البـــــاب الرابــــع

الخصائـــص الهندسيـــة للمساحـــات والمقـــاطـــــع

1.4 مقدمـــــة

أن الدراسة اللاحقة للمسائل والقضـــايا المتعلقـــة بالاســـتقرار والمتانـــة والصلادة ، تحتم علينا معرفة ودراســـة الخصـــائص الهندســـية للمســـاحات والمقاطع مثل مراكز الثقل والمساحات ، والعـــزوم الاســـتاتيكية ، وعـــزوم القصور الذاتي وعزوم المقاومة المختلفة وغيرها .

وسيلاحظ الدارسين لموضوع علم مقاومة المواد أهمية دراسة الخصـــائص الهندسية المختلفة للمساحات وعزومها ، خلال دراستهم الهندســـية مســـتقبلا ، حيث إن هناك الكثير من الاستخدامات لهذة الخصائص سيتم التعرف عليهـــا خلال مختلف مراحل الدراسة الهندسية بمختلف فروعها ، لـــذلك فإنـــه مـــن الضروري الإلمام الجيد بموضوع مراكز الثقل والمساحات وعزومهـــا نظـــراً لأهميتها .

2.4 مراكز المساحات والمقاطع

من المعروف أن كل جسم يتركب من جزيئات ، وأن كل جزيء يجـــذب بواســـطة الأرض مـــن خـــلال مركـــزه حيـــث تـــؤثر قـــوة الجـــذب (Force of attraction) التي تتناسب مع كتلة الجزيء في اتجاه عمودي إلى الأسفل ، وتعرف بوزن الجسم ، وعلى ذلك تعرف قوة الجاذبيـــة الأرضـــية للجسيم بالوزن وتكون متجهة نحو مركز الأرض ، وحيث أن المســـافة بـــين الجزيئات المختلفة للجسم ومركز الأرض ثابتة نسبياً ، لذلك يمكن أخذ تـــأثير هذه القوى في خطوط متوازية ، وتكون محصلة القوى الجاذبية المتوازية في الفراغ ممثلة لوزن الجسم .

ولقد أثبتت التجارب والدراسات انه يمكن إيجاد نقطه واحدة في الجسم تمر خلالها ، وتؤثر فيها محصلة هذه القوى المتوازية ، وتكون هذه النقطة داخـــل

الجسم أو على امتداده ولكل أوضاع الجسم . وتسمى هذه النقطة بمركز الثقل أو مركز المساحة (Center of Gravity and Centroid) ، وجدير بالملاحظة بأن لكل جسم نقطة لمركز المساحة أو مركز الثقل . ويستعمل مصطلح المركز الهندسي أو مركز المساحة (Centroid) ، عندما تتعلق الحسابات بالإشكال الهندسية فقط ، ويستعمل مصطلح مركز الثقل أو مركز الكتلة (Center of Gravity) ، عندما نتحدث عن الجسم المادي الحقيقي ، وعندما تكون كثافة الجسم متجانسة فان مركز المساحة ينطبق على مركز الكتلة . في حين إذا كانت الكثافة متغيرة في أجزاء الجسم المختلفة . فإن هاتين النقطتين عادة لا تنطبقان بعضها على بعض . وقد تم دراسة كيفية إيجاد مراكز الثقل والمساحات للأشكال الهندسية المختلفة في مادة الميكانيكا النظرية لذا فأننا سوف نقوم في هذا الباب بتوضيح المفاهيم والمبادئ الأساسية الخاصة بذلك .

1.2.4 أهمية المراكز (Importance of Centroids)

أن أهمية المراكز تبرز في استخدامات عمليه كثيرة ومتنوعة ومنها :

1. تعيين محور التعادل (neutral axis) وهو الخط الذي يكون الإجهاد عنده يساوي صفراً . حيث أنه من المعروف في مقاومة المواد أن محور التعادل يمر في مركز مساحة مقطع العتبات .

2. لانتظام الأجهادات على السطح المقطع الإنشائي يجب إن توضع الأحمال على العضو الإنشائي . بحيث يمر خط عمل محصلتها في مركز مساحة مقطع العضو الإنشائي .

3. تبرز أهمية مراكز المساحات في موضوع عزم القصور الذاتي حيث إن المحور الذي يمر في مركز المساحة يسمى محوراً مركزياً وهذا له أهمية كبيرة في إيجاد عزم القصور الذاتي .

أن أهمية مراكز المساحات تبرز أيضا من خلال الحاجة إلى استخدام العزم الإستاتيكي للمساحة (Statical Moment of Area) ، أو ما يسمى أحياناً بالعزم الأول للمساحة (First Moment of Area) ، الذي له استخدامات عديدة في علم مقاومة المواد ، حيث إن هذا العزم بالنسبة إلى محور معين يساوي حاصل ضرب المساحة في المسافة العمودية من مركزها إلى المحور ، وهو ما سنقوم بدراسته في البند القادم من هذا الباب .

2.2.4 مركز الثقل ومركز الكتلة
(Center of Gravity and Center of Mass)

لتوضيح كيفية إيجاد مركز الثقل نقوم بدراسة حالة صفيحة مستوية ثنائية الأبعاد ذات سمك ثابت ، غير منتظمة الشكل كما هو مبين في الشكل (4-1) ، لذلك نقوم بتقسيم هذه الصفيحة إلى عدد (n) من العناصر (الأجزاء) الصغيرة رمز لها بالرمز (dw) حيث يكون لكل عنصر من هذه العناصر إحداثياته الخاصة به، وعليه فإن إحداثيات العنصر الاول $(\bar{x})$ ، وإحداثيات العنصر الثاني (x_2, y_2) وإحداثيات العنصر (n) هي (x_n, y_n) ، أما قوة الجاذبية لهذه العناصر (أوزانها) فتكون أيضا حسب أرقامها $dw_1, dw_2 ....\, dw_n$ ، وكل من هذه الأوزان يمر في مركز كل عنصر من هذه العناصر .

أن قوى الجذب الصغيرة هذه ما هي إلا عبارة عن منظومة قوى متوازية ومتجهة مباشرة إلى مركز الأرض ، ومحصلتها عبارة عن قوة واحدة مكافئة تكون في نفس الاتجاه ومقدارها هو (W) يمكن الحصول عليه بجمع هذه القوى الصغيرة (الأوزان) كما يلي :

$$W = dW_1 + dW_2 + ...dW_n$$

وتؤثر في نقطة مثل $C(\bar{x}, \bar{y})$ والتي تعتبر مركز ثقل هذه الصفيحة ككل .

ومن اجل الحصول على إحداثيات النقطة $C(\bar{x},\bar{y})$ نقوم بإيجاد العزم حول المحاور y , x حيث أن عزم المحصلة (W) حول أي محور من المحاور حسب نظرية فاريجنون (Varignon Theorem) يكون مساوياً لمجموع العزوم حول نفس المحور لقوة الجاذبية الصغيرة للعناصر (dw) المؤثرة على كل عنصر .

$$\sum M_y : \bar{x}W = x_1 dW_1 + x_2 dW_2 ......x_n dW_n ....(1-4)$$

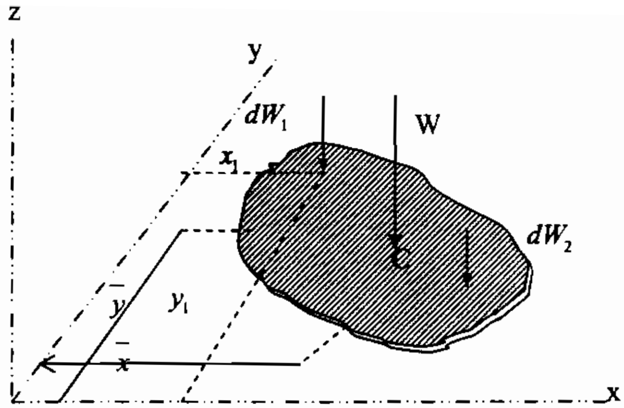
$$\sum M_x : \bar{y}W = y_1 dW_1 + y_2 dW_2 ....y_n dW_n ....(2-4)$$

إذا تم زيادة عدد العناصر المكونة للصفيحة والذي يعني نقص حجم كل عنصر فسنحصل بأخذ النهاية (Limit) على التعبير التالي :

$$\left.\begin{aligned} W &= \int dW \\ \bar{x}W &= \int x.dW \\ \bar{y}W &= \int y.dW \end{aligned}\right\} ....(3-4)$$

أن المعادلات (4-3) تعرف الوزن W والإحداثيات $(\bar{x},\bar{y})$ هي إحداثيات مركز الثقل C للصفيحة المستوية الموضحة في الشكل (4-1).

أي أن مسألة تعيين مركز الثقل لجسم ما هي إلا عبارة عن تعيين النقطة التي تمر بها محصلة الجذب الأرضي المؤثرة على الجسم . وتحليلياً يتم تعيين المحصلة بتطبيق القاعدة الأساسية للعزوم والتي تنص على أن " عزم المحصلة بالنسبة إلى محور معين يساوي مجموع عزوم مركباتها مقيسة بالنسبة إلى محور نفسه " .

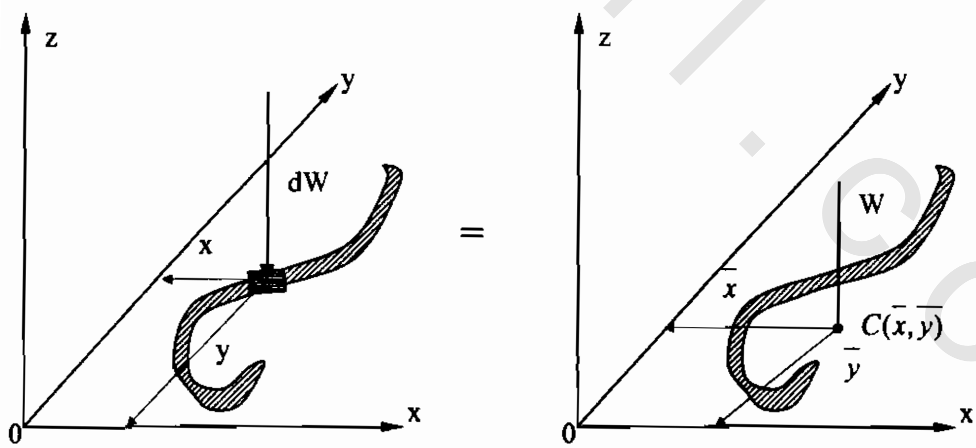


الشكــل (4-1)

إحداثيات مركز الثقل وكيفية إيجادها

كما يمكن اشتقاق العلاقات وذلك لإيجاد إحداثيات مركز الثقل لسلك يقع في مستوى واحد . مع ملاحظة أن مركز الثقل للسلك (c) ممكن أن يكون واقــع في نقطة ما في مستوى السلك وليس على السلك نفسه كما هو مبين في الشكل (4-2).

$$\sum M_y : \bar{x}W = \sum x.dA \quad , \quad \sum M_x : \bar{y}W = \sum y.dA$$



الشكــل (4-2) مركز الثقل لسلك

3.2.4 مركز المساحات والخطوط (Centroids of Areas and Lines)

أن حسابات المراكز(Centroids) ، تقع ضمن ثلاثة أنواع معلومـــة ، وتعتمد على شكل الأجسام فيما إذا كان مساحة ، أو خطاً أو حجماً .

1.المساحــات (Areas) :

عندما يكون الجسم المراد إيجاد مركز ثقله صفيحة مستوية متجانسة فوزنه (W) هو عبارة عن حاصل ضرب كثافته الوزنية في حجمه :

$$W = \rho.g.t.A$$

حيث أن :

ρ : الكثافة الوزنية لمادة الصفيحة (وزن وحدة الحجوم) .

g : تسارع الجاذبية الأرضية ($g = 9{,}81 m/s^2$) .

t : سمك الصفيحة .

A : مساحة الصفيحة .

وكما أشرنا سابقاً فإنه لإيجاد مركز مساحة هذا الجســم (الصفيحة) نقــوم بتقسيم هذا الجسم إلى عناصر صغيرة dA ، حيث يكون وزن كل عنصر من هذه العناصر الصغيرة يساوي حاصل ضرب حجم ذلك العنصر فـــي الكثافـــة الوزنية لمادة الصفيحة ρ :

$$dW = \rho.gt.dA$$

حيث أن :

dA : مساحة عنصر صغير من عناصر الصفيحة .

وبأخذ العزم الاول للمساحة أو العزم الإستاتيكي حول المحور x والمحور y نجد أن :

$$\sum M_x = \bar{y}.W = \sum y.W$$

$$\sum M_y = \bar{x}.W = \sum x.W$$

وبالتعويض عن W نحصل على أن :

$$\rho.gt.A.\bar{x} = \rho.gt.dA_1 + \rho.gt.dA_2 .... = \rho.gt.\sum A_x$$

وباختصار الكميات الثابتة المشتركة ρ, g, t من الطرفين نحصل على :

$$\bar{x}A = x_1 dA_1 + x_2 dA_2 .... + x_n dA_n$$

وكذلك إذا عوضنا في معادلة العزم حول المحور x نحصل على :

$$\bar{y}A = y_1 dA_1 + y_2 dA_2 .... + y_n dA_n$$

$\bar{y}A , \bar{x}A$: تعني عزم المساحة بالنسبة إلى المحورين x , y على التوالي .

وكما لاحظنا أن عزم المساحة يساوي مجموع عزوم المساحات الصغيرة التي تنقسم إليها المساحة الكلية (A) ، وعليه يمكننا تعريف العزم الإستاتيكي للمساحة (Statical Moment of Araes) ، أو ما يسمى العزم الأول للمساحة الذي هو عبارة عن " حاصل ضرب المساحة في المسافة العمودية من مركز المساحة إلى محور العزم " ويرمز له عادة بالرمز (S) .

وإذا تم زيادة عدد العناصر المكونة للصفيحة وتطبيق مفهوم النهاية فإننا سوف نحصل على :

$$\bar{x}A = \int x.dA \Rightarrow \bar{x} = \int \frac{x.dA}{A} = \frac{S_y}{A} \quad ....(4-4)$$

$$\bar{y}A = \int y.dA \Rightarrow \bar{y} = \int \frac{y.dA}{A} = \frac{S_x}{A} \quad ....(5-4)$$

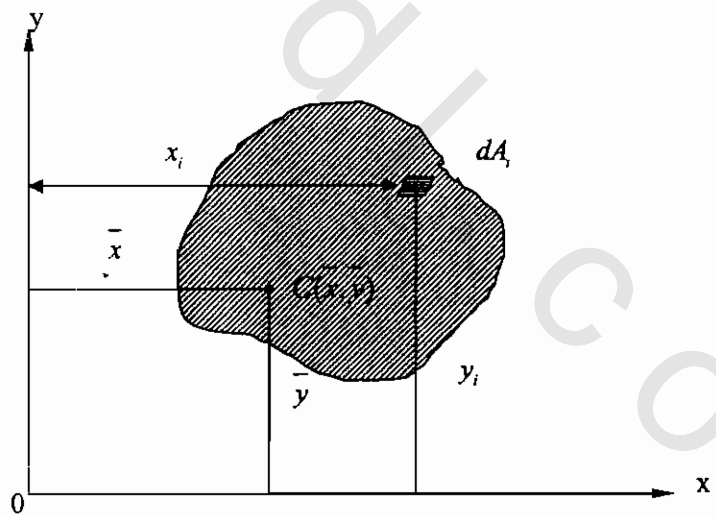
حيث أن :

S_x – العزم الأول للمساحة حول المحور x .

S_y – العزم الأول للمساحة حول المحور y .

وهكذا بواسطة المعادلتين (4-4) ، (5-4) نستطيع الحصول على إحداثيات مركز المساحة أو الثقل للصفيحة متجانسة حيث تعرف $C(\bar{x}, \bar{y})$ بمركز المساحة للصفيحة كما هو مبين في الشكل (3-4) .

dA_i – عنصر من عناصر الصفيحة حيث i تتغير من 1،2........،n .



الشكل (3-4)

مركــز المساحــة

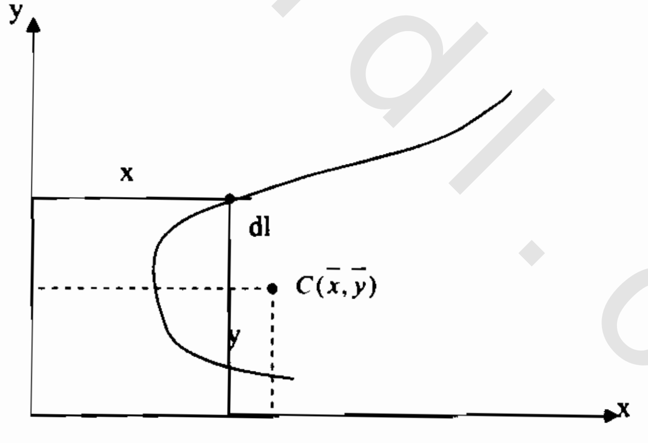
بالنسبة للخطوط يمكن اعتبارها محاور لأسلاك متجانسة وعليه فإن مقـدار قوة الجـذب الصـغيرة للعنصـر (dw) أي الـوزن ممكـن كتابتـه علـى النحو التالي :

$$dw = \rho.gadl$$

وبالتعويض عن (dw) في المعادلتين (4-4) ، (5-4) والاختصار يمكننـا الحصول على إحداثيات مركز الخط $C(\bar{x},\bar{y})$ كما هو مبين في الشكـل (4-4) حيث أن :

$$\bar{x}L = \int x.dl \Rightarrow \bar{x} = \int \frac{x.dl}{L} \quad \text{.......... ....} (6-4)$$

$$\bar{y}L = \int y.dl \Rightarrow \bar{y} = \int \frac{y.dl}{L} \quad \text{......... ....}(7-4)$$



الشكـل (4-4)

مراكـز الخـط

3.4 العــزم الأول للمساحــة (First Moment of Araes)

أن العـــزم الاول للمســـاحة أو مــــا يســـمى العـــزم الإســـتاتيكي (Statical Moment of Araes) ، كما أشرنا سابقاً من الخـــواص الهامـــة للمساحات المستوية وله استخدامات عديدة ومختلفة ، وبذات في علم مقاومـــة المواد لحساب الأجهادات ، ويكون هذا العزم حول خط في مستوى المســاحة ويرمز له كما أشرنا أيضا سابقاً بالرمز (S) ويكون مذيلاً بحرف أو حـــرفين (Subscript) تبين الخط والمحور الذي يؤخذ حوله هذا العزم . ويحدد العزم الإستاتيكي حول المحور (x-x) بواسطة التكامل حيث :

$$S_x = \int y.dA \qquad (8-4)$$

والعزم الإستاتيكي حول المحور (y-y) هو :

$$S_y = \int x.dA \qquad (9-4)$$

يمكننا ألان أن نعرف العزم الأول للمساحة على أنه " حاصل ضـــرب كـل مساحة متناهية الصغر (dA) في بعدها العمودي عن المحور الذي يؤخذ حوله العزم . وتكون وحدة هذا العزم Cm^2 أو m^2. ومن الممكن أن تكون إشارته موجبه أو سالبه كما يجوز أن تنعدم قيمته وتساوي الصفر .

بعد تعريف العزم الاول للمساحة يمكننا من خلال هذا التعريف تعريف مركز المساحة (Centroid) بأنه " نقطة في مستوى المساحة يكـــون العـــزم الاستاتيكي للمساحة حول أي خط يمر بها في المستوى مستوياً للصفر أي أن:

$$S_x = S_y = 0$$

ويجب الإشارة إلى أن التكامل في الصيغتين (4-8) ، (4-9) يمكن اعتباره كمجموع العزوم القوى dA بالنسبة إلى المحاور x , y إذا تطابقت المساحة مع القوة وكما هو معروف من مادة الميكانيكا النظرية ، يمكننا كتابة معادلة عزم المحصلة كما يلي :

$$S_x = \int y.dA = A\,y_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10-4)$$

حيث أن :

A : المساحة الكلية للشكل أي بمعنى آخر المحصلة .

y_c : المسافة بين مركز الشكل والمحور x .

ومن الصيغة (4-10) نستطيع تحديد الأحداثي العمودي لمركز الثقل أو المساحة حيث :

$$y_c = \frac{S_x}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11-4)$$

وكذلك فأن العزم الإستاتيكي بالنسبة إلى محور y يساوي :

$$S_y = \int x.dA = A\,x_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12-4)$$

ومن هنا نجد أن الأحداثي الأفقي هو :

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13-4)$$

ومن هذه العلاقات نستنتج أنه إذا كان كل من المحاور x , y يمر بمركز مساحة الشكل فأن العزم الأول للمساحة أي العزم الإستاتيكي بالنسبة إلى هذه المحاور يساوي صفراً وتسمى عادةً هذه المحاور بالمحاور المركزية .

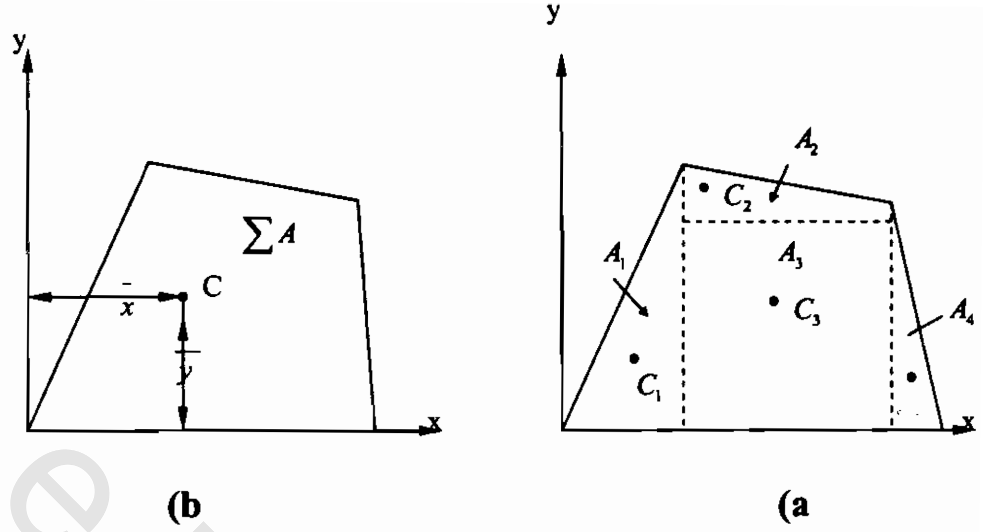
4.2.4 مراكز المساحات المركبة (Centroids of composite Figures)

في كثير من المجالات الهندسية يوجد عدد كبير من الإشكال والمساحات المركبة ، والتي تتألف من تراكيب من الإشكال الهندسية المعروفة والشائعة مثل المربعات ، المستطيلات ، المثلثات ، الدوائر أو أية أشكال أخرى تكون مراكزها معروفة ، وفي هذة الحالة يمكن الحصول على العزم الإستاتيكي للشكل ككل ، من خلال جمع العزوم الاستاتيكية لهذة الإشكال وهذا ما يستنتج من خواص التكامل المحدود مباشرةً .

كما أن هناك إشكالا تتألف من مقاطع إنشائية تعطى مراكزها في جداول خاصة في الكتب الدليله عندما يكون بالامكان تقسيم الشكل إلى عدد من الأجزاء المعلومة المقدار . عند ذلك يمكن الحصول على إحداثيات المركز للشكل ككل باستخدام خواص هذة الأجزاء .

أن كان لدينا مساحة مركبة معينة فإنه بألامكان تقسيمها إلى أجزاء ، وكل جزء من هذه الأجزاء معلوم المساحة ، فضلاً عن أن مركز الجزء معلوم أيضا. عندئذٍ فإن العزم الأول للمساحة الكلية يساوي مجموع عزوم مساحات الأجزاء . ويمكن تطبيق العلاقات (4-11) , (4-13) لتعيين إحداثيات مركز المساحة الكلية المركبة .

لتوضيح ذلك نقوم بدراسة المساحة المركبة الموضحة في الشكل (a.5-4) ، وذلك لإيجاد مركزها $C = (\bar{x}, \bar{y})$. نقوم أولا بتقسيمها إلى عدة إشكال كما هو مبين في الشكل (b.5-4) ، حيث تصبح المساحة المركبة مجموعة من الأجزاء الشائعة المألوفة مثل المثلث والمربع والمستطيل ، حيث نلاحظ بعد تقسيم المساحة المركبة أننا حصلنا على ثلاثة مثلثات ومستطيل .



الشكــل (4-5)

مركز المساحة للأشكال المركبة

الآن يمكننا إيجاد إحداثيات مركز المساحة الكليـــة $C(\bar{x},\bar{y})$ باســتخدام العزم الأول للمساحة . فمثلاً لإيجاد الأحداثي $\bar{x}$ يجب أن نقوم بإيجاد عــزم المساحة الأول حول المحور y ، أما لإيجاد الأحداثي العمودي $\bar{y}$ فانه يجــب أن نقوم بإيجاد عزم المساحة عن طريق إيجاد عــزم المســاحة الأول حــول المحور x حيث :

$$S_x = \bar{y}(A_1 + A_2 + \dots\dots\dots A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \bar{y}_n A_n$$

$$S_y = \bar{x}(A_1 + A_2 + \dots\dots\dots A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \bar{x}_n A_n$$

أو :

$$S_x = \bar{y}\sum A = \sum \bar{y}A \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (14-4)$$

$$S_y = \bar{x}\sum A = \sum \bar{x}A \quad \text{.......................................} (15-4)$$

ومن هذة العلاقات يمكن كتابة إحداثيات مركز المساحة المركبة الكلية كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} \\ \bar{y} &= \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} \end{aligned}\right\} \quad \text{.......................................} (16-4)$$

وبطريقة مماثلة يمكن الحصول على إحداثيات المركز أو مركـز الثقـل للخطوط والإحجام والأسلاك المركبة حيـث تسـتبدل المسـاحة A بالكتـل ($m_1, m_2 \text{........} m_n$) وبـالأطوال ($L_1, L_2 \text{..........} L_n$) ، والحجـوم ($v_1, v_2 \text{............} v_n$) .

أن هذه الطريقة في حساب إحداثيات المركز أو مركز الثقل تجنبنا اللجوء إلى التكامل ، على شرط إن تكون المسـاحة أو الكتلـة أو الحجـم معلومـة الأجزاء ، وكذلك المركز لكل جزء في الشكل أو الجسم . وعند استعمال هـذه الطريقة يكون من الأفضل عاده توضيح الأجزاء التي يتكـون منهـا الشـكل برسومات تخطيطية . وإذا أزيل جزء أو بعض تلك الأجزاء مـن المسـاحة الكلية ، فإن هذه الأجزاء المزالة تطرح . ويكون العزم المحصـل حـول أي محور أو مستوى مساوياً للمجموع الجبري لعزوم هذه الأجزاء .

لكن وفي الحياة العملية أحيانا لا يمكن تحديد مساحة ما أو حجم بدلالـة إشـكال هندسـية بسـيطة أو بإشـكال يمكـن تمثيلهـا رياضـياً ولذلك وفي مثل هذه الحالات يكـون مـن الـلازم الرجـوع إلـى الطـرق التقريبية (method of opproximation) .

أخيراً يجب الأخذ بعين الاعتبار الإشارات ، أي عندما يقطع محور العزم الجسم أو المساحة ويقع مركز جزء من الأجزاء على جهة من المحور ومركز جزء أخر على الجهة الأخرى من المحور . عند ذلك من الضروري أعطاء إشارات مختلفة للذراعين عند كتابة معادلة العزوم لتعيين مركز الجسم أو المساحة أو الخط . قد تظهر أشارة البعد للمركز الجسم سالبة أو موجبة . وهذا يعني أن المركز يقع في هذه الجهة أو تلك من المحور وحسب الفرضية . كما أن أشارة الكمية حجم أو مساحة أو طول قد تكون موجبة أو سالبة ، فيما إذا كانت تلك الكمية مضافة إلى أو مطروحة من المجموع . جمع العزوم للأجزاء هي عملية جمع جبري . وعزم الجزء هو حاصل ضرب كميتين احدهما الذراع ، لذلك الناتج قد يكون موجباً أو سالباً حسب إشارتي هاتين الكميتين .

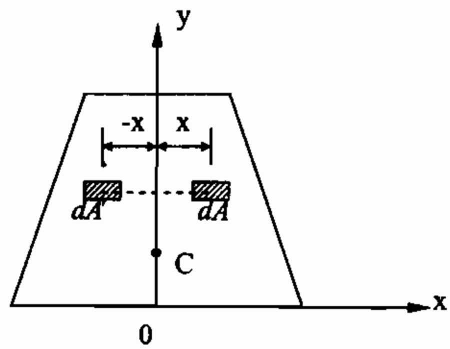
وتعتبر خاصية التماثل (Symmetry) ذو أهمية كبيرة في تسهيل عملية تعيين وإيجاد مراكز المساحات والثقل للإشكال المختلفة . أي إذا كان لشكل ما محور تماثل فان هذا المحور يمر دائماً بمركز المساحة ، وعندئذ يكون العزم الإستاتيكي لهذا الشكل بالنسبة إلى محور التماثل مساوياً للصفر ، ويكون المركز واقعاً على ذلك المحور .

لتوضيح ذلك نقوم بدراسة المساحة A الموضحة في الشكل (6-4) والمتماثلة بالنسبة للمحور (y) حيث نلاحظ إن لكل عنصر من المساحة مثل (dA) ذو إحداثيات أفقية (x) يقترن مع عنصر في المساحة (dA) وله إحداثيات أفقية (-x) ، لذلك فإن العزم الأول للمساحة حول المحور y يكون مساويا للصفر ($S_y = 0$) واعتماد على ذلك نجد أن الأحداثي الأفقي $\bar{x}$ لمركز الثقل لهذه المساحة أيضا يساوي الصفر حسب العلاقة (12-4) حيث :

$$S_y = \int x . dA = 0$$

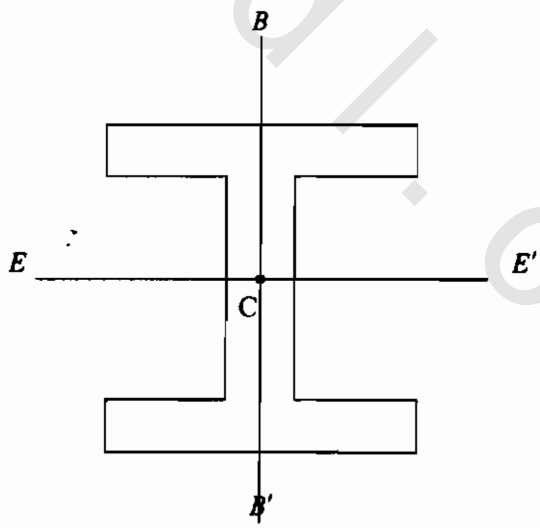
$$\bar{x} A = \int x . dA = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$

لذلك إذا كانت مساحة ما مثل (A) أو خط مثل (L) يمتلكان محور تناظر (تماثل)، فإن مركز الثقل (C) يقع على ذلك المحور .



الشكـل (4-6)

كذلك يمكن ملاحظة انه إذا كانت لدينا مساحة أو خط يمتلكان محورين للتناظر فإن مركز الثقل لهذه المساحة أو لهذا الخط يجب إن تقع على نقطة تقاطع محوري التماثل كما هو موضح على الشكل (4-7) ، وهذه الميزة تمكننا من حساب مراكز المساحات المختلفة للأشكال الشائعة مثل المربعات ، والدوائر ، والمستطيلات ، والمثلثات متساوية الساقين ، أو أشكال متماثلة اخرى بالإضافة إلى مراكز الخطوط مثل محيط دائرة وغيرها .



الشكل (4-7)

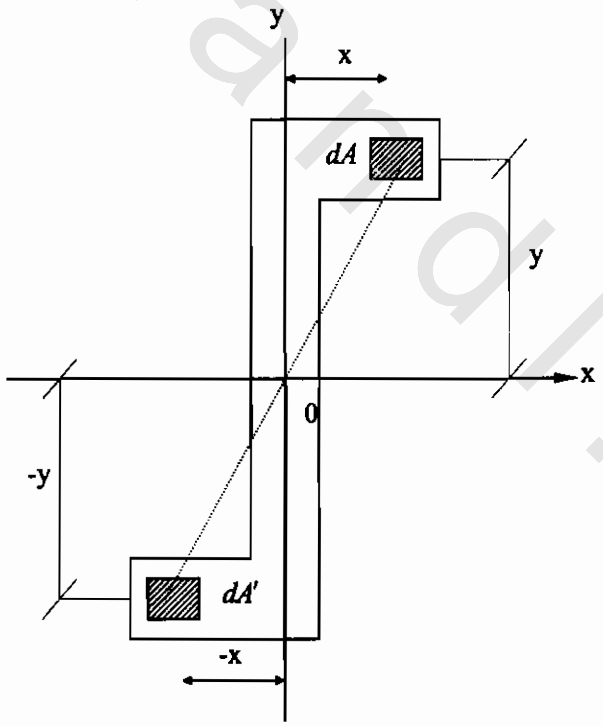
ويمكن القول أن المساحة A متماثلة بالنسبة للمركز (0) إذا كـــان كـــل عنصر من عناصر هذه المساحة (dA) ذو إحداثيات x,y يقترن بعنصر مـــن المساحة (dA') ذو إحداثيات x,-y– كما هو يوضح في الشكل (4-8) ، وعليه ينتج أن العزم الأول للمساحة حول المحور (x) وحول المحور (y) مساويان للعنصر :

$$S_x = \int y.dA = 0 \quad , \quad S_y = \int x.dA = 0$$

ومنه :

$$\bar{x} = 0 \quad , \quad \bar{y} = 0$$

أي إحداثيات مركز المساحة $C(\bar{x},\bar{y})$ تساوي العنصر، وهذا يعني بـــأن مركز المساحة يكون منطبقاً على مركز التماثل (0)

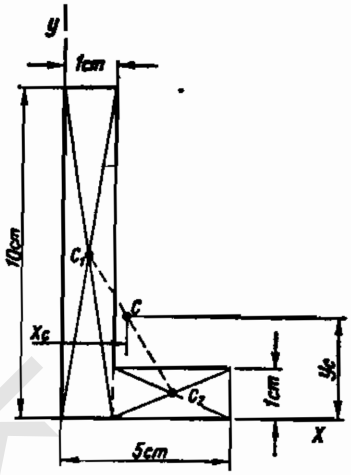


الشكـــل (4-8)

كما يمكن إثبات ذلك بالنسبة لخط متماثل بالنسبة لمركز مثل (0) بـــنفس الطريقة .

مثـــال (4-1)

الشكل (4-9) يبين مقطع هندسي على شكل حرف L . المطلوب تحديـــد إحداثيات مركز الثقل لهذا المقطع .



الشكـــل (4-9)

الحـــل :

نقوم أولاً بتقسيم المقطع إلى مستطيلين ، وبعد ذلك نمد محـــاور أضـــافية x , y ، وبعد ذلك وباستخدام العلاقتين (4-11) ، (4-13) يمكننا الحصـــول على إحداثيات مركز الثقل $C(\bar{x},\bar{y})$ للمقطع ككـــل . فالإيجـــاد الأحـــداثي الأفقي $(\bar{x})$ نقوم أولاً بإيجاد العزم الإستاتيكي S_y حيث :

$$\begin{aligned} S_y &= A_1X_1 + A_2X_2 \\ &= 10\times1\times0.5 + 4\times1\times3 \\ &= 17\ cm^3 \end{aligned}$$

أما المساحة A فتساوي المساحة الكلية للمقطع :

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= 10\times1 + 4\times1 \\ &= 14\ cm^2 \end{aligned}$$

وباستخدام العلاقة (4-13) نجد الأحداثي الأفقي هو :

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A}$$

$$= \frac{17\ cm^3}{14\ cm^2}$$

$$= 1.2\ cm$$

وبنفس الطريقة يمكننا الحصول على الأحداثي العمودي لمركز الثقـل $(\bar{y})$ حيث نجد العزم الإستاتيكي S_x حيث :

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$= 10 \times 1 \times 5 + 4 \times 1 \times 0.5$$

$$= 52\, cm^3$$

وباستخدام العلاقة (4-11) نستطيع تحديد الأحداثي العمـودي لمركـز ثقـل المقطع حيث :

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A}$$

$$= \frac{52\ cm^3}{14\ cm^2}$$

$$= 3.7\ cm$$

وهكذا وبواسطة هذين الأحداثيين حصلنا علـى النقطـة $C(1.2\ ,\ 3.7)$ والتي تمثل إحداثيات مركز ثقل المقطع .

4.4 عــــزم القصـــــور الذاتـــــي (Moment of Inertia)

يعتبر عزم القصور الذاتي(Moment of Inertia) أو ما يســـمى أحيانـــا بالعزم الثاني للمساحة – (Second Moment of Area) لمساحة مقطع ما خاصية هندسية هامة ، حيث تستخدم هذه الخاصية في التصـــاميم الإنشـــائية لذلك فهي تفيد بصورة خاصة المهندسين المدنيين ، في حين نجــد أن عـــزم القصور الذاتي للكتل يستفاد منه المهندسين الميكانيكيين والكهربائيين العاملين في مجال تصاميم الآلات والمكائن وغيرها ، بالإضافة إلى أن هناك عدد كبير من القوانين والمعادلات الهندسية الهامة التي لها علاقة بعلم مقاومـــة المـــواد التي تتطلب ايجاد قيم تكامل العزم الثاني لمساحات أو كتل ما حـــول محـــور معين .

ويكون هذا العزم حول خط ما في مستوى المساحة ويرمز له بالرمز (I) ويكون عادة ًمذيلاً بحرف واحد (I_x) أو حرف مكرر (I_{xx}) وكلاهما يرمـــز لعزم القصور الذاتي حول المحور (x-x) وهو كما اشرنا الخاصية الهندسية للمقطع التي تساوي عددياً التكامل التالي :

$$I_x = \int y^2\,dA \qquad (17-4)$$

حيث أن :

y – هي المسافة بين مساحة العنصر dA وبين المحور x .

وبالمثل نجد أن عزم القصور الذاتي حول المحور y :

$$I_y = \int x^2\,dA \qquad (18-4)$$

حيث أن :

X : هي المسافة بين مساحة العنصر dA وبين المحور y كما هو مبين في الشكل (4-10) .

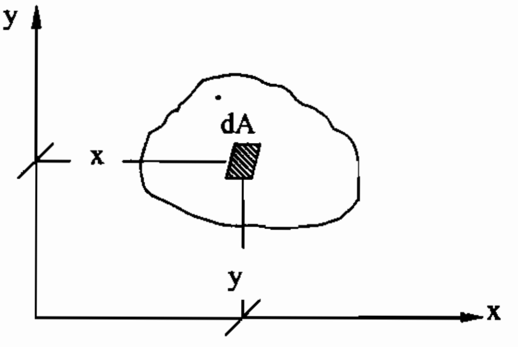
ومن العلاقات السابقة نلاحظ أننا نحصل على عزم القصور الذاتي بضرب كل مساحة متناهية في الصغر (dA) في مربع بعدها عن المحور الذي يأخذ حوله العزم .

وكما أشرنا سابقاً يسمى هذا المقدار أحيانا العزم الثاني للمساحة ، وتكون وحداته بالسنتمترات أو الأمتار من الدرجة الرابعة (Cm^4,m^4) وقيمته دائماً موجبة ولا تساوي صفراً . لو أمعنا النظر في المصطلح الرياضي لعزم القصور الذاتي لوجدناه لا يعني شيئاً لوحده من الناحية الفيزيائية فهو إذا مجرد تعبير رياضي يرمز له بالحرف (I) . أما التعريف الرياضي لعزم القصور الذاتي لمساحة معينة يعني أنه لدينا مساحة معينة مثل (A) قسمت إلى أجزاء وعناصر صغيرة مثل (dA) ، حيث أن كل عنصر من هذه العناصر ضرب في مربع بعدها عن المحور المراد أخذ العزم حوله .

أن تعبير " العزم الثاني للمساحة" يستخدم أحيانا بدلاً عن " عزم القصور الذاتي للمساحة " وذلك لأن عملية ضرب المساحات التفاضلية في مربع بعدها عن المحور الذي هو عزم القصور الذاتي لها ، وما هي إلا عملية ضرب عزم المساحة التفاضلية في ذراعها مرة أخرى كما هو موضح في الشكل (4-10) .

في حالة المساحات المركبة تعد أشارة المساحات موجبة إذا كانت المساحة إضافة للمساحة الصافية للشكل المركب وتعد المساحة سالبة الإشارة إذا كانت تقلل من المساحة الصافية للشكل المركب، وبناءِ على ذلك يطرح أو يضاف

عزم القصور الذاتي النهائي لصافي المساحة ، ولكن لو أخذنا أيـــة مســـاحة بشكل منفرد فإن عزم القصور الذاتي لها يكون موجباً دائماً لان المساحة بحد ذاتها موجبة وليست سالبة .



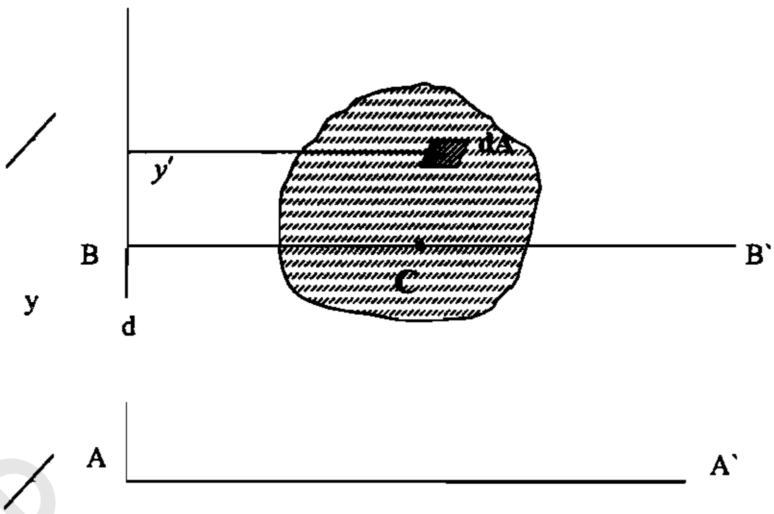
الشكـــل (4-10)

5.4 نظرية المحاور المتوازية (Parallel – Axis Theorem)

في كثيرة من الأحيان يلزم في المجالات الهندسية المختلفـــة نقـــل عـــزم القصور الذاتي من محور إلى محور أخر يوازيه وذلك كمـــا هـــو معـــروف يتطلب أجراء تكامل أخر . هناك أسلوب وصيغة لنقل عزوم القصور الـــذاتي دون الحاجة إلى أجراء تكامل أخر وذلك باستخدام ما يعرف " نظرية المحاور المتوازية ".

لتوضيح ذلك لنأخذ مساحة ما مثل A المبينة في الشكل (4-11) والتـــي يمر المحور BB' من خلال مركزها C ، وقد اشرنا سابقاً بأن المحور الذي يمر بمركز المساحة C يسمى محوراً مركزياً ، وعزم القصور الذاتي حـــول هذا المحور هو :

$$I = \int y^2 . dA$$



الشكل (4-11)

أما عزم القصور لنفس المساحة بالنسبة لمحور أخر جديد مثل (AA') يمكن الحصول عليه بواسطة المعادلة التالية:

$$I = \int y^2 . d_y = \int (y' + d)^2 . dA$$

حيث أن :

$$y = y' + d$$

d : تمثل المسافة العمودية بين المحورين AA' ، BB'.

y' : هي المسافة بين العنصر dA والمحور الذي يمر في مركز المساحة C وهو المحور BB'. وعليه نحصل على :

$$I = \int y'^2 . dA + 2d \int y' . dA + d^2 \int dA$$

حيث يكون التكامل الأول :

$$\int y'^2 .dA$$

هو عزم القصور الذاتي حول المحور الذي يمر بمركز المساحة المحور المركزي BB'. أما الحد الثاني على يمين المعادلة فيمثل :

$$2d\int y'.dA$$

العزم الأول للمساحة (S) حول المحور BB' وتعتبر قيمته هنا مساوية للصفر لان العزم الأول للمساحة كما أشرنا سابقاً هو :

$$S = \int y.dA = y.A$$

البعد y هنا يمثل البعد بين المركز C والمحور BB' لذلك فإن $y' = 0$ لان المحور BB' يمر بالمركز C ، أما الحد الأخير التكامل الثالث $\int dA$ فهو عبارة عن المساحة الكلية A وهكذا نحصل من المعادلة على :

$$I_{AA'} = I_{BB'} + Ad^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19-4)$$

أن المعادلة (4-19) توضح نظرية المحاور المتوازية أو ما يسمى بصيغة النقل لعزم القصور الذاتي (Parallel-Axis Theorem) ، والتي تنص على أن " عزم القصور الذاتي لمساحة ما لأي محور في مستوى المساحة يكون مساوياً لعزم القصور الذاتي للمساحة بالنسبة للمحور الذي يمر بالمركز C لهذه المساحة وموازياً لذلك المحور مضافاً إليه الحد المحول ، والذي يتكون من حاصل ضرب المساحة في مربع المسافة بين المحورين ".

وهنا يجب ملاحظة نقطتين هامتين:

1. يجب أن يمر أحد المحاور خلال مركز المساحة .
2. أن المحاور التي يحدث بينها نقل يجب أن تكون متوازية .

باستخدام نظرية المحاور المتوازية يمكننا ايجاد عزوم القصور الذاتي للمساحات والإشكال المركبة حول أي محور.

6.4 عزم القصور الذاتي للمساحات المركبة
(Moment of Inertia for Composite Areas)

المساحات المركبة كما أشرنا سابقاً كثيراً ما تقابلنا في المجالات الهندسية المختلفة ، حيث أنها تتكون و تتألف من مجموعة أشكال هندسية معروفة وشائعة مثل الدوائر والمربعات والمستطيلات والمثلثات أو أية أشكال أخرى يمكن الحصول على عزم القصور الذاتي لها بسهولة .

إذا يمكن تقسيم أي مساحة مركبة مثل A إلى أجزاء هندسية منتظمة مستطيلات ، دوائر ، مثلثات ، مربعات وغيرها ، حيث يكون عزم القصور الذاتي لهذه الأجزاء معلوم ، وبعد ذلك يمكن ايجاد عزم القصور الذاتي للمساحة المركبة المعطاة ، حيث يكون عزم القصور الذاتي للمساحة المركبة مساوياً لمجموع عزوم القصور الذاتي لكل جزء من هذه الأجزاء على حدة . ويتم عادة إيجاد عزم القصور الذاتي لكل جزء من الأجزاء بالنسبة لنفس المحور قبل جمعها .

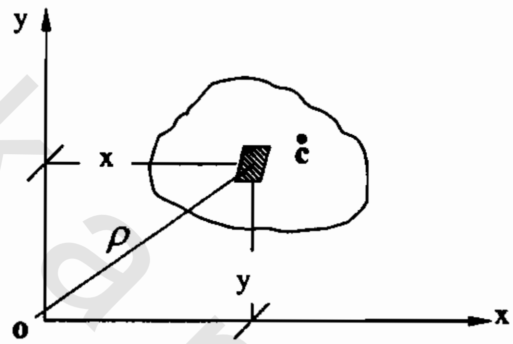
عندما تكون المساحة أو المقطع متكونا من عدد كبير من الأجزاء المعروفة، فمن الأفضل عاده أن تجدول النتائج بدلالة المساحة A وعزم القصور الذاتي حول محور يمر بالمركز . وتوجد في كثير من المراجع وخاصة في كتب مراجع المكيانيكا الهندسية جداول تبين عزوم القصور الذاتي ، ومراكز الإشكال الهندسية الشائعة والمعروفة والتي تساعد الطالب في حل المسائل المتعلقة بإيجاد عزم القصور الذاتي للمساحات والأشكال المركبة المختلفة .

7.4 عزم القصور الذاتي القطبي (Polar Second Moment of Area)

أن عزم القصور الذاتي القطبي لمساحة المقطع هو الخاصية الهندسية التي تحدد بالتكامل :

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20-4)$$

حيث ρ : المسافة بين المساحة dA وبين القطب الذي يحسب عزم القصور الذاتي بالنسبة له الشكل (4-12) .



الشكل (4-12)

أن عزم القصور الذاتي المحورية والقطبية هي مقادير موجبة دائماً ، وفي الحقيقة فأن عزم القصور الذاتي المناظر بغض النظر عن أشارة إحداثيات المساحة الاختيارية يكون موجباً حيث يدخل مربع هذا الأحداثي .

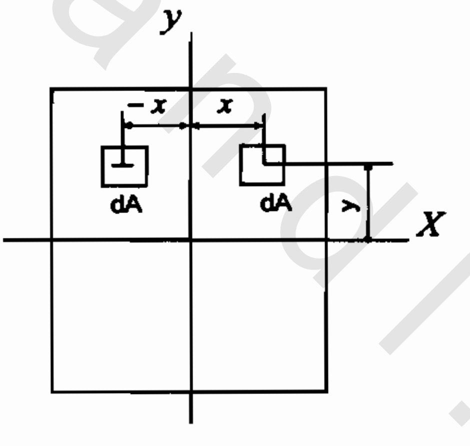
أن عزم القصور الذاتي الطارد المركزي أو ما يسمى بالعزم المشترك للقصور أو ناتج القصور الذاتي (Product of Inertia) ، لمساحة المقطع هو الخاصية الهندسية بالتكامل :

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21-4)$$

حيث x و y : المسافتان بين المساحة dA وبين المحورين x و y .

وقد اشرنا سابقاً إن وحدة قياس كافة عزوم القصور الذاتي هي وحدة الطول مرفوعة إلى الدرجة الرابعة (عادة cm^4) ، أن عزم القصور الذاتي الطارد المركزي قد يكون موجباً أو سالباً وفي حالات خاصة قد يساوي صفراً .

وإذا كان المحوران المتعامدان على بعضهما x و y أو أحداهما بمثابة محور تماثل للشكل فان عزم القصور الذاتي الطارد المركزي بالنسبة إلى مثل هذه المحاور يساوي صفراً . وبالحقيقة يمكن اختيار جزئين من مساحة الشكل المتماثل دائماً كما يبين الشكل (4-12) ، بحيث يكون لهما إحداثي رأسي واحد y واحداثيان أفقيان متساويان في المقدار ومتضادان في الإشارة وبجمع حاصل الضرب $xydA$ لمثل هذه الأجزاء أي بحساب التكامل نحصل في النتيجة على الصفر .



الشكل (4-13)

ويمكن البرهنة بسهولة على أن عزم القصور الذاتي القطبي حول أية نقطة كانت يساوي مجموع عزوم القصور الذاتي المحورية حول محورين متعامدين على بعضهما يمران بهذه النقطة ، وفي الواقع يتضح من الشكل (4-13) أن :

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

وبتعويض هذه القيمة في المعادلة (4-20) فأننا نحصل على :

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

أذن :

$$I_p = I_x + I_y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22-4)$$

8.4 عزوم القصور الذاتي للمقاطع الهندسية البسيطة

اشرنا في البنود السابقة إلى أنه عند حساب عزم القصور الذاتي لشكل أو مساحة مركبة ، يجب تقسيم هذا الشكل أو المساحة إلى عدة أشكال بسيطة شائعة ومعروفة ، وبحساب عزوم القصور الذاتي لهذة الإشكال وجمعها نحصل على العزم الكلي المطلوب . أن عزم القصور الذاتي للشكل المركب يساوي مجموع عزوم القصور الذاتي لأجزائه المنفردة :

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} + \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23-4)$$

وهذا يستنتج مباشرة من خصائص التكامل المحدد :

$$\int_F y^2 dA = \int_{F_1} y^2 dA + \int_{F_2} y^2 dA + \ldots\ldots\ldots$$

حيث :

$$A = A_1 + A_2 + \ldots\ldots$$

أن النظرية المذكورة تنطبق أيضاً بالنسبة لعزم القصور الذاتي الطارد المركزي ، أن عزوم القصور الذاتي للمقاطع المدلفنة مقطع شكل I ، مقطع على شكل مجرى ب ، الزوايا ، يمكن إيجادها في جداول خاصة .

وسوف نوضح في هذا البند كيفية حساب عزوم القصـــور الــذاتي لــبعض الإشكال والمقاطع الهندسية المعروفة ومنها :

1- المستطيل :

يحسب عزم القصور الذاتي للمقطع بالنسبة للمحور x_0 وهو المحور الذي يمر بمركز الثقل الشكل (a. 14-4) ، ثم نقوم بأخذ شريحة رقيقة dA كجــزء من المساحة A ونجد مساحتها حيث أن :

$$dA = bdy$$

وبالتعويض عن dA ، يمكننا الحصول على عزم القصور الذاتي حيث :

$$I_{x_0} = b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 . dy = \frac{bh^3}{12}$$

وهكذا فأن عزم القصور الذاتي للمستطيل يساوي :

$$I_{x_0} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{..} (24-4)$$

ومن البديهي أن نحصل على عزم القصور الذاتي حول المحور y_0 :

$$I_{y_0} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{.......... ....} (25-4)$$

2- الدائرة :

نحدد أولاً عزم القصور الذاتي القطبي بالنسبة لمركز الدائرة :

$$I_p = \int_F \rho^2 dA$$

وكجزء من المساحة dA نأخذ مساحة حلقة رقيقة للغاية ذات سمك d_ρ كما يبين الشكل (b. 14-4) :

$$dA = 2\pi\rho \, d\rho$$

ومن هنا وبالتعويض نحصل على العزم القصور القطبي :

$$I_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}$$

ومنه :

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1 d^4 \quad \text{.....................................} (26-4)$$

ومن السهل الآن إيجاد I_{x_0} للدائرة حسب العلاقة (22-4) حيث لدينا :

$$I_r = 2I_{x_0} = 2I_{y_0}$$

ومن هنا نجد أن :

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0.05 d^4 \quad \text{.....................} (27-4)$$

3- المثلث

نحدد عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور x_1 الموازي للقاعدة والمار برأس المثلث باستخدام العلاقة التالية :

$$I_{x_1} = \int_A y^2 \, dA$$

وكجزء من المساحة dA نأخذ مساحة شبه منحرف رقيق للغاية ABDE كما يبين الشكل (d . 14-4) يمكن اعتبار مساحته مساوية لمساحة المستطيل :

$$dA = b_y dy$$

حيث b_y : طول المستطيل .

ومن تشابه المثلثات من السهل علينا الحصول على :

$$b_y = \frac{y}{h} b$$

ومنه نجد :

$$\mathrm{I}_{x_1} = \frac{b}{h}\int_0^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4} \quad \text{...}(28-4)$$

ونستطيع أن نحدد عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور المركـزي باسـتعمال العلاقة (4−19) حسب نظرية المحاور المتوازية حيث :

$$\mathrm{I}_{x_0} = \mathrm{I}_{x_1} - Ad^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2}\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36} \quad \text{.........................}(29-4)$$

ونحدد عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور المار بالقاعدة حيث :

$$\mathrm{I}_{x_2} = \mathrm{I}_{x_0} + Ad^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{12} \quad \text{...................}(30-4)$$

4- الحلقة

بالنسبة للحلقة المبينة في الشكل (c. 14-4) فأن عـزم القصـور الـذاتي المحوزي في هذه الحالة يساوي الفرق بين عزمي القصور الذاتي للـدائرتين الداخلية والخارجية .

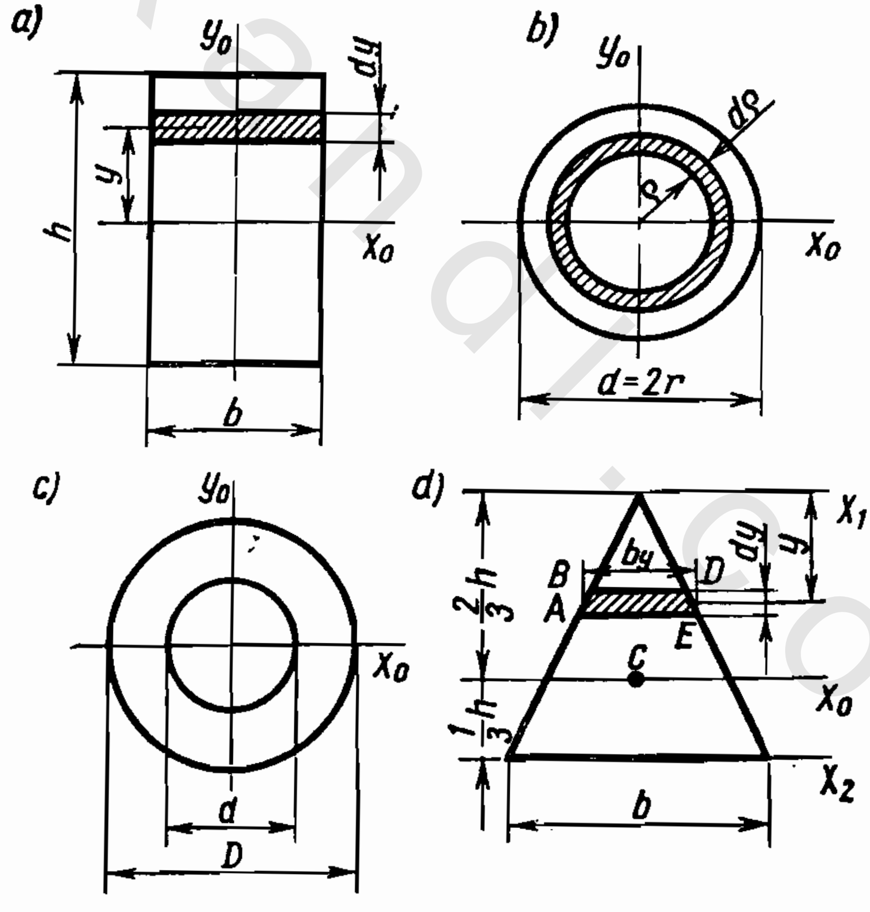
$$I_{x_0}=I_{y_0}=\frac{\pi D^4}{64}=\frac{\pi d^4}{64}=0.05D^4\left(1-c^4\right) \quad ....(31-4)$$

حيث :

$$c=\frac{d}{D}$$

وبالمثل فأن عزم القصور الذاتي القطبي يساوي :

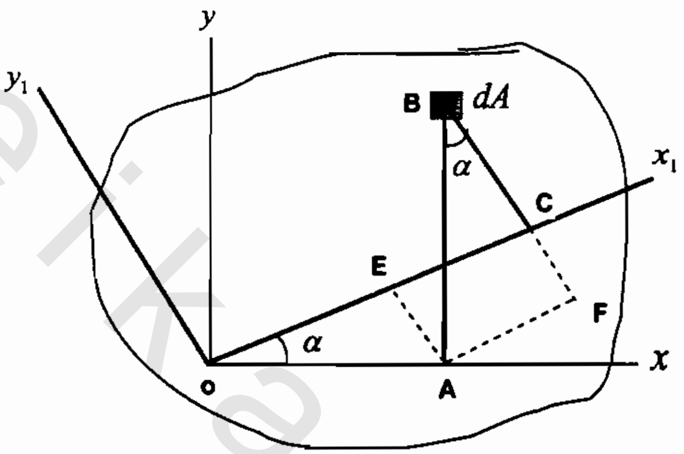
$$I_p=\frac{\pi D^4}{32}=\frac{\pi d^4}{32}=0.1D^4\left(1-c^4\right) \quad ....(32-4)$$



الشكــل (4-14)

9.4 عزوم القصور الذاتي عند دوران المحاور

أن عزوم القصور الذاتي تتغير عند دوران المحاور ، ولدراسة هذا التغير نقوم بإيجاد العلاقة بين عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين x , y وبـــين عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين x_1 , y_1 ، والتي دارت بزاوية α كما يبين الشكل (4-15) .



الشكل (4-15)

ثم نفرض أن $I_x \succ I_y$ وأن الزاوية α موجبة ، إذا دارت من المحــور x عكس اتجاه عقارب الساعة . ولحل المسالة أي إيجاد التغير المــذكور نقــوم بإيجاد العلاقة بين إحداثيات المساحة dA في حالة المحاور الأولـــى والثانيــة حيث نجد من الشكل (4-15) أن :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \overline{OC} \\
&= \overline{OE} + \overline{EC} \\
&= \overline{OE} + \overline{AF} \\
&= \overline{OA}\cos\alpha + AB\sin\alpha \\
&= x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(33-4)
\end{aligned}
$$

$$y_1 = \overline{BC}$$
$$= \overline{BF} - \overline{AE}$$
$$= y\cos\alpha + y\sin\alpha \quad \text{.......................................}(34-4)$$

نحدد الآن عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين x_1 و y_1 حيث :

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2\, dA = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2\, dA$$

$$= \int_A y^2\cos^2\alpha\, dA - 2\int_A xy\sin\alpha\, dA + \int_A x^2\sin^2\alpha\, dA$$

أو بصورة أبسط :

$$I_{x_1} = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{............}(35-4)$$

وبنفس الطريقة نجد I_{y_1} :

$$I_{y_1} = \int_A (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2\, dA$$
$$= I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{....................}(36-4)$$

$$I_{x_1y_1} = \int_A (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\, dA$$
$$= \frac{I_x\sin 2\alpha}{2} - \frac{I_y\sin 2\alpha}{2} + I_{xy}\cos 2\alpha \quad \text{.......................}(37-4)$$

وبجمع العلاقتين (4-36) و (4-37) نحصل على :

$$I_{x_1}+I_{y_1}=I_x+I_y=I_\rho \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38-4)$$

وبطرح الصيغة (4-37) و (4-36) نحصل على :

$$I_{x_1}-I_{y_1}=(I_x-I_y)\cos 2\alpha-2I_{xy}\sin 2\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39-4)$$

نلاحظ من العلاقة (4-38) أن مجموع عزمي القصور الذاتي بالنسبة لمحورين متعامدين لا يتغير عند دوران المحاور . أما العلاقة (4–39) فيمكن أن تستخدم لحساب عزم القصور الذاتي الطارد المركزي بالنسبة للمحورين x و y وذلك بواسطة عزم القصور الذاتي المحوري المعروف بالنسبة للمحاور x ، y و x_1 ، y_1 .

10.4 محاور القصور الذاتي الرئيسية وعزوم القصور الذاتي الرئيسية

من البند السابق تبين أنه عند تغير الزاوية α فأن مقادير $I_{x_1y_1}$, I_{y_1} , I_{x_1} تتغير ، ومن هنا نستطيع أيجاد نوجد قيمة الزاوية α التي تكون فيها لكل من I_{x_1} , I_{y_1} قيم عظمى أو صغرى وذلك بأخذ المشتقة الأولى من I_{x_1} أو I_{y_1} بالنسبة للزاوية α ومساواتها بالصفر حيث :

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha}=2I_x\cos\alpha_0\sin\alpha_0+2I_y\sin\alpha_0\cos\alpha_0-2I_{xy}\cos 2\alpha_0=0$$

أو أن :

$$(I_y-I_x)\sin 2\alpha_0-2I_{xy}\cos 2\alpha_0=0$$

ومن هنا نجد أن :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40-4)$$

أن العلاقة (4-40) تحدد وضع محورين ، حيث يكـون لعـزم القصـور الذاتي بالنسبة لأحدهما نهاية عظمى وبالنسبة للأخر نهاية صغرى . أن مثـل هـذه المحـاور تسـمى بالمحـاور الرئيسـية (Principal Axes) ، وعـزوم القصـور الـذاتي تسـمى بعـزوم القصـور الـذاتي الرئيسية (Principal Moments of Inertia) .

أما مقدار عزوم القصور الذاتي الرئيسية فـيمكن الحصـول عليـه مـن العلاقـات السـابقة (4-35) ، (4-36) ، وذلـك بتعـويض قيمـة α_0 مـن العلاقة (4-40) ، واستخدام المتطابقات المثلثيـة المعروفـة لـدوال الزوايـا المزدوجة .

وبعد الاختصار والتحويل نحصل على العلاقـة (4-41) لتحديـد عـزوم القصور الذاتي الرئيسية حيث :

$$I_{\frac{max}{min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(41-4)$$

أن هذه العلاقة تشبه بتركيبها العلاقة (2-16) للاجهادات الرئيسية التي تم عرضها في الباب الثاني ، وفي حالة $I_x \succ I_y$ وعنـد دراسـة المشـتقة الثانية :

$$\frac{d^2 Ix_1}{d\alpha^2}$$

يمكن أثبات أن عزم القصور الذاتي الأكبر I_{max} يكون بالنسـبة للمحـور الرئيسي الذي دار بالنسبة للمحور x بزاوية α_0 ، أما العزم الأصغر للقصور الذاتي فأنه يكون بالنسبة للمحور الأخر العمودي الأول .

وفي أغلب الحالات لا نحتاج على مثل هذة الدراسة ، وذلك لان تكوين المقطع يوضح لنا آي من المحاور الرئيسية يناظر العزم الأكبر للقصور الذاتي ، وعدا العلاقة (4-41) لتحديد عزوم القصور الذاتي الرئيسية يمكن استخدام العلاقات (4-35) ، (4-36) أيضاً . وهنا تحل المسألة نفسها ذاتياً بالنسبة لأي محور رئيسي ، حيث نحصل على العزم الأكبر للقصور الذاتي وبالنسبة لأي محور نحصل على العزم الأصغر .

أن عزم القصور الذاتي الطارد المركزي بالنسبة للمحاور الرئيسية يساوي صفر . ولتوضيح ذلك نقوم بمساواة $I_{x_1y_1}$ للصفر وحسب العلاقة (4-40) فأننا نحصل على :

$$\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha_0 + I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0$$

ومنها نحصل من جديد على العلاقة (4-40) حيث أن :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

أن محاور القصور الذاتي هي المحاور التي تملك الخصائص التالية :

1. أن عزم القصور الذاتي الطارد المركزي $I_{x_1y_1}$ ، بالنسبة لهذه المحاور يساوي صفرا .

2. أن عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور الرئيسية هي أما نهاية عظمى أو نهاية صغرى .

أن المحاور الرئيسية(Principal Axes) التي تمر بمركز ثقل المقاطع تسمى بمحاور القصور الذاتي المركزية الرئيسية ، وفي حالات كثيرة يمكن تحديد وضع المحاور الرئيسية فوراً ، وإذا كان للشكل محور تماثل فانه يعتبر أحد المحاور المركزية الرئيسية ، أما المحور الثاني فيمر بمركز ثقل المقطع بصورة عمودية على المحور الأول . ونستنتج من ذلك أن عزم القصور الذاتي الطارد المركزي يساوي صفراً إذا أخذ بالنسبة لمحور التماثل أو أي محور أخر عمودي عليه .

ومن العلاقات (4-35) ،(4-37) يمكن التأكد من أنه إذا كان عزمي القصور الذاتي الرئيسيان للمقطع متساويان ، فان أي محور مركزي في هذا المقطع يعتبر رئيسياً وكل عزوم القصور الذاتي المركزية الرئيسية تكون متساوية مثل الدائرة ، المربع ، المثلث المتساوي الأضلاع ، الشكل السداسي وغيرها .

وفعلاً إذا فرضنا أنه في مقطع ما كان المحوران x و y محورين مركزيين رئيسيين ، وأن $I_x = I_y$ فعند ذلك نحصل من العلاقة (4-35) و (4-36) على $I_x = I_y = I_{x_1} = I_{y_1}$ ، ومن العلاقة (4-37) يمكن التأكد من أن $Ix_1 y_1 = 0$ ، أي أن كلا من المحورين x_1 و y_1 يعتبر محور قصور ذاتي مركزي رئيسي لمثل هذا الشكل .

11.4 العلاقة عزوم القصور الذاتي الطاردة المركزية بالنسبة لمجموعتين متوازيتين من محاور الإحداثيات

نفرض أن x_0y_0 هما محوران مركزيان كما يبين الشكل (4-16) ، وكان عزم القصور الذاتي $I_{x_0y_0}$ معلوم ، ثم نجد عزم القصور الذاتي الطارد المركزي بالنسبة للمحورين x_0 y_0 ، حيث يتضح من الشكل(4-16) أن :

$$x_1 = x_0 + b$$
$$y_1 = y_0 + a$$

ومنه نجد :

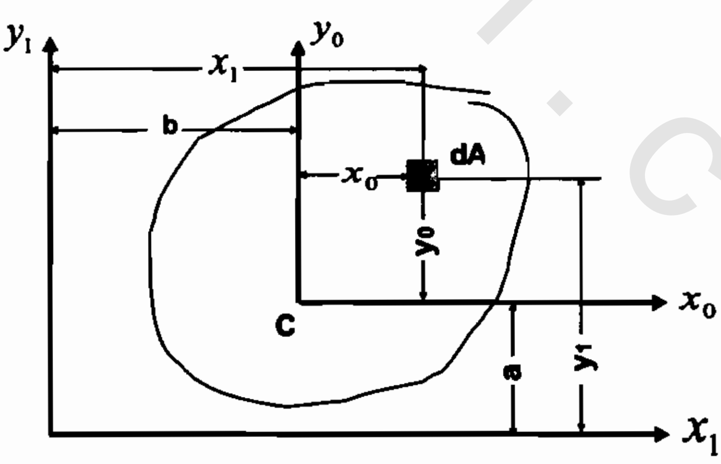
$$\mathrm{I}_{x_1}\,\mathrm{I}_{y_1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x_0 + b)(y_0 + a) dF$$
$$= \int_A x_0 y_0 dA + b\int_A y_0 dA + a\int_A x_0 dA + \int_A ab dA$$

أو :

$$\mathrm{I}_{x_1 y_1} = \mathrm{I}_{x_0 y_0} + Aab \qquad \text{...}(42-4)$$

أن التكامليين الثاني والثالث في الطرف الأيمن من المعادلة (4-42) اللذين يمثلان العزوم الاستاتيكية بالنسبة للمحاور المركزية يساويان صفراً .

وهكذا فان عزم القصور الذاتي الطارد المركـزي بالنسـبة لمجموعـة المحاور المتعامدة والموازية للمحاور المركزية يساوي عزم القصور الـذاتي الطارد المركزي بالنسبة لهذه المحاور المركزية زائد حاصل ضرب مسـاحة الشكل في إحداثيات مركز ثقلها بالنسبة للمحاور الجديدة .



الشكل (4-16)

وإذا كانت المحاور y_0 , x_0 تعتبر محـــاور رئيســية مركزيـــة ، فـــان $I_{x_0y_0} = 0$ بالنسبة إلى هذه المحاور ، وأن العلاقة (4-42) تصـــبح ابسـط وتكتب على النحو التالي :

$$I_{x_1y_1} = Aab \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(43-4)$$

أما للشكل المركب أو الساحة المركبة التي تتكون مـــن n مـــن الإشـــكال المعروفة والشائعة والبسيطة فأن :

$$I_{x_1y_1} = \sum_{1}^{n} A_i\, a_i\, b_i \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(44-4)$$

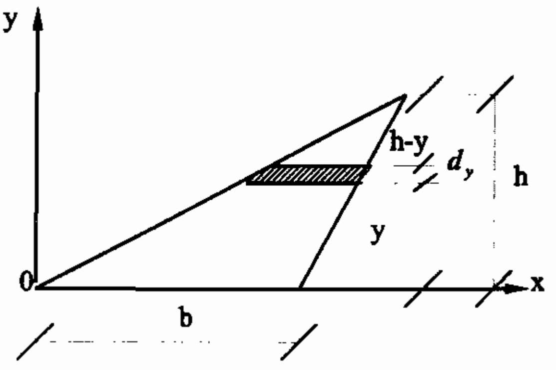
بشرط أن تعتبر المحاور المركزية الخاصة لكل شكل محاور رئيسية .

12.4 أمثلـــة محلولـــة

في هذا البند سيتم عرض أمثلة محلولة ومتنوعة تساعد الطالب على الإلمام بجميع الخصائص الهندسية والتطبيقات الخاصة بها ، والتي تم التطرق لها في هذا الباب ، وذلك نظراً لأهميتها وحاجة دارسي الهندسة بمختلف فروعها إلى معرفة هذة الخصائص واستخداماتها العلمية فـــي مواضـــيع علميـــة مختلفـــة ومتعددة .

مثـــال (4-2)

عين موقع مركز مساحة المثلث الذي قاعدته b وارتفاعه h المبين فـــي الشكل (4-17) باستخدام طريقة التكامل .



الشكل (4-17)

الحـــــل :

لإيجاد مركز الثقل للشكل نقوم بالخطوات التالية :

1. نجعل محور x منطبقاً على القاعدة .

2. نختار شريحة (dA) موازيه لمحور x فتكون مساحة هذه الشريحة :

$$dA = x.d_y$$

3. نطبق المعادلة :

$$A\bar{y} = \int y.dA$$

$$\frac{1}{2}bh.\bar{y} = \int_0^h y.xd_y$$

ومن تشابه المثلثين في الشكل (4-17) نحصل على :

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

ومنه :

$$x = \frac{b}{h}(h-y)$$

نقوم بالتعويض عن قيمة x في معادلة التكامل حيث :

$$\frac{bh}{2}.\overline{y} = \frac{b}{h}\int_0^h (h - y)y.d_y$$

$$= \frac{bh^2}{6}$$

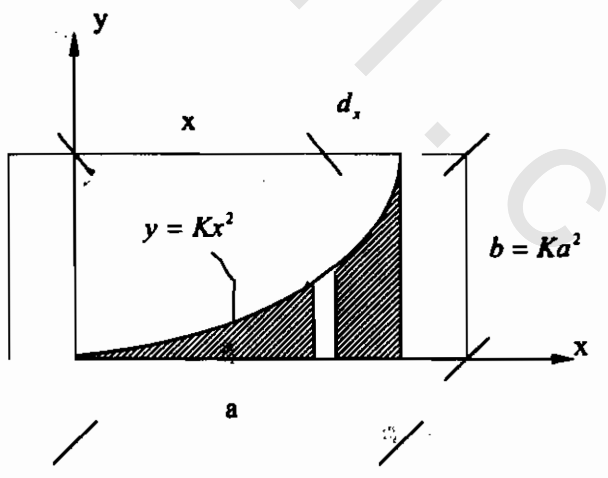
ومنه نحصل على قيمة الأحداثي العمودي لمركز الثقل :

$$\overline{y} = \frac{h}{3}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة فيما إذا اعتبرنا القاعدة أي من الضلعين الآخرين وحينئذٍ يعتبر الارتفاع الجديد للقاعدة .

مثال (4-3)

عين مركز المساحة المظللة والمبينة في الشكل (4-18) بين محور x والمستقيم x=a والقطع المكافئ $y = Kx^2$ بطريقة التكامل.



الشكل (4-18)

الحــــل :

نختار شريحة تفاضلية للمحور y كل نقطة من نقاطها تبعد نفس المســـافة عن المحور y ومساحتها .

$$dA = yd_x$$

كما أن المساحة الكلية A نجدها بطريقة التكامل حيث :

$$A = \int dA$$

وبالتعويض عن dA نجد :

$$A = \int_0^a x.dA = \int_0^a Kx^3.dx$$

$$\left(\frac{1}{3}Ka^3\right)\bar{x} = \frac{1}{4}Ka^4$$

ومنه نحصل على الأحداثي الأفقي لمركز الثقل :

$$\bar{x} = \frac{3}{4}a$$

أما لإيجاد $\bar{y}$ يمثل المسافة بين محور x ومركز مساحة الشــريحة dA والذي يساوي $(\frac{1}{2}y)$ على اعتبار أن المســـاحة dA مســـتطيل ارتفاعــه y وقاعدته d_x وبالتعويض في المعادلة أعلاه :

$$\left(\frac{1}{3}Ka^3\right)\bar{y} = \int_0^a \left(\frac{1}{2}y\right)y.d_x = \frac{1}{2}K^2\int_0^a x^4.d_x$$

$$\left(\frac{1}{3}Ka^3\right)\bar{y} = \frac{1}{2}K^2\frac{a^5}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{10}Ka^2$$

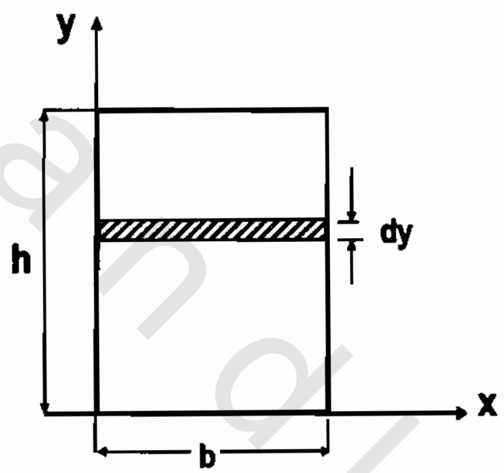
عندما $x = a , y = b$ ، فأن :

$$b = Ka^2$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3}{10} b$$

مثـــال (4-4)

أوجد عزم القصور الذاتي حول المحور الذي ينطبق مع قاعدة المســتطيل المبين في الشكل (4-19) .



الشكل (4-19)

الحــل:

عزم القصور الذاتي للمساحة حول المحور x يمكن تحديده عــن طريــق العلاقة التالية :

$$I_x = \int y^2 . dA$$

حيث أن :

$$dA = bdy$$

وبأجراء عملية التكامل المحدود نجد أن :

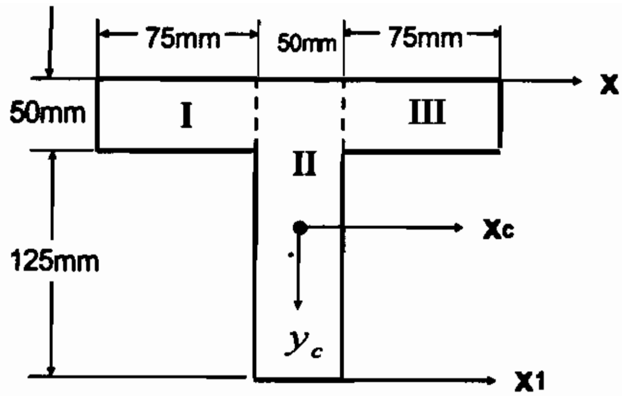
$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^h y^2 b dy \\ &= b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{bh^3}{3} \end{aligned}$$

ومن الممكن الحصول على نفس النتيجة بتطبيق نظرية المحاور المتوازية حيث :

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_0} + Ad^2 \\ &= \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= \frac{bh^3}{3} \end{aligned}$$

مثـــال (4-5)

أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة على الشكل حرف T ، والمبينـــة فـــي الشكل (4-20) حول محور أفقي يمر بمركز الثقل لهذه المساحة .



الشكل (4-20)

الحــل :

أولا يجب تحديد إحداثيات مركز الثقل للمساحة المعطاة ، لذا نقوم بتقسـيم الشكل إلى ثلاث أجزاء مستطيلات I , II , III . ونستعمل نظام الإحــداثيات (x-y) المبين في الشكل (4-20) ، ثم نجد الأحداثي العمودي y لمركز الثقــل حسب العلاقة التالية :

$$\bar{y}=\frac{S_x}{A}=\frac{\int y.dA}{A}$$

أن البسط في هذه العلاقة يمثل العزم الأول للمساحة جميعها حول المحور x ، والذي يمكن حسابه بضرب مساحة كل جزء مستطيل من الأجزاء الثلاثة I , II , III في المسافة من محور x إلى مركز ثقل المستطيل . وهكذا نستطيع الحصول على الأحداثي العمودي لمركز ثقل المساحة أو المقطع حيث :

$$\bar{y}=\frac{(75\times 50\times 25)+(175\times 50\times 175\times 0.5)+(75\times 50\times 25)}{75\,(50)+175\,(50)+75\times 50}$$

$$=59\,mm$$

وهكذا نجد أن مركز الثقل يقع علــى بعــد 59mm أســفل محــور x . وسنرمز للمحور الأفقي الذي يمر بهذه النقطة أي بمركز الثقل بالرمز x_c .

ولإيجاد عزم القصور الثاني للمساحة المعطاة يوجد عدة طرق أحداها هو حساب عزم القصور الذاتي للمساحة كلها حول المحور x ، وذلك لان العــزم الثاني للمساحة لكل من المستطيلات الثلاث حول المحور x معلوم حيث :

$$I_x = 0.5\times 75\times (50)^3 + 0.5\times 50\times (175)^3 + 0.5\times 75\times (50)^3$$
$$= 95\times 10^6\, mm^4$$

والآن يمكن استخدام نظرية المحاور المتوازية لنقل هذه النتيجة إلى المحــور الذي يمر في مركز الثقل x_c والحصول على عزم القصور الــذاتي للمســاحة كلها كما يلي :

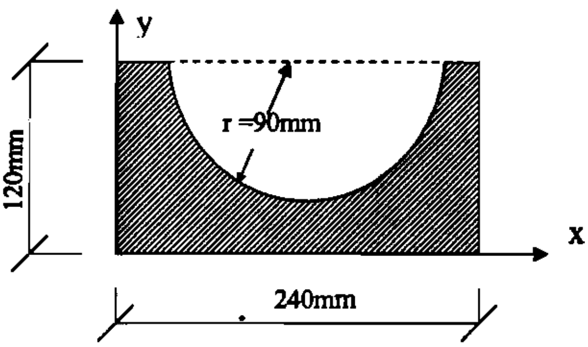
$$I_x = I_{x_c} + A.d^2$$
$$95\times 10^6 = I_{x_c} + 16.25\times 10^3 \times (58.7)^2$$

ومنه نجد عزم القصور الذاتي حول المحور الأفقي الذي يمر في مركز ثقــل المقطع :

$$I_{x_c} = 41\times 10^6\, mm^2$$

مثــال (6-4)

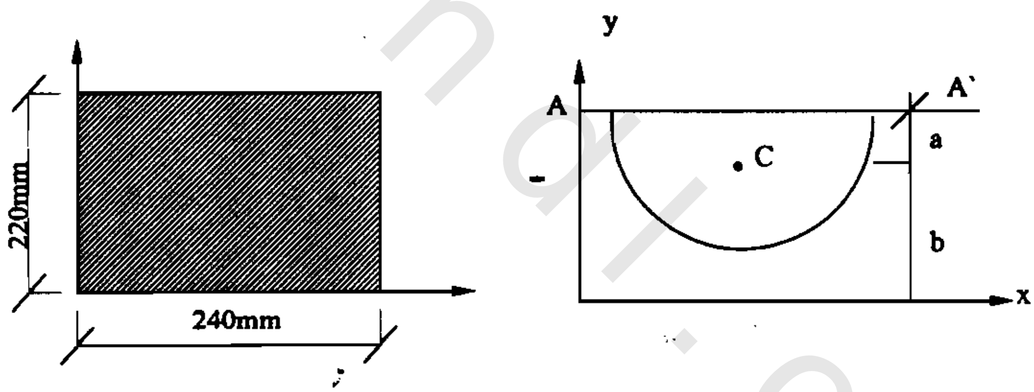
أوجد عزم القصور الــذاتي للمســاحة المظللــة والمبينــة فــي الشــكل (21-4) حول المحور x .



الشكـــل (4-21)

الحـــــل :

يمكــن اعتبـــار المســـاحة المظللـــة علـــى أنهـــا تســـاوي مســـتطيل (120mm×120mm) مطروحـــــاً منهـــــا نصـــيف دائـــرة بنصـــــف قطر ($r = 90mm$) ، كما هو موضح في الشكل (4-22) .



الشكـــل (4-22)

نجد أن عزم القصور الذاتي I_{x_0} للمستطيل حول المحور x_0 الذي يمر في مركز الثقل للمستطيل هو :

$$I_{x_0} = \frac{1}{12}bh^3$$

أما عزم القصور الذاتي لهذا المستطيل فهو :

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240)\times(120) = 138,2\times10^6\,mm^4$$

بالنسبة لنصف الدائرة فإن عزم القصور الذاتي حول المحـور x يمكـن إيجاده كما يلي :

مركز نصف الدائرة C بالنسبة للمحور AA' هو :

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\times90}{3\pi}38,2\,mm$$

والمسافة b بين مركز نصف الدائرة C والمحور المراد أيجاد العزم حول x هي :

$$b = 120\,mm - a = 120\,mm - 38,2mm = 81,8mm$$

ومنه نجد أن عزم القصور الذاتي حول المحور AA' هو :

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25,76\times10^6 mm^4$$

أما مساحة نصف الدائرة فتساوي :

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(90)^2 = 12,72\times10^3 mm^2$$

وباستخدام نظرية المحاور المتوازية نستطيع الحصـــول علـــى I_{x_0} بالنســـبة للمحور AA' :

$$I_{AA'} = I_{x_0} + Aa^2$$

$$25,76 \times 10^6 mm = I_{x_0} + (12,72 \times 10^3)(38,2)$$

ومنه نجد:

$$I_{x_{x0}} = 7,20 \times 10^6 \, mm$$

وباستخدام هذه النظرية نحصل على I_x المطلوب إيجاده حيث :

$$I_x = I_{x_0} + Ab^2 = 7,20 \times 10^6 + (12,72 \times 10^3)(81,8)^2$$

$$= 92,3 \times 10^6 \, mm^4$$

أما عزم القصور الذاتي للمساحة الكلية المظللة فـيمكن الحصــول عليــه بطرح عزم القصور الذاتي للمستطيل من عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة :

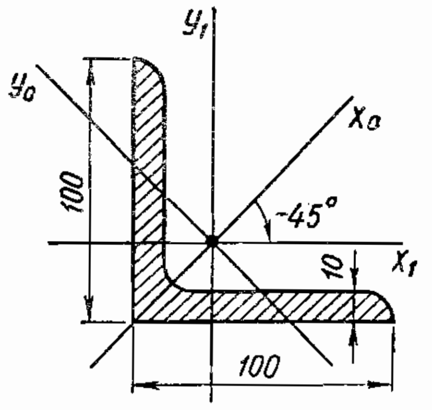
$$I_{x_{\text{الكلي}}} = I_{x_{\text{المستطيل}}} - I_{x_{\text{الدائرة}}}$$

$$= 138,2 \times 10^6 \, mm^4 - 92,3 \times 10^6 \, mm^4$$

$$= 45,9 \times 10^6 mm^4$$

مثـــال (4-7)

في الشكل (4-23) يبين مقطع هندسي زاوي أبعـــاده 10×100×100mm . أحسب عزم القصور الذاتي الطارد المركزي أو مـــا يســـمى حاصـــل عـــزم المساحة أو ناتج القصور الذاتي .



الشكــل (4-23)

الحــل :

نحدد عزم القصور الذاتي المركزي بواسطة عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور المركزية x_0 ، y_0 التي يمكن الحصول عليها من الجداول الخاصة بالمقاطع الهندسية ، حيث نجد من هذه الجداول أن :

$$I_{x_0} = 284\, cm^4$$
$$I_{y_0} = 74.1\, cm^4$$

ومن العلاقة التالية نجد عزم القصور الذاتي الطارد المركزي أو ما يسمى بحاصل عزم المساحة حيث :

$$I_{x_1 y_1} = \frac{(I_{x_0} - I_{y_0})\sin 2\alpha}{2} + I_{x_0 y_0} \cos 2\alpha$$

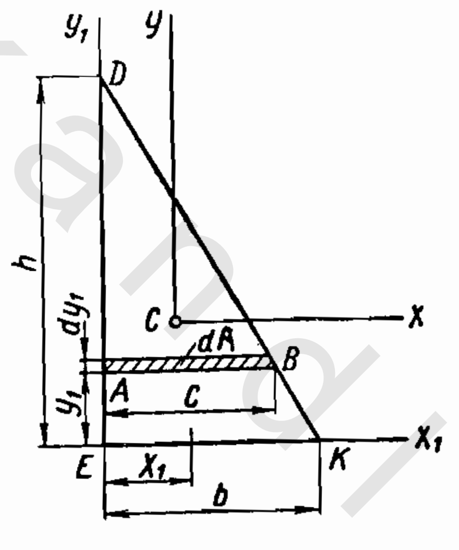
وبما أن المحورين x_0 ، y_0 تعتبر محاور مركزية رئيسية ، فأن عزم القصور الذاتي $I_{x_0 y_0}$ يساوي الصفر ، والزاوية $\alpha = -45°$ ، وذلك

لان المحورين x_1 , y_1 اللذين يحسب عزم القصور الذاتي بالنسبة لهما دارا باتجاه دوران عقارب الساعة بالنسبة للمحورين x_0 , y_0 وبذلك نحصل على :

$$I_{x_1y_1}=\frac{284-74.1}{2}(-1)=-104.95\,cm^4$$

مثال (8-4)

أحسب عزم القصور الذاتي الطارد المركزي أو حاصل عزم المساحة للمثلث القائم الزاوية المبين في الشكل (24-4) بالنسبة للمحورين المنطبقين على ضلعيه القائمين .



الشكل (24-4)

الحل :

عزم القصور الذاتي الطارد المركزي أو ما يسمى حاصل عزم المساحة يمكن إيجاده من العلاقة التالية :

$$I_{x_1y_1}=\int_A x_1 y_1 \, dA$$

وبأخذ جزء من المساحة شريحة نجد أن مساحة الشريحة AB هي :

$$dA = c\,dy_1$$

أما الأحداثي الأفقي x_1 لمركز ثقل الشريحة AB فيساوي :

$$x_1 = \frac{c}{2}$$

ومن تشابه المثلثين DEK , DAB نجد أن :

$$c = \frac{b}{h}\left(h - h_1\right)$$

وبناءً على ذلك فأن :

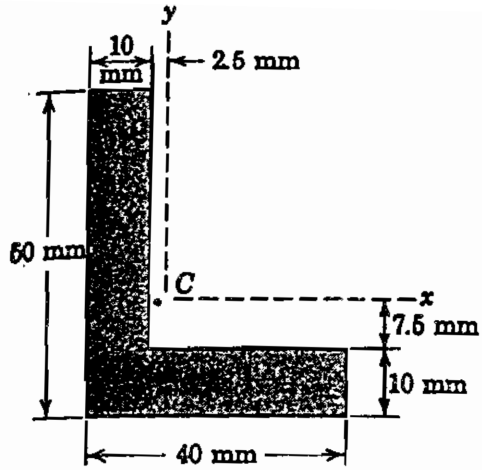
$$I_{x_1 y_1} = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h \left(h - y_1\right)^2 y_1 dy_1 = \frac{b^2 h^2}{24}$$

ولتحديد القصور الذاتي الطارد المركزي بالنسبة للمحاور المركزية نستخدم العلاقة :

$$I_{xy} = I_{x_1 y_1} - A\frac{h}{3}\frac{b}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

مثال (4-9)

أوجد قيم عزوم القصور الذاتي الرئيسية ، وموضع المحاور الرئيسية للقصور الذاتي خلال المركز الهندسي للمقطع الموضح في الشكل (4-25) .



الشكــل (25-4)

الحــل :

نقوم بتحديد مركز المساحة للشكل C ، والذي يتحدد بسهولة حيث نقسم الشكل إلى مستطيلين I , II ونحدد مركز كل منهما ، وبعد ذلك نحصل على المركز للمقطع ككل حسب الخطوات التي تم توضيحها في الأمثلة السابقة ، والشكل (25-4) يبين إحداثيات هذا المركز .

أن عزم القصور الذاتي الطارد المركزي أو ما يسمى بحاصل ضرب القصور الذاتي لكل مستطيل حول محاوره المركزية الموازية للمحور x والمحور y يساوي صفراً بالتناظر . وعليه فأن حاصل ضرب عزم القصور الذاتي حول المحورين x-y للجزء الأول للمقطع الهندسي المستطيل I هو :

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + d_x\, d_y \,.\, A$$

$$I_{xy} = 0 + (-12.5) + (+7.5)(400)$$

$$= -3.75(10^4)\, mm^4$$

وحيث أن :

$$d_r = -(7.5+5) = -12.5\, mm$$

$$d_y = +(20-10-2.5)$$

وبنفس الطريقة نقوم بإيجاد حاصل الضرب للقصور الذاتي للمستطيل الجـــزء الثاني للمقطع II حيث :

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + d_x d_y A$$
$$I_{xy} = 0 + (12.5)(-7.5)(400)$$
$$= -3.75\,(10)^4\ mm^4$$

حيث أن :

$$d_x = -(7.5+5) = -12.5$$
$$d_y = +(20-10-2.5) = 7.5\,mm$$

وألان نجد عزم القصور الذاتي المركزي الطـــارد أي حاصـــل ضــــرب القصور للمقطع الهندسي بأكمله حيث :

$$I_{xy} = -3.75\,(10^4) - 3.75\,(10^4)$$
$$= -7.50\,(10^4)\,mm^4$$

أن عزوم القصور الذاتي حول المحورين x , y للجزء المستطيـــل الأول I يمكن الحصول عليها من خلال نظرية المحاور المتوازية هي :

$$I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2$$
$$I_x = \frac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(12.5)^2$$
$$= 6.583\,(10^4)\,mm^4$$
$$I_y = I_{\bar{y}} + Ad^2$$
$$I_y = \frac{1}{2}(10)(40)^3 + (400)(7.5)^2$$
$$= 7.583\,(10^4)\,mm^4$$

أما عزم القصور الذاتي للجزء II حول نفس المحاور :

$$I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2$$

$$I_x = \frac{1}{2}(10)(40)^3 + (400)(12.5)^2$$
$$= 11.583\left(10^4\right)mm^4$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + Ad^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}(40)\left(10^3\right) + (400)(7.5)^2$$
$$= 2.583\left(10^4\right)mm^4$$

وعليه نحصل على عزوم القصور الذاتي $I_{x_{\text{الكلي}}}$, $I_{y_{\text{الكلي}}}$ للمقطـــع الهندســـي :

$$I_x = 6.583\left(10^4\right) + 11.583\left(10^4\right)$$
$$= 18.167\left(10^4\right)mm^4$$

$$I_y = 7.583\left(10^4\right) + 2.583\left(10^4\right)$$
$$= 10.167\left(10^4\right)mm^4$$

أما موضع المحاور الرئيسية فيمكن نحصل عليها بإيجاد ميل المحاور الرئيسية للقصور الذاتي والمبينة في الشكل (4-26) ، من المعادلة التالية :

$$\left[\tan 2\alpha = \frac{2\,I_{xy}}{I_y - I_x}\right]$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2(7.50)}{10.167 - 18.167}$$
$$= 1.875$$

$$2\alpha = 61.9^\circ \quad , \quad \therefore \quad \alpha = 31.0^\circ$$

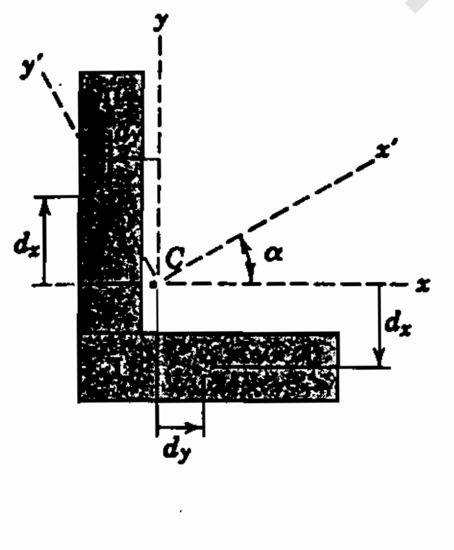
والآن نحسب عزوم القصور الذاتي الرئيسية من المعادلة السابقة باستخدام α ونحصل على I_{max} من $I_{x'}$ و I_{min} من $I_{y'}$ من العلاقة التالية :

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{max} = \left(\frac{18.167+10.167}{2} + \frac{18.167-10.167}{2}(0.4705) + (7.50)(0.8824)\right)(10^4)$$
$$= 22.67(10^4)\,mm^4$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha$$

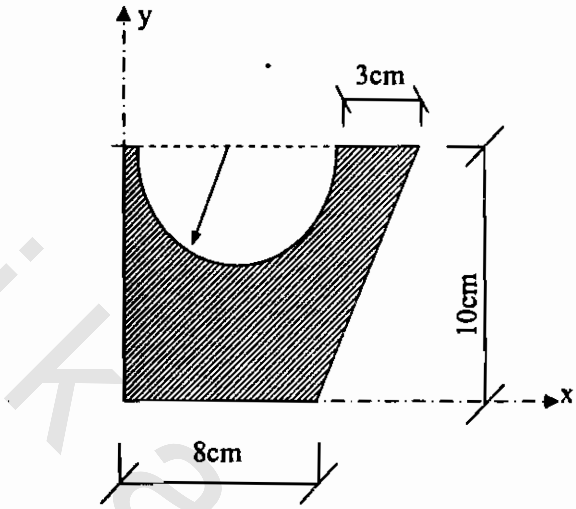
$$I_{min} = \left(\frac{18.167+10.167}{2} - \frac{18.167-10.167}{2}(0.4705) - (7.50)(0.8824)\right)(10^4)$$
$$= 5.67(10^4)\,mm^4$$



الشكــل (4-26)

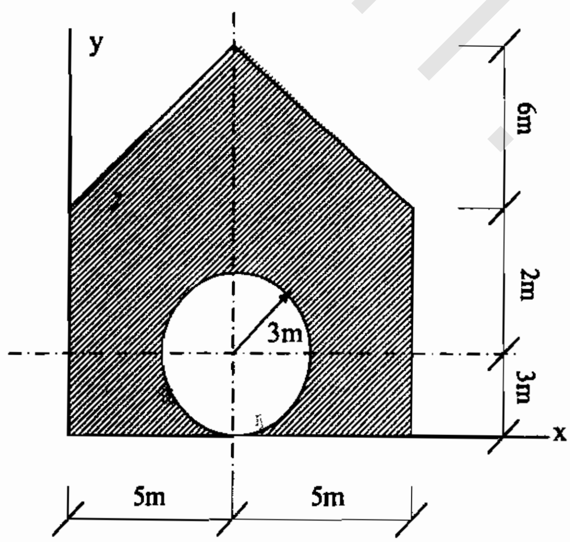
15.4 تمارين

س1: عين مركز المساحة المركبة المظللة والمبينة في الشكل (4-27) بالنسبة إلى محوري x ، y .



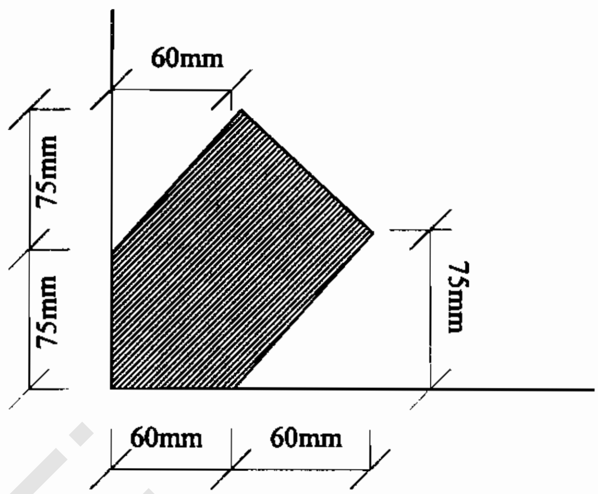
الشكل (4-27)

س4: عين مركز المساحة المركبة المظللة والمبينة في الشكل (4-28) .



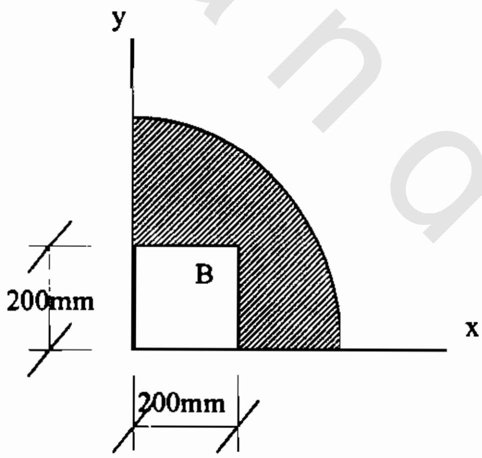
الشكل (4-28)

س3: أوجد مركز المساحة المظللة في الشكل (4-29) .



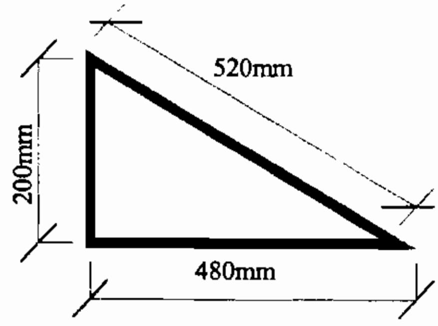
الشكل (4-29)

س4: عين مركز المساحة المظللة والمبينة في الشكل (4-30) .



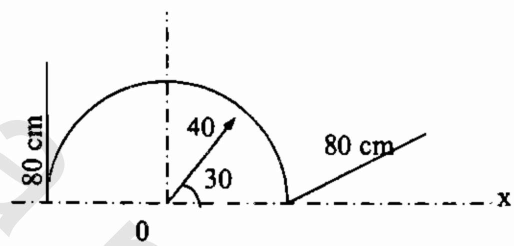
الشكل (4-30)

س5: الشكل (4-31) يبين سلك متجانس. أوجد مركز الثقل لهذا السلك .



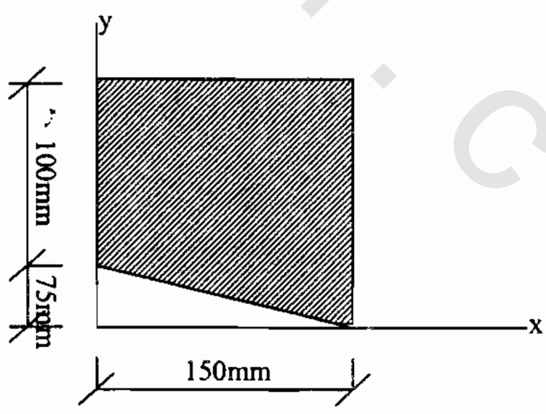
الشكل (4-31)

س6: سلك متجانس ذو مقطع منتظم وثابت محني كما هــو مبــين بالشــكل (4-32). أوجد إحداثيات مركز ثقله .



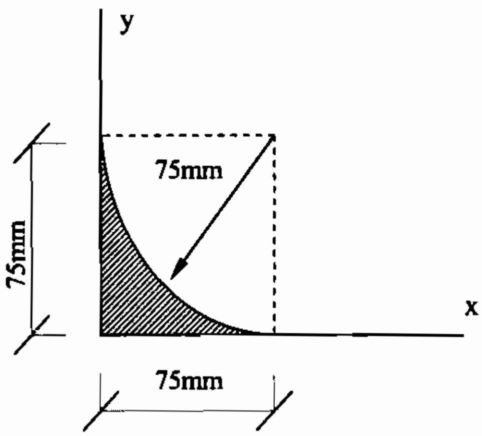
الشكل (4-32)

س7: في الشكل (4-33) أوجد إحداثيات مركز المساحة للشكل المظلل .

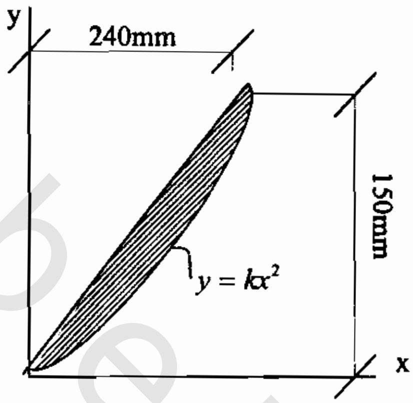


الشكل (4-33)

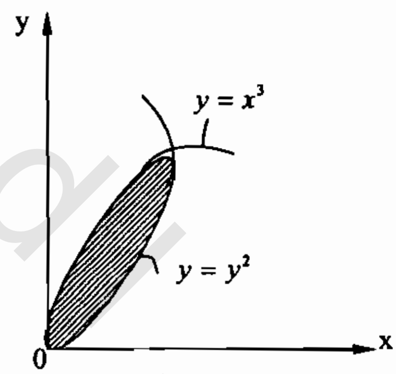
س8: في الإشكال (4-34) ولغاية (4-37) . أوجد إحداثيات المركز للمساحات بواسطة التكامل .



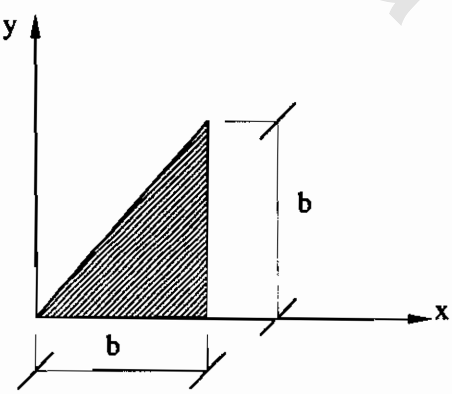
الشكل (4-34)



الشكل (4-35)

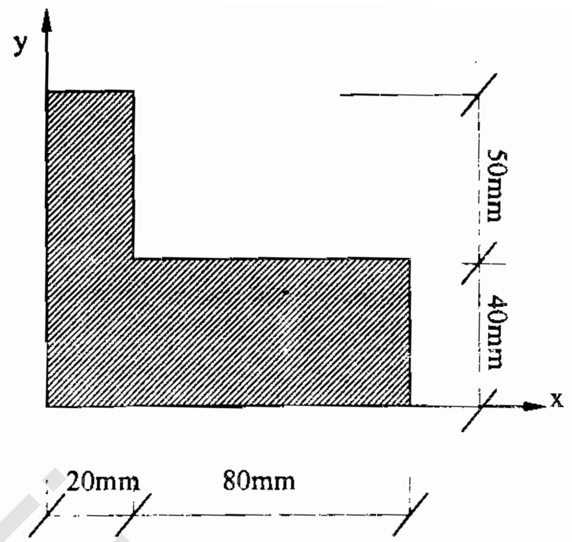


الشكل (4-36)



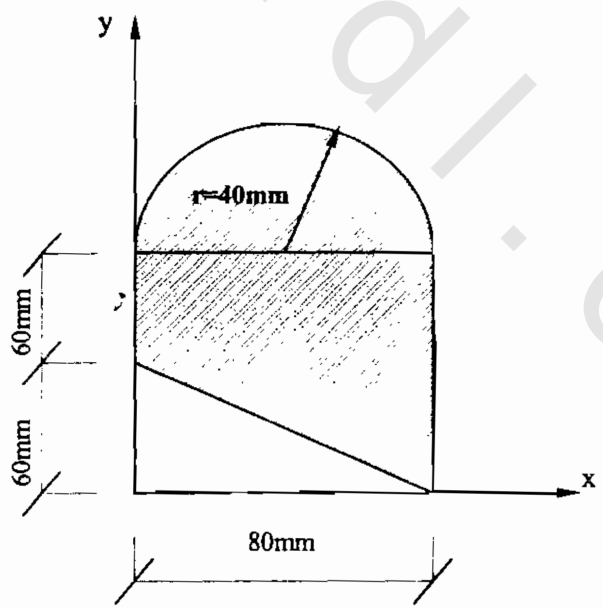
الشكل (4-37)

س9: أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينة بالشكل (4-38) بالنسبة للمحور x والمحور y .



الشكل (4-38)

س10: أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة بالشكل (4-39) بالنسبة لمحور x .



الشكل(4-39)

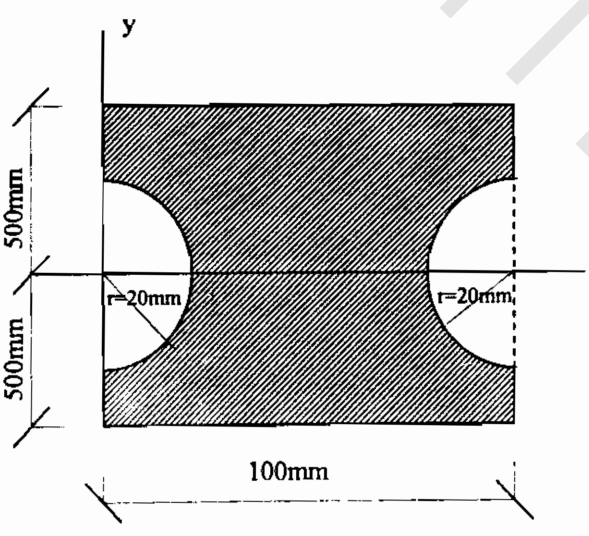
س11: عين عزم القصور الذاتي لمثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 200mm حول محور يمر بمركز ثقله ويوازي القاعدة .

س12: عين عزم القصور الذاتي لربع واحد من دائرة نصف قطرها 60mm حول قطر ينطبق مع أحد أضلاع ربع الدائرة .

س13: احسب عزم القصور الذاتي لمربع طول ضلعه 100mm وذلك بالنسبة إلى وتره .

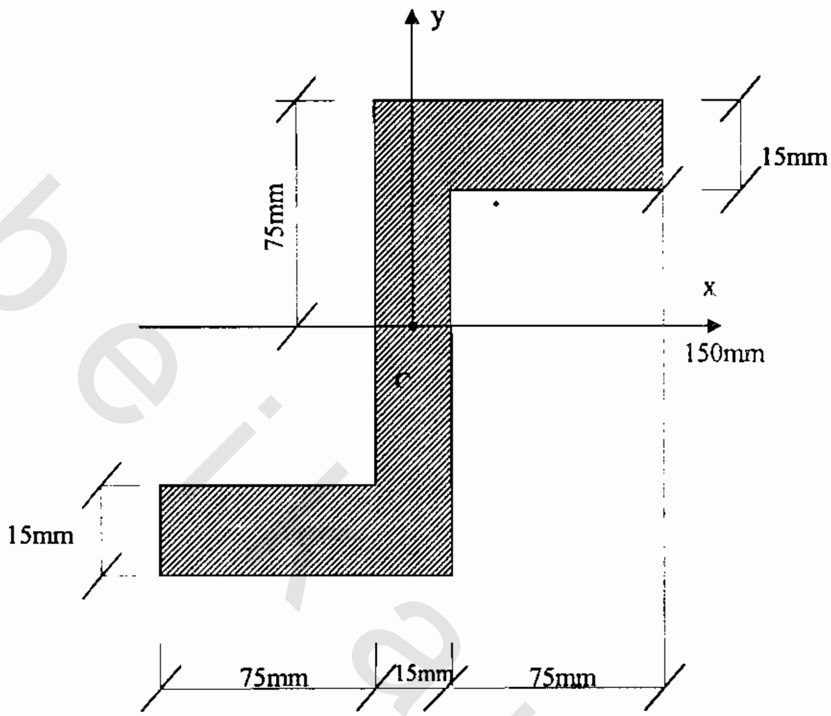
س14: احسب عزم القصور الذاتي القطبي لمثلث متساوي الأضلاع ، طول كل من أضلاعه يساوي 80mm وذلك بالنسبة لمركزه .

س15: أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينة في الشكل (4-40) حول المحور y.



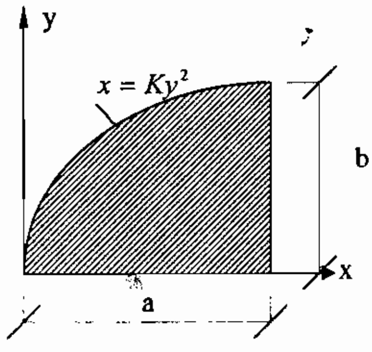
الشكل (4-40)

س16: أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينـة فـي الشـكل (4-41)حول المحور x .

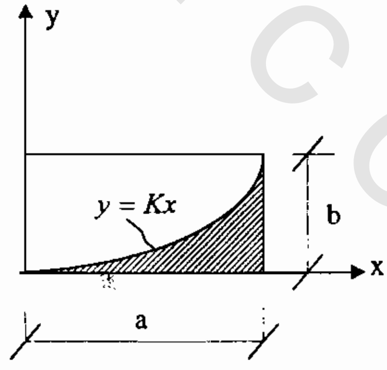


الشكـل (4-41)

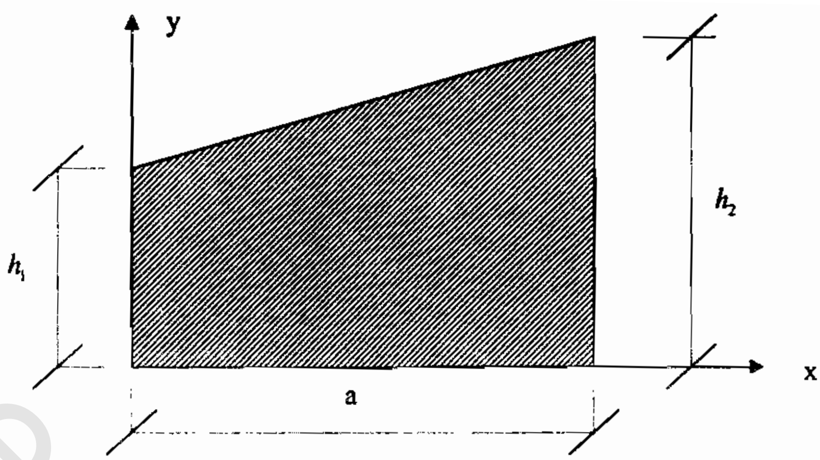
س17: أحسب عزم القصور الذاتي بواسطة التكامل للمساحات المظللة والمبينة في الأشكال (4-42) ، (4-43) ، (4-44) للمحور y .



الشكل (4-43)

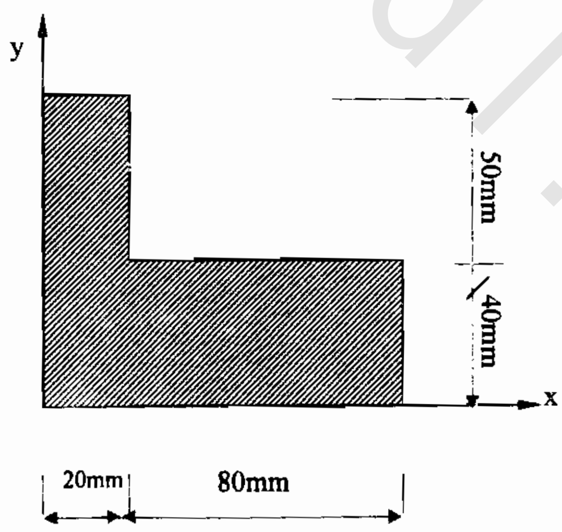


الشكل (4-42)



الشكل (4-44)

س**18**: أحسب عزم القصور الذاتي المركزي الطارد أي حاصل عزم المساحة للمقطع المبين في الشكل (4-45) ، بالنسبة لمحورين موازيين للمحورين x , y ويمران بمركز الثقل لهذا المقطع .



الشكـل (4-45)