلة (3 – 60) نحصل على المعادلة:-

$$T - T_w = \frac{q^{\circ}}{6k} (r_o^2 - r^2) \qquad (62-3)$$

إن درجة حرارة المركز (T_{center}) يمكن الحصول عليها عندما $r = 0$.

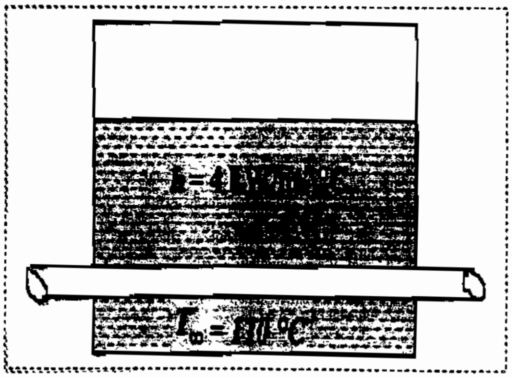
$$T_{center} = \frac{q^{\circ}}{6k} r_o^2 + T_w \qquad (62-3)$$

<u>مثال 3 – 1</u>: يمر تيار مقداره 200 أمبير خلال سلك من الفولاذ المقاوم تبلغ موصليته الحرارية ($k = 19$ W/m.°C).إن قطر السلك هو 3 mm فإذا علمت أن المقاومة النوعية لهذا السلك هي ($\varsigma = 70\ \mu\ \Omega.cm$) وكان السلك بطول 1 m وقد غمر في سائل عند درجة حرارة $T_\infty = 110$ °C وأن معامل انتقال الحرارة لهذا السلك ($h = 4$ kW/m^2.°C).أحسب درجة حرارة مركز هذا السلك.

<u>الحل</u>: إن حل هذه المسألة يكون باعتبار أن الحرارة تنتقل خلال أسطوانة مركبة بوجود توليد كهربائي وكما يوضحه الشكل أدناه وعلى هذا الأساس فإن درجة الحرارة في المركز يمكن معرفتها من المعادلة (3 – 62).

$$T_{center} = \frac{q^{\circ}}{6k} r_o^2 + T_w$$

ولإيجاد قيمة q° يجب أن نحصل على قيمة الحرارة المتولدة وذلك من المعادلة التالية:



$$q_{gen} = power = I^2 R$$

حيث أن R تمثل مقاومة السلك.

ويمكن حسابها من قانون المقاومة بالاعتماد على طول السلك ومساحته المقطعية وعلى المقاومة النوعية للسلك.

$$\text{المقاومة } R = \underset{\text{المقاومة النوعية}}{\varsigma}\ \frac{\overset{\text{الطول}}{L}}{\underset{\text{المساحة}}{A}} = (70 X 10^{-6})_{\Omega.\cancel{cm}} \left(\frac{\overset{\cancel{cm}}{100}}{\frac{\pi}{4}(0.3)^2_{\ \cancel{cm}^2}} \right)$$

$$\therefore\ R = 0.099\ \Omega$$

ولحساب القدرة الكهربائية التي يمكن منها حساب الحرارة المتولـــدة نـــستخدم القانون الخاص بالقدرة من التيار والمقاومة.

$$Power = q = I^2 R = (200)^2 (0.099) = 3960\ Watt$$

إن الحرارة المنتقلة بطريقة الحمل يمكن الحصول عليها من المعادلة:-

$$q = h\,A(T_w - T_\infty) = (4000)(\pi)(3X10^{-3})(1)(T_w - 110)$$

$$3960 = (4000)(\pi)(3X10^{-3})(1)(T_w - 110)$$

$$\therefore T_w = 215°C$$

والحرارة المتولدة لوحدة الحجم ° q يمكن الحصول عليها من قسمة الحـــرارة المتولدة على حجم الأسطوانة وهو $(1)^2 (1.5 \times 10^{-3}) \pi$ أي أن:-

$$q° = \frac{q_{gen}}{volume} = \frac{3960\ Watt}{\pi\,(1.5x10^{-3})^2(1)} = 560.5x10^{-6} \frac{W}{m^3}$$

إن درجة حرارة مركز الأسطوانة يمكن الحصول عليها من:-

$$T_{center} = \frac{q^{\circ}}{6k} r_o^2 + T_w$$

$$= \frac{560.5 x 10^6}{(4)(19)} (1.5 x 10^{-3})^2 + 215$$

$$\therefore T_{center} = 231.6\ ^{\circ}C$$

9.3 التوصيل الحراري غير المستقر

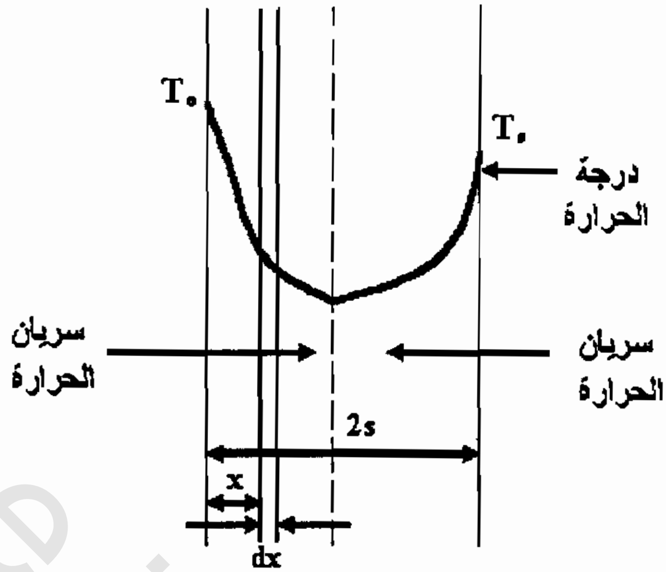
Unsteady State Heat Conduction

إن معظم ما ستتم مناقشته في هذا الباب هو اشتقاق المعادلة التفاضلية الجزئية لانتقال الحرارة أحادي الاتجاه ونتائج تكامل المعادلات لبعض الأشكال البسيطة وسيتم افتراض أن معامل التوصيل الحراري ثابت مع تغير درجة الحرارة.

إن الشكل(3 – 4) يبين مقطع خلال شريحة كبيرة من معدن بسمك مقداره 2s ويمكن اعتبار أن هذه الشريحة منتظمة من حيث درجة الحرارة وأن قيمتها هي T_o.في بداية التسخين تزداد درجات الحرارة بشكل سريع لتصبح T_s.إن مسار درجة الحرارة الموضح في الشكل(3 – 4) يعكس الظروف بعد انقضاء فترة زمنية مقدارها t_T.إن التركيز سيكون على طبقة رقيقة بسمك dx موضوعة عند مسافة x من الجانب الأيسر من الشريحة.إن جانبي العنصر هي سطوح معزولة.ونلاحظ بأن انحدار درجة الحرارة عند موقع x هو $- k\ A\ (\partial T / \partial x)\ dt$ حيث أن A هي مساحة الطبقة العمودية على اتجاه جريان الحرارة وk هو الموصلية الحرارية للصلب.إن الانحدار عند x + dx يختلف قليلا عن ذلك الموجود عند موقع x ويمثل بالشكل التالي:

$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} dx$ لذلك فإن سريان الحرارة خارج الطبقة عند x + dx هو:

$$- k\ A \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dt$$



الشكل (3 - 4)

التوصيل الحراري غير المستقر خلال شريحة صلبة

إن الزيادة بين الحرارة الداخلة والخارجة أو ما يعرف بتراكم الحرارة يمكن حسابها من المعادلة أدناه.

$$-k\,A\frac{\partial T}{\partial x}dt+k\,A\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)dt=k\,A\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx\,dt \quad (63-3)$$

إن التراكم الحراري في الطبقة سيزيد من درجة حرارة تلك الطبقة.إذا كان كل من Cp و ρ تمثل الحرارة والنوعية والكثافة على التوالي،فإن التراكم سيساوي حاصل ضرب كتلة الناتج(الحجم x الكثافة) في الحرارة النوعية والزيادة في درجة الحرارة أو $(\rho\,A\,dx)\,Cp\,(\frac{\partial T}{\partial t})dt$ لذلك فإن الموازنة الحرارية سوف تكون بالشكل التالي:-

$$k\, A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\, dx\, dt = \rho\, Cp\, A \frac{\partial T}{\partial t}\, dt \qquad (64-3)$$

أو بعد التعويض عن المقدار $\rho\ Cp\ A\ dt\ dx$ بالمقدار $\propto$ فتصبح المعادلة:-

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho\ Cp} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \propto \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (65-3)$$

إن المقدار $\propto$ في المعادلة (3 – 65) هو ما يعرف بالانتشارية الحرارية أو معامل الانتشار الحراري Thermal Diffusivity للمادة الصلبة وهو خاصية للمادة ووحداته هي $(\text{طول})^2$ / زمن.كلما كانت قيمة $\propto$ أكبر، كانت الحرارة المنتقلة خلال المادة أسرع وهذا يمكن إثباته من خلال حساب الكميات التي تكون المقدار $\propto$.

إن القيمة العالية للمقدار $\propto$ يمكن الحصول عليها أما نتيجة قيمة عالية لمعامل التوصيل الحراري والتي تبين معدل انتقال حرارة سريع جداً أو من قيمة واطئة للسعة الحرارية النوعية ρ Cp والتي تعني طاقة أقل من حيث التحرك خلال المادة يمكن امتصاصها لرفع درجة حرارة تلك المادة ولذلك سيكون معدل انتقال الحرارة عالي جداً.

إن الحلول العامة لمعادلات التوصيل الحراري غير المستقر متوفرة لأشكال معينة مثل الشريحة غير المنتهية أو الأسطوانات الطويلة اللانهائية والكرات. وكمثال فإن تكامل المعادلة(3 – 66) لحالة تسخين أو تبريد شريحة لانهائية بسمك معلوم لكلا الجانبين بواسطة وسط عند درجات سطح ثابتة سوف يعطي المعادلة التالية:-

$$\frac{T_s-\overline{T}_b}{T_s-T_a}=\frac{8}{\pi^2}\left(e^{-a_1 N_{Fo}}+\frac{1}{9}e^{-9a_1 N_{Fo}}+\frac{1}{25}e^{-25a_1 N_{Fo}}+\cdots\right) \qquad (66-3)$$

حيث أن T_s = متوسط درجة الحرارة الثابت لسطح الشريحة.

T_a = درجة الحرارة الأولية للشريحة.

$\overline{T}_b$ = متوسط درجة حرارة الشريحة عند زمن t_T.

N_{Fo} = عدد فورير Fourier Number ويساوي $(\propto t_T/s^2)$.

$\propto$ = الانتشارية الحرارية.

t_T = زمن تسخين أو تبريد الشريحة.

s = نصف سمك الشريحة.

a_1 = ثابت ويساوي $(\pi/2)^2$.

إن المعادلة(3 – 66) يمكن أن تستخدم أيضا لشريحة تسخن من جانب واحد فقط بشرط عدم انتقال حرارة من الجانب الآخر وأن $(\partial T/\partial x)$ يساوي صفر عند ذلك السطح.لذلك فإن s سيكون سمك الشريحة الكامل.

ولأسطوانة طويلة صلبة (مركبة) غير منتهية نصف قطرها r_m فإن متوسط درجة الحرارة $\overline{T}_b$ يعطى بالمعادلة:

$$\frac{T_s-\overline{T}_b}{T_s-T_a}=0.692\,e^{-5.78\,N_{Fo}}+0.131e^{-30.5\,N_{Fo}}+0.0534\,e^{-74.9\,N_{Fo}}+\cdots \qquad (67-3)$$

حيث أن عدد فورير $(F_o=\propto t_T/r_m^2)$ ولكرة بنصف قطر r_m فإن المعادلة المقابلة هي:-

$$\frac{T_s - \overline{T}_b}{T_s - T_a} = 0.608\, e^{-9.87 N_{Fo}} + 0.152\, e^{-39.5 N_{Fo}} + 0.0676\, e^{-88.8 N_{Fo}} + \cdots \qquad (68-3)$$

وعندما يكون عدد فورير أكبر من 0.1 فإن الحد الأول فقط من المتسلسلات المبينة في المعادلات هو مهم وذو معنى أما الحدود الأخرى فيمكن إهمالها.

وعند هذه الظروف فإن الزمن المطلوب لتغيير درجة الحرارة من T_b إلى $\overline{T}_b$ يمكن إيجاده بواسطة ترتيب المعادلة(3 – 66) والمحافظة على الحد الأول فقط وحذف جميع الحدود الأخرى ليعطي المعادلة التالية للشريحة.

$$\frac{T_s - \overline{T}_b}{T_s - T_a} = \frac{1}{\propto}\left(\frac{2s}{\pi}\right)^2 \ln \frac{8(T_s - T_a)}{\pi^2 (T_s - \overline{T}_b)} \qquad (69-3)$$

ولأسطوانة غير منتهية فإن المعادلة المقابلة يمكن الحصول عليها من المعادلة (70 – 3).

$$\frac{T_s - \overline{T}_b}{T_s - T_a} = \frac{r_m^2}{5.78\propto} \ln \frac{0.692(T_s - T_a)}{T_s - \overline{T}_b} \qquad (70-3)$$

ولكن من المعادلة (3 – 68)

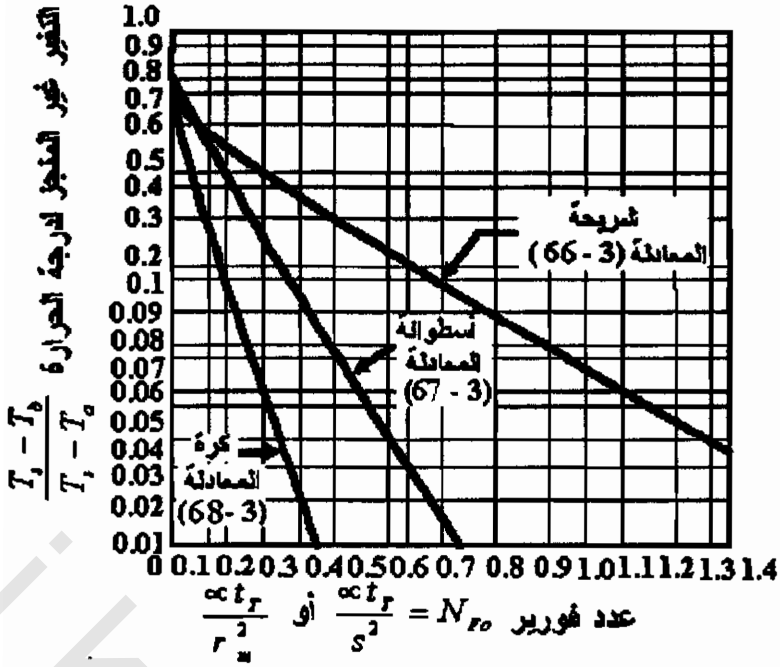
$$\frac{T_s - \overline{T}_b}{T_s - T_a} = \frac{r_m^2}{9.87\propto} \ln \frac{0.608(T_s - T_a)}{T_s - \overline{T}_b} \qquad (71-3)$$

إن الشـــكل(3 – 5) هو رسم للمعادلات من (3 – 66) إلـــى (3 – 68).إن الإحداثي الصادي(الرأسي) لهذا الشـــكل يعرف بتغير درجة الحـــرارة غيـــر المنجز أي هو جزء التغيير الكلي الممكن لدرجة الحرارة والذي يبقى غير تام عند أي زمن. وللقـــيم الصغيرة من عدد فورير يمكن تطبيق المعـــادلات مـــن (3 – 69) إلى(3 – 71) ويكون التمثيل شبه اللوغاريتمي لهذه المعادلات هـــو عبارة عن خطوط مستقيمة.

تطبق المعادلات(3 – 66) إلى(3 – 68) فقط عندما تكون درجة حرارة السطح ثابتة بحيث أن T_b قد تساوي درجة حرارة وسط التسخين أو التبريد فقط عندما يكون الفرق بدرجات الحرارة بين الوســـط والســـطح الصلب مهملا.هذا يعني ضمنا أن هناك مقاومة حرارية مهملة بين السطح والوسط.

إن كمية الحرارة الكلية Q_T المنتقلة إلى المادة الصلبة خلال زمـــن t_T خـــلال وحدة المساحة غالبا ما تكون موضع اهتمام.من تعريف متوسط درجة الحرارة فإن الحرارة المطلوبة لرفع درجة حرارة وحدة كتلة مـــن الـــصلب مـــن T_b إلى $\bar{T}_b$ هي $Cp(\bar{T}_b - T_a)$.لشريحة ذات سمك s 2 وكثافة ρ فإن المـــساحة الســـطحية الكلية(لكلا الجانبين) لوحدة الكتلة هي $1/s\,\rho$.لذلك فإن الحـــرارة المنتقلة لوحدة المساحة هي:

$$\frac{Q_T}{A} = s\,\rho\,Cp\,(\bar{T}_b - T_a) \qquad (72-3)$$



الشكل (3 - 5)

متوسط درجات الحرارة خلال التسخين أو التبريد غير المستقر

إن المعادلة المقابلة في حالة الأسطوانة الطويلة غير المنتهية هي:-

$$\frac{Q_T}{A} = \frac{r_m^2\, \rho\, Cp\,(\overline{T}_b - T_a)}{2} \qquad (73-3)$$

وسوف تصبح المعادلة أعلاه كما يلي:-

$$\frac{Q_T}{A} = \frac{r_m^2\, \rho\, Cp\,(\overline{T}_b - T_a)}{3} \qquad (74-3)$$

مثـــال 3 – 2: شــريحة مســتوية من البلاســتيك تبلغ درجة حرارتها الأولية 70 °F أو (21 °C) وضعت بين أسطوانتين عند درجة حــرارة (121.1 °C) 250 °F. إن سمك الشريحة هو.1.0 in (2.54 cm) والمطلوب هو:

(a) كم هو الزمن المستغرق لتســخين الشريحة إلى متوسط درجــة حــرارة 210°F أو (98.9 °C) ؟

(b) ما هي كمية الحرارة المنتقلة بألـــ Btu إلى الشريحة البلاســتيكية خـــلال هذا الزمن لكل قدم مربع من السطح ؟

علما أن كثافة المادة الــصلبة هــي $56.2\ Ib/ft^3$ ($900\ kg/m^3$) والموصـــلية الحرارية لها 0.075 Btu/hr.ft.°F (013 W/m.°C) والحرارة النوعية للمادة الصلبة هي 0.4 Btu/ Ib. °F (1.67 J/g. °C).

الحل:

(a) الكميات المستخدمة مع الشكل (3 - 5) هي:

$$k = 0.075\ Btu / hr.ft.\ °F\ ,\ \rho = 56.2\ Ib/ft^3\ ,\ Cp = 0.40\ Btu /Ib.\ °F$$

$$\therefore s = \frac{0.5}{12} = 0.0417\ ft\ ,\ \because T_s = 250°F\ ,\ \overline{T}_b = 210°F$$

لذلك فإن:

$$\frac{T_s - \overline{T_b}}{T_s - T_a} = \frac{250 - 210}{250 - 70} = 0.222$$

$$s = \frac{k}{\rho\ Cp} = \frac{0.075}{(56.2)(0.4)} = 0.00335$$

من الشكل(3 – 5) ولنسبة فرق درجات حرارة تعادل 0.222

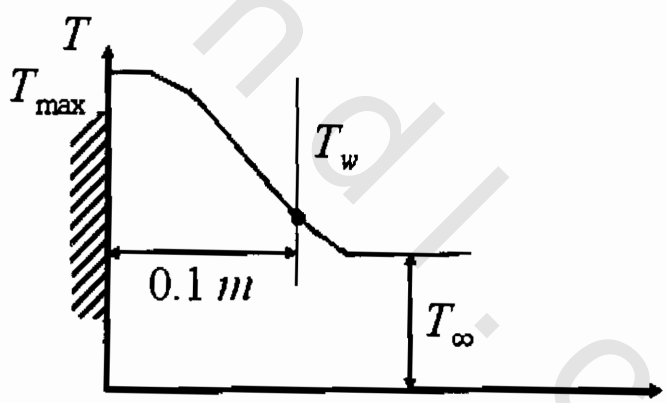
$$N_{Fo} = 0.52 = \frac{0.00335 t_T}{0.0417^2}\ ,\ \therefore t_T = 0.27\ hr = 16 \min$$

(b) بالتعويض في المعادلة(3 − 73) نحصل على التدفق الحراري للمساحة السطحية الكلية.

$$\frac{Q_T}{A} = (0.0417)(56.2)(0.4)(210-70) = 1.31\frac{Btu}{ft^2}(\frac{kJ}{m^2})$$

مثال 3 − 3:جدار مستوي سمكه 10 cm يولد حرارة داخلية بشكل منتظم وبمعدل $0.5\ MW / m^3$ تم عزل أحد سطحي الجدار عزلاً حرارياً تاماً بينما تعرض الوجه الآخر لبخار درجة حرارته 93 °C وكان معامل انتقال الحرارة بالحمل هو $490\ W/m^2.°C$ والموصلية الحرارية للجدار $21\ W/m.°C$ أحسب أعلى درجة حرارة T_{max} في الجدار وحدد موقعها.

الحل:



بفرض أن الحرارة تنتقل باتجاه واحد وهو x فقط وأن الموصلية الحرارية ثابتة ووجود حالة الاستقرار فإن المعادلة العامة للتوصيل ستختصر إلى الصيغة التالية:−

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q^\circ}{k} = 0$$

بإجراء التكامل للمعادلة أعلاه لمرتين نحصل على:-

$$T = -\frac{q^\circ}{k}x^2 + c_1 x + c_2$$

باستخدام الظروف الحدية المعطاة في المسألة وهي:-

1 - عندما x = صفر فإن $\frac{dT}{dx} = 0$ وفي هذه الحالة فإن c_1 = صفر.

2 - عندما x = L فإن $T = T_w$ وعليه فإن قيمة c_2 تحسب كما يلي:-

$$c_2 = T_w + \frac{q^\circ}{2k}L^2$$

وبالتعويض عن الثوابت في المعادلة أعلاه نجد أن:-

$$T = \frac{q^\circ}{2k}(L^2 - x^2) + T_w \qquad (I)$$

فإذا كانت T_{max} هي أعلى درجة حرارة عند x = صفر تصبح المعادلـــة (I) بالشكل التالي:-

$$T_{\max} = \frac{q^\circ}{2k}L^2 + T_w \qquad (II)$$

إن كمية الحرارة المتولدة في الجدار = كمية الحرارة المفقودة بالحمل منه

$$\therefore q = h\,A(T_w - T_\infty)$$

$$(0.5\,x10^6)(A)(L) = h\,A(T_w - T_\infty)$$

$$\therefore T_w = \frac{(0.5\,x10^6)(0.1)}{490} + 93 = 195.04\,°C$$

$$\therefore T_{max} = \frac{(0.5\,x10^6)(0.1)}{(2)(21)} + 195.04 = 314.08\,°C$$

10.3 المواد الصلبة شبه اللانهائية Semi – Infinite Solids

إن بعض المواد الصلبة تسخن بطريقة بحيث إن التغيرات بدرجة الحرارة تقتصر على المناطق القريبة من أحد السطوح وكمثال سنأخذ بنظر الاعتبار طبقة سميكة جدا من جدار مستوي لمدخنة، والتي مبدئيا عند درجة حرارة T_a. ولنفترض أن السطح الداخلي للجدار قد سخن فجأة إلى T_s وأنه قد تم الحفاظ على تلك الدرجة من الحرارة ربما عن تمرير غاز ناتج من عملية ما ساخن إلى المدخنة.إن درجة الحرارة داخل جدار المدخنة سوف تتغير مع الزمن وبشكل أسرع قرب السطح الساخن وبصورة أبطأ في الجهة البعيدة.فإذا كان الجدار سميكا بما فيه الكفاية، سوف لن يكون هناك تغيير يمكن قياسه بدرجة الحرارة للسطح الخارجي لزمن معقول.وعند هذه الظروف يمكن اعتبار أن الحرارة " تخترق " مادة صلبة بسمك غير منتهي مبدئيا.الشكل(3 – 6) يبين مسارات درجة الحرارة على مثل ذلك الجدار في أوقات مختلفة بعد التعرض للغاز الساخن مما يؤشر الانقطاع الحاد في درجة الحرارة عند السطح الساخن مباشرة بعد التعرض والتغييرات التصاعدية عند النقاط الداخلية في أوقات لاحقة.لمثل هذه الحالة فإن تكامل المعادلة(3 – 65) بوجود ظروف حدية مناسبة سيعطي المعادلة التالية لدرجة الحرارة T عند أي نقطة أو مسافة x من السطح الساخن.

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} e^{-Z^2 dZ} \qquad (75-3)$$

حيث أن: $\frac{x}{2\sqrt{\propto t}} = Z$ وهو عديم الوحدات.

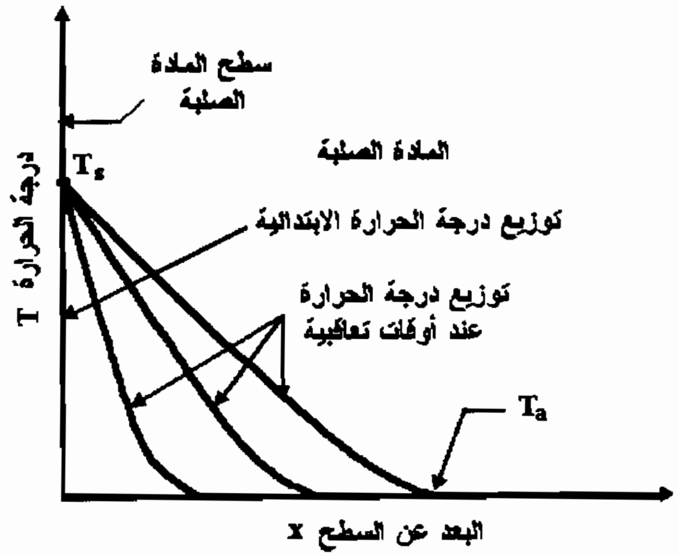
$\propto$ = معامل الانتشار الحراري أو الانتشارية الحرارية.

x = البعد عن السطح.

t = الزمن بعد التغير في درجة حرارة السطح لكل ساعة.

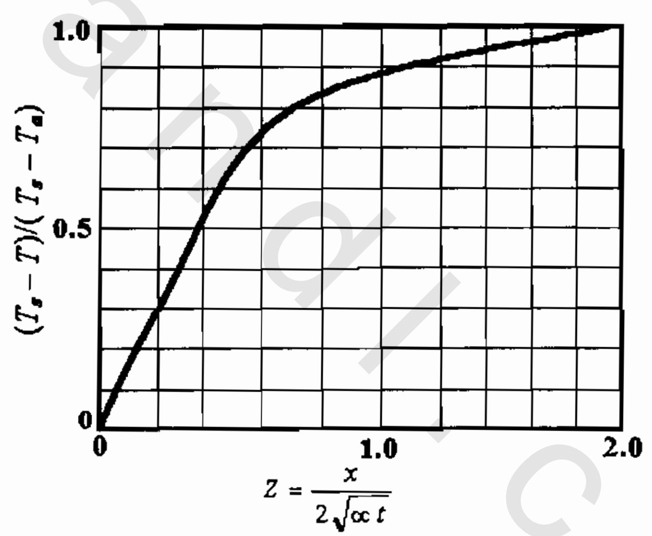
إن الدالة في المعادلة (3 – 75) تعرف باسم تكامل جاوس للخطأ أو تكامل الاحتمالية Gauss Error Integral (Probability Integral) وقد تم رسمها في الشكل(3 – 7) أدناه.إن المعادلة(3 – 75) تبين بأنه عند أي زمن هناك تغير بدرجة الحرارة في جميع نقاط المادة الصلبة حتى النقاط المزالة من السطح الساخن.إن التغييرات الفعلية عند تلك النقاط على أية حال تعتبر صغيرة ومهملة.بعد مسافة معينة من السطح الساخن سوف لن تكون هناك حرارة مخترقة كافية للتأثير على درجة الحرارة بشكل واضح.إن مسافة الاختراق هذه والتي يرمز لها x_p تعرف اعتباطيا بأنها البعد عن السطح الذي يكون فيه تغير درجة الحرارة هو 1% من التغيير الابتدائي في درجة حرارة السطح.أي بمعنى آخر:–

$(T_s - T)/(T_s - T_a) = 0.99$ أو $(T-T_a)/(T_s - T_a) = 0.01$.



الشكل (3 - 6)

توزيعات درجة الحرارة للتسخين أو التبريد غير المستقر لمادة صلبة شبه لا نهائية



الشكل (3-7) التسخين أو التبريد غير المستقر لمادة صلبة شبه لا نهائية

إن الشكل(3 – 7) أعلاه يبين أن تكامل الاحتمالية يصل إلى قيمة 0.99 عندما تكون قيمة Z = 1.82 والتي عندها:-

$$x_p = 3.64\sqrt{\propto t} \qquad (76-3)$$

مثال 3 – 4: تسببت موجة برد مفاجئة في انخفاض درجة الحرارة إلى قيمة ‎- 20°C (- 4 °F)‎ لمدة 12 ساعة.

(a) إذا كانت درجة حرارة الأرض هي ‎5°C (41°F)‎ كم هو العمق المطلوب لطمر الأنبوب الناقل للماء لكي يكون في مأمن من الانجماد ؟

(b) كم هي مسافة الاختراق عند تلك الظروف علما أن الانتشارية الحرارية للتربة هي $0.0011\ m^2/hr$ ($0.0118\ ft^2/hr$) ؟

الحل :

(a) بافتراض أن سطح درجة حرارة سطح الأرض يمكن أن تصل بسرعة إلى قيمة ‎- 20 ° C‎ إلاّ إذا كانت درجة الحرارة عند موقع طمر الأنبوب هي أقل من ‎0 °C‎ حيث لن يكون هناك خوف من الانجماد.إن الكميات المطلوبة لغرض الاستخدام في الشكل (3 - 7) هي:

$T_s = -20\ °C,\ T_a = 0\ °C,\ T = 0\ °C\ t = 12\ hr,\ \alpha = 0.0011\ m^2/hr$

$$\therefore\ \frac{T_s - T}{T_s - T_a} = \frac{-20-0}{-20-5} = 0.80$$

من الشكل (3 – 7) نجد أن: Z = 0.91 لذلك فإن العمق x هو:-

$$x = (0.91)(2\sqrt{\propto t} = (0.91)(2\sqrt{(0.0011)(12)}$$
$$= 0.21m(0.69\,ft)$$

(b) من المعادلة (3 – 77) نجد مسافة الاختراق هي:-

$$x_p = (3.64)(\sqrt{(0.0011)(12)} = 0.419\,m\,(1.73\,ft)$$

إن الحرارة الكلية المنتقلة للمادة الصلبة شبة اللانهائية عند زمن معين تحسب من المعادلة التالية:-

$$\frac{Q_T}{A} = 2k(T_s - T_a)\sqrt{\frac{t_T}{\pi \propto}} \qquad (78-3)$$

ولإيجاد كمية الحرارة المنتقلة الكلية إلى مادة صلبة شبه نهائية خلال زمن معين ، من الضروري الحصول على انحدار درجة الحرارة والفيض الحراري عند جهة السطح الساخن كدالة للزمن.إن انحدار درجة الحرارة عند السطح يمكن الحصول عليه بإجراء التفاضل للمعادلة (3 – 75) ليعطي:-

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{T_s - T_a}{\sqrt{\pi \alpha t}} \qquad (79-3)$$

إن معدل جريان الحرارة عند السطح لذلك هو:-

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{x=0} = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{k(T_s - T_a)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \qquad (80-3)$$

بعد التعويض بـــ dQ / dt بدلاً من q يمكن إجراء التكامل للمعادلـــة(3 – 80) لتعطي الكمية الكلية للحرارة المنتقلة لوحدة المساحة Q_T/A في زمن t_T :-

$$\frac{Q_T}{A} = \frac{k(T_s - T_a)}{\sqrt{\pi \alpha}}\int_0^{t_T}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2k(T_s - T_a)\sqrt{\frac{t_T}{\pi \alpha}} \qquad (81-3)$$

11.3 تمارين في الباب الثالث

س1: يتكون جدار فرن من طابوق مواقد مقاوم للصهر بسمك 200mm تليه طبقة من طابوق الصلصال الصيني(الكاؤولينا) بسمك 100 mm ثم طبقة من الحديد بسمك 6 ملم.درجة حرارة الجانب الداخلي للطابوق المقاوم 1150 °C ودرجة حرارة الجانب الخارجي عند طبقة الحديد هي 30 °C.إن الموازنة الحرارية التي أجريت حول الفرن قد بينت أن الفقد الحراري هو $300 W/m^2$ وقد علم أن هناك طبقات رقيقة من الهواء بين الطابوق و الحديد. كم ستكافئ تلك الطبقات من المليمترات من الكاؤولينا علما أن معامل التوصيل الحراري لمادة الطابوق المقاوم هو 0.95 Btu / hr. ft .°F ولمادة الكاؤولينا هو 0.113 Btu/hr .ft. °F أما للحديد فهو 26 Btu/hr.ft.°F.

س2: تم تغليف أنبوب قطره الداخلي 1.049 in. والخارجي 1.315 in. ويحمل بخار ماء عند درجة حرارة 250 °F بطبقة عازلة من الماغنيسيا سمكها 2 in ثم بطبقة من الفلين سمكها 0.5 in.أن درجة حرارة جدران الأنبوب 249 °F من الداخل أما من الخارج فدرجة الحرارة هي 90 °F.إن الموصليات الحرارية بوحدات Btu/hr.ft.°F هي: للحديد 26 وللماغنيسيا 0.034 وللفلين 0.03،أحسب

(a) الفقد الحراري من 100 ft طول للأنبوب بوحدات Btu /hr

(b) درجات الحرارة عند حدود الطبقات بين كل من المعدن والماغنيسيا وبين الماغنيسيا والفلين.

س3: تم تغليف جدران فرن بطبقة عازلة من طابوق الكاوولينا الحراري بسمك 8 in. تليها طبقة من طابوق الكاوولينا العازل بسمك 6 in. ثم بطبقة من الطابوق المقاوم للصهر بسمك 7 in. ما هي كمية الحرارة المفقودة خلال الجدار إذا كانت درجة الحرارة الداخلية 2200 °F والخارجية 200 °F وأن معاملات التوصيل الحرارية للمواد بوحدات Btu /hr.ft.°F هي على التوالي: للكاوولينا الحراري 0.15 وللكاوولينا العازل 0.113 وللطابوق المقاوم للصهر 0.85 ؟

س4: يتكون جدار فرن من سلسلة تبدأ بطبقة من طابوق الكاوولينا الحراري بسمك.in 7 تليها طبقة من طابوق الكاوولينا العازل بسمك.in 6 ثم طبقة من الطابوق الحراري المقاوم بسمك يكفي لتقليل فقد الحرارة إلى $100\ Btu/hr.ft^2$ إن درجات الحرارة هي على التوالي°F 1500 و F ° 100.كم هو سمك طبقة الطابوق الحراري المقاوم المستخدم.وإذا وضعت فجوة هوائية بسمك.in 0.5 بين كل من الطابوق الحراري والطابوق العازل عند إقامة الجدار بدون إفساد بناءه الداخلي كم سيكون سمك طبقة الطابوق الحراري المستخدم علما أن معاملات التوصيل الحرارية للمواد بوحدات Btu/hr.ft.°F هي: للكاوولينا الحراري0.113 وللكاوولينا العازل 0.15 وللطابوق الحراري0.85 أما معامل انتقال الحرارة بالتوصيل للهواء فهو0.0146.

س5 : تم تغليف أنبوب قطره الداخلي.in 6.28 والخارجي.in 6.625 بطبقة سمكها.in 1.5من الألياف الحريرية تليها طبقة بسمك.in 1 من الصوف الصخري ثم طبقة بسمك.in 0.5 من مسحوق الماجنيسايت (كربونات الماغنيسيوم) كمادة لاصقة.إذا تم إبقاء درجة حرارة السطح الداخلي عند 500°F والسطح الخارجي عند °F 100.كم هو مقدار الفقد الحراري لكل قدم مربع من المساحة السطحية للأنبوب علما أن الموصليات الحرارية بوحدات Btu/hr.ft.°Fهي: للألياف الحريرية 0.88 وللصوف الصخري 0.021 وللماجنيسايت 2.2 ؟

س6 : تم تغليف أنبوب قطره الداخلي.in 2.067 والخارجي.in 2.375 بطبقة سمكها.in 0.5 من القبك(ألياف حريرية) ويحمل هذا الأنبوب محلول ملحي يستخدم كسائل تثليج.إن المحلول الملحي هو NaCl 25 % ويدخل بدرجة حرارة °F 0 وبمعدل جريان 30,000 Ib / hr.إن السطح الخارجي للتغليف سيحافظ عليه عند درجة حرارة °F 90.ما هي معادلة التدفق الحراري؟ أحسب التسرب الحراري للأنبوب والارتفاع بدرجة حرارة السائل لطول من الأنبوب مقداره 60 ft علما أن معامل التوصيل الحراري للقبك 0.02 Btu/hr.ft.°F.

س7: فرن أسطواني عمودي قطره 22 ft تم تغطيته من القمة بقبة شبه كروية مصنوعة من طبقة سمكها.in 8 من الطابوق المطعم بالكروم.أشتق صيغة لانتقال الحرارة بالتوصيل خلال القبة علما أنه قد تم المحافظة على درجة الحرارة داخل القبة عند 1600 °F وخارجها 300 °F.كم هو الفقد الحراري لكل قدم مربع من سطح القبة الداخلي ؟ كيف تقارن بين الفقد الحراري الكلي للقبة والفقد الحراري الكلي لشريحة من نفس المادة عند تعرضها لنفس الفرق بدرجات الحرارة علما أن الموصلية الحرارية لمادة القبة 0.85 Btu/hr.ft.°F.

س8 :تتكون جدران فرن من ثلاث مواد عازلة مقامة على التوالي وهي: طابوق مطعم بالكروم وطابوق الماغنيسيا والطابوق الحراري.إن طابوق الماغنيسيا لا يمكنه تحمل درجات حرارة أعلى من1500°F وبالمقابل فإن الطابوق الحراري لا يمكنه تحمل درجات حرارة أعلى من 600 °F.كم هو سمك الجدار الذي سيعطي فقد حراري قدره $1500\ Btu/hr.ft^2$ عندما تكون درجات حرارة السطوح المتقابلة 2200 °F و200 °F على التوالي علما أن معاملات التوصيل الحراري بوحدات Btu /hr.ft.°F للمواد هي: للطابوق المطعم بالكروم 0.85 ولطابوق الماغنيسيا 1.6 وللطابوق الحراري 0.5 ؟

س9 :أنبوب حديدي قطره الداخلي.4.026 in والخارجي.4.5 in يحمل بخار ماء عند درجة حرارة 450 °F تم تغليفه بطبقة من القبك سمكها.1 in تليها طبقة من مسحوق الماجنيسايت بسمك.1 in كمادة لاصقة.إن درجة حرارة الهواء الخارجي هي70 °F.كم هي الحرارة المفقودة من الأنبوب لكل قدم من علما أن الموصليات الحرارية بوحداتBtu / hr.ft.°F للمواد هي: للقبك 0.02 وللماجنيسايت 2.2 وللهواء 0.0146.

س10:لوح طويل جدا من البلاستك سمكه4 mm عند درجة حرارة 20 °C عرض من جانبيه بشكل فجائي إلى جو من البخار عند درجة حرارة 102 °C (a) إذا أهملت المقاومة بين البخار وسطح المادة كم هو الزمن المتوقع لدرجة حرارة المركز للوح البلاستك لتتغير بشكل واضح ؟

(b) كم سيكون متوسط درجة حرارة اللوح عند ذلك الزمن علماً أن معامل التوصيل الحراري للبلاستك هو 0.138 Btu /hr.ft.°F والانتشارية الحرارية لمادة البلاستك هي $0.0011\ m^2$ /hr. ؟

س11: أحسب الزمن المستغرق لتسخين الوجه البعيد لجدار من الطوب يبلغ معامل الانتشار الحراري له $0.0042\ cm^2$ /s وسمكه 0.45 in. من درجة حرارة 290 °K إلى درجة حرارة 470 °K إذا تم رفع درجة حرارة الوجه القريب فجأة إلى 870 °K وتم المحافظة على هذه الدرجة.افرض أن جريان الحرارة هو عمودي على أوجه الجدار وأن الوجه البعيد معزول بشكل تام.

س12: كرات حديدية قطرها 3 in. مسخنة إلى درجة حرارة 700 °K مطلوب تبريدها بغمرها في الماء في حوض زيت عند درجة حرارة 129 °F.إذا فرضنا أن المقاومة الحرارية بين الزيت والسطح الحديدي هي مهملة:-

(a) أحسب متوسط درجة حرارة الكرات بعد 10 ثواني و1 دقيقة و6 دقائق بعد الغمر في الحوض.

(b) كم هو الزمن المستغرق لخفض انحدار درجة الحرارة غير المنجز بمقدار 1 % من الانحدار الابتدائي لدرجة الحرارة علماً أن معامل التوصيل الحراري للحديد k = 26 Btu /ft.h.°F والكثافة $\rho = 486\ Ib / ft^3$ والحرارة النوعية للحديد هي Cp = 0.11 Btu / Ib .° F.

س13: قضيب حديدي طويل قطره 1 in. عند درجة حرارة مقدارها 1200 ° F تم غمرها فجأة في حوض بارد من الزيت عند درجة حرارة 150 ° F.خلال فترة 4 دقائق انخفض متوسط درجة الحرارة للقضيب إلى 250 °F.كم هو الزمن لخفض درجة الحرارة من 1200 °F إلى 250 °F للحالات التالية:-

(a) إذا كان قطر القضيب 2 ¼ in. ؟

(b) إذا كان قطر القضيب 5 in. ؟

للحديد k = 26 Btu /hr. ft. °F و $\rho = 486\ Ib / ft^3$ والحرارة النوعية له Cp = 0.11 Btu / Ib. °F.

س14: مكعب من الألمنيوم طول ضلعه 5 cm عند درجة حرارة ابتدائية مقدارها 500 °C.غمر فجأة في سائل عند درجة حرارة 100 ° C وكان معامل انتقال الحرارة بالحمل $\left(120\frac{W}{m^2.°K}\right)$.أوجد الزمن اللازم لخفض درجة حرارة المكعب إلى 200 °C.

س15:قضيب من الفولاذ المقاوم للصدأ قطره الخارجي 8 mm ودرجة حرارته الابتدائية 300 °C.غمر فجأة في سائل عند درجة حرارة 100 °C وكان معامل انتقال الحرارة بالحمل $\left(100\frac{W}{m^2.°K}\right)$.

(A) أوجد الزمن المطلوب لتصل درجة حرارة القضيب إلى 150 °C.

(B) أوجد درجة حرارة القضيب بعد مضي دقيقة واحدة.

س16: كرة من النحاس قطرها 60 cm ودرجة حرارتها الابتدائية 200 °C غمرت بشكل فجائي في حوض من ماء حجمه متر مكعب واحد عند درجة حرارة 40 ° C وكان معامل انتقال الحرارة بالحمل $\left(300\frac{W}{m^2.°K}\right)$.ما هي درجة حرارة الكرة بعد مضي زمن قدره 10 دقائق علماً أن الحرارة النوعية لكرة والماء متساويتان في القيمة بحيث أن درجة حرارة الماء تتزايد مع استمرار تبريد الكرة ؟

س17: بلاطة من الألمنيوم سمكها 2.5 cm عند درجة حرارة ابتدائية مقدارها 500 °C.غمرت في سائل عند درجة حرارة 100 °C بشكل فجائي وكان معامل انتقال الحرارة بالحمل $\left(120\frac{W}{m^2.°K}\right)$.عين الزمن اللازم لتصل درجة حرارة مركز البلاطة إلى 200 °C.