البـــاب الخـــامس

الالـــتـــواء

(Torsion)

1.5 مقدمـــة

يحدث الالتواء (Torsion) في القضبان والأعمـــدة إذا تعرضـــت هـــذة القضبان والأعمدة إلى عزوم تؤثر حول محاورها الطولية ، أي أن تلك العزوم تكون في مستوى مقاطع القضبان - أي المستوى العمودي على المحور- وهذه العزوم تسمى بعزوم الالتواء (Torsional Moments) والتـــي يرمـــز لهـــا بالرمز M_t ، وتظهـــر عـــزوم الالتـــواء عـــادةً تحـــت تـــأثير الحمـــولات الخارجية . فعند تعرض قضيب إلى حمل عرضي خارجي لا يمـــر بمحـــور القضيب ولكن يبتعد عنه مسافة L مثلاً ، فان عزم الالتواء في هـــذة الحالـــة يكون $M_t = P.L$. وتظهر عزوم الالتواء أيضا في الأعمدة الناقلة للقـــدرة وذلك عند نقاط ربط واتصال تلك الأعمدة ببكرات الإدارة والعجلات المسننة .

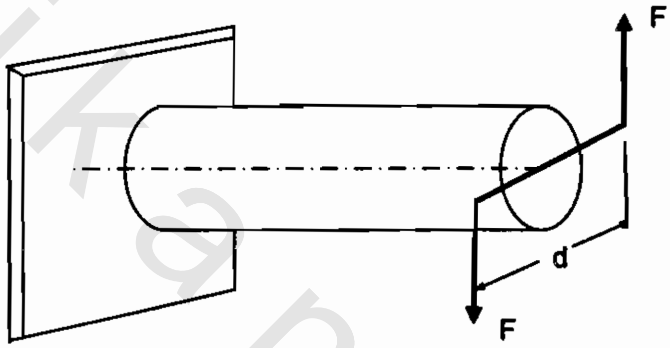
وينتج عادةً عن عزوم الالتواء الداخلية قوى داخلية اخرى مثل أجهادات القص الداخلية والتي تؤثر في المقطع العرضي للقضـــيب ، بحيـــث تكـــون محصلة العزوم الناتجة من تأثير أجهادات القص حول محور القضيب مساوية لعزم الالتواء الخارجي M_t . وذلك طالما كانت جميع مقاطع القضيب حرة في الدوران نتيجة وجود عزم الالتواء . أما إذا منع أي مقطع من الـــدوران فـــان الجهود الداخلية الناتجة من عزم الالتواء الخارجي تكون عبارة عـــن جهـــود عمودية بالإضافة إلى جهود القص . ويختلف توزيع جهود القص على مقطع القضيب تبعاً لشكله وأبعاده والبنود القادمة سوف توضح لنا كيفية توزيع هـــذه الأجهادات بالتفصيل .

2.5 عـــزم الالتـــواء (Torsinoal Moment)

اشرنا إلى أن الالتواء (Torsinoal) يحدث في القضبان والأعمدة ، إذا ما تعرضت تلك القضبان إلى عزوم تؤثر حول محاورها الطولية ، أي أن تلـــك

العزوم تقع في مستوى مقاطع هذه القضبان وهذه العزوم تسمى بعزوم الالتواء (Torsinoal Moment) ويرمز لها بالرمز M_t .

فلو اعتبرنا أن القضيب المبين في الشكل (5-1) مثبت من أحدى نهايتيه وتم ليه عند نهايته الأخرى بعزم التواء يؤثر في مستوى عمودي على محور القضيب فأن هذا القضيب في هذه الحالة يكون في حالة التواء .



الشكل (5-1)

وعادةً ينتج عن حمولات الالتواء التي تؤثر على قضيب ما حدوث إزاحة زاوية للمقطع المستعرض لأحدى النهايتين بالنسبة للنهاية الأخرى ، وحدوث أجهادات قص على أي مقطع مستعرض للقضيب عمودي على محوره . ويعرف عزم الالتواء عند أي مقطع على امتداد القضيب عند تأثير عدد من المزدوجات على مدى طول قضيب ما ، بأنه المجموع الجبري لعزوم المزدوجات المؤثرة والتي تقع على أحد جانبي المقطع تحت الدراسة ، حيث أن اختيار الجانب في أي حالة يكون اختياراً اختيارياً .

3.5 الالتواء في القضبان دائرية المقطع (Torsion in Circular Bars)

عند دراسة تأثير عزم الالتواء في القضبان دائرية المقطع يجب الأخذ بعين الاعتبار بعض الاعتبارات الخاصة بطبيعة مادة القضبان أو سلوكها ومقاطعها وذلك عند التعرض لعزم الالتواء ومن أهم هذه الاعتبارات :

a) أن لا تتعدى الأجهادات الناتجة من عزم الالتواء حدود المرونة .

b) مادة القضيب متجانسة وتحقق قانون هوك ، أي أنه يوجد تناسب ما بين الأجهاد والانفعال .

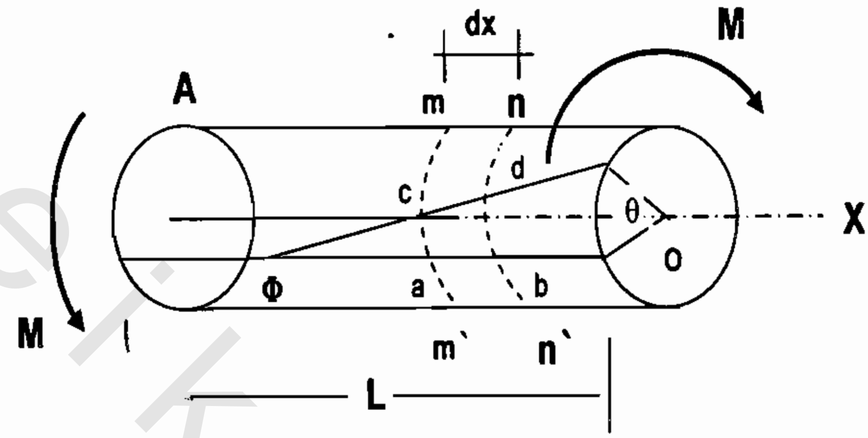
c) للقضيب المدروس محور مستقيم وذو مقطع ثابت وكامل الاستدارة .

d) المقطع المستعرض للقضيب عبارة عن مستوى عمودي على محور القضيب قبل التحميل ويبقى كذلك بعد التحميل .

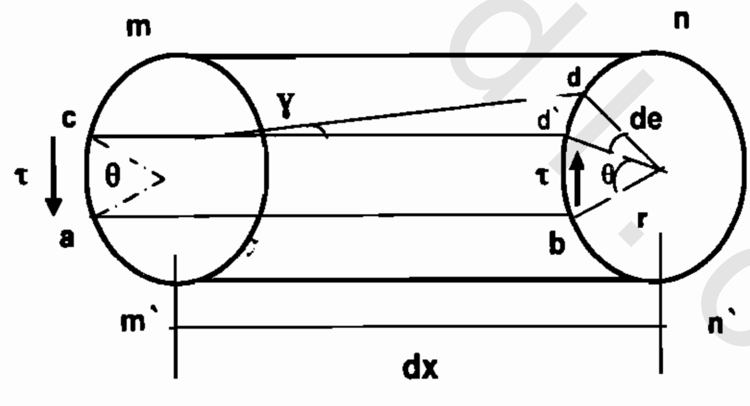
ولإيجاد العلاقة بين عزم الالتواء M_t ، وإجهاد القص τ الناتج عنه على المقطع ، نأخذ جزءً صغيراً مثل المقطع `mm`- nn ، طوله dx ، من قضيب منتظم مستقيم المحور طوله L ونصف قطر مقطعه r كامل الاستدارة ، ويؤثر على أحد طرفيه B عزم التواء قدره M_t ومثبت عند الطرف الأخر A كما يبين الشكل (a.2-5) .

وإذا فرضنا خطاً طولياً على سطح القضيب الأسطواني وموازياً لمحوره أي راسم للاسطوانة ، فانه نتيجة لتأثير عزم الالتواء M_t عند الطرف B فأن الخط ab يأخذ الوضع cd ، وبرسم الخط `cd موازياً للخط ab فأننا نجد أن هذا الخط `cd يصنع زاوية مع الخط cd مقدارها (γ) وتسمى هذه الزاوية

بزاوية اللولب حيث أن الرسم ab يصبح بعد تأثير عزم الالتــواء M_t خطــاً لولبياً على سطح الاسطوانة ولكن نظراً لان البعد dx صغيراً جداً فأنه يمكن اعتباره خطاً مستقيماً cd الشكل (b.2-5) .



(a)



(b

الشكل (2-5)

أما المسافة ac فأنها تمثل إزاحة نقطة a عن المقطع `mm ، والمسافة bd تمثل إزاحة نقطة b عن القطاع `nn ، ونظراً لان الإزاحتين غير متساويتين لذا فأن المسافة `dd تعبر عن الإزاحة النسبية بين المقطعين `nn – `mm ، وبذلك يكون الانفعال الناتج عبارة عن الإزاحة `dd مقسومة على الطول dx ، أي أن الزاوية (γ) هي نفسها انفعال القص (Shear Strain) الحادث من عزم الالتواء M_t على الجزء dx .

أما الزاوية dθ فأنها تعبر عن الفرق ما بين زاويتي دوران المقطع الدائري للقضيب عن المقطعين `nn و `mm ، وتسمى الزاوية θ بزاوية الالتواء (Torsional Angle) والتي هي عبارة عن الزاوية المركزية لدوران للقطاع `mm .

وبناءً على التعاريف والمفاهيم يمكننا كتابة الإزاحة النسبية بين المقطعين `mm و `nn على الشكل التالي :

$$dd' = rd\theta = \gamma\, dx$$

$$\gamma = r\frac{d\theta}{dx}$$

$$\gamma = \frac{r\theta}{L} \qquad \text{..}(1-5)$$

أن الزاوية θ في هذه المعادلة تعبر عن زاوية الدوران عند الطرف الحر b ، حيث أن عزم الالتواء الخارجي M_t ، والبعد L هو طول الراسم المحصور بين الطرف الحر B والطرف المثبت A ، وبما أن مقطع القضيب عند الطرف المثبت A لن يدور ، فأن الزاوية θ تكون عبارة عن الفرق بين زاويتي دوران المقطعين A و B والمسافة بينهما هي L .

وحيث أن مادة القضيب تخضع لقانون هوك أي أنه يوجـد تناسـب بـين الإجهاد والانفعال حسب الاعتبارات السابقة ، فأنه يمكننا أيجاد معامل المرونة في الالتواء أو ما يسمى معاير الجسـاءة (Modulus of Rigidity) والـذي يرمز له بالرمز G ويمثل النسبة بين أجهاد القص τ إلى انفعـال القـص γ حيث أن :

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

$$\therefore \ \tau = G \ . \ \gamma \qquad \qquad .... (2-5)$$

وبالتعويض عن قيمة الزاوية γ والمبينة بالمعادلة (5-1) فـي المعادلـة (5-2) نجد أن :

$$\tau = \frac{r\theta}{L}$$

$$\therefore \tau = \frac{G\theta}{L} . r$$

$$= C \ . \ r \qquad \qquad .... (3-5)$$

حيث C هو عبارة عن مقدار ثابت ويساوي :

$$C = \frac{G\theta}{L}$$

أن العلاقة (5-3) تبين لنا أن إجهاد القص في الالتواء(τ) يتناسب تناسباً طردياً مع البعد r مقاساً من مركز المقطع ،أي أن شـكل توزيـع أجهـادات القص يأخذ شكلاً خطياً ، ويكون إجهاد القص أقصى ما يمكن عـن السـطح الخارجي لمقطع القضيب ومساوياً للصفر عند مركز المقطع .

ولتحديد قيمة الثابت C فأننا نعتبر حلقة سمكها dr وتبعد عن مركز المقطع مسافة قدرها r وإجهاد القص عندها مساويا للقيمة (τ) . وبما أن القضيب في حالة أتزان فيجب أن يكون مجموع العزوم الداخلية الناتجة من أجهادات القص وذلك حول مركز القطاع مساوية لعزم الالتواء الخارجي المؤثر M_t أي أن :

$$M_t = \int_0^R \tau \, dA \, (r)$$

وبالتعويض عن قيمة (τ) من المعادلة (5-3) نجد أن :

$$M_t = \int_0^R C r^2 \, dA$$

$$\therefore M_t = C I_P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4-5)$$

حيث أن :

I_P : هو عبارة عن عزم القصور القطبي للمقطع (Polar Moment of Inertia) ويسمى أحيانا عزم المساحة القطبي الثاني ، ومن المعادلتين (5-3) و (5-4) نجد أن قيمة الثابت C يساوي :

$$\frac{\theta G}{L} = \frac{M_t}{I_P} = \tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5-5)$$

وهذه العلاقة تسمى بالمعادلة العامة للالتواء في القضبان دائرية المقطع . ومن المعادلة (5-5) يمكن تحديد إجهاد القص (τ) وزاوية دوران المقطع θ بالتقدير الدائري من المعادلتين :

$$\tau = \frac{M_t}{I_P} \cdot r \quad \text{...}(6-5)$$

$$\theta = \frac{M_t L}{I_P G} \quad \text{...}(7-5)$$

أن عزم القصور الذاتي للقضبان المصمتة والمجوفة والتـي يرمـز إلـى قطرها الخارجي بالرمز D_o ، وقطره الداخلي D_i يمكن إيجاده بتطبيق هـذه المعادلات على كل من المقاطع القضبان الدائرية المصمتة والمجوفة ، حيث يكون عزم القصور القطبي في المقطع المصمت :

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32} \quad \text{...}(8-5)$$

ويكون عزم القصور القطبي القطاع المجوف مساوياً للقيمة :

$$I_P = \frac{\pi}{32}\left(D_0^4 - D_i^4\right) \quad \text{...}(9-5)$$

حيث :

D_o : القطر الخارجي .

D_i : القطر الداخلي .

أما بالنسبة للمقاطع التي على شكل حلقة (Tube) حيث سـمك مقطعهـا صغير نسبياً بالمقارنة بنصف القطر R فأن عزم القصور القطبي يساوي :

$$I_P = 2\,\pi\,R^3\,t \quad \text{...}(10-5)$$

حيث : t سمك جدار الحلقة .

مثـــال (5-1)

أوجد إجهاد القص الأقصى وزاوية الالتواء الناتجة من تأثير عزم التـــواء قدره 100 t.cm على قضيب طوله 3m إذا علمت أن :

a) مقطعه دائري مصمت وقطره 10 cm .

b) دائري مجوف ذو قطر داخلي 5 cm وقطر خارجي 10 cm .

c) حلقة سمكها 1 cm وقطرها 10 cm .

علماً أن $G = 800 \ t / cm^2$.

الحـــل :

a) نقوم بإيجاد عزم القصور القطبي للمقطع الدائري المصمت حيث :

$$\mathrm{I_p} = \frac{\pi}{32} D^4$$
$$= \frac{\pi}{32} (10)^4 = 982 cm^4$$

عزم الالتواء :

$$\mathrm{M}_t = 100 \, t.cm$$
$$= 10^5 \ Kg.cm$$

ومن العلاقة (5-6) نجد أن إجهاد القص الأقصى حيث :

$$\tau_{\max} = \frac{\mathrm{M}_t}{\mathrm{I_p}} .R$$
$$= \frac{10^5}{982} (5) = 509 \ Kg / cm^2$$

ومن العلاقة (7-5) نجد أن زاوية الالتواء الناتجة من تأثير عزم الالتــواء حيث :

$$\theta = \frac{M_t \, . L}{I_P \, . G}$$

$$= \frac{10^5 \, .3 \times 10^3}{982 \, .8 \times 10^5} = 0.038 \;\; rad$$

ومنه نجد أن زاوية الالتواء $\theta = 2.18^{o}$.

b) نتبع نفس الخطوات بالنسبة للمقطع الدائري المجوف حيث نجد أن عــزم القصور القطبي حيث :

$$I_P = \frac{\pi}{32}\left(D_0^4 - D_i^4\right)$$

$$= \frac{\pi}{32}\left(10^4 - 5^4\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(625 - 39.06\right) = 920.40 \; cm^4$$

ثم نجد إجهاد القص حيث :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_P} R_0$$

$$= \frac{10^5}{920.40}(5) = 542 \;\; Kg / cm^2$$

أما زاوية الالتواء الناتجة فيمكن إيجادها بنفس العلاقة السابقة حيث :

$$\theta=\frac{M_t . L}{I_p . G}$$

$$=\frac{10^5\times 3\times 10^2}{920.40 \;.\; 8\times 10^5}$$

ومنه نجد أن زاوية الالتواء $\theta=2.33^\circ$.

c) نقوم بإيجاد عزم القصور القطبي للحلقة أولا حيث :

$$I_p = 2\pi \; R_i^3$$

$$= 2\pi\,(5)^3$$

$$= 786 \;\; cm^4$$

أما إجهاد القص فيساوي :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} \;.\; R$$

$$= \frac{10^5 \times (5)}{786}$$

$$= 637 \;\; Kg \;/\; cm^2$$

وزاوية الالتواء الناتجة :

$$\theta = \frac{M_t \;.\; L}{I_p \;.\; G}$$

$$= \frac{10^5 \;.\; 3\times 10^3}{786 \;.\; 8\times 10^5}$$

$$= 0.047 \;\; rad$$

ومنه :

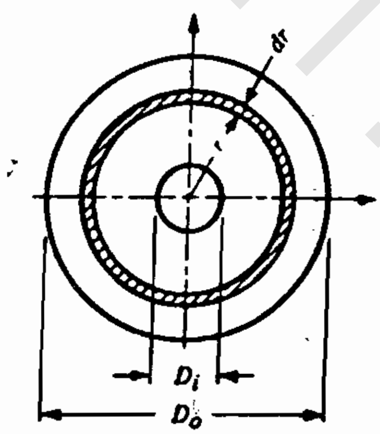
$$\theta = 2.74^\circ$$

أن حل مثل هذا المثال يبين أن إجهاد القص τ ، وزاوية الالتواء في المقطع المجوف يكون أكبر من إجهاد القص الأقصى وزاوية الالتواء في المقطع المصمت المساوي لقطره الخارجي ، وهذه الزيادة عبارة عن 6.7% ، 6.4% على الترتيب بينما نجد أن النقص في وزن القضيب يساوي 25% تقريباً .

وأن إجهاد القص τ وزاوية الالتواء θ في المقطع الحلقي أكبر من إجهاد القطبي وزاوية الالتواء في القطاع المساوي لقطره الخارجي وهذه الزيادة عبارة عن 25% لكل منهما بينما نجد أن النقص في وزن القضيب يساوي 60% تقريباً .

مثال (2-5)

أوجد عزم القصور القطبي لقضيب مجوف دائري مبين في الشكل (2-5) ثم أوجد نفس العزم إذا كان القضيب مصمت دائري .



الشكل (2-5)

الحــل :

كما أشرنا سابقاً القطر الخارجي للقضيب يرمز بالرمز D_o و D_i للقطر الداخلي وبأخذ حالة التماثل الدائري الموجودة ، فنختــار نظــام الإحــداثيات القطبية المبين في الشكل (5-2) .

أن عزم القصور القطبي يمكن إيجاده باستخدام التكامل كما ورد في الباب الرابع حيث :

$$I_p = \int_A r^2 . dA$$

وباختيار جزء من المساحة بحيث يكون r ثابتة لجمع النقط على الجــزء مثل الجزء الحلقي الشكل المظلل بنصف قطر r وبسمك dr ، أما مساحة هذا الجزء فتعطى بالمعادلة $dA = 2\pi r (dr)$ ، ومنه نستطيع الحصول على عزم القصور القطبي حيث :

$$I_p = \int_{\frac{1}{2}D_i}^{\frac{1}{2}D_o} r^2 (2\pi r) . dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{\frac{1}{2}D_i}^{\frac{1}{2}D_o}$$

$$= \frac{\pi}{32} \left(D_0^4 - D_i^4 \right)$$

أما في حالة إذا القضيب مصمتاً دائرياً فأن عزم القصور القطبي يعطي حسب العلاقة التالية :

$$I_p = \frac{\pi}{32} D_0^4$$

وهكذا حصلنا على تعبيرات لعزم القصور القطبي للقضبان المجوفة والمصمتة والتي تستخدم في حل المسائل المتعلقة بالقضبان المعرضة للالتواء .

مثـــال (3-5)

إذا تعرض قضيب من الصلب قطره 50 mm إلى عزم التـــواء مقــداره 1 KN. m . أوجد إجهاد القص الأقصى وزاوية الالتواء لطول مقــداره 1 m من القضيب ، إذا علمت أن معامل الجساءة $G = 85\ GN / m^2$.

الحــل :

نقوم أولا بإيجاد عزم القصور القطبي للمقطع المستعرض حيث :

$$I_P = \frac{\pi}{32}\left(D_0^4\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(50\right)^4 = 0.6 \times 10^4\ mm$$

أن إجهاد القص الناتج من الالتواء على أي مسافة r مـــن مركـــز القضـــيب يساوي :

$$\tau_r = \frac{M_t}{I_P} \cdot r$$

حيث ينشأ إجهاد القص الأقصى عند الرقائق الخارجية أي عند r = 25 mm .

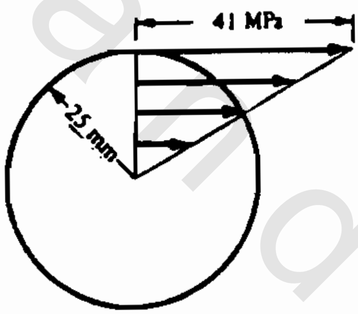
$$\tau_{\max} = \frac{10^3\left(10^3\right)\left(25\right)}{0.61 \times 10^6}$$
$$= 41\ MPa$$

وبناءً على ذلك فأن إجهاد القص يبدأ بالتغير خطياً من الصفر عنـــد مركـــز القضيب إلى 41 MPa عند الرقائق الخارجية للقضيب كما يبين الشكل (5-4) ، أما زاوية الالتواء θ بطول مقداره 1m من القضيب فيمكن إيجادها حســب العلاقة التالية :

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_P}$$

$$= \frac{10^3\left(10^3\right)\left(10^3\right)\left(10^4\right)}{85\times10^9\left(0.61\times10^4\right)}$$

$$= 0.019 \quad rad$$



الشكـل (5-4)

مثـــال (5-5)

أوجد القطرين الداخلي والخارجي لقضيب أجوف من الفولاذ طوله 3 m ، يجب أن ينقل عزم التواء مقداره 25KN بحيث لا تزيد زاوية الالتواء الكليـــة عن 2.5^o ، إذا كان إجهاد القص المسموح به يساوي 90 MPa . وإذا علمت أن معامل المرونة في الالتواء $G = 85\ GN/m^2$.

الحــل :

أشرنا سابقاً بأن D_o ، D_i يرمز أن إلى القطر الخارجي والداخلي علــى التوالي ، وأن زاوية الالتواء θ تعطى بالعلاقة (   ) حيث أن :

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_P}$$

وحيث أن θ يعبر عنها كزاوية نصف قطرية فأنه يجب تحويلها مــن درجــة (deg) إلى (rad) حيث :

$$2.5 \deg \times \frac{1\, rad}{57.3 \deg} = 0.043 \; rad$$

ومنه :

$$0.043 = \frac{M_t \cdot L}{G \times \frac{\pi}{2}\left(D_0^4 - D_i^4\right)}$$

$$0.043 = \frac{\left(25 \times 10^3\right)\left(10^3\right)\left(3 \times 10^3\right)\left(10^6\right)}{85 \times 10^9 \left(\frac{\pi}{32}\left(D_0^4 - D_i^4\right)\right)}$$

ومنه :

$$D_0^4 - D_i^4 = 2.08 \times 10^8$$

وقد أشرنا سابقاً بأن أقصى إجهاد قص عند الرقائق الخارجيــة للقضــيب حيث $r = D_o / 2$ وبالتالي فأننا نحصل على :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \left(D_o / 2\right)}{\frac{\pi}{32}\left(D_0^4 - D_i^4\right)}$$

$$90 \times 10^6 = \frac{\left(25 \times 10^3\right)\left(D_0 / 2\right)\left(10^9\right)}{\frac{\pi}{2}\left(D_0^4 - D_i^4\right)}$$

ومنه نجد :

$$D_0^4 - D_i^4 = 1.414 \times 10^4 \ D_0$$

وهكذا :

$$1.44 \times 10^6 D_o = 2.06 \times 10^8$$

ومنه نجد أن القطر الخارجي للقضيب :

$D_o = 145$ mm

وبالتعويض نجد أن :

$D_i = 125$ mm

وهكذا تم إيجاد القطرين الداخلي والخارجي للقضيب .

4.5 الأعمـــدة ناقلـــة القـــدرة

يستخدم هذا النوع من الأعمدة الدوراة لنقل القدرة من مصدر إنتاجها إلى مكان استخدامها ، وغالباً ما تكون مقاطع هـذه الأعمـدة دائريـة المقطـع . وكنتيجة لنقل القدرة عبر المقطع يكون العمود تحت تأثير عزم التـواء ثابـت القيمة بين نقطة مصدر القدرة ونقطة استهلاكها . ويتناسب قيمة عزم الالتواء

عادة مع مقدار القدرة الحصان الميكانيكي (Horse Power) طبقاً للعلاقة التالية :

$$M_t = \frac{H.P}{\omega}$$

حيث أن :

H.P : القدرة بالحصان الميكانيكي .

ω : السرعة الزاوية (Angular Velocity) .

وتعطى السرعة الزاوية كما يلي :

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}$$

حيث أن :

N : عدد الدورات في الدقيقة الواحدة .

وبالتعويض عن السرعة الزاوية ω ، فأن عزم الالتواء يصبح في هذه الحالة :

$$M_t = \frac{H.P(75)}{(2\pi N / 60)}$$

وعزوم الالتواء هذه يتولد عنها عادةً أجهادات قص على مقاطع الأعمدة الدوراة ويمكن حسابها كما ورد في البنود السابقة من هذا الباب .

مثـــال (6-5)

قضــيب مصــمت دائــري منــتظم قطــره مقــداره 50mm وطولــه يساوي 3m ، تم تحميل 50KW عند منتصف القضيب بواسطة سير يمــر على بكرة ، ثم استعملت هذه القوة لدفع ماكينتين واحدة عند النهاية اليســرى للقضيب وتستهلك 20KN والأخرى النهاية اليمنى . وتستهلك الباقي ومقداره 30KW . أحسب إجهاد القص الأقصى في القضيب وكذلك زاوية الالتواء بين طرفي القضيب إذا كان القضيب يدور بمعدل 200 (لفة / دقيقة) ومصــنوع من الصلب حيث أن معامل الجساءة للصلب $G = 85\ GN / m^2$. والســرعة الزاوية للقضيب $\omega = (2\pi \cdot 200) / 60 = 21\ rad / S$.

الحـل :

في النصف الأيسر للقضيب تم تحميل 20KW وهي تناظر عزم الالتواء M_{t_1} والذي يمكن إيجاده حسب العلاقة التالية :

$$M_t = \frac{H.P}{\omega}$$

$$M_{t_1} = \frac{20\times10^3}{21}$$
$$= 952\ N.m$$

وبالمثل يوجد في النصف الأيمن 30KN يناظر عزم الالتواء M_{t_1} أيضا يمكن إيجاده أيضا بنفس الطريقة حيث :

$$M_{t_1} = \frac{30\times10^3}{21}$$
$$= 1.43\ KN.m$$

وبالتالي فأن إجهاد القص الأقصى يحدث في الرقائق الخارجية فـــي الجـــزء الأيمن ويمكن الحصول عليه من صيغة الالتواء العادية حيث :

$$\tau_r = \frac{M_t \cdot r}{I_P}$$

$$\tau = \frac{1.43 \times 10^3 \, (25) \, (10^{25})}{\frac{\pi}{32} \, (50)^4}$$

$$= 58.25 \, MPa$$

أما زوايا الالتواء للنهايتين اليسرى واليمنى بالنسبة للمركز على التـــوالي فيمكن إيجادها من العلاقة التالية :

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p}$$

$$\theta_1 = \frac{0.952 \times 10^3 \, (1.5)(10^{12})}{85 \times 10^9 \times \pi / 32 \, (50)^4}$$

$$= 0.027 \, rad$$

$$\theta_2 = \frac{1.43 \times 10^3 \, (1.5)(10^{12})}{85 \times 10^9 \times \pi / 32 \, (50)^4}$$

$$= 0.041 \, rad$$

حيث أن θ_1 ، θ_2 في نفس الاتجاه ، لذا فأن زاوية الالتواء النسبية بين نهايتي القضيب تكون :

$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$
$$= 0.041 - 0.027$$
$$= 0.014$$

مثـــال (5-7)

عمود إدارة ذو مقطع دائري مجوف لسفينة ما يقوم بنقل قــدرة مقــدارها 3000 h.p حصان ميكانيكي بمعدل دوران قدره 200 rev / min لفة فــي الدقيقة ، فإذا كان إجهاد القص المسموح به يساوي $0.30\ t/cm^2$. أوجد القطر الخارجي للعمود إذا كان القطر الداخلي يساوي نصــف القطــر الخــارجي للعمود ، ومن ثم أوجد زاوية الالتواء إذا علمت أن طول العمــود هــو 10m ومعايير القص $G = 800\ t/cm^2$.

الحــل :

نقوم أولاً بإيجاد عزم الالتواء الناتج عن نقل القدرة على مقطـــع العمــود حيث أن :

$$M_t = \frac{H.P.(75)}{2\pi N / 60}$$
$$= \frac{3000\ (75)}{2\pi (200)/60}$$
$$= 1074\ \ t.cm$$

نفرض أن نصف القطر الخارجي هو r ، وأن نصف القطر الداخلي r/2 ، ثم نقوم بإيجاد عزم القصور القطبي حيث :

$$I_p = \frac{\pi}{2}\left(r^2 - \frac{r^4}{16}\right)$$
$$= \frac{15}{32}\pi r^4$$
$$= 1473\, r^4$$

أما إجهاد القص المسموح به فيعطى حسب العلاقة التالية :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \, . r}{I_P}$$
$$0.30 = \frac{1074\ (r)}{1.473\ r^4}$$

ومنه :

$$r^3 = 243 / cm^3$$
$$r = 13.45\, cm$$

أي أن القطر الخارجي لعمود الإدارة يساوي 26.90 cm ، ولحساب زاوية الالتواء θ لطول 10m من العمود فأنه يمكن تطبيق الجزء الأول والأخير من العلاقة التالية :

$$\frac{G\theta}{L} = \frac{M_t}{I_p} = \frac{\tau}{r}$$

ومنه نجد أن :

$$\theta = \frac{\tau \, . l}{r \, . G}$$

$$=\frac{0.3.\times 1000}{13.45\times 800}=0.028\,rad$$

$$=1.7^{\circ}$$

كما يمكن حساب الزاوية θ بتطبيق الجزء الأول والثاني من العلاقة حيث :

$$\frac{G\theta}{L}=\frac{M_t}{I_p}$$

ومنه :

$$\theta=\frac{M_t L}{I_p G}$$

نقوم أولاً بحساب عزم القصور القطبي I_p حيث أن :

$$I_p=1.473\,(13.45)^4$$
$$=48205\ cm$$

ثم نقوم بالتعويض للإيجاد قيمة الزاوية θ حيث :

$$\theta=\frac{10743\times 10^3}{48205\times 800}$$
$$=\ 0.028\,rad$$

ومنه الزاوية θ = 1.7° وهكذا حصلنا على نفس الجواب .

5.5 التواء الأنابيب الرقيقة الجدران

عادةً يطلق على العمود أو القضيب المجوف دائري المقطع أنبوبة رقيقة عندما يكون قطره الداخلي قريباً جدا من قطره الخارجي ، وتعتبر الأعمدة أو القضبان الرقيقة الجدران ذات المقطع المغلق أكثر جسوءة ومتانة لذا فهي تعتبر أكثر ملائمة واستخداما عند الالتواء . ومع ذلك حين تكون الأنبوبة في حالة التواء كما هو مبين في الشكل (5-5) ، فأنه يكون من الصعب حساب عزم القصور الذاتي لمقطعه بشكل دقيق من العلاقة المعروفة التالية :

$$I_P = \frac{\pi}{32}\left(D_0^4 - D_i^4\right)$$

ولذا يفضل استخدام العلاقة التقريبية التالية :

$$I_P = \int_A \rho^2 \, dA \approx \int_A dA = 2\pi r^3 t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11-5)$$

حيث أن :

r : نصف قطر متوسط محيط الأنبوبة .

t : سمك جدار الأنبوبة .

لنفرض أن إجهاد القص τ لمثل هذه الأنبوبة يكون منتظماً عبر سمك الجدار وأنه يساوي الإجهاد عن متوسط نصف القطر r كما يبين الشكل (b.5-5) ، فنحصل على إجهاد القص من العلاقة التالية :

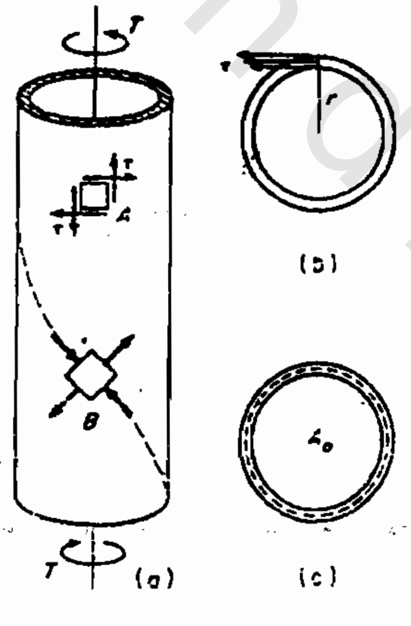
$$\tau = \frac{M_t}{2\pi r^2 t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12-5)$$

ونحصل على زاوية الالتواء θ للأنبوبة باستخدام العلاقة التالية :

$$\theta = \frac{M_t . L}{G . I_P}$$

$$= \frac{M_t . L}{2\pi r^2 t . G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13-5)$$

وقد أوضحنا في الباب السابق أن حالة القص الصرف كالتي تتعرض لها الجزيئة A والمبينة في الشكل (a.5-5) معادلة لحالة الشد ، والانضغاط الثنائي كالتي تتعرض لها جزئية مائلة بزاوية 45° عن محور الأنبوبة ، كالجزيئة B المبينة في نفس الشكل .



الشكل (5-5)

ومن هنا يمكن أن نستنتج أن شريط طويل ونحيف من جدار الأنبوبة ، يكون متطابق مع الخط الحلزوني المائل بزاوية 45^o والذي يبينه الشكل (a.5-5) ، سيتعرض إلى أنضغاط محوري ، فإذا كان جدار الأنبوبة رقيقاً جداً فأنه يمكن أن يتحدب . وبالأمكان إيضاح هذه الظاهرة عن طريق لف قطعة ورق لتصبح على شكل أنبوبة ، ومن ثم تعريضها إلى حالة التواء ، وقد تبين من تحليل هذه الظاهرة أنه يمكن تفادي خطر التحدب لأنبوبة فولانية طويلة حيث يجب أن يكون ($t / r > 1 / 60$) ، وذلك في الاستخدامات التي تكون أجهادات القص فيها ضمن الحدود المسموح بها .

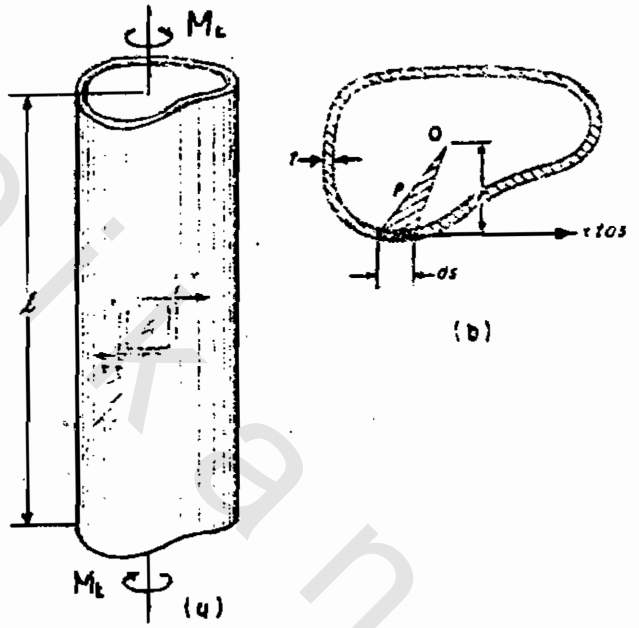
وإذا رمزنا إلى المساحة المحاطة بمتوسط محيط المقطع بالرمز A_o ، حيث أن $\pi r^2 = A_o$ ، ورمزنا إلى طول محيط المقطع بالرمز s ، حيث أن $2\pi r = s$ ، وأضفنا هذين الرمزين إلى المعادلتين (5-12) , (5-13) فسوف نحصل على العلاقات التالية :

$$\tau = \frac{M_t}{2A_0 t} \quad \text{...}(14-5)$$

$$\theta = \frac{\tau s L}{2A_0 G} \quad \text{...}(15-5)$$

وباستخدام هاتين المعادلتين يمكننا حساب إجهاد القص وزاوية الالتواء لأنبوبة رقيقة الجدار لها أي مقطع مثل الأنبوبة المبينة في الشكل (5-6) مثلاً ، وحين تتعرض أنبوبة ذات مقطع غير دائري إلى التواء كالأنبوبة المبينة في الشكل (5-6) فأنه سيحدث دوران نسبي بشكل عام بين المقاطع إلا أنها لا تبقى بنفس المستوى إذ سيحدث اعوجاج في كل مقطع من المقاطع ، فإذا لم تكن هناك موانع تمنع هذا الاعوجاج عن طرفي الأنبوبة فأنه سيأخذ شكلاً

يكون فيه انفعال القص γ لكل جزيئة من الجدار كالجزيئة A المبينة في الشكل (a.6-5) متساوياً بغض النظر عن بعدها عن مركز المقطع ، وبذلك فأن إجهاد القص τ المتناسب مع انفعال القص γ سيكون هو الآخر منتظماً عبــر جــدار الأنبوبة .



الشكل (6-5)

ولإيجاد العلاقة بين إجهاد القص τ وعزم الالتواء الخارجي M_t نأخذ أي مقطع من الأنبوبة وليكن المقطع المبين في الشــكل (b.6-5) مــثلاً ، حيــث نلاحظ أنه بالنسبة للجزيئة ds ستكون قوة القص τ tds حيث تعتبر t هنا سمك الجدار والذي نفترضه ثابتاً ، وبأخذ عزم هذه القوة حول النقطة o نجد أن :

$$dM_t = \tau\, t\, ds\, .r$$

حيث أن :

r : هي المسافة بين النقطة o ومماس متوسط المحيط .

وبأجراء عملية التكامل لهذه العزوم للطول الكلـــي s لمتوســـط المحـــيط نحصل على صيغة لعزم الالتواء حيث :

$$M_t = \tau t \int_0^s r\, ds$$

نلاحظ أن القيمة rds داخل أشارة التكامل تساوي ضعف مساحة المثلـــث الصغير المظلل ذو القاعدة ds والارتفاع r كما يبين الشكل (b.6-5) . ولـــذا فأن تكامل هذه القيمة للطول الكلي s يمثل ضعف المساحة المحاطة بمتوســـط محيط الجدار والتي رمزنا لها بالرمز A_o فأننا سنحصل على العلاقة التالية :

$$M_t = \tau\, t . 2 A_o$$

ومنها :

$$\tau = \frac{M_t}{2 A_o t}$$

وهذة المعادلة تطابق المعادلة (5-14) .

ولتحديد زاوية الالتواء θ للأنبوبة ، نستخدم مبدأ طاقة الانفعال ونحصـــل على طاقة الانفعال الكلية للأنبوبة حيث أن :

$$U = \frac{\tau^2}{2G} \times slt$$

حيث يمثل slt حجم مادة الأنبوبة ، بينما يمثل τ أجهاد القص المنتظم ومن

تساوي طاقة الانفعال هذه مع الشغل $M_t\,\theta/2$ الذي يؤديه عزم الالتواء على الأنبوبة فنحصل على :

$$\frac{M_t\,\theta}{2}=\frac{\tau^2 slt}{2G}$$

ومنها نجد أن :

$$\theta=\frac{\tau^2}{M_t\,G}slt \qquad (16-5)$$

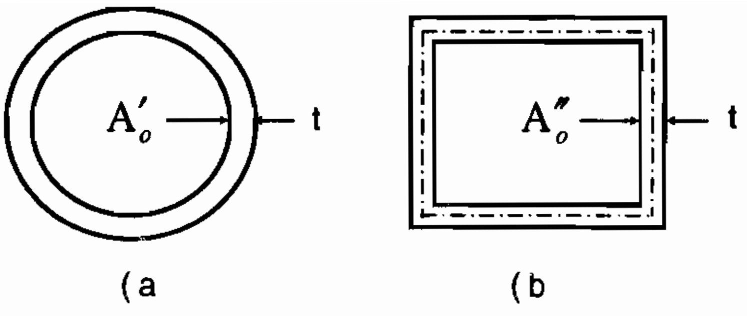
وبالتعويض عن قيمة عزم الالتواء والذي يساوي $2A_o t\tau=M_t$ في العلاقة (16-5) نجد أن :

$$\theta=\frac{\tau s l}{2A_o G} \qquad (17-5)$$

وهذة المعادلة تطابق العلاقة (15-5) . وتظهر فائدة المعادلتين (16-5) ، (17-5) في تحليل المسائل العملية التي تتضمن التواء أنابيب رقيقة الجدران تكون في كثير من الحالات غير دائرية المقطع . كما سيتم توضيح ذلك من خلال حلول المسائل المختلفة .

مثال (8-5)

أنبوبتان رقيقتان لاحدهما مقطع دائري وللأخرى مقطع مربع مصنوعتان من نفس المادة ولهما نفس سمك الجدار ونفس الطول والوزن الكلي كما هو مبين في الشكل (7-5) . إذا تعرضا إلى عزم الالتواء فما هي نسبة إجهادي القص ، وزاويتا الالتواء بينهما .



الشكل (5-7)

الحل :

أن نسبة إجهادي القص حسب العلاقة (5-14) كما يلي :

$$\frac{\tau'}{\tau''} = \frac{A''_o}{A'_o} \qquad \text{.......... ....} \ (1)$$

حيث أن :

A''_o ، A'_o تمثلان المساحتين التي يحيط بكل منهما متوسط محـيط لــه نفس الطول كما يبين الشكل (5-7) ، وتكون للدائرة :

$$A'_o = \frac{s^2}{4\pi}$$

بينما تساوي للمربع :

$$A''_o = \frac{s^2}{16}$$

وبالتعويض عن هاتين القيمتين بالمعادلة (1) نحصل على نسبة إجهادي القص وهو كما يلي :

$$\frac{\tau'}{\tau''}=\frac{4\pi}{16}=0.79$$

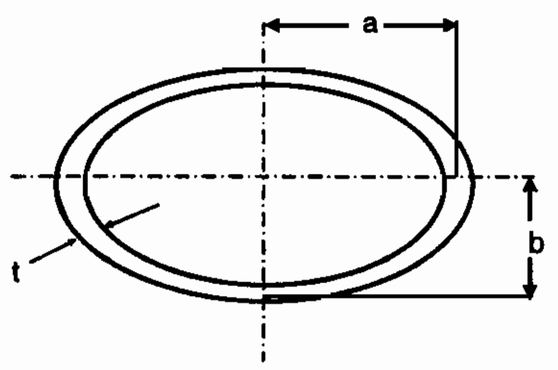
ونحصل على نسبة زاويتي الالتواء بتطبيق العلاقة (4-15) حيث :

$$\frac{\theta'}{\theta''}=\frac{\tau'.A''_o}{\tau''.A'_o}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=0.61$$

ومن الحل يتبين لنا أن المقطع الدائري يمثل كفاءة أعلى في استخدام المادة .

مثـــال (5-9)

الشكل (5-8) يبين أنبوبة مصنوعة من الصلب لها مقطع بيضوي ذو أبعاد a = 75mm ، b = 50mm ، وسـمكها t = 3mm ، ومعرضــة إلــى التواء . أوجد زاوية الالتواء المسموح بها لكل وحدة طول مــن الأنبوبــة إذا علمت أن إجهاد القص المسموح به $\tau=70N/mm^2$ ، وأن معــاير القــص $G=84KN/mm^2$.



الشكل (5-8)

الحل :

نقوم أولاً بالحصول على زاوية الالتواء لكل وحدة طول من الأنبوبة باستخدام العلاقة (5-17) حيث :

$$\theta = \frac{\theta'}{2} = \frac{\tau\, s}{2\, A_o G}$$

ثم نجد المساحة المحاطة بمتوسط المحيط حيث أن :

$$\begin{aligned} A_o &= \pi\, a\, b \\ &= 75\,.50\,\pi \\ &= 3.750\,\pi \end{aligned}$$

أما طول متوسط المحيط s فيمكننا إيجاده من خلال العلاقة التقريبية التالية :

$$s \cong \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right]$$

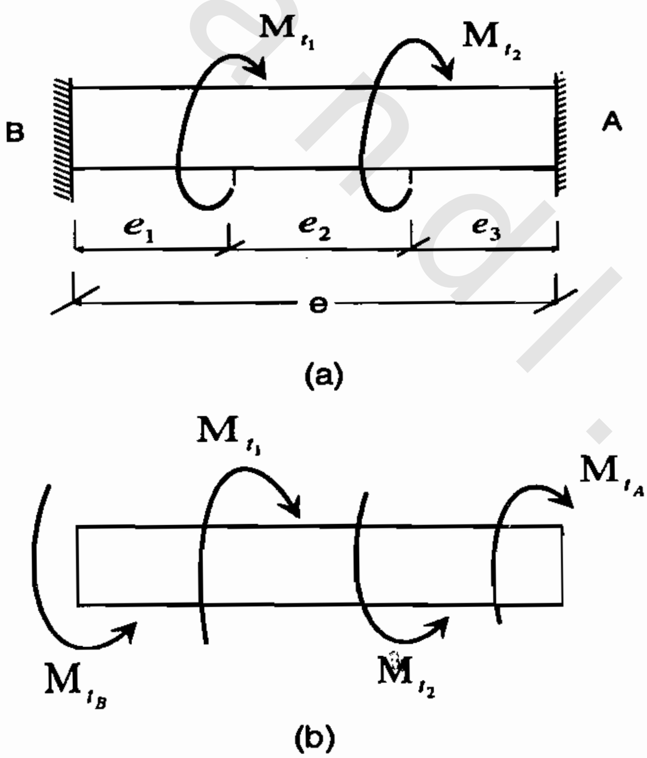
ومن هذه العلاقة نحصل على قيمة s حيث أن s = 398mm ، وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة السابقة لنحصل على زاوية الالتواء :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{70 \times 398}{2 \times 3.750\,\pi \times 84 \times 1000} \\ &= 0.00014 \ \ rad\ / mm \end{aligned}$$

6.5 الالتواء في المسائل الغير محددة استاتيكيا

في كثير من الأحيان قد نتعرض لدراسة مسائل لا يمكن حلهـا باسـتخدام شروط الاتزان الاستاتيكية فقط . وقد تم دراسة مثل هذا النوع من المسائل في الباب الثاني من هذا الكتاب الشد الضغط حيث أوضحنا كيفية حل مثـل هـذه المسائل ، وقد تصادفنا عند الالتواء مثل هذا النوع من المسائل والتي يزيد فيها عدد المجاهيل عن عدد معادلات الاتزان الاستاتيكية الثلاث .

أن طريقة حل مثل هذه المسائل هي نفس الطريقة التي استخدمت في حل المسائل الغير محددة استاتيكياً عند الشد ولتوضيح كيفية حل مثل هذا النوع من المسائل نقوم بدراسة القضيب المثبت من الطرفين عند النهايتين A , B كمـا هو مبين في الشكل (a . 9-5) .



الشكل (5-9)

لنفرض أن الاتجاهات لعزمي الالتواء M_{t_A} , M_{t_B} عند النهايتين موجبة كما يبين الشكل (b . 9-5) ، وواضح أن القضيب غير محدد استاتيكياً وذلك لأننا نحصل فقط على معادلة اتزان واحدة لإيجاد العزمين عند النهايتين حيث أن معادلة الاتزان الوحيدة من الاستاتيكا هي :

$$\mathrm{M}_{t_B} - \mathrm{M}_{t_1} + \mathrm{M}_{t_2} - \mathrm{M}_{t_A} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18-5)$$

أن معادلة الاتزان الإستاتيكي التي حصلنا عليها تحتوي على مجهولين وبالتالي فأن هذه المسألة تكون غير محددة استاتيكياً مرة واحدة ، ولحل هذه المسألة يجب أن نحصل على معادلة ثانية على أساس الانفعالات والازاحات في النظام ، والتي عادة ما تسمى بمعادلة التشوه .

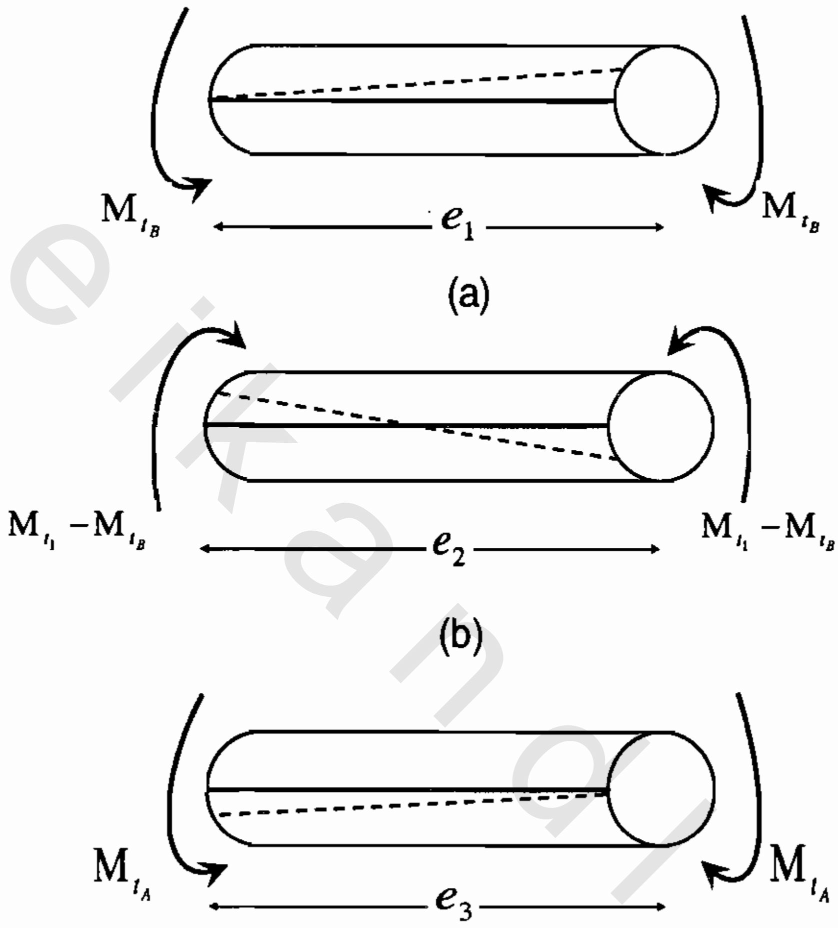
من أجل ذلك نقوم برسم المخطط البياني للجسم الحر للمنطقة اليسرى بطول e_1 كما يبين الشكل (a . 10-5) . وبالحل من اليسار إلى اليمين على طول القضيب نحصل على عزم الالتواء في المنطقة الوسطى بطول e_2 ، وبالجمع الجبري لعزوم الالتواء على يسار هذا المقطع ، أي $\mathrm{M}_{t_1} - \mathrm{M}_{t_B}$ ، والمخطط البياني للجسم الحر لهذه المنطقة مبين في الشكل (b . 10-5) ، أما المنطقة الأخيرة أي المنطقة اليمنى e_3 ، فأن المخطط البياني لها مبين في الشكل (c . 10-5) .

لنفرض أن الزاوية θ_1 ترمز إلى زاوية الالتواء عند نقطة التأثير عزم الالتواء M_{t_1} والزاوية θ_2 عند عزم الالتواء M_{t_2} ، ويمكننا إيجاد هذه الزوايا من اعتبار المناطق بأطوال e_1, e_3 حيث أن الزاوية θ_1 :

$$\theta_1 = \frac{\mathrm{M}_{t_B} \cdot e_1}{G \cdot \mathrm{I_P}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19-5)$$

والزاوية θ_2 هي :

$$\theta_2 = \frac{M_{t_A} \cdot e_3}{G \cdot I_P} \quad \text{.......................................} (20-5)$$



(a)

(b)

(c)

الشكل (5-10)

أن الوضع للراسم على سطح القضيب بعد الالتواء موضح في الشكل (5-10) بالخط المتقطع غير المتصل ، أما الوضع الأصلي للراسم على سطح القضيب فموضح بالخط الكامل .

أما المنطقة الوسطى بطول e_2 فأن زاوية الالتواء لطرفها الأيمن بالنسبة لطرفها الأيسر تساوي $\theta_1 + \theta_2$. وبالتالي فأن عزم الالتواء المسبب لهذا الانفعال يساوي $M_{t_1} - M_{t_B}$ حيث :

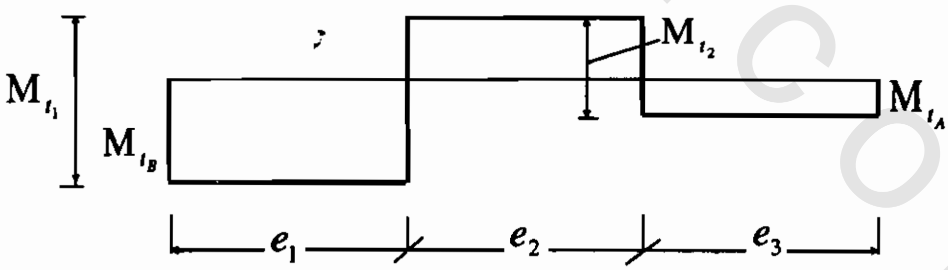
$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{(M_{t_1} - M_{t_B}).e_2}{G \cdot I_P} \quad ....(21-5)$$

وبحل العلاقتين (5-18) , (5-21) نجد عزوم الالتواء عند النهايتين A , B حيث :

$$M_{t_A} = M_{t_1}\frac{e_2}{e} + M_{t_2}\frac{e_1 + e_2}{e}$$

$$M_{t_B} = M_{t_1}\frac{e_2 + e_1}{e} - M_{t_2}\frac{e_3}{e}$$

ويمكن تمثيل التغير في عزم الالتواء مع الطول على طول القضيب بالرسم المبين في الشكل (5-11) .



الشكل (5-11)

كما يمكننا دراسة التغير في الراسم على سطح القضيب الذي كان في الأصل مستقيم على الطول الكلي e ، ولكن بعد التأثير بعزوم الالتواء M_{t_1} , M_{t_2} يكون له المظهر الموضح بالخط غير المستمر والمبين في الشكل (5-12) .

الشكل (5-12)

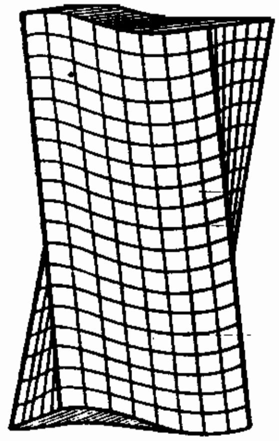
7.5 الالتــواء في المقاطــع الغير دائريــة

(Torsion of non Cicular Cross Sections)

أشرنا في السابق إلى عدة افتراضات أخذت بعين الاعتبار عند دراسة الالتواء في القضبان دائرية المقطع ، ومن أهم هذه الافتراضات أن مقطع القطاع عبارة عن مستو ويبقى كذلك مستوى بعد تأثير عزم الالتواء ، وهذا الافتراض يتحقق فقط في القطاعات الدائرية ولا يتحقق في بقية القطاعات .

عند تعرض القضبان والأعمدة الغير دائرية إلى الالتواء فان مقاطعها لا تبقى مستوية بل تصبح ملتوية ومعوجة ، وهذا الاعوجاج في المقاطع هو ما يعقد مسالة التواء عمود أو قضيب ذو مقطع مستطيل . ويمكن توضيح هذة الظاهرة من خلال رسم مربعات صغيرة على أسطح عمود مستطيل مصنوع من مادة المطاط ، وبعد ذلك تعريض العمود للالتواء فتصبح الخطوط التي كانت متعامدة مع محور العمود قبل الالتواء منحنية كما يبين الشكل (5-12) ،

وذلك يدل على أن مقدار الانفعال في المربعات الصغيرة يتغير علـــى طـــول جوانب المقطع . ويكون الانفعال عند أقصاه في منتصف كل جانب ويتلاشـــى عند زوايا المقطع .

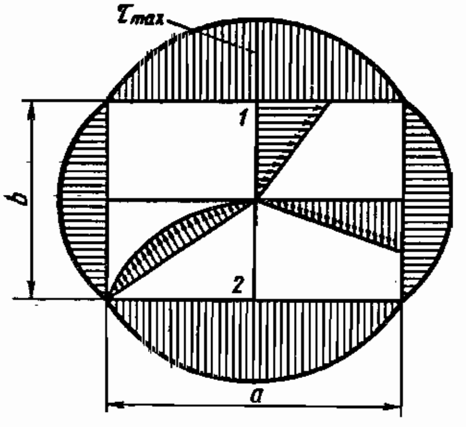


الشكل (5-12)

ولذا فأنه من المتوقع أن إجهاد القص سيتناسب مع هـــذا الانفعـــال أي أن تكون له قيمة قصوى في منتصف كل جانب وان يكون قيمته صفراً عند زوايا المقطع .

أن تحديد الأجهادات المماسية للأعمدة والقضبان ذات المقطع غير الدائري يعتبر مسألة صعبة بحد ذاتها ، وتحـل باســتخدام طـرق ومبـادئ نظريـة المرونة (Theory of Elasticity) .

وقد ظهرت الدراسات والتحليل لهذه المسألة ، أن أقصـــى إجهـــاد قـــص سيكون في منتصف الضلع الأطول من مقطع المستطيل حيث أن $a > b$ كما هو مبين في الشكل (5-13) .



الشكل (5-13)

أن أقصى أجهادات قص تظهر في النقاط 1 ، 2 أي في منتصف الأبعاد الطولية وتساوي :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha a b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22-5)$$

حيث أن :

a : الضلع الأطول .

b : الضلع الأقصر للمقطع المستطيل .

α : معامل يعتمد على النسبة بين a / b كما يبين الجدول (5-1) .

أن الشكل (5-13) يبين توزيع أجهادات القص على محيط القضيب وباتجاه محاور وأقطار المقطع وفي زوايا المستطيل الإجهاد يساوي الصفر .

أما زاوية الالتواء θ فيمكن الحصول عليها باستخدام العلاقة التالية :

$$\theta = \frac{M_t}{G.\beta a b^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23-5)$$

حيث أن :

β : معامل يعتمد على نسبة الأضلاع . ويبين الجدول (5-1) أيضاً قيم للمعامل β .

الجدول (5-1)

قيم المعاملين α β لحساب التواء القضبان ذات المقطع المستطيل

a : b	1	2	3	4	5	10	20	∞
α	0.21	0.25	0.27	0.28	0.29	0.31	0.32	0.33
β	0.14	0.23	0.26	0.28	0.29	0.31	0.32	0.33

ويتضح من الجدول (5-1) أن المقاطع المستطيلة الضيقة التي تكون نسبة أضلاعها $\frac{a}{b} \geq 10$ يمكن أن تكون $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. عندئذ تصبح معادلتا إجهاد القص الأقصى وزاوية الالتواء لكل وحدة طول :

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{ab^2} \qquad \ldots\ldots(24-5)$$

$$\theta = \frac{3M_t}{ab^2.G} \qquad \ldots\ldots(25-5)$$

ولهاتين العلاقتين أهمية في النواحي العملية ليس بالنسبة لمستطيل نحيف فقط وإنما لإيجاد حلول تقريبية لأشكال أخرى من المقاطع التي يكون فيها عرض المقطع صغير نسبياً . فعلى سبيل المثال يمكن إيجاد زاوية الالتواء للمقطعين الموضحين في الشكل (5-14) ، وذلك بتطبيق العلاقة (5-25) ، مع

استخدام طول خط الوسط للمقطع بدلاً عن a فيكون $a = \Phi r$ للمقطع المبين في الشكل (a . 14-5) ، و $a = 2b - c$ للمقطع المبين في الشكل (b . 14-5) .

أما بالنسبة للإجهاد الأقصى في المقطعين السابقين فيمكن الحصول على قيمته للمقطع المبين في الشكل (a . 14-5) باستخدام العلاقة (24-5) ، أما الإجهاد في المقطع المبين في الشكل(b . 14-5) فستكون قيمته الوسطى عند الزاوية الداخلية ، لذا يجب ضرب الإجهاد المحسوب من العلاقة (24-5) فمعامل يسمى معامل تركز إجهاد مناسب ، وقد تبين من التجارب أن هذا المعامل يعتمد على نسبة نصف قطر التقوس r عند الزاوية إلى السمك c ، وقيم هذا المعامل يمكن إيجادها في جداول خاصة بقيم هذا المعامل .

الشكل (14-5)

مثال (10-5)

في الشكل السابق (b.514) إذا كان مقطع الزاوية لها الأبعاد التالية $a = 100$ mm و $c = 12$ mm ، وإذا كان هذا هو مقطع لعمود من الصلب طوله 1.2 m ويتعرض لعزمي الالتواء $M_t = 300$ N.m عند طرفيه . أوجد أقصى إجهاد قص ، وزاوية الالتواء بين طرفي العمود إذا علمت أن نصف قطر التقوس هو $r = 6$ mm .

الحــل :

باستخدام العلاقة الخاصة بمقطع لزاوية ذات بعدين مع استخدام طول خط الوسط للمقطع بدلاً من b حيث أن :

$$b = 2a - c$$
$$b = 2 \times 100 - 12 = 188 \text{ mm}$$

وبتطبيق ذلك في العلاقة (5-24) يمكن لنا الحصول أقصى إجهاد قص حيـث أن :

$$T_{max} = \frac{3 \times 300 \times 1000}{188 \times (12)^2}$$
$$= 33.5 \ N / mm^2$$

ثم نقوم بتحديد معامل تركز الإجهاد من الجدول والذي يعتمد على النسبة مـا بين r / c ، والتي تساوي 2/ 1 = 12 / 6 . وبناءً على ذلك يكـون معامـل تركز الإجهاد مساوياً 2 ، لذا فيصبح إجهاد القص الأقصى عنـد الزاويـة الداخلية عبارة عن إجهاد القص الأقصى مضروباً بمعامل تركز الإجهاد الذي حصلنا عليه حيث :

$$\tau = 2 \times 33.5 = 67 N / mm^2$$

أما بالنسبة لزاوية الالتواء الكلية فنحصل عليها بتطبيق المعادلـة (5-25) حيث أن :

$$\phi = \theta l = \frac{3 \times 300 \times 1000 \times 1200}{188 \times (12)^3 \times 84}$$
$$= 0.0398 \ rad$$

7.5 تمـــاريـــن

س1: أحسب معامل المرونة في الالتواء " معاير القــص للمــادة " G عنــد تعرض قضيب مصــمت دائــري قطــره 40mm لعــزم الالتــواء مقــداره 0.35KN.m مسبباً زاوية التواء مقدارها 3.74^{o} درجة في طول 3m .

س2: أحسب أجهاد القص الأقصى في قضيب مصمت دائري قطره 120mm يحمل عزم التواء مقداره 20KN . وما قيمة زاوية الالتواء لوحدة الطول لــو أن المادة كانت مصنوعة من الصلب ولها معاير القص $G = 85\ GN/m^2$.

س3: قضيب مجوف من الفولاذ قطره الخارجي 150mm وقطــره الــداخلي 125mm . أوجد عزم الالتواء الأقصى الذي يمكن أن ينقله القضيب في حالة التصــرف اللــدن الكامــل لــو أن حــد الخضــوع للمــادة فــي القــص يساوي 170MPa .

س4: أوجد أبعاد القطر الخارجي والقطر الداخلي لعمود مجوف إذا كانت نسبة أقطاره 3:4 ، وكان أقص أجهاد قص مسموح به يساوي 70MPa ، وزاويــة الالتواء المسموح بها لا تزيد عن 3.6° في طول 4m . علما بان مادة العمود من الصلب وأن معاير القص $G = 80\ G\ N/m^2$.

س5: أحسب عزم الالتواء وزاوية الالتواء الناتجين في عمود مجوف قطــره الخارجي 300mm والداخلي 100mm ، وطوله 7m إذا كان أقصى أجهــاد مسموح به 75MPa علماً بان معامل الجساءة $G = 80\ G\ N/m^2$.

س6: أحسب أجهاد القص وزاوية الالتواء لعمود مروحة سفينة طولــه 12m وقطره الخــارجي 30cm وقطــره الــداخلي 20cm إذا أثــر عليــه عــزم التــواء 200KN.m إذا علمت أن معامــل الجساءة لمــادة العمــود تساوي $G = 80\ MPa$

س7: عمود فولاذي قطره 6mm يدور بسرعة 10^3 دورة بالدقيقة . ما هي أقصى قدرة يستطيع هذا العمود نقلها إذا كان أجهاد القص المسموح به هو $\tau = 35\ N/mm^2$.

س8: أحسب القطر المناسب D لعمود من الصلب ينقل قدرة 150KW بسرعة 105 دورة بالدقيقة إذا كان أجهاد الاشتغال في القص هو $42 N/mm^2$.

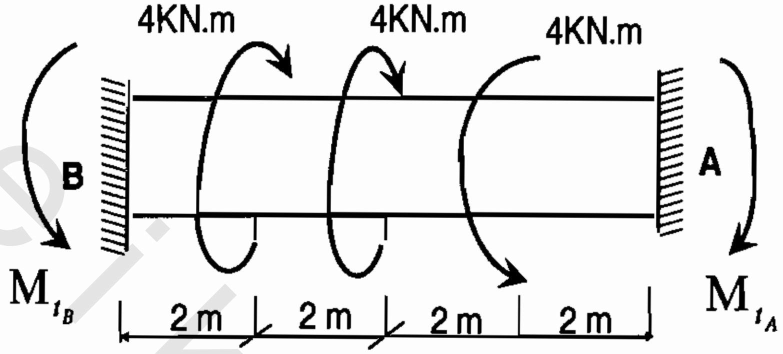
س9: عمود مجوف من الصلب قطره الخارجي D وقطره الداخلي D/2 . أحسب القطر المناسب D_{sw} للعمود لينقل قدرة 150KW بسرعة 105 دورة بالدقيقة إذا كان أجهاد القص المسموح به هو $42N/mm^2$.

س10: عمود دائري مصمت من الصلب ينقل قدرة مقدارها 1.5MW عند 5rev/s . أحسب القطر اللازم للعمود بحيث لا يحدث التواء بزاوية أكبر من درجة واحدة في طول مقداره 20m ، وكذلك لا يزيد أجهاد القص عن 70MPa . إذا علمت أن معاير القص $G = 85\ GN/m^2$.

س11: قضيب من النحاس مصمت بقطر 120mm وطول 600mm متصل بقضيب مصمت من الصلب بطول 1m وقطره 125mm . إذا تم التأثير بعزم الالتواء مقداره 20KN.m عند نهاية كل نهاية للقضيب . أوجد إجهاد القص الأقصى في كل من النحاس والصلب وزاوية الالتواء الكلية للقضيب كله . إذا علمت أن معامل الجساءة لمادة النحاس $G = 40\ GN/m^2$ ، ولمادة الصلب $G = 85\ GN/m^2$.

س12: أنبوبة من النحاس مربعة المقطع ، طول ضلعها الخارجي هو a = 25mm وعليها إن تتحمل بأمان عزم التواء $M_t = 69.5\ N.m$ ، أحسب السمك المناسب ، لجدار الأنبوبة إذا كان أجهاد الاشتغال هو $\tau = 42\ N/mm^2$.

س13: أوجد عزوم الالتواء المؤثرة عند النهايات المثبتة للعمود الدائري المحمل بثلاثة عزوم الالتواء والمبين في الشكل (5-15) ، إذا كان المقطع المستعرض للعمود ثابت على مدى الطول .



الشكل (5-15)

س14: أوجد قطر عمود مصمت من الفولاذ ينقل قدرة مقدارها KW 200 عن سرعة مقدارها 3 rev / s ، لو أن إجهاد القص المسموح به يساوي 80 MPs . وأوجد أيضا أبعاد عمود مجوف من الصلب قطره الداخلي يساوي ثلاثة أرباع القطر الخارجي تحت نفس الظروف ، ثم أوجد النسبة بين زاويتي الالتواء لوحدة الطول لهذين العمودين .

س15: قضيب مجوف من الصلب قطره الداخلي مقداره 50mm وقطره الخارجي مقداره 75mm . احسب عزم الالتواء الأقصى الذي يمكن أن ينقله القضيب في حالة التصرف اللدن إذا علمت أن حد الخضوع في القص يساوي 15MPa .