الباب الرابع

أنظمة التوصيل والحمل

الزعانف

Chapter Four

Heat Transfer

Conduction and Convection

Systems

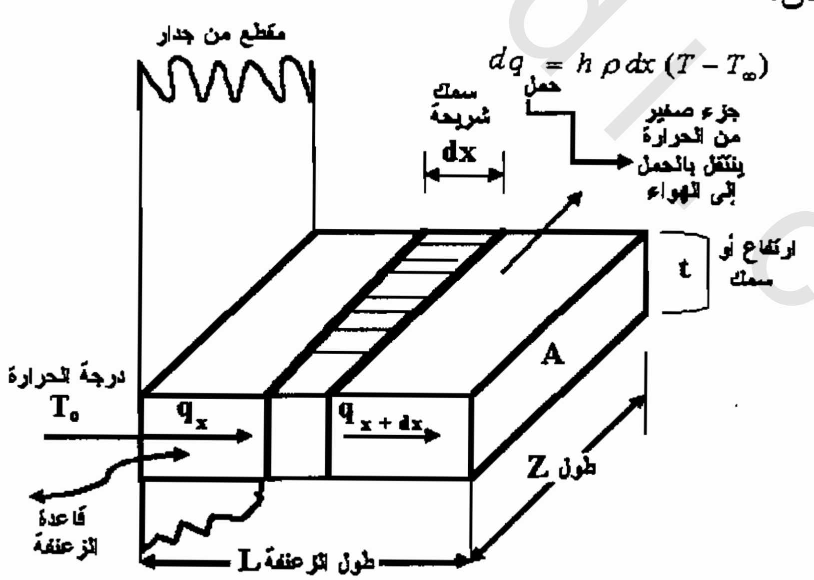
Fins

4.0 مقدمة Introduction

عند ربط قطع معدنية إضافية إلى السطوح العادية المستخدمة لنقل الحرارة مثل الأنابيب فإنها ستعمل على توسيع مساحة السطح المستخدم لنقل الحرارة و حيث أن السطح الموسع في هذه الحالة سيزيد من معدل الانتقال الكلي فإن تأثيره كسطح يجب أن يعامل بشكل مختلف عن التوصيل أو الحمل البسيط.

تنتقل الحرارة بالتوصيل خلال الأجسام الصلبة ومن الممكن أن تنتقل الحرارة بالحمل إلى الوسط المحيط بتلك الأجسام الصلبة وبما أن علاقة انتقال الحرارة بالحمل قد تم التعرف إليها مسبقا وهي $q = h\,A(T_w - T_\infty)$ فإن ذلك يعني أنه كلما كبرت المساحة السطحية لهذه الأجسام كلما زاد معدل الفقد الحراري للحمل وحسب العلاقة المشار إليها أعلاه.لذلك للحصول على معدلات النتقال حرارة عالية يتم توسيع المساحة السطحية لبعض الأجسام الصلبة وذلك لزيادة معدل تبريدها أو تسخينها ومن هذه الجسام المحركات الكهربائية والمضخات.

ولإيجاد العلاقات التي تقوم بحساب معدل انتقال الحرارة من الأجسام الموسعة أو ما يسمى بالزعانف Fins سوف نأخذ الشكل التالي لزعنفة مثالية لإجراء الاشتقاق.



الشكل (4 - 1) انتقال الحرارة بالزعانف

ولإيجاد المعادلة العامة لتوزيع درجات الحرارة على طول هذه الزعنفة نقوم بإجراء موازنة حرارية على شريحة سمكها dx.

1- المواد التي تدخل من اليسار = المواد التي تخرج من اليمين + الحرارة المفقودة بالحمل.إن الحرارة التي تدخل من اليسار هي الحرارة المنتقلة بطريقة التوصيل في الاتجاه x والتي تساوي:-

$$q_{in} = q_x = -k\,A\frac{dT}{dx} \qquad (1-4)$$

2 – الحرارة الخارجة بالتوصيل يمكن الحصول عليها من المعادلة التالية:

$$q_{out} = q_{x+dx} = -kA\left(\frac{dT}{dx}+\frac{d^2T}{dx^2}dx\right) \quad (2-4)$$

3 – الحرارة المفقودة بالحمل نتحصل عليها من:-

$$q_{conv} = h\,\rho\;dx(T-T_\infty) \qquad (3-4)$$

وبتعويض المعادلات (4 – 1) و(4 – 2) و(4 – 3) في الموازنة العامة الحرارية نحصل على:

$$-k\,A\frac{dT}{dx}+kA\left(\frac{dT}{dx}+\frac{d^2T}{dx^2}dx\right)-h\,\rho\,dx(T-T_\infty)=0 \quad (4-4)$$

وباختصار الحدود المتشابهة وإكمال تفاضل المعادلة سوف نصل إلى المعادلة التالية:-

$$k\,A\,\frac{d^2T}{d\,x^2} - h\,\rho\,dx\,(T - T_\infty) = 0 \qquad (5-4)$$

وبقسمة المعادلة (4 – 5) على المقدار k A dx نحصل على:–

$$\frac{d^2T}{d\,x^2} - \frac{h\,\rho}{k\,A}(T - T_\infty) = 0 \qquad (6-4)$$

وإذا تم فرض أن $\theta = T - T_\infty$ وبالتعويض عن قيمتها في المعادلــة أعــلاه نحصل على المعادلة التالية (لأحظ أن T_∞ ثابتة لذلك فإن تفاضلها صفر):–

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{d\,x^2} - \frac{h\,\rho}{k\,A}\,\theta = 0 \qquad (7-4)}$$

ولحل المعادلة(4 – 7) يجب توفر ظروف حدية سوف نناقشها في البند التالي.

1.4 الحالات العامة للزعاف Fins General Types

إن الشرط الحدي الأول المتوفر لدينا هو أنه عندما x = صفر فإن درجــة الحرارة هي T_o وبما أن $\theta = T - T_w$ إذن $T_o - T_w = \theta_o$ وهذه عند قاعدة الزعنفة.

ويعتبر هذا الظرف الحدي الأول ثابت لجميع حالات الزعانف وبما أن المعادلة (4 – 7) والتي تمثل المعادلة التفاضلية لانتقال الحرارة فــي الزعــانف هــي معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية لذلك سنحتاج إلى ظرف حدي ثــاني لنتمكن من إيجاد الحل العام لهذه المعادلة.إن تحديد الظرف الحدي الثاني يعتمد على حالة ونوع الزعنفة.وهناك ثلاثة حالات أو أنواع من الزعانف وهي:

الحالة الأولى: تكون الزعنفة طويلة جدا أي أن $L = \infty$ ودرجة حرارة نهاية الزعنفة ستكون مساوية لدرجة حرارة المحيط.

الحالة الثانيــة : طول الزعنفة محدد وهذا يعني أن نهاية الزعنفة تفقد الحرارة إلى الجو عن طريق ميكانيكية الحمل.

الحالة الثالثة : تكون الزعنفة ذات طول محدود وتكون نهايتها معزولة بــشكل حراري كامل وهذا يعني أن $\frac{dT}{dx}$ = صفر.

لذلك ولإيجاد حل للمعادلة (4 – 7) يجب أولا تحديد حالة الزعنفة بالاعتمــاد على الأنواع المذكورة أعلاه وبعد تحديد الحالة يتم تحديد الظرف الحدي الثاني ومن ثم نتمكن من إيجاد حل للمعادلة أعلاه والذي سيمثــل المعادلــة العامــة لتوزيع درجات الحرارة في الزعنفة والتي منها سنجد درجات الحرارة المفقودة ضمن تلك الزعنفة.

2.4 الحالة الأولى للزعانف First Condition of Fins

$$\frac{d^2\theta}{d\,x^2} - \frac{h\,\rho}{k\,A}\,\theta = 0$$

لنفرض أن : $m^2 = \frac{h\,\rho}{k\,A}$ فتصبح المعادلة أعلاه كما يلي:–

$$\frac{d^2\theta}{d\,x^2} - m^2\,\theta = 0$$

الظرف الحدي الأول هو ثابت وهو : at $x = 0 \quad \theta = \theta_o$

الظرف الحدي الثاني هو : at $x = \infty \quad T = T_\infty \quad \theta = T_\infty - T_\infty = 0$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة:-

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} \qquad (8-4)$$

وهي معادلة عامة لجميع الحالات ولغرض استخراج ثوابت المعادلـــة يجـــب التعويض بالظروف الحدية وعند التعويض بالظرف الحدي الأول نحصل على

$$\theta_o = C_1 e^{-m(0)} + C_2 e^{m(0)} \rightarrow \theta_o = C_1 + C_2$$

وهذا يعني أن: $C_1 = \theta_o - C_2 \qquad (9-4)$

بالتعويض بالظرف الحدي الثاني:

$$0 = C_1 e^{-\infty} + C_2 e^{\infty} \Rightarrow \therefore C_2 e^{\infty} = 0 \Rightarrow \therefore C_2 = 0$$

ومنها نستنتج بالتعويض في المعادلة (4 – 9) أن: $C_1 = \theta_o$ وبتعـــويض قـــيم الثوابت في المعادلة (4 - 8) نحصل على:-

$$\theta = \theta_o e^{-mx} + 0 \Rightarrow \therefore \theta = \theta_o e^{-mx}$$

$$\therefore \frac{\theta}{\theta_o} = e^{-mx} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = e^{-mx} \qquad (10-4)$$

إن المعادلة (4 – 10) تمثل المعادلة العامة لتوزيع درجات الحرارة لزعنفة من الحالة الأولى فقط.ولإيجاد كمية الحرارة المفقودة من هذه الزعنفة نقوم بإجراء الموازنة الحرارية التالية:-

الحرارة الداخلة إلى قاعدة الزعنفة بالتوصيل = الحرارة المفقودة من الزعنفة في نهاية الزعنفة نتيجة الحمل.

$$q_{x=0} = -k\,A\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \int_0^L h\,A(T - T_\infty)\,dx \qquad (11-4)$$

ويمكن إعادة ترتيب المعادلة (4 – 11) لتصبح بالشكل التالي:-

$$q_{conv} = \int_0^L h\,\rho\,\theta\,dx = -k\,A\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$q = h\,\rho\int_0^L \theta_o\,e^{-mx}\,dx = -k\,A(-m\,e^{-m(0)}\theta_o)$$

$$= k\,A\,m\,\theta_o \qquad (12-4)$$

وبما أن : $m = \sqrt{\frac{h\,\rho}{k\,A}}$ وبالتعويض عن قيمتها في المعادلة (4 – 12):-

$$\therefore q = k\,A\sqrt{\frac{h\,\rho}{k\,A}}\,\theta_o \quad \Rightarrow \therefore q = \sqrt{h\,\rho\,k\,A}\,\theta_o \qquad (13-4)$$

حيث أن المعادلة (4 – 13) تمثل الحرارة النظرية المفقودة من الزعنفة للحالة الأولى.

بما أن سمك الزعنفة في التطبيقات العملية هو صغير جدا بالمقارنة مع عمـق الزعنفة نفسها (أي Z في هذه الحالة) لذلك يمكن اهمال سمك الزعنفة في هذه الحالة.

$$m=\sqrt{\frac{h\rho}{kA}}=\sqrt{\frac{h(2t+2Z)}{k(tZ)}}\Rightarrow\therefore\ m=\sqrt{\frac{2hZ}{ktZ}}=\sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

3.4 كفاءة الزعنفة للحالة الأولى Fin's Efficiency

يمكن حساب كفاءة الزعنفة من القانون التالي:-

كفاءة الزعنفة (η_f) Fin Efficiency = الحرارة المنتقلة فعليا من الزعنفة. / الحرارة التي قد تفقد من الزعنفة لو كانت درجة حرارتها مساوية لدرجة حرارة القاعدة.

حيث أن الحرارة المحسوبة من المعادلـة(4 – 13) تمثـل الحـرارة الفعليـة المفقودة من الزعنفة للحالة الأولى.أما بالنسبة للحرارة التي قد تفقد من الزعنفة لو كانت درجة حرارتها مساوية لدرجة حرارة القاعدة فتحسب بالتعويض عن قيمة T بالمقدار T_o في معادلة انتقال الحرارة بالحمل لنحصل على:-

$$\eta_f=\frac{q_{actual}}{q_{max}}=\frac{\sqrt{h\rho kA}\,\cancel{\theta_o}}{h\rho L\cancel{\theta_o}}\Rightarrow\therefore\ \eta_f=\frac{\sqrt{h\rho kA}}{h\rho L}\qquad(14-4)$$

حيث أن η_f في المعادلة (4 – 14) تمثل كفاءة الزعنفة.

4.4 الحالة الثانية للزعانف Second Condition of Fins

تستخدم في الحالة هذه الظروف الحدية التالية:-

1) $at\ x = 0 \quad , \quad T = T_\infty$

2) $at\ x = L \quad , q = h\,A\,\theta\,\big|_{x=L} = -k\,A\dfrac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L}$

إن الحل العام للمعادلة في هذه الحالة هو $\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$ وهو نفس حل الحالة الأولى.ولإيجاد قيمة الثوابت C_1 و C_2 يجب التعويض بالظرفين الأول والثاني في الحل العام نتمكن من الحصول على المعادلة العامة لتوزيع درجات الحرارة في الزعنفة والصيغة العامة لها.

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = \frac{Cosh[m(L-x)] + \dfrac{h}{mk} Sinh[m(L-x)]}{Cosh(mL) + \dfrac{h}{mk} Sinh(mL)}$$

حيث أن:

$$Cosh\,x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad , Sinh\,x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{Sinh\,x}{Cosh\,x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

وعليه فإن الحرارة الفعلية تحسب من المعادلة التالية:

$$\boxed{q = q_{act} = \sqrt{h\,\rho\,k\,A}\,\theta_o \frac{Sinh(mL) + \dfrac{h}{mk} Cosh(mL)}{Cosh(mL) + \dfrac{h}{mk} Sinh(mL)} \qquad (15-4)}$$

وعلى هذا الأساس فإن كفاءة الزعنفة تحسب بموجب المعادلة التالية:-

$$\eta_f = \frac{q_{act}}{h\,\rho L\theta_o} = \frac{\sqrt{h\,\rho k\,A\theta_o}.\dfrac{Sinh(m\,L)+\dfrac{h}{m\,k}Cosh(m\,L)}{Cosh(m\,L)+\dfrac{h}{m\,k}Sinh(m\,L)}}{h\,\rho L\theta_o} \quad (16-4)$$

5.4 الحالة الثالثة للزعانف Third Condition of Fins

$$1)\,at\ x=0 \quad , \quad T=T_o \quad , \quad \theta=\theta_o$$
$$2)\,at\ x=L \quad , \quad \frac{dT}{dx}=0 \quad , \quad \frac{d\theta}{d\,x}=0$$

وبتعويض الظروف الحدية أعلاه في الحل العام $\theta = C_1\, e^{-mx} + C_2\, e^{mx}$ نحصل على قيم الثوابت C_1 و C_2 ومنها نحصل على معادلة توزيع درجات الحرارة للحالة الثالثة وهي كما توضحها المعادلة التالية:-

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{T-T_\infty}{T_o-T_\infty} = \frac{Cosh\left[m\,(L-x)\right]}{Cosh\,(mL)} \qquad (17-4)}$$

وبنفس الطريقة التي قمنا بها بحساب كمية الحرارة المفقودة للزعنفة في الحالة الأولى وكذلك الزعنفة في الحالة الثانية نقوم بحساب كمية الحرارة المفقودة للزعنفة في الحالة الثالثة وبالتالي نحصل على المعادلة التالية:

$$q = q_{act} = \sqrt{h\,\rho k\,A}.\theta_o\,\tanh(mL) \qquad (18-4)$$

$$\therefore \eta_f = \frac{\sqrt{h\,\rho k\,A}.\theta_o\,\tanh(mL)}{h\,\rho L\theta_o} \qquad (19-4)$$

ويمكن ترتيب المعادلة(4 - 19) لتصبح بالشكل التالي:-

$$\eta_f = \frac{(h\rho k A)^{\frac{1}{2}}}{h\rho L}.\tanh(mL) = \frac{h^{\frac{1}{2}}.\rho^{\frac{1}{2}}(kA)^{\frac{1}{2}}}{h.\rho.L}.\tanh(mL)$$

$$= \frac{h^{-\frac{1}{2}}.\rho^{-\frac{1}{2}}.(kA)^{\frac{1}{2}}}{L}.\tanh(mL) = \frac{\sqrt{kA}}{(h\rho)^{\frac{1}{2}}}.\tanh(mL)$$

$$\therefore \eta_f = \frac{\sqrt{kA}}{\sqrt{h\rho}.L}.\tanh(mL) = \sqrt{\frac{kA}{h\rho}}.\tanh(mL) \quad ,\because m = \sqrt{\frac{h\rho}{kA}}$$

$$\therefore \eta_f = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

ويمكن إيجاد قيمة الحرارة المفقودة من الزعنفة باستخدام المخططات البيانية حيث يوجد لكل شكل هندسي من أشكال الزعانف مخطط يستخدم لإيجاد كفاءة الزعنفة والشكل المرقم(4 – 2) يوضح أشكال الزعانف.

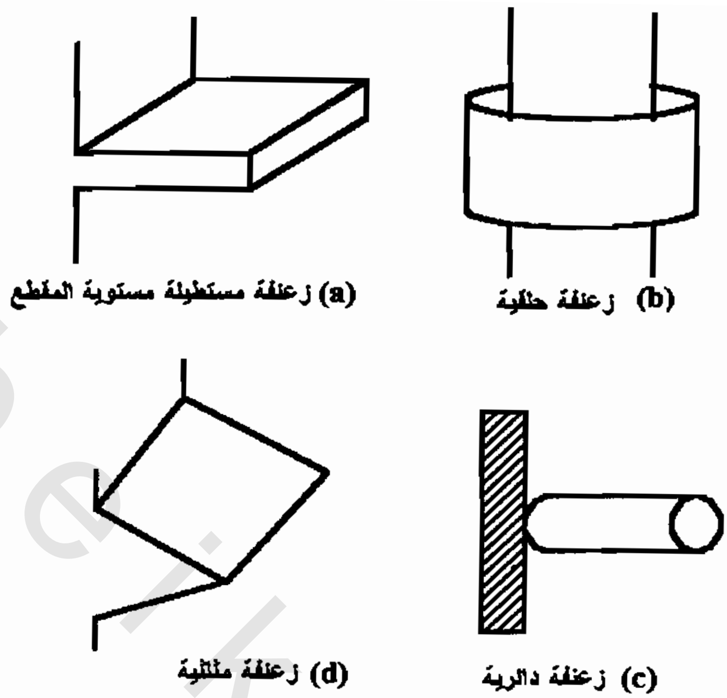
وبما أن $m = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$ إذن : $mL = \sqrt{\frac{2h}{kt}}\,L$ أو $mL = \sqrt{\frac{2h}{kLt}}\,L^{3/2}$

أو يمكن التوصل إليها بالشكل التالي:-

$$\because mL = \left(\frac{2h}{kt}\right)^{\frac{1}{2}}.L\,(\frac{L}{L}) = \left(\frac{2h}{kt}\right)^{\frac{1}{2}}.L\left(\frac{L^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \left(\frac{2h}{kt}\right)^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{3}{2}}\left(\frac{L^{\frac{1}{2}}.L^{-\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{2h}{kLt}\right)^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore mL = \sqrt{\frac{2h}{kLt}}.L^{\frac{3}{2}} \qquad (20-4)$$



الشكل (4 - 2) أشكال الزعانف

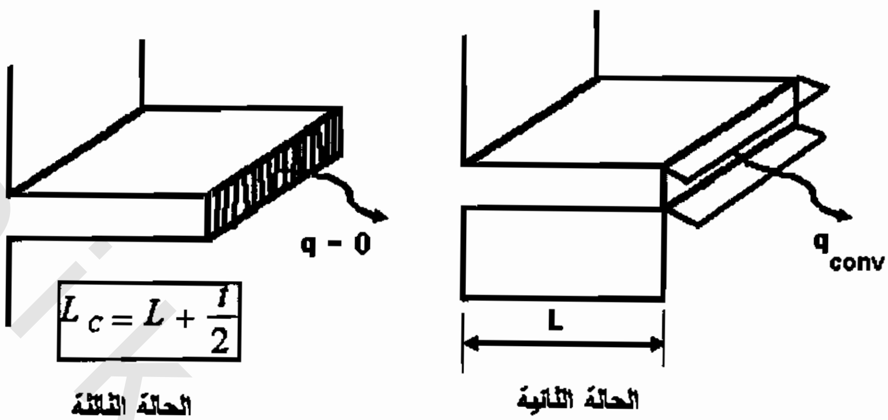
إن Lt تمثل المساحة الجانبية للزعنفة والتي يمكن تعريفها كما يلي:

$$A_m = L\,t \qquad (21-4)$$

وبالإمكان استخدام معادلات الحالة الثالثة لحساب الكفـــاءة ومعــدلات انتقــال الحرارة وتوزيع درجات حرارة الحالة الثانية ولكن بتعويض الطول المــصحح لهذه المعادلات والذي يرمز له بــ " L_c " وكما يوضحه الشكل(4 – 3) أدناه.

$$L_C = L + \frac{t}{2} \qquad (22-4)$$

تستخدم نفس قوانين الحالة الثالثة ولكن باستبدال ألـــ " L " التي تساوي " L_c " بين الحالة الثانية والثالثة فقط.إن نسبة الخطأ من هذا التقريب ستكون أقل مـــن 8 % عندما $\left(\frac{ht}{2k}\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2}$.



الشكل (4 - 3)

مقارنة بين الحالتين الثانية والثالثة من حالات الزعانف

فعلى سبيل المثال لحساب كفاءة الحالة الثانية باستخدام معادلات الحالة الثالثـــة نرى أن:-

$$\left.\begin{aligned} \eta_f &= \frac{\tanh (mL)}{mL} \\ \eta_f &= \frac{\tanh (mL_c)}{mL_c} \end{aligned}\right\} \quad \text{كفاءة الحالة الثالثة}$$

$$\eta_f = \frac{\tanh \sqrt{\frac{2h}{kt}\cdot\left(L + \frac{t}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{2h}{kt}\cdot\left[L + \frac{t}{2}\right]}} \quad \text{كفاءة الحالة الثانية}$$

أما لحساب كمية الحرارة الفعلية المفقودة من الزعنفة للحالة الثانية فبالإمكان استخدام معادلة الحالة الثالثة بالشكل التالي:-

$$q = \sqrt{h \rho k A}\, \theta_o \tanh(mL) \qquad \text{الحالة الثالثة}$$

$$q = \sqrt{h \rho k A}.\theta_o \tanh(mL_c) \qquad \text{الحالة الثانية}$$

$$q = \sqrt{h \rho k A}.(T_o - T_w) \tanh\left[\sqrt{\frac{2h}{kt}}\left(L + \frac{t}{2}\right)\right] \qquad (23-4)$$

$$\therefore \quad q_{act} = \eta_f . q_{max} \qquad (24-4)$$

حيث أن q_{max} هي كمية الحرارة المفقودة من الزعنفة عندما تكون درجة حرارتها مساوية لدرجة حرارة قاعدتها.

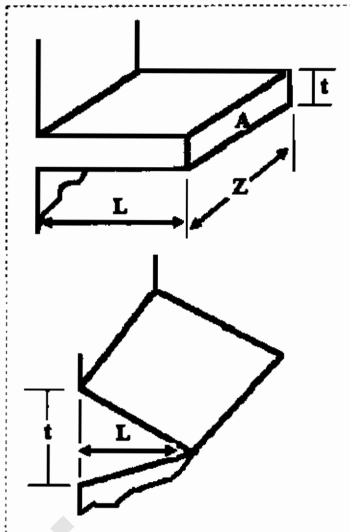
ولأسطوانة مركزية بارزة من جدار كما موضح في شكل(4 – 2 d) فإن الطول المصحح للزعنفة سيكون بالشكل التالي:-

$$\boxed{L_C = L\frac{\pi d^2/4}{\pi d} = L + \frac{d}{4} \qquad (25-4)}$$

6.4 حساب كفاءة الزعنفة باستخدام المخططات
Fin's Efficiency Using Graphs

نستطيع حساب كفاءة الزعانف وبالتالي الحرارة الفعلية باستخدام المخططات البيانية وحسب التسلسل التالي:-

أولا : a – حسب المعاملات التالية



1 – الزعانف المستوية المستطيلة المقطع

نحسب مساحة المقطع الجانبي حيث أن:

$$L_C = L + \frac{t}{2}$$

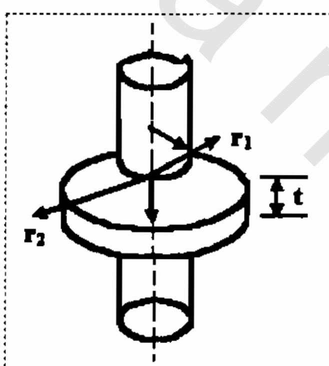
$$A = L_c\, t$$

2 – الزعانف المثلثية المقطع

الطول المصحح $L = L_c$

مساحة المقطع الجانبي :

$$A_m = L_c \frac{t}{2}$$



3 – الزعانف الأفقية الحلقية:

$$L = r_2 - r_1$$

$$L_C = L + \frac{t}{2}$$

إن نصف القطر المصحح يحسب كما يلي:

$$r_{2c} = r_1 + L_c$$

مساحة المقطع الجانبي تحسب من: $A_m = t\,(r_{2C} - r_1)$ حيث أن النـسبة $\frac{r_{2C}}{r_1}$ تستخدم لتحديد رقم المنحنى.

ثانيا: أحسب القيمة التالية

$$L_C^{3/2}\left(\frac{h}{k\ A_m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (26-4)$$

حيث أن h هو معامل انتقال الحرارة، k الموصلية الحرارية و A_m هي مساحة المقطع الجانبي.

ثالثا : أستخرج قيمة كفاءة الزعنفة من المخططات الخاصة بالزعانف.

رابعا: في هذه الخطوة يتم حساب الحرارة المفقودة من الزعنفة q_{max} كما يلي:

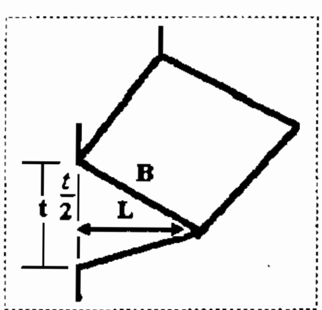
A – الزعنفة المستوية مستطيلة المقطع

$$q_{max} = h\,P\,L_C\,(T_o - T_\infty) \qquad (27-4)$$

حيث أن:

P هو محيط الزعنفة ويحسب من المعادلة التالية:

$$P = 2Z + 2t \qquad (28\text{-}4)$$



B – الزعنفة مثلثية المقطع

تستخدم نفس المعادلة أعلاه لحساب كمية الحرارة المفقودة من الزعنفة أي أن:

$q_{max} = h\,P\,L_C\,(T_o - T_\infty)$ أما المحيط P فيحسب من المعادلة التالية:

$$P = 2(BZ) + 2\left(\frac{t}{2}L\right) \quad (29-4)$$

حيث أن B يمثل الوتر في قاعدة الزعنفة المثلثية ويحسب بموجب قانون فيثاغورس بالشكل التالي:-

$$B = \sqrt{(L)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} \quad (30-4)$$

C – الزعانف الحلقية

$$q_{\max} = 2(\pi r_{2C}^2 - \pi r_1^2)h(T_o - T_\infty)$$
$$= 2\pi(r_{2C}^2 - r_1^2)h(T_o - T_\infty) \quad (31-4)$$

خامسا : في الخطوة الأخيرة يتم حساب الحرارة المفقودة الفعلية من الزعنفة بواسطة المعادلة (4 - 24) والتي تنص على أن:

$$q_{act} = \eta_f \cdot q_{\max}$$

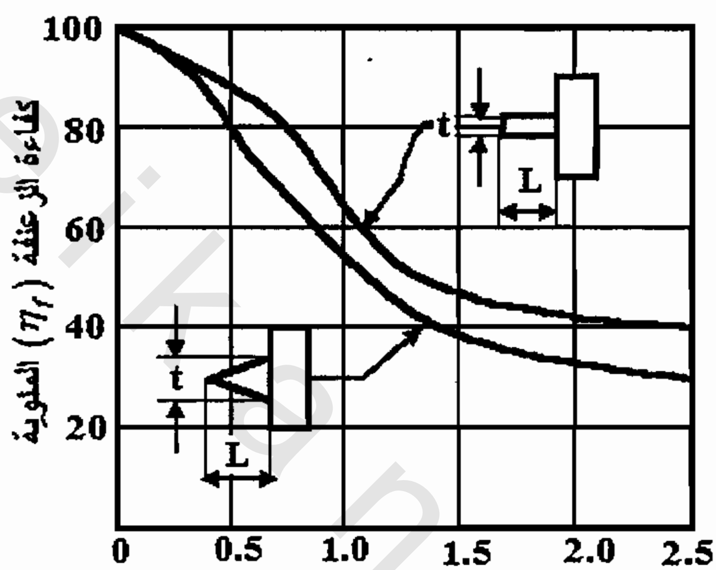
يبين الشكل(4 – 4) العلاقة بين كفاءة الزعنفة وبين المقدار $L_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{h}{kA_m}\right)^{\frac{1}{2}}$

لحالتي الزعانف المستطيلة والمثلثية أي الحالة الثانية أما الشكل(4 – 5) أدناه فيوضح العلاقة بين نفس المقدارين للزعانف المحيطية ذات المقطع الجانبي.في بعض الحالات توجد طريقة أخرى لتقييم أداء الزعنفة وهي بمقارنة الحرارة المنتقلة بواسطة الزعنفة إلى تلك التي قد تنتقل بدون استعمال الزعنفة إن النسبة بين هذه الكميات هي:-

$$\frac{q \text{ المنتقلة بواسطة الزعانف}}{q \text{ المنتقلة بدون زعانف}} = \frac{\eta_f A_f h \theta_o}{h A_b \theta_o} \quad (32-4)$$

حيث أن A_f هي المساحة السطحية الكلية للزعنفة و A_p هي مساحة القاعدة.ولزعنفة مستدقة معزولة والموصوفة بالمعادلة(4 - 23) فإن: $A_f = P$ و $A_b = A\ L$ وعلى هذا الأساس تصبح نسبة الحرارة بالشكل التالي:-

$$\frac{q_{\text{المنتقلة بواسطة الزعانف}}}{q_{\text{المنتقلة بدون زعانف}}} = \frac{\tanh\ m\ L}{\sqrt{h\ A\ /\ k\ P}} \qquad (33\ -\ 4)$$

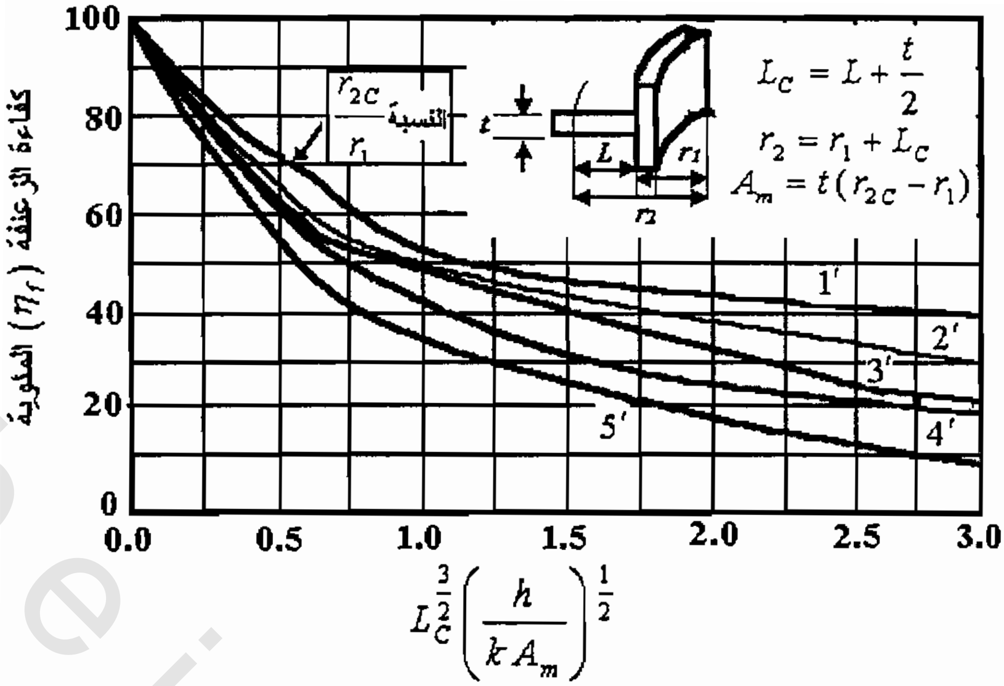


$$L_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{h}{k\,A_m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

الشكل(4 - 4) كفاءة الزعانف المستطية والمثلثية

7.4 أمثلة في حالات الزعانف Examples

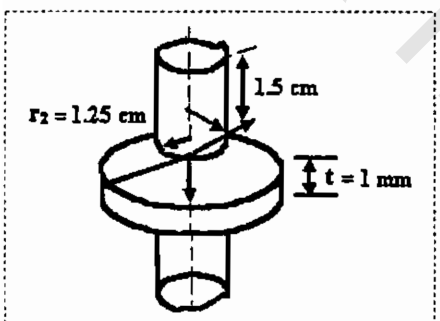
<u>مثال 4 – 1</u>: زعنفة من الألمنيوم طولها 1.5 cm وسمكها 1 mm مركبة على أنبوب بقطر 2.5 cm.إن درجة حرارة سطح الأنبوب هي 170 °C ودرجة حرارة محيط الأنبوب هي 25 °C.أحسب الحرارة المفقودة من هذه الزعنفة إذا علمت أن معامل انتقال الحرارة للمحيط 130 W/m. °C والموصلية الحرارية للزعنفة هي 200 W/m. °C.أستخدم المنحنيات لحل المسألة.



الشكل (4 - 5)

كفاءة الزعانف الحلقية والمحيطية ذات المقطع الجانبي

<u>الحل:</u>



1 – أولا نحسب L_C بالشكل التالي:

$$L_C = L + \frac{t}{2}$$

$$= 1.5 + \frac{0.1}{2}$$

$$L_C = 1.5 + 0.05 = 1.55\ cm$$

وبما أن $r_1 = \frac{2.5}{2} = 1.25\ cm$ إذن:-

$$r_{2C} = r_1 + L_C = 1.25 + 1.55 = 2.8\ \text{cm}$$

$$\therefore Ratio = \frac{r_{2C}}{r_1} = \frac{2.8}{1.25} = 2.24$$

$$\therefore A_m = t(r_{2C} - r_1) = 0.001 m\ (2.8 - 1.25)(10^{-2}) m$$

$$\therefore A_m = 1.55 x 10^{-5}\ m^2$$

2 – نحسب المقدار $L_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{h}{k A_m}\right)^{\frac{1}{2}}$ بالشكل التالي:

$$L_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{h}{k A_m}\right)^{\frac{1}{2}} = (0.0155)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{130}{(200)(1.55 x 10^{-5})}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.0396$$

3 – نحسب كفاءة الزعنفة من المخططات.

وبما أن الزعنفة حلقية نستخرج الكفاءة من الشكل(4 – 5) حيث يتبين أن كفاءة الزعنفة η_f = 82 % = 0.82.

4 – نحسب الحرارة الفعلية المفقودة من المعادلة (4 – 31) كما يلي:

$$\begin{aligned} q_{\max} &= 2\pi(r_{2C}^2 - r_1^2)h(T_o - T_\infty) \\ &= 2\pi\left[(2.8)^2 - (1.25)^2\right](10^{-4})(130)(170 - 25) \\ &= 74.35\, W \end{aligned}$$

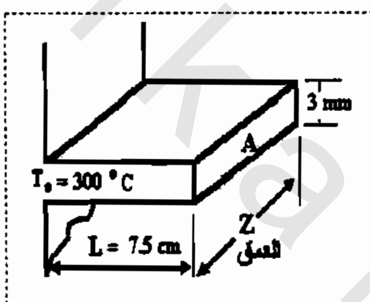
$$\therefore q_{act} = q_{\max}.\eta_f = (74.35)(0.82) = 60.97\, W$$

وهذه الأخيرة تمثل الحرارة الفعلية المفقودة من الزعنفة.

مثال 4 – 2: زعنفة مستطيلة المقطع مستوية مصنوعة من الألمنيوم كانت الموصلية الحرارية لها 200 W/m. °C وسمك 3 mm وبطول 7.5 cm وكانت هذه الزعنفة مثبتة على جدار مستوي عند درجة حرارة 300 °C كانت درجة حرارة المحيط الجوي 50 ° C وكان معامل انتقال الحرارة بالحمل للمحيط الجوي يساوي 10 W/m.°C. باستخدام المعاملات أوجد كمية الحرارة المفقودة من الزعنفة لوحدة العمق.

الحل:

إن الحالة التي لدينا هي الحالة الثانية وبما أن المطلوب هو حساب الحرارة المفقودة لوحدة العمق من الزعنفة لذلك نستخدم معادلات الحالة الثالثة.



$$q = \sqrt{h\rho k A}.\theta_o \tanh(mL)$$

$$L_C = L + \frac{t}{2} = 7.5 + \frac{0.3}{2}$$

$$L_C = 7.5 + 0.15 = 7.65\,cm$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \sqrt{\frac{h(2Z + \overset{\text{يهمل}}{\cancel{2t}})}{k(tZ)}} = \sqrt{\frac{2h}{kt}} = \sqrt{\frac{(2)(10)}{(200)(0.003)}}$$

$$\therefore m = 5.774$$

$$\because q_{act} = \sqrt{hPkA}.\theta_o.\tanh(mL_C)$$

$$\therefore q_{act} = \sqrt{\frac{hP}{kA}}.\sqrt{kA}.\sqrt{kA}.\theta_o.\tanh(mL_C)$$

$$= \sqrt{\frac{hP}{kA}}.kA.\theta_o.\tanh(mL_C)$$

$$= m.k.t.Z.(T_o - T_\infty)\tanh(mL_C)$$

$$\therefore \frac{q}{Z} = (5.774)(200)(0.003)(300-50)\tanh\left[(5.774)(0.0765)\right]$$

$$\therefore \frac{q}{Z} = 359 \frac{W}{m}$$

<u>مثال 4 – 3</u>: قضيب ذو مقطع دائري من الألمنيوم بقطـــر 2.5 cm وبطـــول مقداره 15 cm وكان هذا القضيب يبرز من جدار درجة حرارته 260°C. إن هذا القضيب معرض إلى محيط عند درجة حرارة 16 °C.وكان معامل انتقال الحرارة للمحيط الخارجي هو 15 W / m. ° C فإذا كـــان معامـــل التوصـــيل الحراري للألمنيوم هو 204 W/m. °C.أحسب كمية الحرارة الفعلية المفقودة من القضيب.

<u>الحل</u>: بما أن الزعنفة دائرية لذلك فهي تمثل الحالة الثانية من حالات الزعانف وبما أن طولها محدود مع فقدان بالحمل فسوف تطبق معادلة الحالة الثالثة هنا.

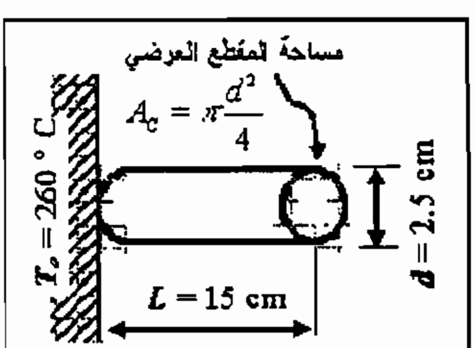
إن الحرارة الفعلية المفقودة تحسب بالطريقة التالية:

$$q_{act} = \sqrt{h\,P\,k\,A}\,.\theta_o\,.\tanh\,(m\,L_C)$$

$$\because m = \sqrt{\frac{h\,P}{k\,A}} = \sqrt{\frac{(15)(\pi)(d)}{(204)(\frac{\pi}{4})(d)^2}} = \sqrt{\frac{(15)(4)}{(204)(0.025)}} \cong 3.3$$

$$\therefore q_{act} = \sqrt{(15)\underbrace{(3.14)(0.025)}_{P=\pi d}(204)(0.000491)}.(246) \text{ x } \tanh\left[(3.3)(0.1563)\right]$$

$$= 43.066\,W$$



<u>ملاحظة</u>

$$\because L_C = L + \frac{d}{4}$$

$$= 0.15 + \frac{0.025}{4}$$

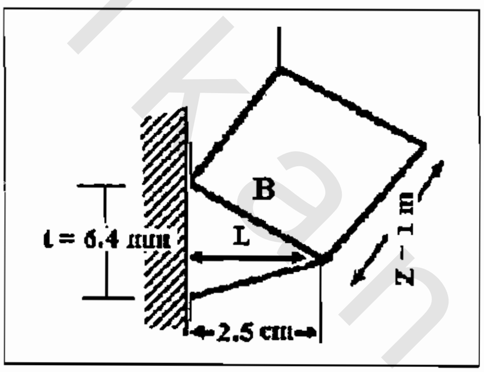
$$\therefore L_C = 0.1563 \quad cm$$

مثال 4 – 4: زعنفة مثلثية المقطع مصنوعة من الفولاذ المقاوم للصدأ مثبتة على جدار مستوي عند درجة حرارة 460 °C. سمك هذه الزعنفة 6.4 mm وطولها 2.5 cm.أوجد الحرارة الفعلية المفقودة من الزعنفة إذا علمت أن درجة حرارة المحيط هي 93 °C ومعامل انتقال الحرارة بالحمل 28 W/m.°C والموصلية الحرارية للفولاذ تساوي 16.3 W/m. °C وبافتراض أن عمق هذه الزعنفة هو 1 m.استخدم المخططات البيانية لحل هذه المسألة.

الحل:

في هذه الحالة فإن: $L = L_C$

$$L_C = 2.5\,cm = 0.025\,m$$



$$A_m = L_C \frac{t}{2}$$

$$= (0.025)\left(\frac{0.0064}{2}\right)$$

$$\therefore A_m = (0.025)(0.0032)$$

$$= 8x10^{-5}\,m^2$$

والآن نجد قيمة المقدار $L_C^{3/2}\left(\frac{h}{k\,A_m}\right)^{\frac{1}{2}}$ كما يلي:-

$$L_C^{3/2}\left(\frac{h}{k\,A_m}\right)^{\frac{1}{2}} = (0.025)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{28}{(16.3)(8\,x10^{-5})}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.577$$

من الشكل(4 – 4) نجد أن كفاءة الزعنفة η_f = 85 % = 0.85 ومنها نحسب الحرارة الفعلية المفقودة من الزعنفة.

$$q_{act} = \eta_f \cdot q_{\max} = \eta_f \frac{hPL_C(T_o - T_\infty)}{(2)(h)(BxZxA_m)}$$

$$PL_C = (2)(Bx1xA_m)$$

$$B = \sqrt{(L)^2 + (t/2)^2} = \sqrt{(2.5)^2 + (0.32)^2} = 4.061\,cm$$

$$PL_C = (2)\left[(4.061)(1)(8x10^{-5})\right] = 6.4976\,x10^{-4}$$

$$\therefore q_{act} = (0.85)(28)(2)(6.4976\,x10^{-4})(460 - 93)$$

$$= 113.507\,W$$

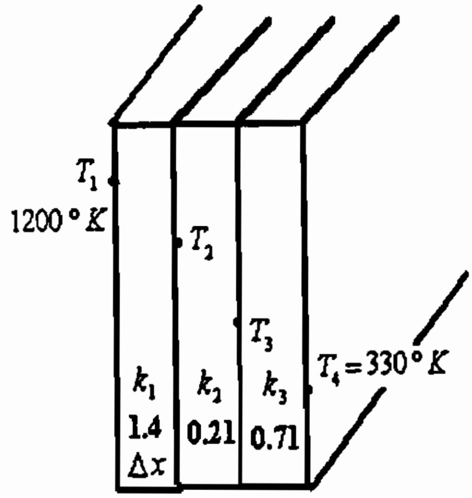
مثال 4 – 5: فرن حراري ذو جدار مركب من ثلاثة طبقات.الطبقة الأولى من الطابوق الحراري بسمك 0.2 m والطبقة الثانية من الطابوق العازل بسمك قدره 0.1 m والطبقة الثالثة من الطابوق العادي بسمك 0.2 m.كانت درجة حرارة السطح الداخلي للفرن 1200 °K وكانت درجة حرارة السطح الخارجي 330 °K فإذا كانت الموصلية الحرارية للطبقة الأولى 1.4 W/m.°K والطبقة الثانية 0.21 W/m.°K والثالثة 0.71 W/m.°K.أوجد كمية الحرارة المفقودة من جدار الفرن لوحدة المساحة وأوجد درجة الحرارة في النقطة الفاصلة بين كل من الطابوق الحراري والعازل.

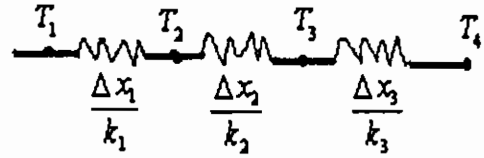
الحل:

وحيث أن المطلوب هو حساب كمية الحرارة المفقودة لوحدة المساحة.

$$\therefore q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{1}{A}\left[\frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3}\right]} = \frac{(T_1 - T_4)(A)}{\frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3}}$$

$$\therefore \frac{q}{A} = \frac{1200 - 330}{\frac{0.2}{1.4} + \frac{0.1}{0.21} + \frac{0.2}{0.71}} = \frac{870}{0.905} = 961.571\frac{W}{m^2}$$





$$q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{\Delta x_3}{k_3 A}}$$

إن القيمة الأخيرة تمثل الحرارة المفقودة من الجدار لوحدة المساحة.ولإيجاد درجة الحرارة في السطح الفاصل بين الطابوق الحراري والعازل.

$$q = 961.571 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x_1}{k_1}} = \frac{1200 - T_2}{\frac{0.2}{1.4}}$$

$$\therefore T_2 = 1063\,°K$$

مثال 4 – 6:قارن توزيع درجة الحرارة لقضيب أسطواني على شكل زعنفة قطرها 2 cm وطولها 10 cm تتعرض لتيارات حمل من الوسط المحيط بحيث كان معامل انتقال الحرارة بالحمل هو $25\ W / m^2.°C$ وذلك للحالات التالية:–

(A) استخدام النحاس كمادة للقضيب وموصليته الحرارية 385 W/m .° C.

(B) إستخدام الفولاذ المقاوم للصدأ وموصليته الحرارية 17 W / m. °C.

(C) استخدام الزجاج بموصلية حرارية تعادل 0.8 W / m.° C

ثم أوجد معدل انتقال الحرارة وكفاءة مواد القضيب لكل حالة.

الحل:

نوجد أولاً معادلة عامة لحساب قيمة m بدلالة k كما يلي:-

$$m^2 = \frac{h\,p}{k\,A} = \frac{(25)(\pi)(0.02)}{k\,\pi\,(0.01)^2} = \frac{5000}{k}$$

وللمواد الثلاثة تحسب قيمة m بموجب قيمة k المعطاة وحسب ما مبين في الجدول التالي:-

نوع المادة	قيمة hp / kA	قيمة m	قيمة m L
النحاس	12.99	3.604	0.3604
الفولاذ المقاوم	294.1	17.15	1.715
الزجاج	6250	79.06	7.906

وتستخدم الحسابات السابقة لحساب درجات الحرارة عند مواضع مختلفة لـ x وفقاً للمعادلة (4 – 10) والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي:-

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{e^{-mx}}{1+e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1+e^{2mL}}$$

تظهر هذه العلاقة في الشكل البياني الموضح في أدناه ومنه نلاحظ أن الزجاج يتصرف كأنه ذو طول غير منتهي ولذلك يمكن حساب التوزيع الحراري له من المعادلة التالية:-

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{T-T_\infty}{T_o-T_\infty} = e^{-mx}$$

ولحساب الكفاءة حساب الطول المصحح L_c كما يلي:-

$$L_c = L + \frac{d}{4} = 10 + \frac{2}{4} = 10.5\ cm$$

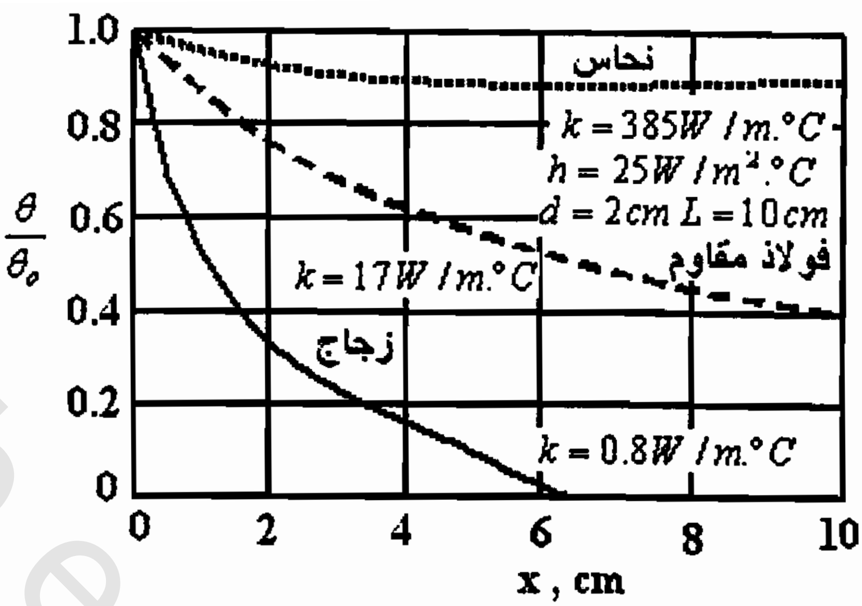
ثم تحسب الكفاءة من المعادلة: $\eta_f = \dfrac{\tanh mL}{mL}$

قيمة $m L_c$	قيمة hpkA	نوع المادة
0.3784	0.19	النحاس
1.8008	0.0084	الفولاذ المقاوم للصدأ
8.302	3.9×10^{-04}	الزجاج

يلاحظ أن أقصى معدل لانتقال الحرارة للمواد الثلاثة متساوي (نفس الحجم والشكل وقيمة h) وعلى هذا الأساس تحسب الكفاءة من المعادلة السابقة أما قيمة q فتحسب من المعادلة (4 – 23) كما موضح في الجدول التالي:-

قيمة q بالواط	قيمة η_f	نوع المادة
100	0.955	النحاس
56.12	0.526	الفولاذ المقاوم للصدأ
12.98	0.124	الزجاج

ونلاحظ من الشكل (4 – 6) المرسوم في أدناه أن للزجاج أقصى ميل لدرجة الحرارة عند القاعدة وتكون قيمة معامل التوصيل الحراري له منخفضة مما يجعله موصل رديء للحرارة.



الشكل (4 – 6)

<u>مثال 4 – 7</u>: زعنفة محيطية مصنوعة من الفضة عرضها 2 cm وسمكها 1.5 mm وضعت على أنبوب قطره 3 cm لتسهيل فقد الحرارة.درجة حرارة سطح الأنبوب 150 °C ودرجة حرارة الهواء المحيط 30 ° C.أحسب كمية الحرارة المفقودة من الزعنفة إذا كانت قيمة معامل انتقال الحرارة بالحمل هي 110 W / m².°C وموصلية الفضة الحرارية هي 406 W /m.° C.

<u>الحل</u>:

تحسب كمية الحرارة المفقودة بعد حساب كفاءة الزعنفة من الشكل(4 – 4) كما هو مبين أدناه:-

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 2 + \frac{0.2}{2} = 2.0 + 0.1 = 2.1\, cm$$

$$r_1 = \frac{3.0}{2} = 1.5\, cm$$

$$r_{2c} = r_1 + L_c = 1.5 + 2.1 = 3.6\, cm$$

$$\therefore A_m = t\,(r_{2c} - r_1) = (0.002)(3.6 - 1.5)\, x10^{-2}$$

$$\therefore A_m = 4\,x\,10^{-5}\,m^2$$

$$L_c^{3/2}\left(\frac{h}{k\,A_m}\right)^{1/2} = (0.021)^{3/2}\left(\frac{110}{(406)(4.0\,x\,10^{-3})}\right)^{1/2}$$

$$= 0.025$$

من الشكل (4 – 4) نجد أن كفاءة الزعنفة: η_f = 96 % = 0.96

أما كمية الحرارة المفقودة من الزعنفة من الجانبين فهي:-

$$q_{\max} = 2\pi(r_{2C}^2 - r_1^2)h(T_o - T_\infty)$$

$$= 2\pi\left[(3.6)^2 - (1.5)^2\right](10^{-4})(110)(150-30)$$

$$= 88.83\,W$$

$$\therefore q_{act} = q_{\max}.\eta_f = (88.83)(0.96) = 85.274\,W$$

7.4 تمارين في الباب الرابع

س1:جدار مستوي مصنوع من مادة يتغير معامل التوصيل الحراري لها مع تغير درجة الحرارة حسب العلاقة التالية: $k = k_o(1+\beta T^2)$ حيث أن كل من k_o وβ هي ثوابت تتبع المعادلة.المطلوب أشتقاق معادلة تعبر عن معدل انتقال الحرارة لمثل هذا الجدار.

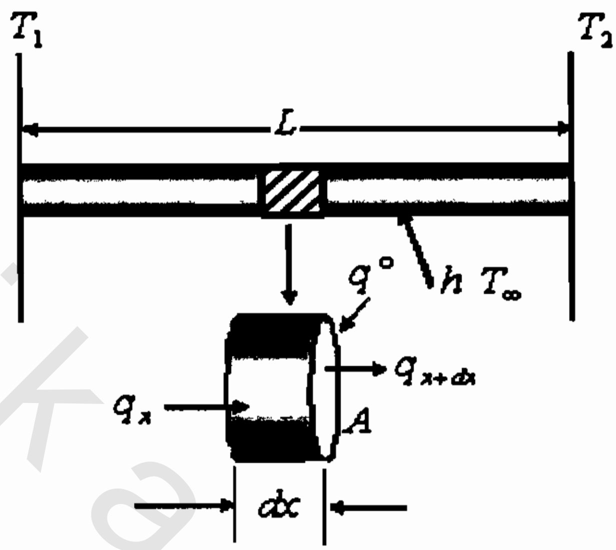
س2:تيار كهربائي يستخدم لتسخين أنبوب ويمر خلال هذا الأنبوب مائع بارد. تم تغليف السطح الخارجي لهذا الأنبوب بطبقة من مادة عازلة لتقليل معدل الفقد الحراري من الأنبوب إلى المحيط الخارجي.فإذا علمت أن درجة حرارة السطح الخارجي للأنبوب كانت مساوية لـ " T_o ".أوجد معادلة لحساب معامل انتقال الحرارة للمائع داخل الأنبوب بدلالة الفولتية ومفردات التيار الكهربائي الأخرى أي أن: $h = f(E, I, T_o, r_i, r_o, T_f, L)$ إذا كان الأنبوب يولد حرارة نتيجة لمرور التيار الكهربائي فيه ؟

(الجواب: $$h = \frac{E.I}{2\pi r_i L\left[T_o + \frac{E.I}{4\pi k L} + \frac{E.I.r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2)}\ln\frac{r_o}{r_i} - T_f\right]}$$)

س3:زعنفة مستقيمة ذات مقطع مساحي غير منتظم مصنوعة من مادة معامل التوصيل الحراري لها 50 W/m.° K.إن سمك الزعنفة يبلغ 6 mm وطولها 48 mm وتعتبر طويلة جدا في اتجاه الورقة.إن معامل انتقال الحرارة بالحمل هو $500\ W/m^2.K$.درجة حرارة القاعدة $T_b = 100\ °C$ أما درجة حرارة الهواء المحيط فهي 25 ° C.أحسب معدل انتقال الحرارة من الزعنفة لوحدة الطول باتجاه الورقة.

س4 :قضيب طويل جداً قطره 5 mm إحدى نهايتيه محفوظة عند درجة حرارة 100 °C وسطح القضيب معرض للهواء الجوي عند درجة 25 ° C. أوجد توزيع درجة الحرارة عبر القضيب إذا صنع من سبيكة الألمنيوم والحديد المقاوم وما هي الحرارة المفقودة في الحالتين ؟

س5:يتصل قضيب معدني موصليته الحرارية k بجدارين درجات الحرارة فيهما هي T_1 و T_2 على التوالي كما موضح في الشكل (4 – 7).تتولد في القضيب حرارة مقدارها q° لوحدة الحجم كما يفقد القضيب حرارة للهواء المحيط عن طريق الحمل الذي يتواجد بدرجة حرارة T_∞.أوجد توزيع درجة الحرارة كدالة للبعد x على طول القضيب.



الشكل (4 – 7)

س6:زعنفة محيطية مصنوعة من الحديد الصلب طولها 1.925 cm وسمكها 0.635 cm وضعت على أنبوب قطره 2.54 cm لتبديد الحرارة وكانت درجة حرارة سطح الأنبوب هي 205 °C ودرجة حرارة الهواء الجوي هي 21 °C أحسب كمية الحرارة المفقودة للزعنفة علماً أن معامل انتقال الحرارة بالحمل بين الزعنفة والهواء كان 113 W /m ^{2}.°C وكان معامل التوصيل الحراري للحديد الصلب هو 52 W /m. °C.

س7:زعنفة من الألمنيوم (k = 200 W /m. °C) سمكها 3 mm وطولها 20 سم ودرجة حرارة قاعدتها 200 ° C ودرجة حرارة المائع المحيط بالزعنفة هي 50 °C ومعامل انتقال الحرارة h = 10 W /m ^{2}.°C.أحسب معدل الفقد الحراري من الزعنفة لكل وحدة عمق علماً أنها طويلة جداً ($T_L = T_\infty$).

س8:أنبوب قطره الخارجي 15 cm وقطره الداخلي 10 cm مصنوع من مادة صلبة معامل التوصيل الحراري لها يتغير وفق العلاقة التالية :-

$k = 10 + 0.1T\ W/m.°C$ حيث أن T هي درجة الحرارة بوحـــدات °C أما درجات حرارة السطوح الخارجية والداخلية فكانـــت 400 °C و 150 °C على التوالي.أحسب الفقد الحراري لوحدة طول من الأنبوب.

س9: قضيب من الحديد الكربوني Carbon Steel معامل التوصيل الحراري له $\left(k = 54\frac{W}{m.°C}\right)$ ذو مقطع مثـــلث متساوي الأضلاع طول الضلع 5 mm أما طول القضيب فهو 8 cm موصل بجدار مســـتوي عند درجة حرارة ثابتة مقدارها 400 °C فإذ كانت درجة حرارة الهواء الجوي هـــي 40 °C وكـــان معامل انتقال الحرارة بالحمل هو $\left(75\frac{W}{m^2.°C}\right)$.أحسب الحرارة المفقودة مــن القضيب.

س10:زعنفة محيطية من الألمنيوم سمكها 3 mm وطولهـــا 15 cm تحـــيط بأنبوب قطره الخارجي 25 mm ودرجة حرارته ثابتة عند 250 °C.إذا كانت درجة حرارة الهواء المحيط هي 15 °C وكان معامل انتقال الحرارة بالحمـــل هو $\left(45\frac{W}{m^2.°C}\right)$ ، عين كفاءة الزعنفة والفقد الحراري لوحدة العمق منها.

س11:زعنفة مستطيلة من النحاس سمكها 18 mm وطولها 16 cm ودرجـــة حرارة قاعدتها 300 ° C وكانت درجة حرارة الهواء المحيط 20 ° C وكـــان معامل انتقال الحرارة بالحمل $\left(30\frac{W}{m^2.°C}\right)$.أحسب كميـــة الحـــرارة الفعليـــة المفقودة من الزعنفة علماً أن موصلية النحاس هي $\left(385\frac{W}{m.°C}\right)$.