الباب السادس

الانحناء

(Bending)

1.6 مقدمة

في كثير من الأحيان تتعرض الأعمدة والقضبان لتأثير الحمولات العرضية ، أو القوى الخارجية المزدوجة ، والتي يمر مستوى تأثيرها بمحور العمود أو القضيب . وفي هذه الحالة تظهر في المقاطع العرضية للعمود عزوم الانحناء (Bending Moments) ، أي العزوم الداخلية التي يكون تأثيرها عمودياً على المستوى العرضي للعمود أو القضيب . وأن تأثير الحمولات العرضية تعمل على انحناء محور القضيب ، ويسمى مثل هذا النوع من الحمولات بحمولات الانحناء (Bending Loads) .

أن الأعمدة والقضبان التي تعمل بالأساس على الانحناء تسمى عادة بالعتبات أو الكمرات (Beams) ، وعليه فان الجزء الإنشائي يسمى عتبة أو كمرة عندما يكون ذلك الجزء طويلاً نسبياً بالمقارنة مع بعديه الجانبين ، ويتعرض وهو في حالة ارتكاز مناسب إلى قوى عرضية تؤدي إلى حنايته في مستوى محوري . ويسمى الانحناء بالانحناء الخالص (Pure Bending) إذا كان عزم الانحناء هو القوة الداخلية الوحيدة في مقطع العمود أو القضيب . ولكن في أحياناً كثيرة تظهر في المقاطع قوى عرضية إلى جانب عزوم الانحناء ، ويسمى الانحناء في هذه الحالة بالانحناء العرضي .

أما إذا كان مستوى تأثير عزم الانحناء يمر بأحد محاور القصور الذاتي الرئيسية المركزية لمقطع القضيب العرضي ، فيسمى في هذة الحالة الانحناء بالانحناء المستوى (Plane Beding) ، أما في الحالة المضادة فيسمى بالانحناء المائل . وعند الانحناء المستوى يبقى محور العتبة في مستوى القوى الخارجية حتى بعد التشوه ، أي في مستوى القوة . أما عند الانحناء المائل فأن مستوى التشوهات لا ينطبق على مستوى القوة .

أن الانحناء المستوى للقضبان الرقيقة الجدران في حالة الحمولات التي تؤثر في مستوى يمر بمحور القصور الذاتي الرئيسي الذي لا يعتبر محور تماثل لمقطع القضيب العرضي ، يصبح معقد نتيجة تشوهات الالتواء . وسوف نقوم في هذا الباب بدراسة انفعالات وتشوهات الانحناء الناتجة في حالة الانحناء المستوى الخالص ، أما الانحناء المائل الذي يرتبط بحالة مقاومة معقدة فيتم بحثه في أبواب أخرى .

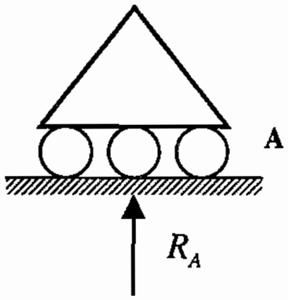
2.6 الركائز والدعائم والاتصالات

من المهم معرفة أنواع الركائز والدعائم والاتصالات في المنشاءات التي تعمل على الانحناء ، لكي يتم تحديد عدد المجاهيل المتمثلة في ردود الأفعال ، يجب علينا معرفة نوعية القوى المؤثرة على هذة المنشاءات من قوى عاملة (Acting Forces) ، أن كانت قوى مركزة أو قوى موزعة أو مزدوجة وغيرها ، حتى نستطيع تحديد القوى الداخلية المعروفة بردود الأفعال (Reations) في الركائز والمساند والاتصالات .

وقد اشرنا إلى أن ردود الأفعال تتوقف على نوع الارتكاز والتثبيت (Supports and connection) ، والتي تقسم إلى أنواع كثيرة من أهمها ثلاثة أنواع ثنائية الأبعاد وهي :

1- الارتكاز البسيط أو ما يسمى بالمسند المتدحرج (Roller support) ويعتبر أبسط أنواع الارتكاز ، مثل المتدحرجات ، وحالة تلامس الأجسام الملساء ، أن هذا الارتكاز لا يمنع دوران نهاية العتبة أو الكمرة ، وكذلك أزاحتها باتجاه مستوى التدحرج . ويمكن أن يظهر فيها رد فعل واحد ، ويكون رد الفعل عمودياً على مستوى التلامس والتدحرج ، ويمر بمركز الدحراج .

أن الشكل (6-1) يبين المسند المتدحرج ونظراً لان أنجاه رد الفعل في المركز البسيط محدد فهو يعتبر مجهولاً واحداً في معادلات الاتزان . أن هذا النوع من الارتكاز يعطى العتبات أمكانية تغيير طولها بسهولة عند اختلاف درجات الحرارة ، وفي نفس الوقت التخلص من احتمال ظهور الأجهادات الحرارية .

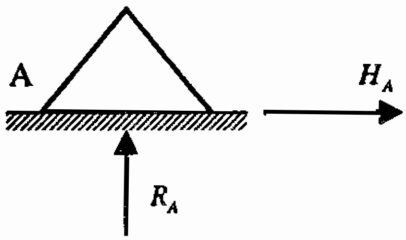


الشكل (6-1)

حيث أن :

R_A - رد الفعل العمودي في المسند A .

2- الارتكاز المفصلي أو ما يسمى بالمفصل (Hinge) ، وهو عبارة عن تثبيت نقطة من الجسم بحيث يمكن أن يدور حولها ، لذا فأن هذا النوع من الارتكاز يسمح بدوران طرف العتبة أو الكمرة ، ولكنه يمنع أزاحتها الانتقالية إلى أية جهة كانت ، أن رد الفعل الحاصل فيها يمكن تحليله إلى مركبتين أفقية ورأسية . ويجب أن يقع المفصل على مستوى محور العتبة ، ورد الفعل في المفصل يكافئ قوة خط عملها مجهول كتلامس جسم مع سطح خشن ، وعلى ذلك ينطوي رد فعل المفصل على مجهولين هما مركبتيه المتعامدتين H_A , R_A كما هو مبين في الشكل (6-2) .



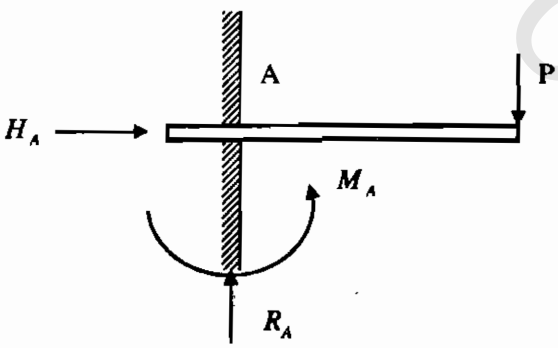
الشكــل (2-6)

حيث أن :

H_A – رد الفعل الأفقي H_A في المفصل A .

R_A – رد الفعل العمودي R_A في المفصل A .

3- التثبيت الصلب أو المسـند المثبـت (Fixed support) أن مثـل هـذا التثبيت - الربط - لا يسـمح بالإزاحـة الخطيـة والزاويـة للمقطـع فـوق المرتكز ، ويعني ذلك منع الحركة سواء خطياً أو دورانياً ، أي أن رد الفعـل يكون مكافئ لقوة وعزم ازدواج ، كحامل مثبت أي عمود كهربائي . وعلـى هذا يتألف رد فعل التثبيت من مجاهيل ثلاثـة هـي H_A , R_A , M_A ، أي مركبتين رأسية وأفقية وعزم الربط أو القمط كما هو مبين في الشكل (3-6) .



الشكــل (3-6)

حيث أن :

H_A - رد الفعل الأفقي في المسند الثابت A .
R_A - رد الفعل العمودي في المسند الثابت A .
M_A - عزم التثبيت في المسند A .

أن حل المسائل المتعلقة بإيجاد ردود الأفعال يتطلب أنشاء وتوضيح القوى التي تؤثر على العتبات ، وتعد هذه الخطوة البداية السليمة والمهمة في حل هذه المسائل والتي تعتمد على شروط الاتزان الإستاتيكي بعد ذلك ، لذلك يتم وضع مخطط الجسم الحر (Free-Body Diagrams) للمسألة المدروسة .

وتسمى العتبة المثبتة من أحد طرفيهــا بالعتبــة الكابوليــة . وإذا أمكــن الحصـــــول علـــــى ردود الأفعـــــال فـــــي الركــــائز مــــن معادلات الاتزان الإستاتيكي ، فتسمى عند ذلك عتبــات محــددة استاتيكيــا (Statically Determinate Beams) . وإذا كان عدد ردود الأفعــال فــي الركــائز أكثــر مــن عــدد معــادلات الاتــزان الإســتاتيكي المتــوفرة لهذه المسألة فتسمى العتبات عندئــذ ، بالعتبــات غيــر المحــددة اســتاتيكياً (Statically Indeterminate Beams) . ولتحديد ردود الأفعال فــي مثــل هذه العتبات فأن ذلك يتطلب وضع معــادلات أضــافية تســمى بمعــادلات الانفعالات (التشوهات) أو الازاحات .

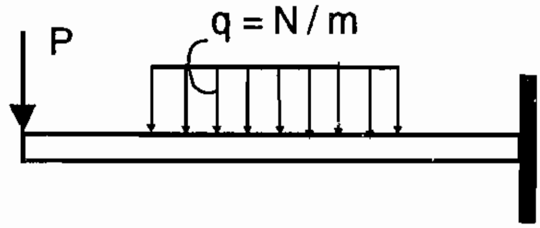
ولغرض رسم الرسم البياني للجسم الحر الخاص بالعتبة ، فأنه لا بد مــن التعرف على نوع القوى التي تؤثر على العتبة وخاصة في الركائز والمســاند والاتصالات المختلفة . كما يجب تعريف كل قوة بمقدارها المعلوم أو برمــز عندما تكون القوة غير معلومة . ويمكن افتراض اتجاه القوى غير المعلومــة على أن يصحح هذا الافتراض فيما بعد إذا ظهر أنه غير صحيح .

3.6 أنــواع وتصــنيف العتبــات

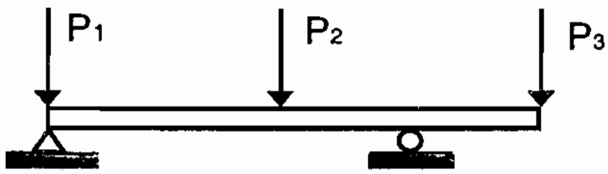
أشرنا في بداية هذا الباب إلى أن الجزء الإنشائي يسمى عتبـــة أو كمـــرة عندما يكون ذلك الجزء طويلاً نسبياً بالمقارنة مع بعديه الجانبين ، ويتعـــرض وهو في حالة ارتكاز مناسب إلى قوى عرضية تؤدي إلى حنايته في مســـتوى محوري ، وأن الأعمدة والقضبان التي تعمل بالأساس على الانحنـــاء تســـمى عادة بالعتبـــات أو الكمـــرات (Beams) . وتســـمى العتبـــة المثبتـــة مـــن أحـــد طرفيهـــا بالعتبـــة الكابوليـــة (Cantilever Beam) كمـــا يبـــين الشكل (6-a.4) ، حيث أن النهاية اليسرى للعتبة تنحرف بحرية في حـــين أن النهاية اليمنى مثبتة بجساءة تامة داخل حائط ، وتتكون ردود الأفعـــال علـــى العتبة عند اليمين من رد فعل رأســـي بالإضـــافة ورد فعـــل أفقـــي وعـــزم التثبيت أو القمط . كما تسمى العتبة المرتكزة بحرية عند نقطتين وتمتد أحدى نهايتيها أو كلتا النهايتين خلف نقاط الارتكاز أيضاً بالعتبة الكابولية كمـــا هـــو مبين في الشكل (6-b.4) .

وتسمى العتبات أو الكمرات التي ترتكز بحرية عند نهايتهـــا بالعتبـــات البسيطة (Simple Beams) ، أي أن دعائم الارتكاز عند النهايتين قادرة فقط على بذل قوى على العتبة وغير قادرة على بذل أي عزم . وهذا لأنه لا يوجد أي قيود ضد الدوران الزاوي لنهايتي العتبة عند نقاط الارتكاز عنـــدما تبـــدأ العتبة بالانفعال تحت تأثير الحمولات المختلفة . والشكل (6-c.4) يبـــين هـــذا النوع من العتبات .

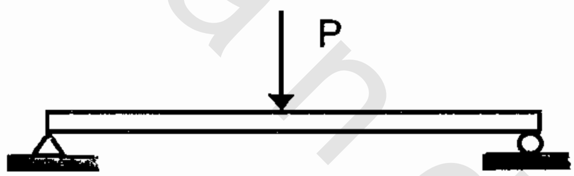
ويلاحظ في العتبات والكمرات البسيطة أنه يجب تكـــون أحـــدى دعـــائم الارتكاز على الأقل قادرة على الحركة في الاتجاه الأفقي بحيث لا توجد قـــوة في اتجاه محور العتبة .



(a



(b

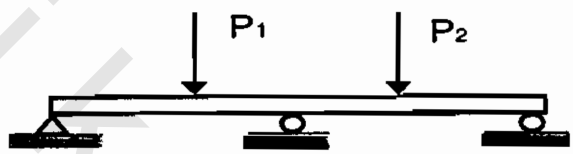


(c

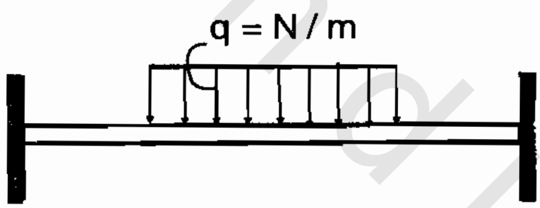
الشكـــل (4-6)

وإذا أمكن الحصول على ردود الأفعال في ركائز ودعائم العتبات البسيطة والعتبات الكابولية وغيرهـا مـن معـادلات الاتـزان الإسـتاتيكي ، فـأن هذه العتبـات والكوابيـل عندئـذٍ تسـمى بالعتبـات المحـددة استاتيكيـا (Statically Determinate Beams) . أما إذا كان عدد ردود الأفعال فـي الركـائز أكثـر مـن عـدد معـادلات الاتـزان الإسـتاتيكي المتـوفرة لهذه المسألة ، فأن هذه العتبات عندئذ تسمى بالعتبات غير المحددة اسـتاتيكياً

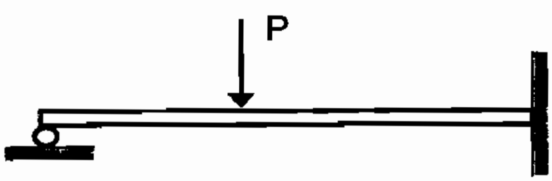
(Statically Indeterminate Beams) . ولتحديد ردود الأفعال في مثل هذه العتبات فأن ذلك يتطلب وضع معادلات أضافية تسمى بمعادلات الانفعالات (التشوهات) أو الازاحات . والشكل (5-6) يبين أمثلة لعتبات وكمرات غير محددة أستاتيكياً ، حيث يبين الشكل (a.5-6) عتبة تمتد وترتكز على ثلاث ركائز ، والشكل (b.5-6) يبين عتبة مثبتة بجساءة عند نهايتيها ، والشكل (c.5-6) يبين عتبة كابولية مرتكزة عند نهايتها البعيدة بمسند متحرك ، وكل هذه العتبات أمثلة على العتبات الغير محددة استاتيكياً .



(a



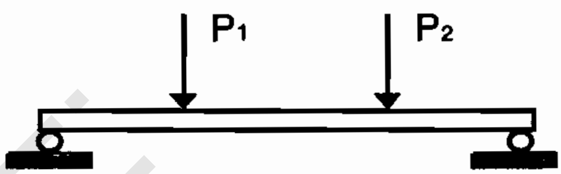
(b



(c

الشكل (5-6)

أما إذا كانت عدد ردود الأفعال أقل من عدد معادلات الاتزان الإستاتيكي ، فأن هذه العتبات في هذه الحالة تسمى بالعتبات أو الكمرات الغير مستقرة أو المنهارة أي أنها لا تحقق شروط الاتزان ولا يجوز استخدامها ، والشكل (6-6) يبين عتبة غير مستقرة لن عدد ردود الأفعال اثنان وشروط الاتزان هي ثلاث شروط .



الشكل (6-6)

4.6 أنواع الحمولات

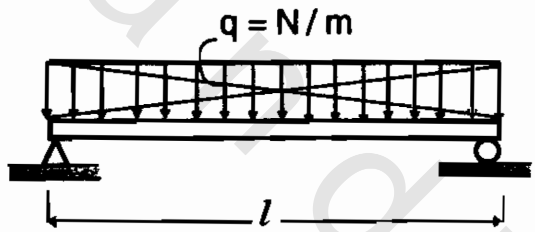
بعد دراستنا لأنواع الركائز والدعائم والاتصالات المستخدمة في تثبيت المنشاءات التي تعمل على الانحناء أي الكمرات والعتبات المختلفة ، ومعرفتنا بردود الأفعال التي قد تنتج عن كل نوع من هذه الركائز والدعائم والمساند يجب علينا قبل البدء في دراسة طرق أيجاد ردود الأفعال في المنظومات أن نقوم بالتعرف على طبيعة وأشكال القوى الخارجية ، أي الحمولات الخارجية العاملة والمؤثرة على الكمرات والعتبات ، والتي عادةً ما تصادفنا في كثير من المسائل ، والتي يمكن أن تكون ذو أشكال مختلفة منها :

1- القوى المركزة وهي القوى التي تؤثر في نقطة واحدة ، ومثل هذا النوع من الحمولات يظهر في الرسم البياني لمخطط الجسم الحر .

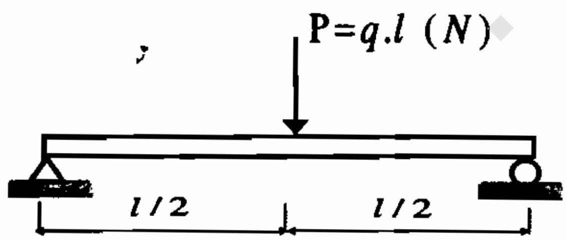
2- القوى أو الحمولات الموزعة بانتظام (uniformly distributed load)

ويعبر عن هذه القوى والحمولات بالنيوتن لكل متر طولى ، ويرمز لها بالرمز qووحدتها هي (N/m) . أن هذا النوع وهو الحمولة الموزعة بانتظام يكـون على شكل مستطيل ، ومن الأمثلة على ذلك وزن عتبة مسنده إسنادا بسيطاً كما هو مبين في الشكل (a.7-6) حيث يعتبر الوزن لهذه العتبة حمولـة موزعـة بانتظام على المتر الطولي لهذه العتبة .

وعند حل المسائل المختلفة وبذات عند أيجاد ردود الأفعال ورسم مخططـات الأجسام الحرة (F.B.D) ، يجب علينا تحويل هذة الحمولة الموزعة بانتظـام إلى قوة ة مركزه مكافئة لهـذه الحمولـة الموزعـة كمـا هـو مبـين فـي الشكل (b.7-6) ، ونلاحظ انه تم تحويل الحمولة إلى قوة مركزة تـؤثر فـي مركز الثقل بالنسبة للمستطيل أي في منتصفة مقدارها $P = q.l, (N)$.



(a

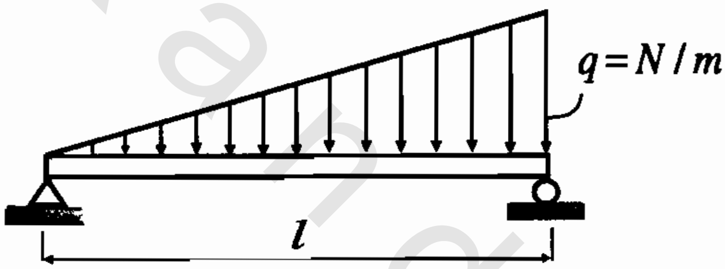


(b

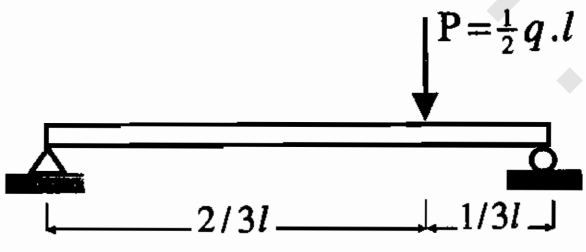
الشكـل (7-6)

3- الحمولات المتغيرة بانتظام (uniformly varying load) ، ويعبر عن هذه القوى والحمولات بالنيوتن لكل متر طولي ، ويرمز لها بالرمز q ووحدتها هي (N/m) . أن هذا النوع وهو الحمولة الموزعة المتغيرة بانتظام تكون على شكل مثلث كما هو مبين في الشكل (a.8-6) ، وهذه الحمولات تعمل على الجدران الرأسية والمائلة للخزانات المحتوية على السوائل ، كما تعمل أيضا على العتبات والأبنية المختلفة .

وعند حل المسائل الخاصة بإيجاد ردود الأفعال ورسم مخطط (F.B.D) للعتبة ، يجب علينا تحويل هذه الحمولة الموزعة بانتظام إلى قوة مركزه مكافئة لهذه الحمولة الموزعة تؤثر في مركز ثقل المثلث كما يبين الشكل (b.8-6) .



(a



(b

الشكل (8-6)

نلاحظ أن الحمل المتغير بانتظام (q) قد تم استبداله بقوة مكافئة P حيث أن :

$$P = \frac{1}{2} q \cdot e \ , \ (N)$$

وهي مساحة مثلث الحمولة الذي قاعدته e وارتفاعه q ، وتؤثر هذه القوة كم أشرنا سابقاً في مركز ثقل المثلث الذي يبعد عن المسند المتدحرج A مسافة $\frac{2}{3} e$ وعن المفصل B $\frac{1}{3} e$. وأن حلول الأمثلة المختلفة ستوضح كيفية استبدال وتحويل هذه الأنواع من الحمولات إلى قوى مركزه في نقطة واحدة .

5.6 تحديد ردود الأفعال في الركائز والدعائم والاتصالات

أن تحديد ردود الأفعال في الركائز والاتصالات ومناطق التثبيت تم دراسته في مادة الميكانيكا النظرية ، ولكن سوف نقوم بذكر الخطوات الهامة والرئيسية التي يجب أتباعها عند حلول المسائل بشكل عام لتنظيم التحليل ، وتسلسل خطوات الحل بالاتجاه الصحيح والتي تمكن الطالب من استيعاب هذه الخطوات بطريقة سهلة ومبسطة . وتعتبر هذه الخطوات مرشداً يساعد في حلول المسائل المتعلقة بالاتزان وتحديد ردود الأفعال ، ومن أهم هذه الخطوات هو :

1- معرفة نوعية القوى المؤثرة على من قوى عاملة (Acting Forces) ، والقوى المعروفة بردود الأفعال (Reations) في الركائز والدعائم والمساند والاتصالات .

2- وضع الرسم البياني لمخطط الجسم الحر (Free-Body Diagrams) للعتبة أو الكمرة المدروسة ، ولغرض رسم مخططات الجسم الحر لابد من

التعرف على نوع القوة التي تؤثر على الجسم لكافة أنواع الدعائم والمساند والاتصالات . كما يجب تعريف كل قوة بمقدراها المعلوم أو برمز عندما تكون القوة غير معلومة .

3- تفرض اتجاهات ردود الأفعال عادةً في الاتجاهات الموجبة على أن تعدل على الرسم البياني إذا ظهرت سالبة بعد الحل .

4- نقوم بتحويل القوى الموزعة إلى قوى مركزة في نقطة واحدة كما تم عرضه في البند السابق .

5- نضع شروط الاتزان الإستاتيكي الثلاث والتي يمكن التعبير عنها جبرياً حسب المعادلات التالية :

$$\sum F_x \rightarrow^{+} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-6)$$

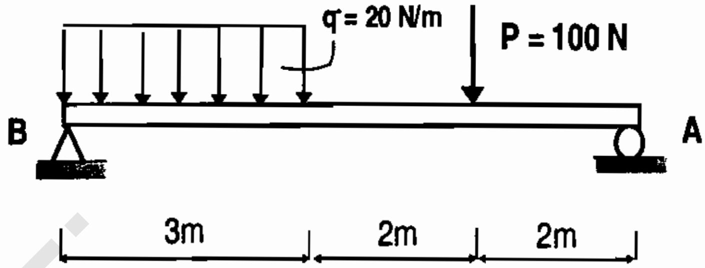
$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-6)$$

$$\sum M_{(\bullet)} \circlearrowleft^{+} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-6)$$

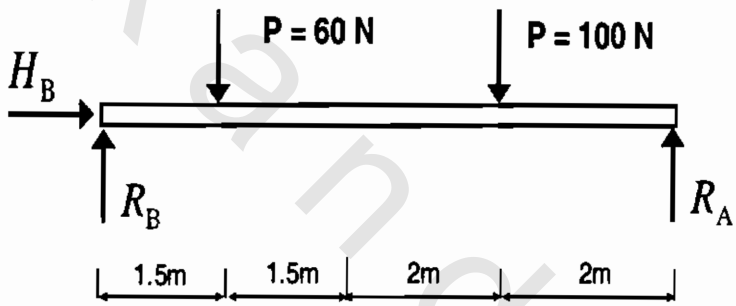
وبحل هذه المعادلات يمكننا أيجاد ردود الأفعال في كمرة أو عتبة محددة أستاتيكياً . أن المعادلات الثلاثة المبينة أعلاه تبين أن الجزء الإنشائي أو الجسم يكون في حالة أتزان عندما تكون مجوع القوى المؤثرة على المحور (x) مساوية للصفر ، ومجموع القوى على محور (y) مساوية للصفر، ومجموع عزوم القوى حول أي نقطة أختيارية (•) من العتبة مساوياً للصفر . وهذه الشروط تسمى بشروط الاتزان الإستاتيكي وهي لازمة وكافية للاتزان . وأن الأمثلة التالية سوف توضح لنا كيفية إيجاد ردود الأفعال في الركائز والمساند المختلفة حسب الخطوات المذكورة أعلاه . حيث يجب على الطالب استيعاب هذه الخطوات لأهميتها في دراسة وتحديد القوى الداخلية ورسم مخططات قوى القص وعزم الانحناء .

مثــال (6-1)

أوجد ردود الأفعال في المسند المتدحرج A ، والمفصل B علــى العتبــة البسيطة المحملة بالحمولات الخارجية المبينة في الشكل (a.9-6) .



(a



(b

الشكــل(6-9)

الحــل :

لتحديد ردود الأفعال نقوم كخطوة أولى ومهمة برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.9-6) ، وبعد ذلــك نضـــع معــادلات شروط أتزان العتبة الثلاث ، ويلاحظ من المخطط أن المسالة تحتــوي علــى ثلاثة مجاهيل ردود أفعال ، وبالتالي هي مسالة محددة أســتاتيكياً ، لان عــدد المجاهيل يساوي عدد معدلات وشروط الاتزان الثلاث وهي :

$$\sum F_x \rightarrow^{+} = 0 \;;$$

$$H_B = 0 \quad \text{...}(1)$$

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \;;$$

$$R_B + R_A - 100 - 60 = 0 \text{...}(2)$$

$$\sum M_{(B)} \circlearrowleft^{+} = 0 \;;$$

$$-60(1.5) - 100(5) + R_A(7) = 0 \text{..............................}(3)$$

نقوم بحل المعادلات الثلاثة لنحصل على قيم ردود الأفعال المجهولة ، فمن المعادلة رقم (1) نجد أن :

$$H_B = 0$$

ومن المعادلة رقم (3) نجد رد الفعل العمودي R_A حيث أن :

$$7\,R_A = 90 + 500$$

$$R_A = 84.2\ N$$

وبالرجوع إلى المعادلة رقم (2) نجد رد الفعل العمودي في المفصل B حيث أن :

$$R_B + R_A = 160$$

$$R_B = 160 - 84.3$$

$$= 75.7\ N$$

وهكذا حصلنا على ردود الأفعال الثلاث ، أما الخطوة الأخيرة فتسمى خطوة التأكد من الحل أي من قيم ردود الأفعال التي حصلنا عليها ، وذلك عن طريق أيجاد العزم حول أي نقطة اختيارية اخرى غير النقطة (B) ولتكن النقطة (A) مثلاً ، حيث يجب أن يكون مجموع العزوم حول هذة النقطة مساوياً للصفر وذلك بعد تعويض قيم ردود الأفعال التي حصلنا عليها حيث :

$$\sum M_{(A)} \curvearrowleft^{+} = 0 \;;$$

$$100(2)+60(5.5)-75.7(7) \overset{?}{=} 0$$

$$200 \;+\; 330 \;-\; 530 \;=0$$

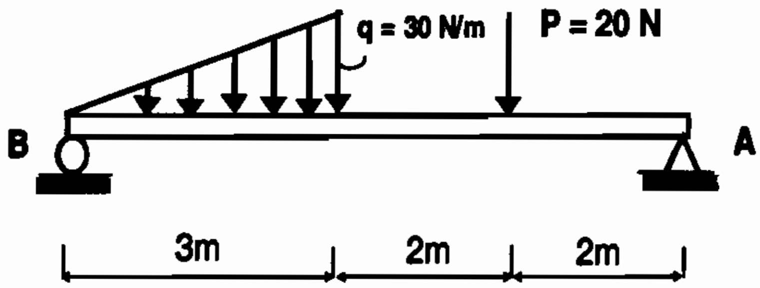
وهكذا تم التأكد من صحة قيم ردود الأفعال التي حصلنا عليها .

مثـــال (2-6)

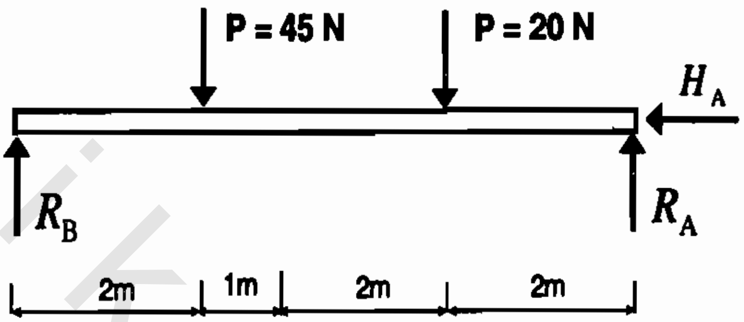
أوجد ردود الأفعال في المفصل A ، والمسند المتدحرج B على العتبة البسيطة المحملة بالحمولات الخارجية المبينة في الشكل (a.10-6) .

الحـــل :

لتحديد ردود الأفعال نقوم بأتباع نفس الخطوات التي تم أتباعها في المثال (2-6) ، حيث نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.10-6) ، وبعد ذلك نضع معادلات الاتزان الثلاثة ، أن الرسم البياني لمخطط الجسم الحر يبين أن العتبة أو الكمرة محددة أستاتيكياً ، لان عدد المجاهيل يساوي عدد معدلات وشروط الاتزان الثلاث ، نضع هذه الشروط ونجد ردود الأفعال حيث :



(a



(b

الشكــل (10-6)

$$\sum F_x \rightarrow^{+} = 0 \;;$$

$$H_A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \;;$$

$$R_B + R_A - 45 - 20 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\sum M_{(A)} \circlearrowleft^{+} = 0 \;;$$

$$20(2) + 45(5) + R_A(7) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نلاحظ من مخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.10-6) أن الحمولة المتغيرة بانتظام على شكل مثلث قد تم تحويلها إلى قوة مركزة في نقطة واحدة تؤثر في مركز ثقل المثلث حسب العلاقة التالية :

$$P = \frac{1}{2} q . e$$

وبالتالي فأن هذة القوة المركزة تساوي 45N . وبحل المعادلات الثلاثة نحصل على قيم ردود الأفعال المطلوب إيجادها ، فمن المعادلة رقم (1) نجد أن :

$$H_A = 0$$

ومن المعادلة رقم (3) نجد رد الفعل العمودي R_B حيث أن :

$$7 R_B = 265$$

$$R_B = 37.85 \ N$$

وبالرجوع إلى المعادلة رقم (2) نجد رد الفعل العمودي في المفصل A حيث أن :

$$37.85 + R_A = 65$$

$$R_A = 27.15$$

وهكذا حصلنا على ردود الأفعال الثلاث ، وللتأكد من الحل أي من قيم ردود الأفعال التي حصلنا عليها ، نقوم أيجاد العزم حول أي نقطة اختيارية اخرى غير النقطة (A) ولتكن النقطة (B) مثلاً حيث أن :

$$\sum M_{(B)} \curvearrowleft^{+} = 0 \;;$$

$$R_A(7) - 20(5) - 45(2) \overset{?}{=} 0$$

$$27.15 \;-\; 100 \;-\; 90 \;=0$$

مثــال (6-3)

أوجد ردود الأفعال في المسند المثبــت للعتبــة الكابوليــة المبينــة فــي الشكل (a.11-6) .

الحــل :

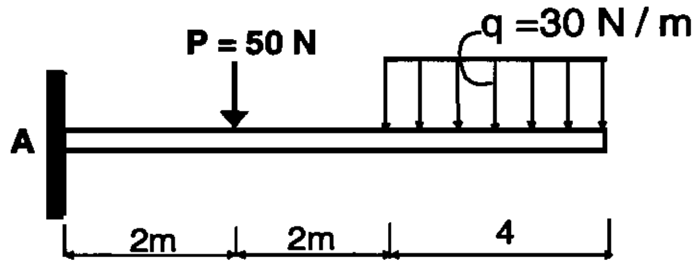
لتحديد ردود الأفعال نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبــة كمــا يبــين الشــكل (b.11-6) ، وبعــد ذلــك نضــع معــادلات الاتــزان الثلاثة ، أن الرسم البياني لمخطط الجسم الحر يبــين أن العتبــة أو الكمــرة الكابولية محددة أستاتيكياً ، لان عدد ردود الأفعال في المسند المثبت يســاوي ثلاثة مجاهيل هي رد الفعل الأفقي H_A ، ورد الفعل العمودي R_A ، وعــزم مفاعل M_A وتساوي معدلات وشروط الاتزان الثلاث ، بعد ذلك نضــع هــذه الشروط ونجد ردود الأفعال حيث :

$$\sum F_x \rightarrow^{+} = 0 \;;$$

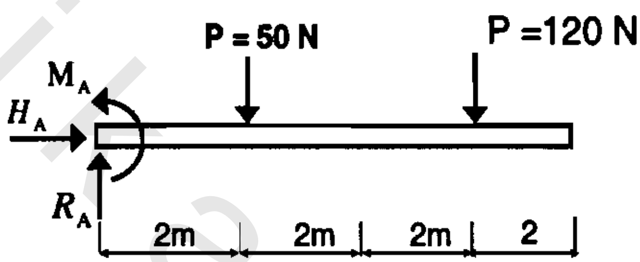
$$H_A = 0 \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \;;$$

$$R_A - 50 - 120 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$



(a



(b

الشكـــل (6-11)

ومن هذه المعادلة نجد رد الفعل العمودي R_A حيث :

$$R_A = 170\,N$$

ولإيجاد رد الفعل الثالث نجد العزم حول النقطة A حيث :

$$\sum M_{(A)} \circlearrowleft^{+} = 0\;;$$

$$M_A - 50(2) + 120(6) = 0 \;......................(3)$$

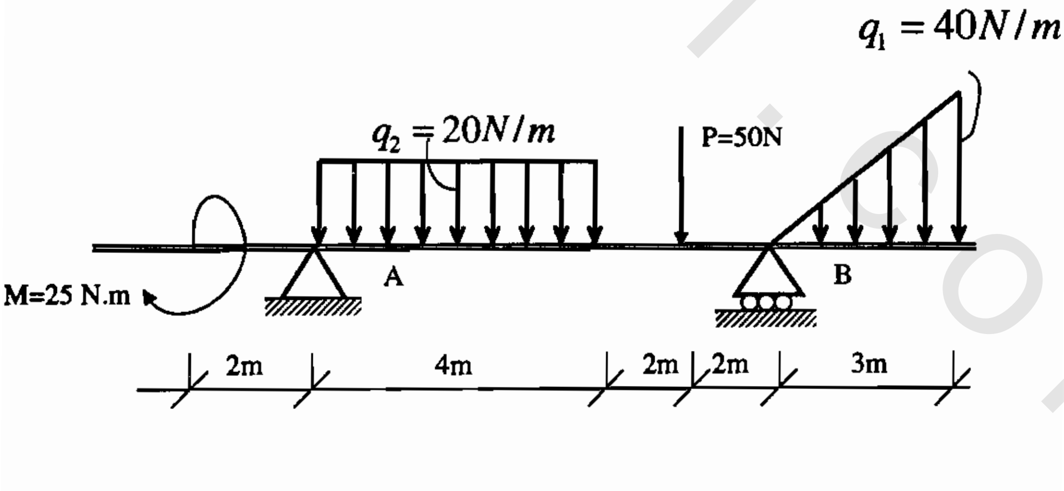
ومن هذه العادلة نجد أن :

$$M_A = -620 \ N.m$$
$$M_A = 620 \ N.m$$

أن العلامة السالبة تبين أن اتجاه العزم المفاعل الذي اتخذناه في البداية يجب أن يعكس . وهكذا فأن هذا العزم في الطرف المثبت يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية بالنسبة للطرف المثبت .

مثـــال (6-4)

الشكل (6-12) يبين عتبة ذات بروز جانبية ومسلط عليها الحمولة الموزعة المتغيرة بانتظام ($q_1 = 40N/m$) ، والقوة المركزة في نقطة واحدة (P = 50 N) ، والحمولة الموزعة بانتظام ($q_2 = 20N/m$) ، وعزم ناتج عن أزدوج (M = 25N.m) . العتبة مسندة عند النقطة A بمسند مفصلي وعند النقطة B بمسند متدحرج (عجلة) . أوجد ردود الأفعال عند A ، B على العتبة .



الشكـــل (6-12)

الحـــــل :

نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة (F.B.D) كما يبـــين الشكل (13-6) ، حيث نقوم بتحويل كافة الحمولات الموزعة (q_2, q_1) إلى قوى مركزة تؤثر في نقطة واحدة حتى نستطيع وضـــع شـــروط ومعـــادلات الاتزان الإستاتيكي الثلاث .

أن الحمولة الموزعة بانتظام على شكل مستطيل q_2 تحول إلـــى قـــوة عمودية مركزة تؤثر في مركز ثقل المستطيل وتساوي :

$$q_2 . e = 20\,(N / m) . 4\,(m) = 80\ N$$

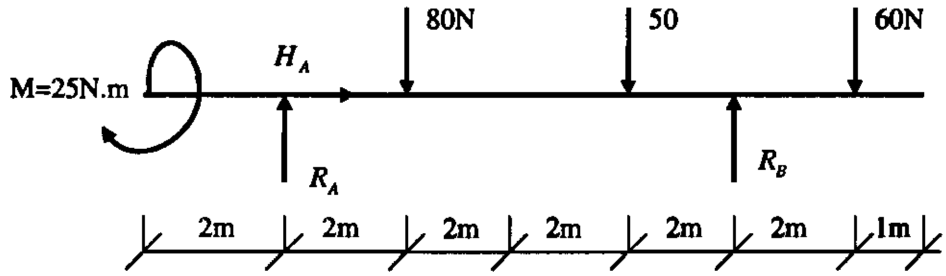
أما بالنسبة للحمولة المتغيرة بانتظام على شكل مثلث فتستبدل بقوة مركـــزة مؤثرة في مركز ثقل المثلث وتساوي:

$$\frac{1}{2} q_1 \ . e = \frac{1}{2} \times 40 \times 3 = 60\ N$$

وهي مساحة مثلث الحمولة الذي قاعدته 3m وارتفاعه 40N/m وتؤثر هذه القوة في مركز ثقل المثلث الذي يبعد (2m) من المسند المتدحرج B.

أما العزم M=25N.m فانه يظهر على مخطط الجسم الحر كما هو ويدخل في معادلة العزم الشرط الثالث للأتزان حسب إشارته إذا كان باتجاه عقـــارب الساعة سالب ، وإذا كان بعكس عقارب الساعة موجب .

بعد الانتهاء من رسم مخطط الجسم الحر للعتبة نقـــوم بوضـــع معـــدلات الاتزان الثلاث التي تمكننا من أيجاد ردود الأفعال المطلوبة حيث :



الشكـــل (6-13)

مخطط الجسم الحر (F.B.D) للعتبة

$$\sum F_x \xrightarrow{+} = 0;$$

$$H_A = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0;$$

$$R_A + R_B - 80 - 50 - 60 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\sum M_A \circlearrowleft^+ = 0;$$

$$-60(10) + R_B(8) - 50(6) - 80(2) - 25 = 0 \ldots\ldots(3)$$

ومن المعادلة رقم (3) نجد رد الفعل (R_B) حيث :

$$8R_B = 600 + 300 + 160 + 25$$

$$R_B = \frac{600 + 300 + 160 + 25}{8} = 135,6N$$

وبالرجوع إلى معادلة رقم (2) نجد قيمة رد الفعل R_A :

$$R_A + 135,6 - 80 - 50 - 60 = 0$$
$$R_A = 54,4\,N$$

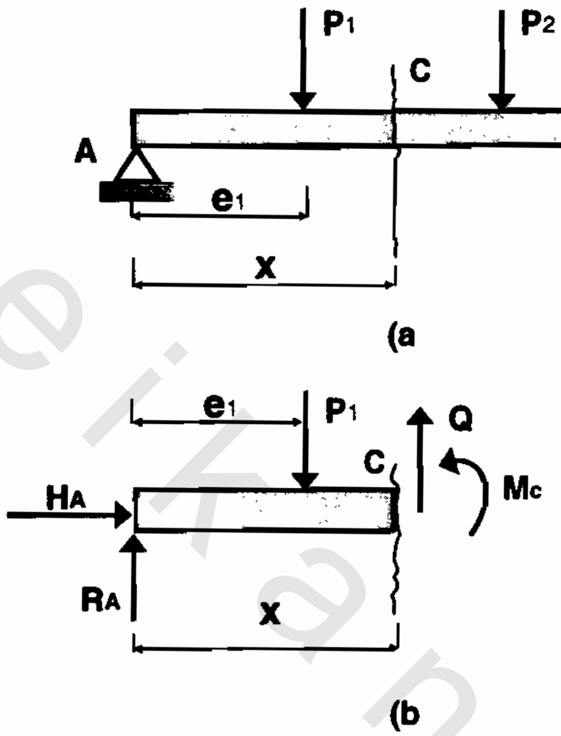
وللتأكد من الحل نستخدم معادلة المجموع الجبري للقوى بالاتجاه العمودي أو نجد العزم حول نقطة اختيارية أخرى مثل B حيث يجب أن يكون مجموع العزوم مساوياً للصفر .

6.6 تحديد القوى الداخلية عند الانحناء

ذكرنا في بداية هذا الباب أنه عند تحميل العتبات والكمرات بقوى وازدواجات خارجية تظهر أجهادات داخلية في داخل هذه العتبات ، وبالتالي سوف يحدث بشكل عام أجهادات عمودية واجهادات قص . ففي حالة الانحناء العرضي المستوى تظهر في المقاطع العرضية للعتبة القوة العرضية أو ما يسمى بقوة القص (Shearing Force) والتي يرمز لها بالرمز Q ، وعزم الانحناء (Bending Moment) ويرمز له بالرمز M .

ولتحديد هذه القوى والاجهادات الناتجة عنها عند أي مقطع من العتبة فأنه من الضروري معرفة القوى المحصلة والعزم المحصل المؤثرين عند هذا المقطع . حيث يمكن الحصول عليها بتطبيق معادلات الاتزان الإستاتيكي الثلاث . ولدراسة ذلك نأخذ العتبة البسيطة والمبينة في الشكل (a.14-6) ، ونقوم بعمل قطع مثل c في النقطة التي تهمنا أي النقطة موضع الدراسة ، والواقعة على مسافة مثل x من المفصل الأيسر للعتبة ، ثم نهمل أحد قسمي العتبة وليكن الطرف الأيمن ونقوم بدراسة توازن القسم الأيسر .

والشكل (b.14-6) يبين استبدال الفعل المتبادل لقسمي العتبة بالقوى الداخلية عزم الانحناء M_c ، وقوة القص Q .



الشكل (14-6)

ولتحديد M_c ، Q نضع معادلات الاتزان الإستاتيكي حيث أن :

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \;;$$

$$R_A - P_1 + Q = 0$$

$$Q = P_1 - R_A \;;$$

$$Q = \sum (P_i)_y$$

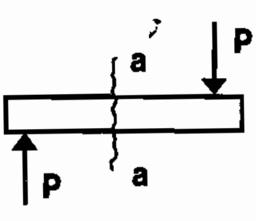
وهكذا نجد أن قوة القص Q في المقطع العرضي تساوي عددياً المجموع الجبري لمساقط جميع القوى الخارجية على مستوى المقطع والتي تؤثر على جهة واحدة من المقطع .

$$\sum M_{(B)} \circlearrowright^{+} = 0 ;$$
$$-R_A(x)+P_1(x-e_1)+M_c = 0$$
$$M_c=R_A(x)-P_1(x-e_1)$$
$$M_c=\sum m_c(p_i)$$

من هذه المعادلة نجد أن عزم الانحناء M_c في المقطع العرضي للعتبة يساوي عددياً المجموع الجبري لعزوم القوى الخارجية المحسوبة بالنسبة لمركز ثقل المقطع والتي تؤثر على جهة واحدة من المقطع .

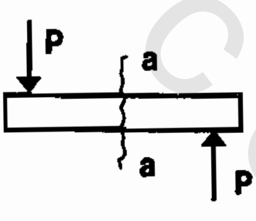
7.6 اصطلاح الإشارات لقوة القص وعزم الانحناء

تعتبر قوة القص Q في مقطع العتبة مثلاً في المقطع (a – a) موجبة إذا كان اتجاه محصلة القوى الخارجية التي تقع على يسار المقطع من الأسفل إلى الأعلى ، والتي تقع على يمين المقطع من الأعلى إلى الأسفل كما يبين الشكل (a . 15-6) . وتعتبر سالبة إذا كان العكس كما يبين الشكل (b . 15-6) .



$Q_{a-a} > 0$

(a

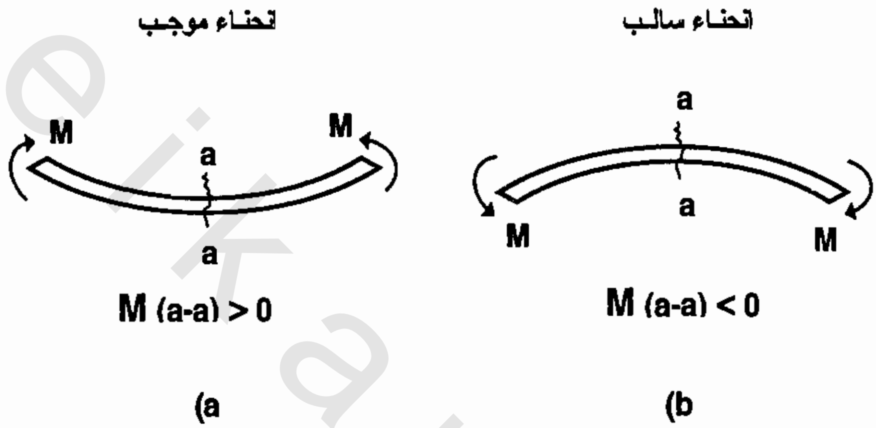


$Q_{a-a} < 0$

(b

الشكل (15-6)

ويعتبر عزم الانحناء M في مقطع العتبة ، مثلاً في المقطع (a-a) موجباً ، إذا كان اتجاه محصلة عزم القوى الخارجية التي تقع على يسار المقطع ، باتجاه دوران عقارب الساعة ، والتي تقع على يمين المقطع ، باتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة كما يبين الشكل (a.16-6) ، ويعتبر عزم الانحناء سالباً إذا كان العكس كما هو مبين في الشكل (b. 16-6) .



الشكل (16-6)

أن عزوم الانحناء المبينة في الشكل (a.16-6) تحني العتبة بحيث يكون التحدب إلى الأسفل ، أما العزوم المبينة في الشكل (b . 16-6) فأنها تحني العتبة بحيث يكون التحدب إلى الأعلى . ومن هنا يمكننا استنتاج طريقة أسهل لتحديد الإشارة الجبرية لعزم الانحناء يمكننا تذكرها ببساطة . حيث يعتبر عزم الانحناء موجباً ، إذا كان مقطع العتبة المدروس ينحني بتقعر إلى الأسفل .

ويمكن تلخيص اصطلاحات الإشارات لقوة القص وعزم الانحناء بناءً على ما تم عرضه بالقول أن " القوة التي تعمل على ثني العتبة أو الكمرة بحيث تتقعر إلى الأعلى أنها تحدث عزم انحناء موجباً . والقوة التي تعمل قص

الجزء الأيسر من العتبة إلى أعلى بالنسبة للجزء الأيمن أنها تحدث قوة قص موجبة . كما يمكننا القول أن القوى الخارجية المتجهة أعلى تحدث عزم انحناء موجباً والقوة التي تتجه إلى أسفل تحدث عزم انحناء سالباً " كما يبين الشكل (16-6) .

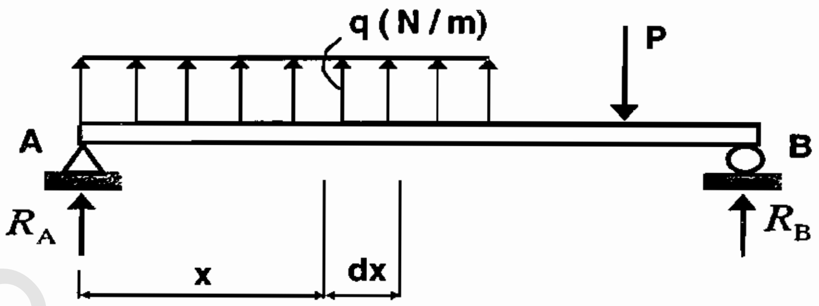
ويجب ملاحظة أن اصطلاحات الإشارة لقوة القص وعزم الانحناء هو اختياري ومن الممكن عكسها وأن الطريقة المختارة تعطي الإشارات الصحيحة رياضياً من حيث الانحدار والانحناء للعتبات ، وأن المخططات التي توضح التغيرات في قيم عزوم الانحناء وقوى القص على امتداد طول العتبة لأي ظروف تحميل ثابتة تعرف بمخططات عزم الانحناء وقوة القص ، والتي تعطي صورة واضحة عن المقطاع التي تتعرض إلى أقصى قص أو أجهادات والتي تساعد في كثير من الأحيان إلى أعادة النظر في التصميم .

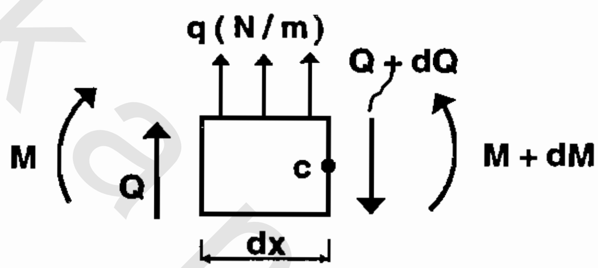
8.6 العلاقة بين قوة القص وعزم الانحناء وكثافة الحمولة الموزعة

قبل البدء بدراسة كيفية رسم الرسومات البيانية للمخططات التي توضح التغيرات في قيم عزوم الانحناء وقوى القص على امتداد طول العتبة لأي ظروف تحميل ثابتة ، والتي تعطي صورة واضحة عن المقطع التي تتعرض إلى أقصى قص أو أجهادات ، وتساعد في كثير من الأحيان في عملية التصميم للعتبات والكمرات الإنشائية . يكون من المهم معرفة العلاقة بين قوة القص وعزم الانحناء وكثافة الحمولة الموزعة ، والتي تساعدنا في رسم الرسومات البيانية لهذه القوى .

ومن خلال دراسة العتبة البسيطة المحملة بحمولة اختيارية والمبينة في الشكل (a.17-6) ، يكون من السهل وضع علاقة بين قوة القص وعزم

الانحناء وكثافة الحمولة الموزعة ، مع أن الاعتبارات التي سوف نقوم بعرضها تظل قائمة لجميع أنواع العتبات وأشكال التحميل المختلفة .





الشكـــل (6-17)

من أجل ذلك نقوم بتحديد قوة القص أي القوة العرضية في المقطع الذي يقع على المسافة x من المفصل الأيسر A . حيث نجد قوة القص Q تؤثر على الجانب الأيسر للجزء تحت الدراسة ، وبفصل الجزء الذي طوله dx عن العتبة ورسم مخطط الجسم الحر لهذا الجزء والمبين في الشكل (b.17-6) ، والعبور خلال المسافة dx تتغير قوة القص لتصبح Q + dQ . كما ويؤثر عزم انحناء M على الجانب الأيسر للجزء ويتغير بالعبور خلال المسافة dx إلى M + dM على الجانب الأيمن .

وبوضع معادلة الاتزان الثالثة ، أي بأخذ العزم حول النقطة c للجزء المدروس والمبين في الشكل (b.17-6) نجد أن :

$$\sum M_{(c)} \curvearrowright^{+} = 0 ;$$
$$M + dM - M - Qdx - qdx\,(dx/2) = 0$$

ومنه نجد أن :

$$dM = M - M + Qdx + qdx\,(dx/2)$$
$$= Qdx + \frac{1}{2}q\,(dx)^2$$

وبما أن الحد الأخير من هذه العلاقة يتكون من حاصل ضرب تفاضلين فأنه يهمل بالمقارنة مع الحدود الأخرى التي تحتوي على تفاضلاً واحداً فقط وبهذا يمكن أن نحصل على :

$$dM = Q\,dx \;;$$

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

وهكذا نجد أن قوة القص Q تساوي معدل تغير عّزم الانحناء M بالنسبة للمسافة x . وسوف تبين هذه العلاقة أنها ذات قيمة هامة في رسم الرسومات البيانية لقوة القص وعزم الانحناء لأنواع التحميل الأكثر تعقيداً . والواضح من هذه العلاقة أنه إذا كانت قوة القص موجبة عند مقطع معين للعتبة ، فأن ميل الرسم البياني لعزم الانحناء يكون أيضاً موجباً عند هذه النقطة . وهي تثبت أيضاً أن أي تغير مفاجئ في قوة القص يصحبه تغير مفاجئ في ميل الرسم البياني لعزم الانحناء .

كما أنه عند تلك النقاط التي يكون عندها المماس للرسم البيـاني لعـزم الانحناء في وضع أفقي فأن العزم قد يكون له قيمة صغرى أو عظمى ، وهذا معروف من علم التفاضل عند الحصول على القيم العظمى والصغرى ، إضافة إلى ذلك فأن ميل الرسم البياني لعزم الانحناء يساوي الصفر عند تلك النقطـة حيث القص يساوي الصفر .

وباستخدام معادلة الاتزان في الاتجاه العمودي ، للجزء المدروس نجد أن :

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \; ;$$

$$qdx + Q - (Q + + dQ) = 0 \; ;$$

ومنه نجد أن :

$$q = \frac{dQ}{dx}$$

وهذه العلاقة تبين أن معدل تغير قوة القص Q بالنسبة للمسافة x ، ولهذه العلاقة قيمة هامة في تحديد الرسومات البيانية لقوة القص كما سـنرى ومـن خلال حل الأمثلة المختلفة في البند اللاحق من هذا الباب .

9.6 الرسوم البيانيــة لمخططــات قــوة القص وعــزم الانحنــاء

من أجل توضيح طبيعة تغير قوة القص وعزم الانحناء على طول العتبــة أو الكمرة ، وتحديد المقاطع الخطرة ، وتوفير المعلومــات اللازمــة لتحليــل وتصميم العتبات بشكل عام ، تستخدم رسوم تسمى بالرسوم البيانية لمخططات قوة القص (S.F) وعزم الانحناء (B.M) :

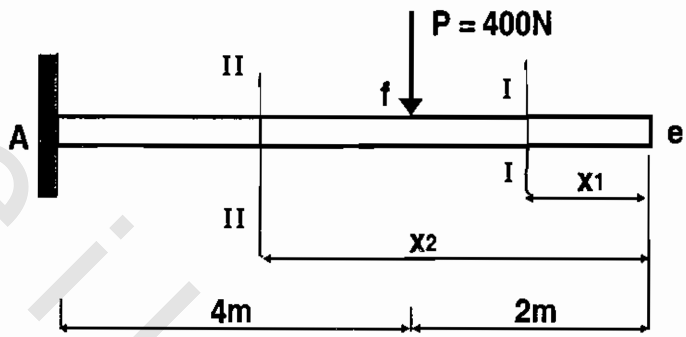
وقد أشرنا في البند السابق أنه من الملائم عادة إدخال نظام احداثيات على طول الكمرة أو العتبة بحيث تكون نقطة الأصل عند أحدى نهايتي العتبة . لذا تكتب معادلتان أحداهما تصف قوة القص Q كدالة في المسافة x ، مثلا مــن أحدى نهايتي العتبة ، والثانية تصف عزم الانحناء M كدالة في x ، وتســمى هاتين المعادلتين بمعادلات القص والعزم ، وتوضع هاتين المعادلتين عادةً لأنه يكون من الضروري معرفة قوة القص وعزم الانحناء عند جميع المقاطع على طول العتبة .

أن رسم هذه المعادلات بالنسبة إلى Q و M يعرف بالرسوم البيانية لقــوة القص وعزم الانحناء على التوالي . حيث تمثل الإحداثيات الأفقية فــي هــذه الرسومات وضع المقطع على طول العتبة ، في حين أن الإحداثيات العموديــة تمثل قيم قوة القص وعزم الانحناء على التوالي . أن هذه الرسومات البيانيــة التخطيطية تمثل في الواقع التغير في قوة القص وعزم الانحناء عند أي مقطع على مدى طول العتبة . حيث يمكن كما اشرنا سابقاً تحديد القيمة القصوى لكل كمية منها بسهولة .

أن الأمثلة اللاحقة سوف توضــح لنــا كيفيــة رســم هــذه المخططــات والرسومات البيانية لقوى القص وعزوم الانحناء بطريقــة مفصــلة وبســيطة وسهلة مما يساعد الطالب على استيعاب ما تم عرضه من مفاهيم .

مثـــال (6-5)

أرسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء للعتبة الكابولية (الكابولي) المبينة في الشكل (6-18) .



الشكـــل (6-18)

الحـــل :

نقوم بعمل قطع في الجهة اليمنى (I-I) على مسافة x_1 من الطرف الأيمن للعتبة ، حيث يمكن تحديد عزم الانحناء في هذا المقطع بطريقة سهلة ، والذي يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية الواقعة على يمين المقطع حيث أن :

$$\sum M_{x_1} \curvearrowleft^{+} = 0 \; ;$$

$$M_{x_1} = 0$$

وهكذا نجد أن عزم الانحناء يساوي الصفر على كافة مقاطع القسم nm .
نقوم بعمل قطع آخر (II-II) بعد القوة المركزة P ونجد عزم الانحنـــاء فـــي القسم em بنفس الطريقة ، حيث يحسب العزم كمجموع عزوم جميـــع القـــوى

التي تقع على يمين المقطع ، ولهذا لا توجد حاجة لتحديد ردود الأفعال هنا في المسند الثابت A ونحصل على :

$$\sum M_{x_2} \curvearrowleft^{+} = 0 \ ;$$
$$M_{x_2} = -P(x_2 - 2)$$

أن الإشارة السالبة هنا تدل على أن تحدب العتبة يكون إلى الأعلى ونحصل بذلك على معادلة خط مستقيم مائل . ولتخطيط الرسم البياني لهذه المعادلة نحسب قيمتين لعزم الانحناء عندما $x_2 = 2$ فأن قيمة عزم الانحناء تساوي :

$$M_{x_2} = -P(2-2) = -100(0) = 0$$

وعندما $x = 6$ فأن قيمة عزم الانحناء تساوي :

$$M_{x_2} = -P(6-2) = -100(4) = -400\ N.m$$

نقوم بعد ذلك بوضع المقدار 400 nm حسب مقياس رسم مناسب أسفل محور الرسم البياني لان قيمة العزم سالبة ، والشكل (a.19-6) يبين الرسم البياني لمخطط عزم الانحناء. ويكون عزم الانحناء الأقصى في المقطع عند المسند المثبت A حيث أن قيمة العزم القصوى هو :

$$M_{max} = -400\ N.m$$

أما القوة العرضية أي قوة القص في المقطع (I-I) فأنها تساوي الصفر أي أن :

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0\ ;$$

$$Q_{x_1} = 0$$

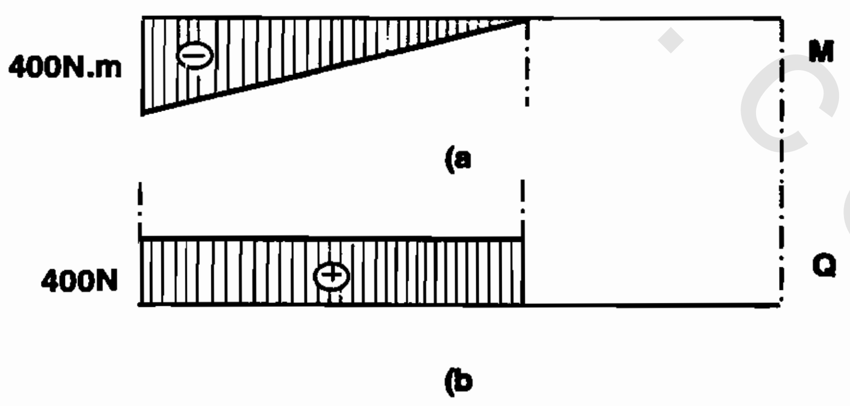
وذلك من خلال إسقاط جميع القوى الواقعة في الجهة اليمنى من المقطع على المحور العمودي ، وبنفس الطريقة نحصل على قيمة قوة القص في المقطع (II-II) حيث أن :

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0\ ;$$

$$Q_{x_2} - P = 0$$

$$Q_{x_2} = P$$

وذلك حسب اصطلاحات الإشارات التي اشرنا إليها في البنود السابقة ، أن العلامة الموجبة تبين أن اتجاه القوة الخارجية التي تؤثر في الجهة اليمنى من المقطع ، هو من أعلى إلى أسفل ، ويبين الشكل (b.19-6) الرسم البياني لمخطط قوة القص Q .



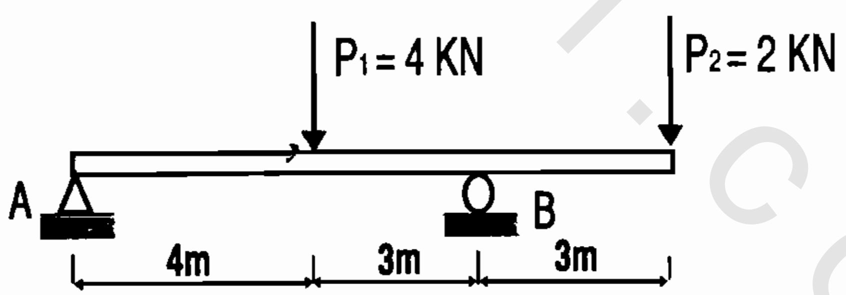
الشكل (6-19)

وهكذا حصلنا على الرسومات الخاصة وقوة القص وعـزم الانحنـاء لعتبـة الكابولية ، مع أن هناك الكثير من النقاط الهامة التي ستوضـح فـي الأمثلـة اللاحقة .

كما تجدر الإشارة إلى أنه لتحديد إشارة قوة القص إضافة إلى القاعدة التي تم شرحها سابقاً ، هو أن تعتبر قوة القص موجبة في أقسام العتبة التي يكـون فيها عزم الانحناء M صاعداً من اليسار إلى اليمين ، وتعتبر سالبة في تلـك الأقسام التي يكون فيها الرسم البياني لعزم الانحناء هابطـاً ، وتعتبـر هـذه الطريقة سهلة وتمكن الطالب من استيعاب قاعدة الإشارات لمخطط قوة القص بسهولة وذلك بعد رسم مخطط عزم الانحناء والتأكد من الرسم بعد الحل .

مثـال (6-6)

ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء للعتبة المسـندة عند A بمفصل ، وعند B بمسند متدحرج (عجلة) والمعرضة إلى الحمـولات الخارجية المركزة P_1 , P_2 كما يبين الشكل (6-20) .



الشـكل (6-20)

الحــل :

من أجل إيجاد ردود الأفعال في B , A نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما هو مبين في الشكل (6-21) ، وبعد ذلك نضع شــروط الاتزان الثلاثة حيث أن :

$$\sum F_X \overset{+}{\rightarrow} = 0 \quad ;$$

$$H_A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \quad ;$$

$$R_A + R_B - 4 - 2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\sum M_A \circlearrowleft = 0$$

$$-4(4) + R_B(7) - 2(10) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

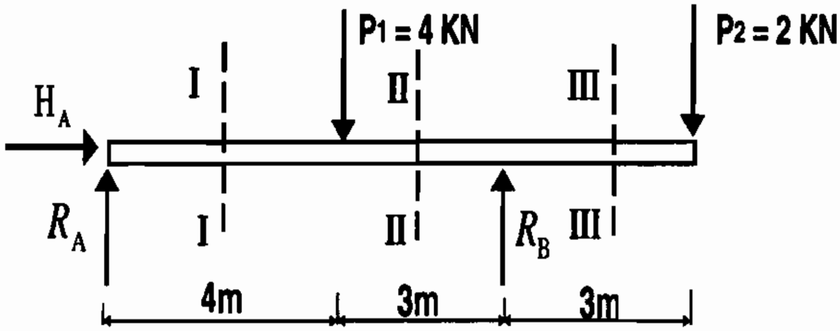
ومن المعادلة رقم (3) نجد رد الفعل العمودي في المســـند المتــدحرج B حيث أن :

$$R_B = \frac{36}{7} = 5.15\ KN$$

ثم نعود إلى المعادلة رقم (2) ونجد R_A حيث :

$$R_A + 5.15 - 4 - 2 = 0$$

$$R_A = 0.85\ KN$$



الشكــل (6-21)

بعد حصولنا على ردود الأفعال نقوم بقطع العتبة عند المقطع (I–I) ، كما هو مبين في الرسم البياني لمخطط الجسم الحر لجزء العتبة على يسار القطــع (a.22-6) ، والذي يوضح قوة القص Q وعزم الانحناء M فــي الاتجاهــات الموجبة ، ومن توازن هذا الجزء في الاتجاه العمودي نجد أن :

$$R_A + Q = 0$$

ومنه :

$$Q = -0.85\, KN,$$

وبوضع معادلة الاتزان الثالثة أي بأخذ العزم عند النقطة c نجد أن :

$$\sum M_{(c_1)}{}^{+} = 0 \;;$$

$$-0.85\,(X_1) + M = 0$$

$$M = 0.85\, X_1$$

حيث أن :

$$X = 4\,m \quad ، \quad X = 0$$

الخطوة التالية تكون بعمل قطع آخر هو (II–II) والمبـين فـي الشـكل (21-6) ، ونرسم مخطط الجسم الحر للجـزء الكلـي للعتبـة علـى يسـار القطع (II–II) كما هو مبين في الشكل (b.22-6) .وبوضع شروط الاتـزان لهذا الجزء نجد أن :

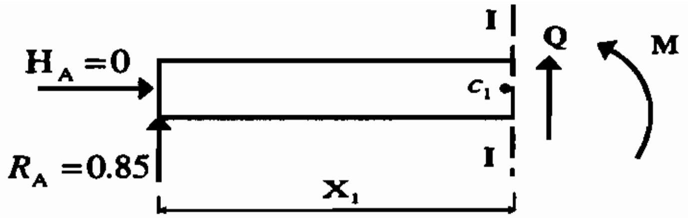
$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 \quad ;$$
$$R_A + -4 + Q = 0$$
$$Q = 4 - 0.85 = 3.15 \; KN$$

وبأخذ العزم حول النقطة c_2 نجد صيغة لعزم الانحناء في القطع (II–II) حيث نجد أن :

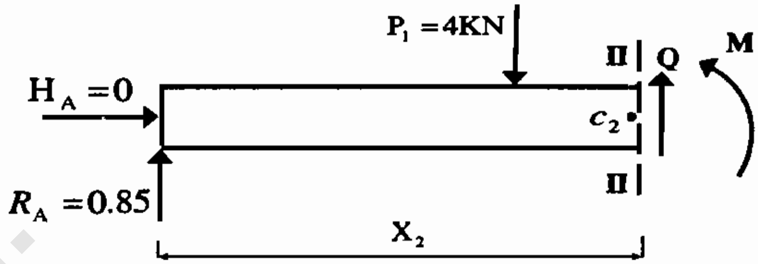
$$\sum M_{(c_2)} \curvearrowright^+ = 0 \quad ;$$
$$M + 4(X_2 - 4) - 0.85\,(X_2) = 0$$
$$M = 16 - (3.143\,X_2)$$

وأخيراً نقوم بعمل قطع (III–III) ، والذي يعتبر أبسط الرسومات البيانية حيث يتم رسم الرسـم البيـاني للجـزء الأيمـن مـن العتبـة كمـا يبـين الشكل (c.22-6) . وباستخدام معادلات الاتزان لهذا الجزء نجد أن :

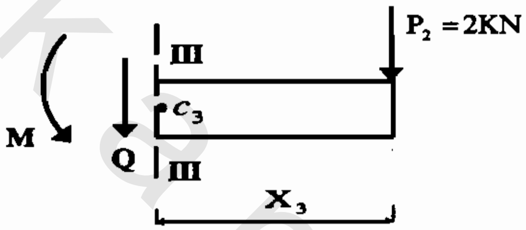
$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 \quad ;$$
$$-Q - 2 = 0$$
$$Q = -2 \; KN$$



(a



(b



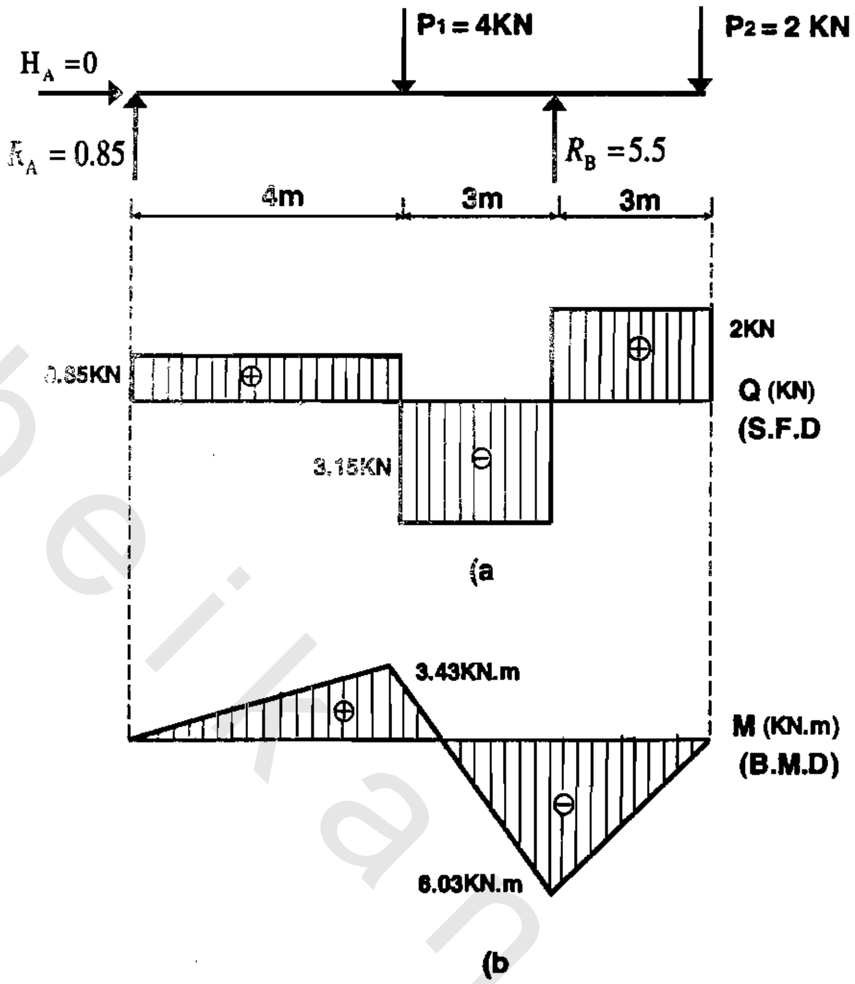
(c

الشكــل (6-22)

ونجد العزم حول النقطة c_3 لنحصل على :

$$\sum M_{(c_3)}^{+} = 0 \; ;$$
$$M + 2(10 - X) = 0$$
$$M = -2\,(10 - X)$$

بعد أيجاد صيغ وعلاقات قوة القــص وعــزم الانحنــاء فــي المقــاطع الثلاث ، وعرفنا هذه القيَم في كل مقطـــع ، نقـــوم برســـم الرسـوم البيانيـــة لمخططات قوة القص وعزم الانحناء على طول العتبة ، كما هو مبــين فـــي الشكل (6-23) .



الشكــل (6-23)

وهكذا تم رسم الرسومات البيانية لمخططات قوة القص وعــزم الانحنــاء للعتبة . وتجدر الإشارة إلى بعض الملاحظات الهامة التي تم أتباعها في حــل هذه المسألة :

1- بالنسبة لقيم قوة القص عند كل مقطع فأننا عليها من معادلة الاتزان علــى المحور العمودي y .

2- بالنسبة لقيم عزم الانحناء فقد حصلنا عليها عن طريق أيجــاد قــيم عــزم الانحناء في كل مقطع بالتعويض عن قيم x الخاصة بصيغة عزم الانحناء في ذلك المقطع ، فمثلاً في المقطع الأول صيغة عزم الانحناء هي :

$$M = 0.85\, X_1$$

وحيث أن قيم x_1 تتغير بين 0 و 4m ، فأن قيم عزم الانحناء تكون في هذا المقطع هي :

$$\begin{aligned} M &= 0.85(0) = 0 \\ &= 0.85(4) \\ &= 3.43\, KN.m \end{aligned}$$

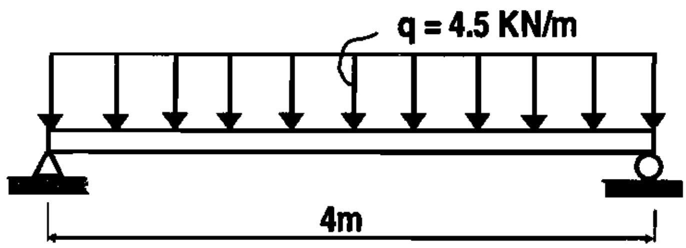
وهكذا نجد أن قيمة العزم على مسافة 4m تساوي 3.43KN.m ، كما هو مبين في الرسم البياني لمخطط الجسم الحر الشكل (b.23-6) . أما بالنسبة للجزء الثاني عند القطع (II – II) فأننا حصلنا على صيغة عزم الانحناء التالي :

$$\begin{aligned} M &= 16 - 3.14\, X_2 \\ &= 16 - 3.14\,(7) \\ &= 6.03\, KN.m \end{aligned}$$

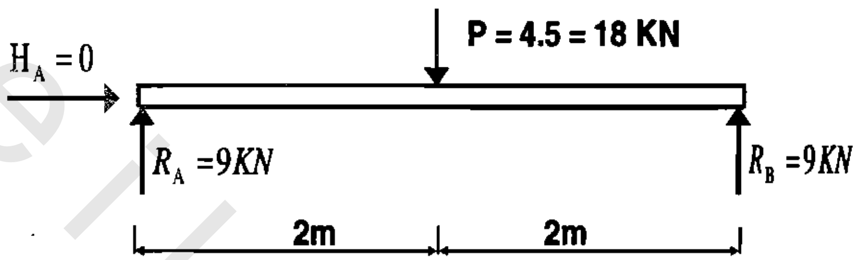
وبهذه الطريقة نحصل على الرسم البياني لمخطط عزم الانحناء للعتبة عند كل نقطة .

مثـــال (7-6)

الشكل (a.24-6) يبين عتبة بسيطة طولها 4 m ومعرضة لحمولة رأسية موزعة بانتظام وقيمتها 4.5 KN / m . ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء لهذه العتبة .



(a



(b

الشكل (24-6)

الحـــل :

نرسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.24-6) حيث تحول الحمولة الموزعة بانتظام إلى قوة مركزة تؤثر في مركـــز الثقـــل للمستطيل حسب العلاقة التالية :

$$P = q \, . \, e = 4.5 \times 4 = 18 \text{ KN}$$

ومن معادلات الاتزان والتماثل نجد قيمة ردود الأفعال عنـــد A , B والتـــي تساوي 9 KN عند كل نهاية للعتبة . نقوم بعمل قطع (I-I) على مسافة x من النهاية اليسرى للعتبة . وتكون قوة القص عند هذا المقطع مساوية للمجمـــوع الجبري للقوى عل يسار هذا القطع ، حيث أن :

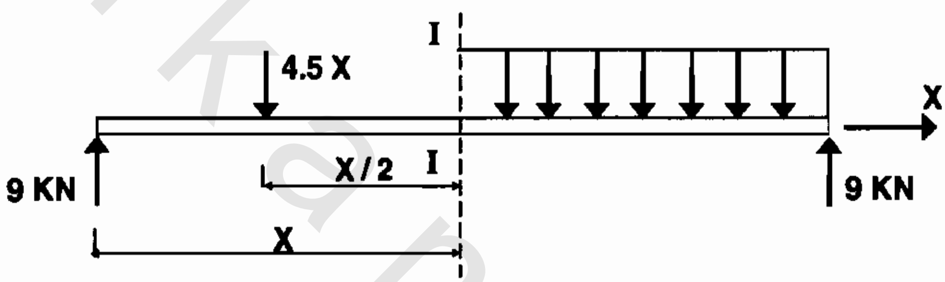
$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 \quad ;$$

$$R_A - 4.5\,(X) + Q = 0$$

$$-Q - 4.5\,(X) + R_A = 0$$

$$Q = R_A - 4.5\,(X)$$

حيث أن الجزء من الحمولة الموزعة على يسار المقطع عند x بمحصلته التي تساوي 4.5 x تؤثر إلى أسفل كما يبين الشكل (6-27) .



الشكل (6-27)

وحيث أنه لا توجد أي حمولات مركزة أخرى تؤثر على العتبة ، فأن صيغة قوة القص التي حصلنا عليها من معادلة الاتزان حيث أن $Q = R_A - 4.5\,(x)$ تكون سارية عند جميع النقاط على طول هذه العتبة . وواضح أن قوة القص تتغير خطياً من x = 0 , x = 4 ، فعند x = 0 فأن قوة القص تساوي Q = 9 KN ، وعند نهاية العتبة أي عند x = 4m ، فأن Q = -9 KN ، وبالتالي فأن يمكن تمثيل التغير في قوة القص على طول العتبة بخط مستقيم يصل بين هاتين القيمتين عند النهايتين

والشكل (a.28-6) يبين الرسم البياني لقوة القص Q ، حيث يلاحــظ أن قــوة القص تساوي الصفر في منتصف العتبة .

أما عزم الانحناء فيعطى عند المقطع x بالمجموع الجبري لعــزوم لــرد الفعل الذي قيمته 9 والحمولة الموزعة الذي قيمتها KN 4.5x القطــع (I-I) حيث أن :

$$\sum M_{(I-I)}^{+} = 0$$

$$-9.X + 4.5\,X\left(\frac{X}{2}\right) + M = 0$$

$$M = 9\,X - 4.5\frac{X^2}{2}$$

وتسري هذه المعادلة على الطول الكلي للعتبة . ويجب ملاحظة أنه طالما أن الحمولة الموزعة توزيعاً منتظماً فأن المحصلة الموضحة بالقوة التي تــؤثر على المسافة x/2 من القطع (I-I) . أي أنه عند منتصف المســافة للحمولــة الموزعة على يسار المقطع x حيث يحسب عزم الانحناء .

وواضح ايضاً أن عزم الانحناء يمثل بقطع ناقص على مدى طول العتبــة لأنه من الدرجة الثانية . وحيث أن العتبة مرتكزة إرتكازاً بسيطاً فأن العــزم يساوي الصفر عند كل نهاية ، أي عند المفصل A ، والمسند B .

وبسبب تماثل الحمولة فأن عزم الانحناء الأقصى يجب أن يكــون عنــد منتصف العتبة أي عند x = 2 m . ويكون عزم الانحناء عند هــذه النقطــة x = 2 يساوي :

$$M = \frac{qe^2}{8}$$

$$= \frac{4.5 \times 4^2}{8}$$

$$= 9\ KN.m$$

حيث أن :

e - الطول الكلي للعتبة .

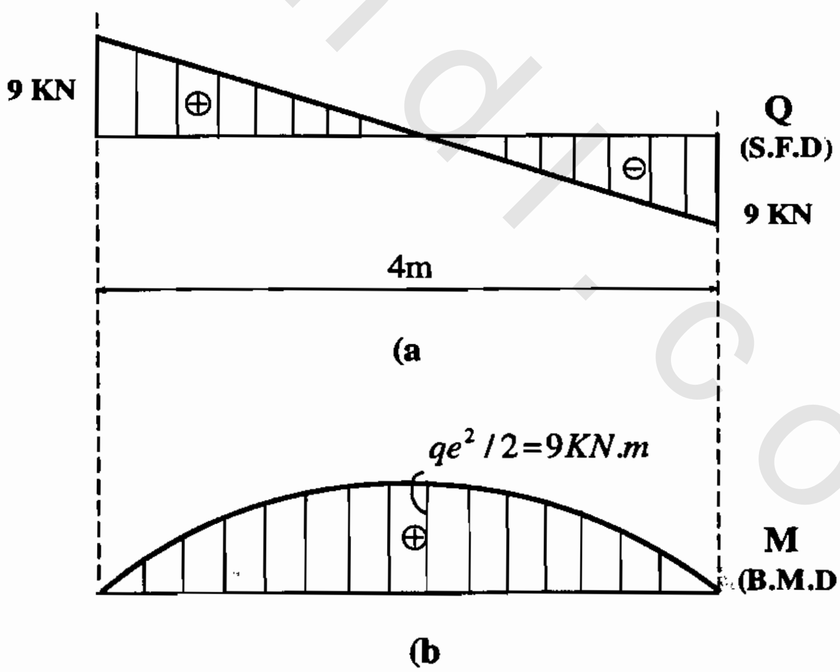
ويمكن أثبات ذلك من خلال أيجاد العزم عند النقطة 2m حيث :

$$M = 9(2) - 4.5(2) \times 1$$

$$= 18 - 9$$

$$= 9\ KN.m$$

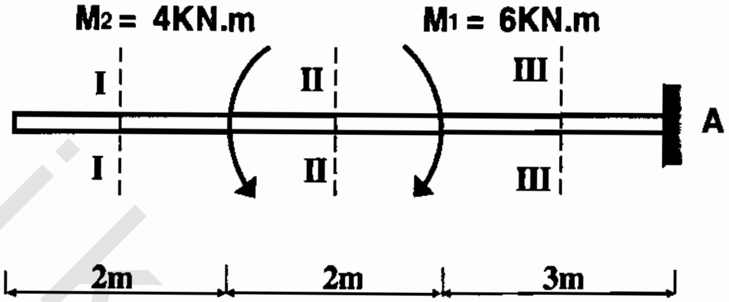
أن الرسم البياني لمخطط عزم الانحناء موضح في الشكل (b.28-6) .



الشكــل (28-6)

مثـــال (6-8)

أرسم الرسومات البيانية لمخططات عزم الانحناء وقــوة القــص للعتبــة الكابولية المبينة في الشكل (6-29) .



الشكـــل (6-29)

الحـــل :

نقوم بإيجاد صيغ لعزم الانحناء في مقاطع مختلفة من العتبة ، لــذا نقــوم بقطع العتبة في ثلاثة مناطق كما يبين الشــكل (6-29) . أن صــيغة عــزم الانحناء في المقطع الأول (I-I) على مسافة x_1 يساوي :

$$M_{x_1} = 0$$

أما قيمة عزم الانحناء في المقطع الثاني(I-I) للعتبة فيساوي مجموع عــزوم القوى الواقعة على الجهة اليسرى حيث :

$$M_{x_2} = -4\,KN.m$$

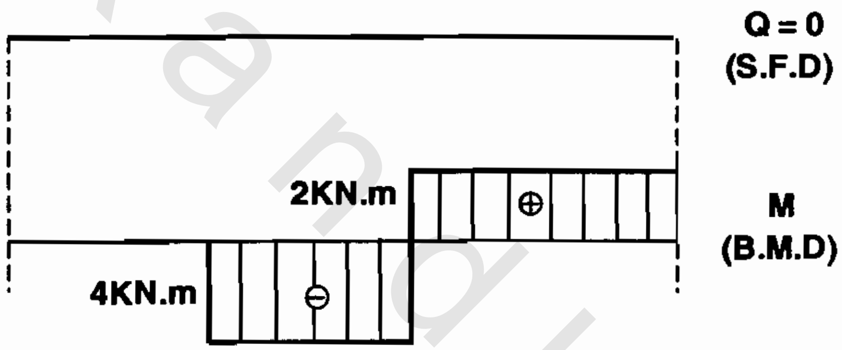
واخيراً نجد قيمة عزم الانحناء في المقطع (III-III) والذي يساوي :

$$M_{x_1} = -4 + 6 = 2\,KN.m$$

أما قوة القص فتكون في جميع المقاطع مساوية للصفر حيث :

$$Q = 0$$

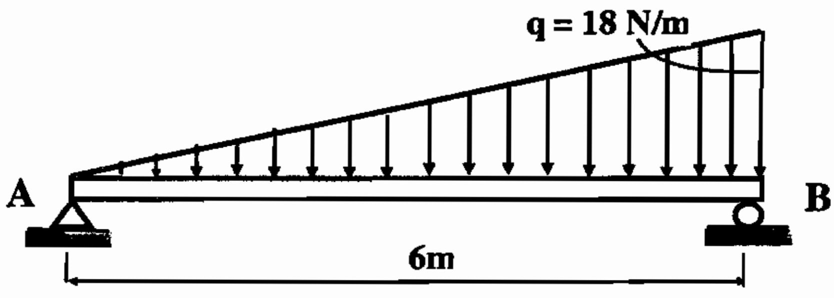
وذلك لعدم وجود أية قوى عمودية مؤثرة على العتبة . أن الرسوم البيانية لعزم الانحناء وقوة القص مبينة في الشكل (6-30) .



الشكـــل (6-30)

مثـــال (6-9)

أرسم الرسومات البيانية للعتبة البسيطة المبينـــة فـــي الشـــكل (6-31) ، والمعرضة لحمولة راسية متغيرة بانتظام من الصفر عند النهاية اليسرى إلـــى قيمة قصوى مقدارها 18m عند النهاية اليمنى .

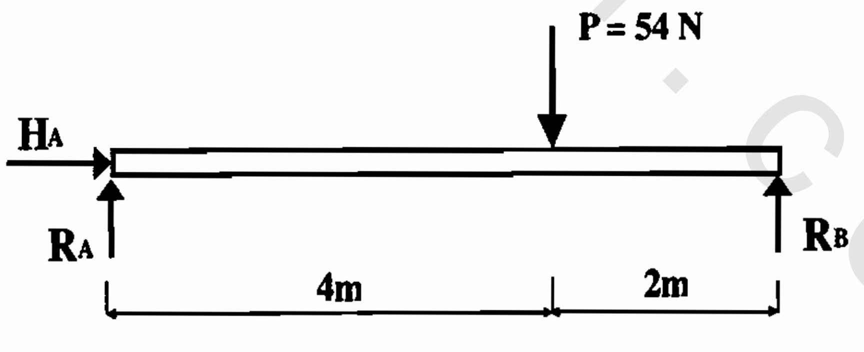


الشكـــل (6-31)

الحـــل :

نقوم أولاً بإيجاد ردود الأفعال في المفصل A والمسند B ، وذلك بعد رسم مخطط الجسم الحر للعتبة المبين في الشكل (6-32) . حيـــث يـــتم اســـتبدال الحمولة المتغيرة بانتظام التي تؤثر في مركز الثقل لمثلث الحمولة حيث :

$$P = \frac{1}{2} qe = \frac{1}{2} 18 .6 = 54 \ N$$



الشكـــل (6-32)

وبما أن الحمولة تتغير من الصفر عند النهاية اليسرى إلى 18N/m عند النهاية اليمنى ، فأن الكثافة المتوسطة تساوي 9N/m تؤثر على طول 6m . وبالتالي فأن الحمولة الكلية تساوي 54N وتؤثر عند مسافة 4m على يمين النهاية اليسرى للعتبة . وبوضع شروط الاتزان الإستاتيكي نجد ردود الأفعال الثلاث حيث أن :

$$\sum F_x \rightarrow^{+} = 0 \; ;$$
$$H_A = 0$$

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \; ;$$
$$R_A + R_B - 54 = 0$$

$$\sum \mathrm{M}_{(A)} = 0 \; ;$$
$$-54(4) + R_B(6) = 0$$

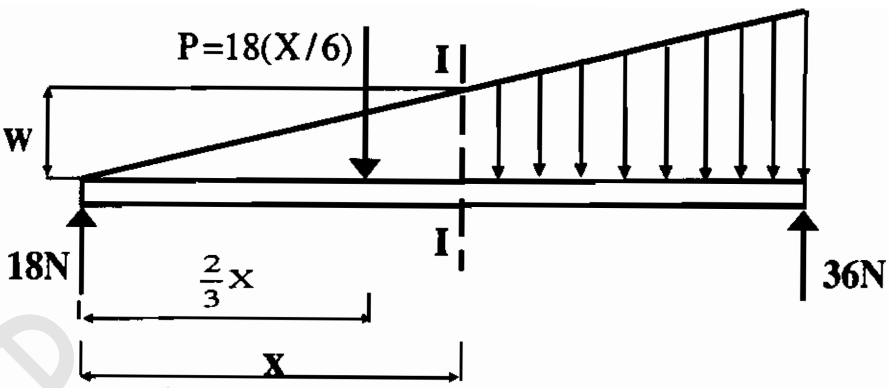
ومنه :

$$R_B = 216/6 = 36N$$

نعود إلى المعادلة الثانية ، أي إلى الشرط الثاني للاتزان لنجد رد الفعل R_A حيث أن :

$$R_A = -36 + 54 = 18N$$

وتجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن استخدام المحصلة المبينة في مخطط الجسم الحر في رسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . حيث يجب علينا أن نعتبر الحمولة موزعة ومتغيرة بانتظام ونحدد القص والعزم عند مقطع على مسافة x من النهاية اليسرى كما يبين الشكل (6-33) .



الشكــل (6-33)

أن كثافة الحمولة يمكن إيجادها من تشابه المثلثين حيث أن :

$$\frac{w}{x}=\frac{18}{6}$$

ومنه نجد أن :

$$W=18\,(x/6)\quad ,(N/m)$$

ويكون متوسط كثافة الحمولة على طول المسافة x هو :

$$\mathrm{P}=\frac{1}{2}18\,(x/6)$$

وذلك لان الحمولة تساوي الصفر عند النهاية اليسرى .

أن الحمولة الكلية المؤثرة على طول x وتساوي الكثافة المتوسطة للحمولة مضروبة في الطول x حيث أن :

$$P = \frac{1}{2}\left[18\,(x/6)\right]x$$

وتؤثر في مركز الثقل للمثلث أى خلال نقطة تقع على مسافة $\frac{2}{3}x$ مـــن المفصل A ، أن محصلة هذا الجزء من الحمولة المتغيرة بانتظام مبينة بالقوة والخط المتقطع في الشكل (6-33) .

ويمكن بسهولة أيجاد قوة القص وعزم الانحناء عند القطع (I-I) حيث أن قوة القص تكون :

$$\begin{aligned} Q_{I-I} &= 18 - \frac{1}{2}(18 \cdot \frac{x}{6})\ x \\ &= 18 - 0.75\ x^2 \end{aligned}$$

أما عزم الانحناء فيمكن الحصول عليه بأخذ العزم عند القطع (I-I) حيث :

$$18x + \frac{1}{2}(\frac{x}{6}.18)(\frac{x}{3}) + M_{I-I} = 0$$

ومنه نجد أن :

$$M_{I-I} = 18X - 0.25X^3$$

وهذه الصيغ والمعادلات تعتبر حقيقة على مدى الطول الكلي للعتبة . نقوم برسم قوة القص كقطع ناقص من الدرجة الثانية له قيمة مقدارها 18KN عند $x = 0$ ، و -18KN عند $x = 6m$.

أما عزم الانحناء فيكون من الدرجة الثالثة متعدد الحدود تختفي عند النهايتين وتأخذ أقصى قيمة حيث القص يساوي صفراً . وهذا من حقيقة أن $Q = dM / dx$ ، وبالتالي فأن النقطة التي تكون فيها قوة القص تساوي الصفر يجب أن تكون هي النقطة التي عندها المماس للرسم البياني لعزم الانحناء يكون أفقياً ، و يمكن إيجاد النقطة التي عند القص يساوي الصفر وذلك بمساواة قوة القص حيث :

$$Q = 0$$

ومنه :

$$18 - 0.75X^2 = 0$$

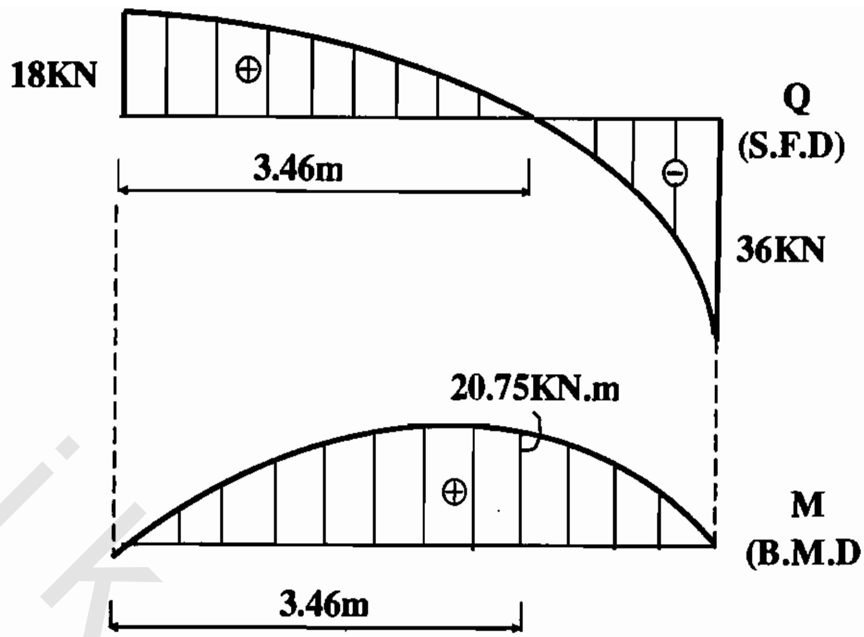
أو أن :

$$x = 3.46m$$

ويمكن إيجاد عزم الانحناء عند هذه النقطة بالتعويض بالعلاقة العامة السابقة حيث :

$$M_{X=3.46} = 18(3.46) - 0.25(3.46)^3$$
$$= 20.75\ KN.m$$

أن الرسومات البيانية لصيغ ومعادلات قوة القص وعزم الانحناء مبينة في الشكل (6-34) .

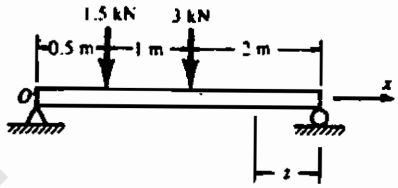


الشكــل (6-34)

بعد دراسة هذه الأمثلة المختلفة والتي توضــح كيفيــة الحصــول علــى الرسومات البيانية لمخططات قوة القص Q وعزم الانحناء M لمختلف أنواع التحميل التي قد تتعرض إليها العتبات . وحتى يستطيع الطالب تدعيم استيعابه لهذا الموضوع سوف نقوم بعرض بعض الأمثلة المحلولــة للعتبــات محملــة حمولات مختلفة مع كتابة معادلات القص وعزم الانحناء عند أي نقطة علــى مدى طول العتبة بالإضافة إلى رسم مخططات عزم الانحناء وقوى القص لهذه العتبات . وعلى الطالب الاستفادة من هذه الأمثلة لأنها تعمــل علــى زيــادة استيعابه لهذا الموضوع بشكل مفيد للغاية .

مثـــال (6-10)

ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . ثم أكتب أيضا معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة المبينـــة فـــي الشكل (6-35) .



الشكـــل (6-35)

الحـــل :

عند : $0 < x < 1m$

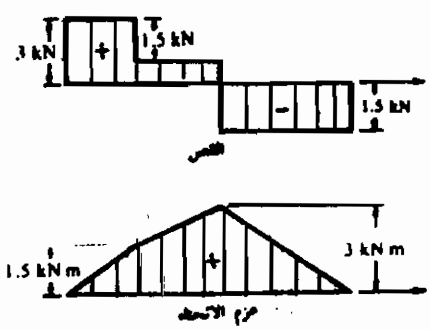
$$Q = 1.875 - 1.5x \quad (KN)$$

عند : $1 < x > 2m$

$$Q = 0.375 - 3(x-1) \quad (KN)$$

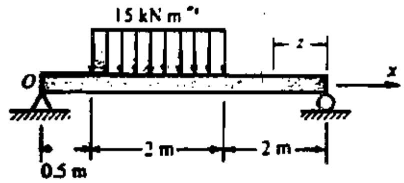
عند : $0 < x < 1$

$$M = 1.875x - 0.75X^2 \quad (KN.m)$$



مثـــال (6-11)

ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . ثم أكتب أيضا معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة المبينـــة فـــي الشكل (6-36) .



الشكـــل (6-36)

الحـــل :

$0<x<0.5\,m$: عند $\quad Q=20\ (KN)$

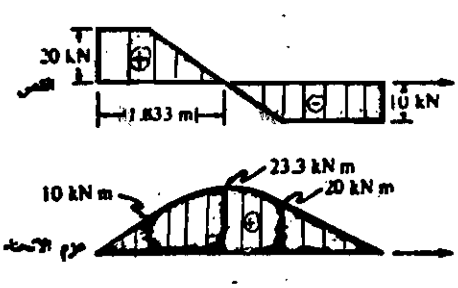
$0.5<x<2.5\,m$: عند $\quad Q=20-15(x-0.5)$

$2.5<x<4.5\,m$: عند $\quad Q=-10\ KN$

$0<x<0.5\,m$: عند $\quad M=20x\ \ KN.m$

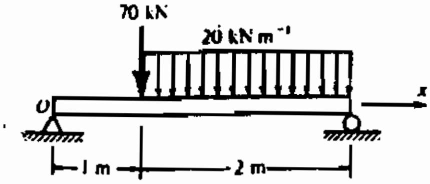
$0.5<x<2.5\,m$: عند $\quad M=20x-7.5(x-0.5)^2\ \ KN.m$

$0<x<2\,m$: عند $\quad M=10x\ KN.m$



مثـــال (12-6)

ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . ثم أكتب أيضا معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة المبينـــة فـــي الشكل (37-6) .



الشكـــل (37-6)

الحــل :

$0 < x < 1m$: عند

$Q = 60\ KN$

$1 < x < 3m$: عند

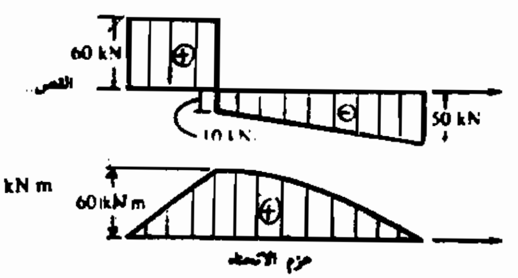
$Q = 60 - 70 - 20(x-1)\ \ KN$

$0 < x < 1m$: عند

$M = 60x\ KN.m$

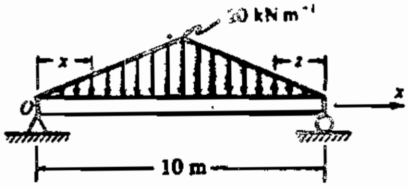
$1 < x < 3m$: عند

$M = 60x - 70(x-3) - 10(x-1)^2\ \ KN.m$



مثـــال (6-13)

ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . ثم أكتب أيضا معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة المبينـــة فـــي الشكل (6-38) .



الشكـــل (6-38)

الحـــل :

عند : $0 < x < 5\,m$

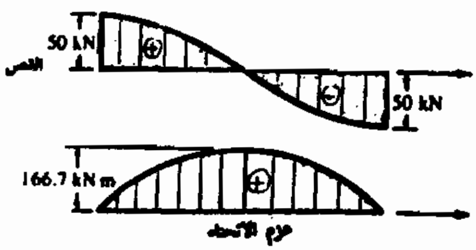
$$Q = 50 - \frac{x^2}{10}(20)\ \ KN$$

عند : $0 < x < 5\,m$

$$Q = -\,50 - \frac{x^2}{10}(20)\ \ KN$$

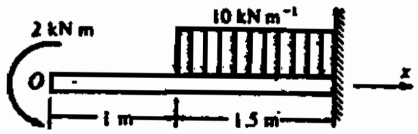
عند : $0 < x < 5\,m$

$$M = 50\,x - \frac{x^3}{30}(20)\ \ KN.m$$



مثـــال (6-14)

للعتبة الكابولية المبينة في الشكل (6-39) اكتب معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة . ثم ارسم الرسوم البيانية لقـــوة القص وعزم الانحناء .



الشكــل (6-39)

الحــل :

عند : $0<x<1m$

$Q=0$

عند : $1<x<2.5$

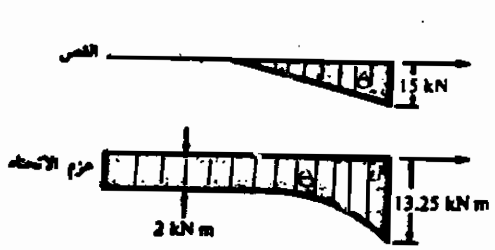
$Q=-10\ (x-1)$

عند : $0<x<1m$

$M=-2\ KN.m$

عند : $1<x<2.5m$

$M=-2-5(x-1)^2\ KN.m$



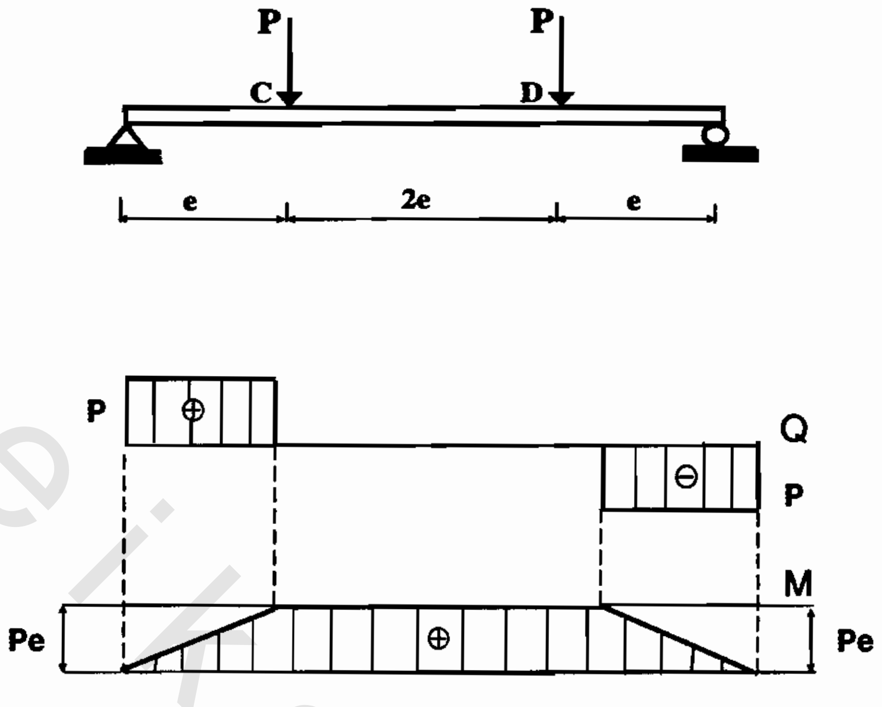
10.6 الأجهادات العمودية فــي العتبـــات

بعد دراسة كيفية وضع صيغ ومعادلات لقوة القص وعزم الانحناء وتمثيل ذلك من خلال الرسومات البيانية لهذه القوى . سوف نقوم في هذا البند بدراسة كيفية تحديد الأجهادات الناتجة عن الانحناء.في العتبات والكمــرات ، حيــث أشرنا سابقاً أن الحمولات التي تؤثر على العتبات والكمرات يمكن أن تكون إما قوة أو ازدواجات تقع في مستوى يحوي المحور الطولي للعتبة ، وان القــوة تؤثر عمودياً على المحور الطولي ، ويفترض أن المستوى الذي يحتوي على القوة يكون مستوى تماثل العتبة .

أن تأثيرات هذه القوة والمزدوجات المؤثرة على العتبة هي إما أن تكــون انفعالات (تشوهات) عمودية على المحور الطــولي للعتبــة ، أو أن تحــدث أجهادات عمودية واجهادات قص على أي مقطع مستعرض للعتبة عمودياً على محورها . فلو تم التأثير عند نهايتي العتبة دون أن تؤثر أي قوة على العتبــة فأن الانحناء في هذه الحالة يسمى " الانحناء الخالص أو الصرف " .

فمثلاً من الشكل (6-40) نلاحظ أن الجزء مــن العتبــة بــين القــوتين المركزتين معرض لانحناء خالص ، والعزم النــاتج عــن قــوى لا تشــكل ازدواجات يسمى عزماً عادياً ، وأن العتبة المعرضة لإنحنــاء خــالص لهــا أجهادات عمودية فقط ولا ينشأ بها أجهادات قص ، والعتبة المعرضة لانحناء عادي تؤثر فيها أجهادات عمودية واجهادات قص .

ولدراسة طبيعة تصرف العتبات وتحديد الأجهادات الناتجة عند الانحناء ، فأنه من المناسب تخيل أن العتبة تتركب من عدد لانهائي من الشرائح الطولية الرقيقة أو الألياف .

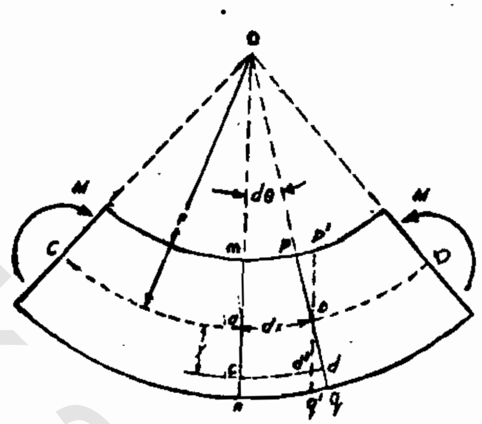


الشكــل (6-40)

حيث يفترض أن كل واحد من هذه الشـــرائح تتصـــرف باســـتقلال عـــن الأخرى بمعنى أنه ليس هناك ضغوط عرضية أو أجهادات قص بـــين هـــذه الشرائح والألياف ، ومن اجل توضيح ذلك نقوم بدراسة العتبة البسيطة المبينة في الشكل (6-40) مع الرسومات البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء لهذه العتبة . والتي من خلالها نلاحظ أن جزء العتبة الأوسط CD تنعدم فيـــه قوة القص ، أما عزم الانحناء فيكـــون مقـــداراً ثابتـــاً بـــين C , D وقيمتـــه . $M = P . a$

أن مثل هذه الحالة تسمى كما اشرنا سابقاً بالانحناء الخالص ، ولتحديـــد الأجهاد الداخلي نقوم بدراسة الانفعال أو التشوه الذي يحدث داخل مادة العتبة وسنفترض أن العتبة ذات مستوى تماثل محـــوري ولـــيكن xy علـــى ســـبيل

المثال ، فعندما تؤثر الحمولات على مستوى التماثل ينتج عنها انحناء في ذات المستوى فقط . ومع افتراض أن المادة متجانسة وتخضع لقانون هوك . وبما أن قيمة عزم الانحناء ثابتة بين C , D فأننا نستطيع اعتبار أن الانفعال الناتج عن الانحناء يكون منطقياً بين هاتين النقطتين . أي أن جزء العتبة يتقوس دائرياً كما هو مبين في الشكل (6-41) .



الشكل (6-41)

ويمكن الافتراض أن المقاطع العرضية للعتبة التي تكون مستوية قبل الانفعال التشوه ، تبقى مستوية حتى بعد التشوه أيضاً حسب نظرية المقاطع المستوية التي أشرنا إليها في بداية هذا الكتاب .

ويلاحظ أنه نتيجة لانفعال العتبة المبين في الشكل (6-41) ، فأن الألياف الواقعة في الجزء المحدب تستطيل قليلاً . أما تلك التي في جزء العتبة المقعر فأنها تقصر قليلاً ، وبالتالي تكون هناك منطقة في الجزء الأوسط من العتبة لا تتغير طولها وتسمى الطبقة المحايدة . وتقاطع هذا السطح مع مستوى التماثل المحوري يسمى المحور المحايد للعتبة . أما تقاطعه مع مستوى أخر لأي مقطع فيسمى المحور المحايد لذلك المقطع .

فعند الانفعال نجد أن مستوى المقطعين mn و pq يتقاطعان عند نقطة مثل (o) . وتكون الزاوية المحصورة بينها هي $d\theta$ ، وان المقدار $1/\rho$ هو تقوس المحور المحايد للعتبة .

نقوم الآن برسم المستقيم $p'q'$ ليوازي المستقيم mn ويمر بالنقطة b الشكل (6-41) ، وهو يمثل وضعية المقطع pq قبل الانحناء ، حيث نلاحظ من الشكل أن الليفة المقوسة ´cd التي تبعد مسافة y عن المحور المحايد تستطيل بمقدار $d'd = yd\theta$ مع العلم أن طولها قبل الانفعال والتشوه قد كان $cd' = dx$ وهكذا يصبح الانفعال في هذه الحالة هو :

$$\varepsilon_x = \frac{yd\theta}{dx} = y/\rho \quad \text{..} (4-6)$$

ونلاحظ أنه إذا كانت الليفة تقع في جزء العتبة المقعر فأن المسافة y تصبح سالبة ، وبالتالي فأن الانفعال يكون سالباً أيضا . أي أن الألياف في جزء العتبة المحدب تتعرض للشد ، وتلك التي في الجزء المقعر تتعرض للضغط . وقد بينت التجارب العملية والمخبرية أن الانفعال الجانبي للألياف العتبة يكون مماثلاً ومشابهاً للانفعال الذي يحدث في اختبار الشد البسيط ، وبهذا فأن الأجهاد في كل ليفة أو شريحة يتناسب مع الانفعال الطولي وعليه فأن :

$$\sigma_x = \varepsilon_x \mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}}{\rho} y \quad \text{..} (5-6)$$

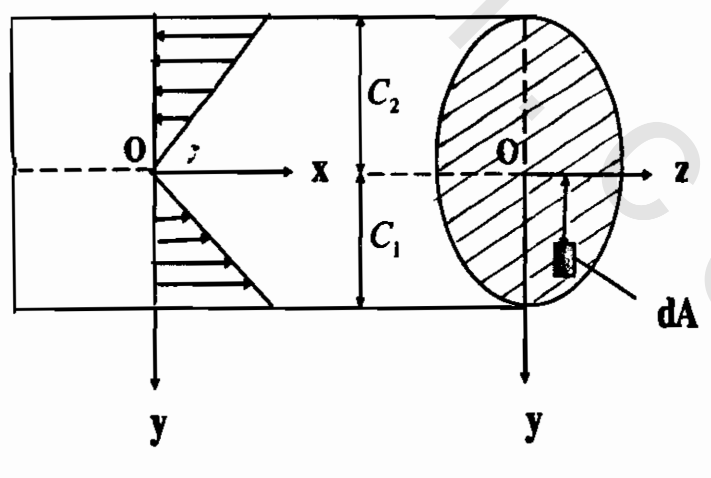
ويتضح من هذه العلاقة أنه ما دامت المادة تخضع لقانون هوك فأن الأجهادات σ_x في الألياف الناتجة عن الانحناء تتناسب طردياً مع البعد y من المحور المحايد .

أن الشكل (6-42) يوضح توزيع الأجهاد لعمق العتبة وينتج عن هذا التوزيع مزدوج M في مقطع العتبة ويمكن استخدام هذه النتيجة لتحديد موضع المحور المحايد o . وإذا كانت dA تمثل مساحة عنصر متناهي في الصغر من مقطع العتبة أي جزيئة شريحة وتبعد مسافة y عن المحور المحايد ، فأن القوة المؤثرة على هذه الشريحة سوف تكون $\sigma_x\, dA$ ، وباستخدام العلاقة (6-5) نحصل على ما يلي :

$$\sigma_x\, dA = \frac{E}{\rho} y . dA$$

وبما أن محصلة القوة العمودية Nx على المقطع تساوي صفراً " الانحناء الخالص " ، فأن تكامل $\sigma_x\, dA$ لمساحة المقطع كلها يساوي الصفر أيضا ، وعليه فأن :

$$\frac{E}{\rho}\int_A y\, dA = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6-6)$$



الشكل (6- 42)

وبما أن المقدار E / ρ لا يساوي الصفر فأننا نجد أن :

$$\int_A y.dA = A\, y_c = 0$$

حيث أن :

A - المساحة الكلية لمقطع العتبة .

y_c - بعد مركز المقطع عن المحور المحايد .

ومن البديهي أن المساحة الكلية لا تساوي الصفر $A \neq 0$ ، لذلك يجب أن تكون $y_c = 0$ ، ومعنى ذلك أن المحور المحايد يجب أن يمر في مركز المقطع .

ونلاحظ أن العزم الناتج عن القوة $\sigma_x\ dA$ حول محور المقطع المحايد يساوي :

$$dM = y\sigma_x .dA$$

وأن مجموع عزوم القوى في شرائح وجزيئات المقطع المختلفة يكون مساوياً لعزم الانحناء M أي أن :

$$M = \int_A y\sigma_x\, dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2\, dA \quad \text{..} (7-6)$$

ويسمى حد التكامل في هذه العلاقة بعزم القصور الذاتي لمساحة المقطع بالنسبة لذلك المحور . ويساوي مجموع حاصل ضرب مساحة كل شريحة متناهية في الصغر مثل dA في مربع بعدها عن المحور المحايد ، ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً حسب العلاقة التالية :

$$I = \int_A y^2 . dA$$

وهكذا يمكن كتابة العلاقة (6-7) على النحو المبين في العلاقة (6-8) حيث :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad ....(8-6)$$

وتوضح هذه العلاقة أن التقوس $1 / \rho$ لمحور العتبة يتناسب طردياً مع عزم الانحناء M وعكسياً مع المقدار EI والذي يسمى بالجساءة أو جساءة الانحناء للعتبة . وهذا يعكس مدى صلابة المادة التي تتمثل في E وكذلك أبعاد مساحة المقطع والتي تتمثل في I .

وبتعويض القيمة $1 / \rho$ التي حصلنا عليها من العلاقة (6-8) في العلاقة (6-5) يمكننا الحصول على صيغة لإجهاد الانحناء في العتبة حيث :

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \quad ....(9-6)$$

أن هذه الصيغة تسمح لنا بتحديد مقدار الإجهاد العمودي في أي نقطة كانت للمقطع العرضي للعتبة ، بواسطة عزم الانحناء M وعزم القصور الذاتي للمقطع . كما وتظهر الأبحاث والدراسات بأن هذه الصيغة صالحة لتحديد الأجهادات العمودية في حالة الانحناء المستوي العامة عندما يؤثر في المقاطع العرضية للعتبة عزم الانحناء والقوى العرضية معاً . ويتضح من هذه المعادلة أن إجهاد الانحناء يصل حده الأقصى عند أبعد الألياف والشرائح عن السطح أو الطبقة المحايدة . حيث يتعرض الجزء المقعر أي أسفل العتبة إلى حالة شد ، بينما يتعرض الجزء المحدب في أعلى العتبة إلى حالة ضغط .

فإذا رمزنا إلى البعد بين أبعد ليفة مشدودة وبين المحور المحايد بـــالرمز C_1 ، وكذلك البعد بين أبعد ليفة مضغوطة وبين المحور المحايد بالرمز C_2 كما يبين الشكل (6-42) وبالتعويض عن تلك الأبعاد في العلاقة (6-9) نجد أن :

$$\sigma_{max} = \frac{Mc_1}{I}$$
$$\sigma_{min} = \frac{Mc_2}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10-6)$$

وإذا كان المقطع متمثلاً بالنسبة للمحور المار خـــلال مركـــز المقطـــع فـــأن $c_1 = c_2 = c$ وتصبح الأجهادات في الألياف الخارجية متساوية في حالة الشد وحالة الضغط .

ويمكن كتابة المعادلتين في (6-10) على النحو التالين :

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z_1}$$
$$\sigma_{min} = \frac{M}{Z_2}$$

حيث أن Z_1 , Z_2 تسمى بمعامل القطع ويعبر عنها بالعلاقة :

$$Z_1 = \frac{I}{C_1} \quad , \quad Z_2 = \frac{I}{C_2}$$

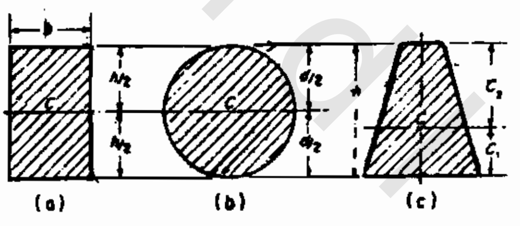
فمثلاً بالنسبة لمقطع مستطيل عرضه b وسمكه h نجد أن $c_1 = c_2 = h/2$ ، ومنه نجد أن :

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad Z_1 = Z_2 = \frac{bh^2}{6}$$

وكذلك بالنسبة لمقطع دائري قطره d نجد أن $c_1 = c_2 = d/2$ ، ومنه نجد أن :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad , \quad Z_1 = Z_2 = \frac{\pi d^3}{32}$$

وبالنسبة لعتبة مقطعها على شكل شبه منحرف كالمبينة في الشكل (6-43) نجد أن $c_1 < c_2$ مما يجعل $Z_1 > Z_2$. لذلك إذا تعرضت مثل هذه العتبة إلى حالة انحناء تؤدي إلى قصر في سطحها الأعلى فان إجهاد الأنضغاط الأقصى في الألياف العلوية للعتبة سوف يفوق إجهاد الشد الأقصى في الألياف السفلية للعتبة ، وتعد هذه ميزة جيدة بالنسبة لعتبات الحديد الزهر ، وذلك لأن مادة الحديد الزهر في الأنضغاط أقوى مما عليه في الشد .



الشكـــل (6-43)

أن العلاقات والصيغ السابقة مبنية على أساس أن العتبــة تتعــرض إلــى انحناء خالص ، أي أن عزم الانحناء يكون ثابتاً على طول العتبة . وبالتــالي فأن ذلك يعني أن قوة القص تساوي صفراً ، ولا يوجد أي إجهاد في مقــاطع العتبة المختلفة سوى تلك الأجهادات الناتجة عن الانحنــاء ، ولكــن إذا كــان

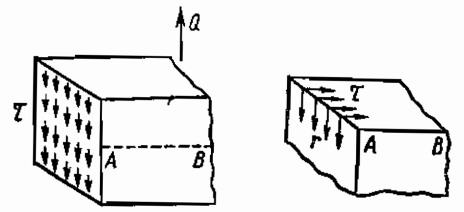
الانحناء غير منتظماً ، أي أن عزم الانحناء يتغير من مقطع إلى آخر فأن جميع مقاطع العتبة سوف تتعرض إلى قوة قص ينتج عنها أجهادات قص في المادة .

أن الانفعال والتشوه الناتج عن أجهادات القص يؤدي عادة كما هو معروف إلى اعوجاج مقاطع العتبة المختلفة بحيث تتحول المقاطع العرضية المستوية إلى مقاطع غير مستوية بعد الانحناء ، وهذا ما يعقد المسألة أكثر . وكما أشرنا سابقاً أن الدراسات والتحليلات المركزة بينت أن الأجهادات العمودية في العلاقة (6-9) لا تتأثر كثيراً بوجود أجهادات قص لذا فأن النظرية التي اشرنا إليها أعلاه لحساب الأجهادات العمودية والمبنية على أساس الانحناء الخالص يمكن استخدامها كذلك في حالة الانحناء غير المنتظم .

11.6 تحديد أجهادات القص في العتبات

رأينا في البنود السابقة أنه عندما تتعرض عتبة لحمولات عرضية ، فأن أي مقطع منها يتعرض لعزم انحناء M وقوة القص Q ، وكذلك بينا أن عزم الانحناء يمثل محصلة الأجهادات العمودية σ_x الموزعة خطياً على مقطع العتبة . وبالمثل فأن قوة القص Q_x على أي مقطع يجب أن إن تكون المحصلة لاجهادات القص τ والموزعة بصورة معينة على ذلك المقطع .

وبما أن الحالة العامة للانحناء تظهر في المقاطع العرضية للعتبة عزوم الانحناء وقوى عرضية ، وحيث أن عزم الانحناء مرتبط بالاجهادات العمودية التي تظهر في القاطع العرضية للعتبة والتي تحدد بواسطة العلاقة (6-9) . فأن وجود القوة العرضية أي قوة القص مرتبط بالاجهادات المماسية أو أجهادات القص التي تظهر في مقاطع العتبة العرضية وقانون ازدواج أجهادات القص في مقاطعها الطولية كما يبين الشكل (6-44) .



الشكــل (6-44)

ولتحديد أجهادات القص نقوم بدراسة العتبة المستطيلة المقطع العرضـــي والمبينة في الشكل (6-45) . ونأخذ جزء من العتبة طوله dz وعرضه مساو لعرض العتبة b ، حيث نجد أن هذا الجزء تؤثر عليه القوى التالية :

1- تؤثر الأجهادات العمودية على الوجه 344´3´ واتي يمكن إيجادهــا مــن خلال العلاقة (6-9) حيث :

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I} y \quad \ldots\ldots (11-6)$$

حيث أن :

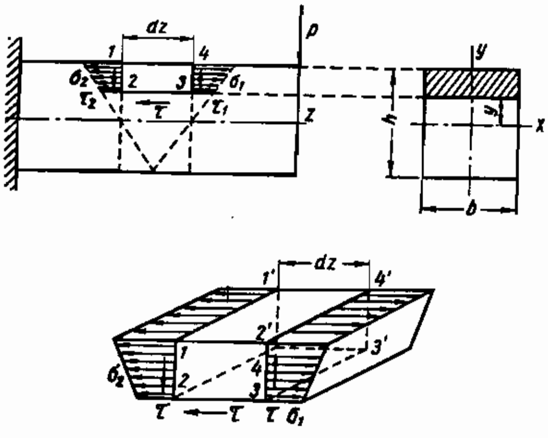
M_1 – عزم الانحناء في الوجه 344´3´ .

وعدا ذلك تؤثر في المقطع المذكور أجهادات قــص مماســية τ ، وهــي مجهولة ويمكن اعتبارها منتظمة التوزيع على عرض المقطع ، نظراً لصــغر عرض هذا المقطع .

2- وتؤثر على الوجه 122´1´ أجهادات عمودية هي :

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{I} y \quad \ldots\ldots (12-6)$$

واجهادات قص هي τ .



الشكــل (6-45)

3- وتؤثر على الوجه ´322´3 أجهادات قص مماسية فقط ، وهــي حســب قانون ازدواج القوى تساوي الأجهادات المماسية التي تــؤثر علــى الوجــوه العمودية . وبوضع معادلة الاتزان لجزء العتبة المقطوع ، وإسقاط القوى التي تؤثر في الجزء على الأحداثي الأفقي . ومن الطبيعي والبديهي أن لا تدخل في معادلة الاتزان المذكورة القوى المماسية التي تؤثر على الوجوه العمودية .

أن مسقط القوة المماسية المؤثرة على الوجه ´233´2 يســاوي القيمــة الحقيقة τbdz . أما الأجهادات العمودية التي تؤثر على الوجــه ´344´3 ، وتكون محصلتها :

$$N_1 = \int_A \sigma_1 \, dA$$

ومحصلة الأجهادات العمودية التي تؤثر على الوجه ´122´1 هي :

$$N_2 = \int_A \sigma_2 \, dA$$

ويجب أن تحتوي هذه التكاملات مساحة القسم المقطوع ، أي مساحة الوجهين ´1´122 , ´3´344 ، وباستخدام معادلة الاتزان $\sum Z = 0$ ، فإننا نحصل على :

$$N_1 - N_2 - \tau \, bdZ = 0$$

أو أن :

$$\int_A \sigma_1 \, dA - \int_A \sigma_2 \, dA - \tau \, bdZ = 0$$

وباستخدام العلاقتين (6-11) ، (6-12) نحصل على ما يلي :

$$\frac{M_1}{I} \int_A y.dA - \frac{M_2}{I} \int_A \sigma_2 .dA - \tau bdZ = 0$$

أن الحد $\int_A y.dA = S_X$ يسمى العزم الأول لمساحة الجزء المقطوع أو العزم الإستاتيكي الأول لمساحة الجزء المقطوع بالنسبة للمحور المحايد أو محور التعادل ، وعليه فأن :

$$\frac{S_X}{I_X}(M_1 - M_2) = \tau bdZ$$

ولكن $M_1 - M_2 = dM_Z$ هي زيادة عزم الانحناء على طول dZ ولهذا فمن الممكن كتابة العلاقة السابقة على النحو التالي :

$$\frac{S_X \, dM_Z}{I_X} = \tau \, bdZ$$

ومن هنا نجد أن إجهاد القص يساوي :

$$\tau = \frac{S_X \, dM_Z}{I_X \, bdZ}$$

وباستعمال العلاقة :

$$Q_Z = \frac{S_X \, dM_Z}{I_X \, bdZ}$$

نحصل على صيغة العالم جورا فسكي لتحديد إجهاد القص في العتبات حيث أن :

$$\tau = \frac{Q \, S_X}{I_X \, b}$$

ولبحث قانون توزيع الأجهادات المماسية على مقطع العتبة المستطيلة كما يبين الشكل (6-46) ، نحدد هذا القانون بواسطة تغير S_x لأن الحدود والمقادير الأخرى لهذا المقطع تعتبر ثابتة وعليه :

$$I_X = \frac{bh^3}{12}$$

أن العزم الإستاتيكي للمساحة المظللة بالنسبة لمحور x يساوي :

$$S_X = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)$$

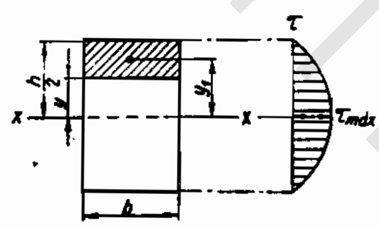
$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} y^2\right)$$

وهذه هي معادلة القطع المكافئ ، أما الأجهادات المماســية أو أجهــادات القص فتعطى كما يلي :

$$\tau = \frac{Q\,b\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).12}{b\,h^3\,.2b}$$

$$= \frac{6Q}{b\,h^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

ثم نقوم برسم رسماً بيانياً بواسطة ثلاثة نقاط كما يبين الشكل (6-46) :



الشكــل (6-46)

أن الشكل (6-46) يوضح الرسم البياني للإجهاد القــص τ . أن أجهــاد القص الأقصى للعتبة ذات المقطع المستطيل يكون في مستوى المحور المحايد أو ما يسمى بمحور التعادل ويساوي :

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$$

أي أكثر بمرة ونصف من ذلك الأجهاد الذي نحصل عليه ، ولـــو فرضـــنا أن الأجهادات المماسية أي أجهادات القص منتظمة التوزيع في المقطع .

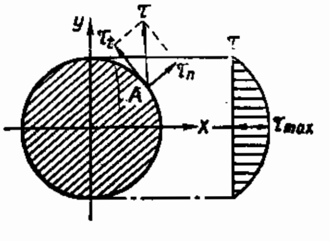
ويمكن استخدام صيغة العالم جورا فسكي بعد تقريبها ، وذلـــك لحســـاب الأجهادات المماسية في العتبات التي لها مقاطع عرضية مختلفـــة الأشـــكال . وبنفس الطريقة نحصل على الرسم البياني لاجهادات القص τ للمقطع الدائري المبين في الشكل (6-47) حيث تكون القيمة العظمى لمحور التعادل هي :

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}$$

وللمقطع الحلقي :

$$\tau_{\max} = \frac{2Q}{A}$$

ومن المهم الإشارة إلى أن إجهاد القص أي الأجهاد المماسي الموازي لقوة القص يحدد بواسطة صيغة العالم جورا فسكي وفي مثل هذه الأشكال والمقاطع مثل الدائرة والمثلث وما شابه ذلك ، تظهر في النقاط الواقعـــة علـــى ســـطح المقطع أجهادات مماسية متجهة باتجاه مماسي لمحيط المقطع .

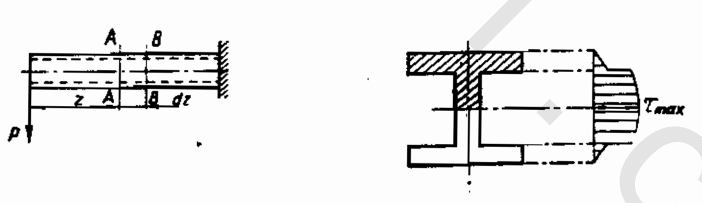


الشكــل (6-47)

لنبحث مثلاً النقطة A ، القريبة من محيط المقطع الدائري المبين في الشكل (6-47) ، وفرضنا أننا حصلنا بواسطة صيغة العالم جورا فسكي على الأجهاد الكلي τ ، وعند تحليليه إلى مركبتيه الأفقية والعمودية نجد أن المركبة العمودية على المحيط هي τ_n ومركبة أفقية مماسية τ_t .

وحسب شروط التحميل فأن سطح العتبة يكون خالي من الأجهادات ومنه فلا يمكن للإجهاد المماسي في النقطة A وكذلك في النقاط المحيطة الأخرى أن يكون باتجاه عمودي ، ويمكن أن يتجه باتجاه مماسي للمحيط ولذا وحسب الطريقة المذكورة سابقاً نقوم بتحديد فقط المركبة الرأسية أو العمودية ، وليس المقدار الكلي لإجهاد القص .

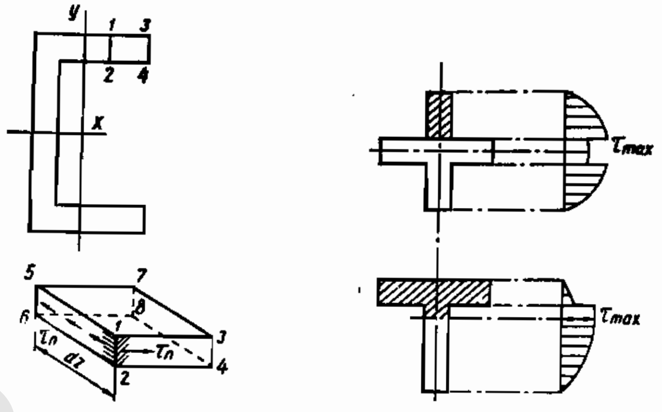
ومن المهم الإشارة أن العتبات التي لها مقطع I ، يكون عادة الرسم البياني لإجهاد القص τ متدرجاً ، وذلك نتيجة للتغيرات المفاجئة في عرض العتبة كما يبين الشكل (6-48) . حيث يكون إجهاد القص الأقصى للمقطع I في نقاط محور التعادل ، ويحدد بواسطة صيغة العالم جورا فسكي ، مع أخذ العزم الإستاتيكي للمساحة المظللة نصف مقطع .



الشكل (6-48)

وتجدر الإشارة إلى أنه توجد جداول خاصة لقيم العزم الإستاتيكي لنصف المقاطع التي تؤخذ على شكل I وعلى شكل ⊔ .

أن الشكل (6-49) يوضح أنواع الرسوم البيانية لاجهادات القص τ لبعض المقاطع الهندسية الأخرى .



الشكـل (6-49)

ويعطى شرط المتانة أو ما يسمى بإجهاد القص المسموح به على النحو التالي :

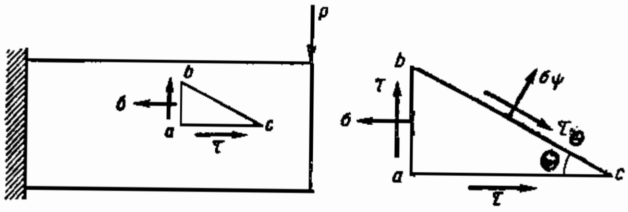
$$\tau_{max} \leq [\tau]$$

حيث أن :

τ - هو إجهاد القص المسموح به . ويساوي مثلاً للعتبات الفولاذية $[\tau] \approx 0.62[\sigma]$.

12.6 الأجهادات الرئيسية في العتبات

لقد بينا في البند السابق أن الأجهادات العمودية والمماسية أي أجهادات القص تؤثر في مقاطع العتبة العرضية ، أما في المقاطع الطولية فتؤثر أجهادات القص فقط . وفي المقاطع المائلة للعتبة تظهر عادة الأجهادات العمودية والمماسية معاً . فمثلاً في المساحة abc كما يبين الشكل (6-50) تظهر أجهادات عمودية ومماسية ، يمكن حسابها باستخدام العلاقات التي تم استخدامها في الأبواب السابقة لحساب الأجهادات الرئيسية .



الشكــل (6-50)

نستخدم العلاقة (6-11) لتحديد الأجهادات الرئيسية كما تم استخدامها فـــي الأبواب السابقة حيث :

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{.........} (11-6)$$

أما زاوية ميلان المساحات الرئيسية فيمكن تحديدها حسب العلاقة التالية :

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma} \quad \text{.........} (12-6)$$

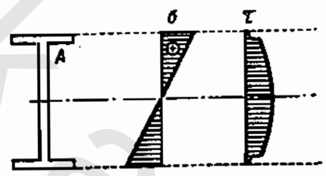
وكما اشرنا سابقاً أن أجهادات القص العظمى والدنيا التـــي تـــؤثر علـــى المساحات والتي تشكل زاوية $\pm 45°$ مع المساحات الرئيسية يمكن حســـابها حسب العلاقة التالية :

$$\tau_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{.........} (13-6)$$

ويتبين من العلاقـــة (6-13) أن الأجهـــادات الرئيســـية العموديـــة $\sigma_{\frac{max}{min}}$ ، واجهادات القص العظمى والدنيا $\tau_{\frac{max}{min}}$ ، سوف تحصل على القيم العظمـــى

في تلك النقاط من المقطع العرضي التي تكون لها أجهادات عمودية ومماسية كبيرة في وقت واحد .

فعلى سبيل المثال للمقطع I مثلاً تعتبر النقطة A أحدى هذه النقاط ، النقطة العليا أو السفلى للجدار أو المقطع كما يبين الشكل (6-51) ولكن ذلك لا يحدث بصورة دائمة ، فعندما تكون لاجهادات القص قيمة كبيرة ، فأنه عندئذٍ يمكن أن تكون الأجهادات الرئيسية قيمة كبرى ، تؤخذ في نقطة المقطع ، الواقعة تحت النقطة A .



الشكل (6-51)

ويمكن أيجاد موضع هذه النقطة والقيمة العظمى للإجهاد الرئيسي ، وذلك بجعل σ_{max} الأجهاد الأقصى في العلاقة (6-11) في الحالة الحدية ، وذلك لان الأجهاد العمودي σ يزداد حسب الابتعاد عن محور التعادل . أما أجهاد القص فيقل كما يبين الشكل (6-51) .

ومن المهم أيضا ، أنه يجب التأكد من الأجهادات الرئيسية على طول العتبة في تلك المقاطع التي يكون فيها لعزم الانحناء الذي يحدد الأجهاد العمودي σ ، وللقوة العرضية أي قوة القص التي تحدد τ قيمة كبيرة في نفس الوقت .

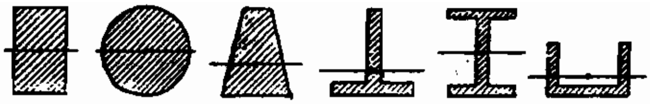
13.6 أشكــال مقــاطع العتبــات المختلفــة

في البند السابق تم دراسة الأجهادات التي تنشأ في حالة الانحناء للعتبات ، وتبين لنا أن أجهادات الشد أو الضغط القصوى في حالة الانحناء تتناسب عملياً مع بعد الألياف الخارجية عــن المحــور المحايــد أو مــا يســمى بمحــور التعادل . فإذا كانت مقاومة المادة في حالة الشد مساوية لمقاومتها فــي حالــة الضغط ، فأنه تستخدم في هذه الحالة مقاطع يكون مركز مقطعها في منتصف عمق العتبة ، وبهذه الطريقة نحصل على نفس عامل الأمان بالنسبة للأليــاف المعرضة للشد والضغط .

وهكذا يقع عادة الاختيار وبهذه الطريقة على المقاطع المتماثلــة بالنســبة للمحور المحايد وذلك للمواد التي تتساوى فيها نقطة الخضوع في حالة الشــد والضغط مثل مادة الفولاذ الإنشــائي ، ومثــل هــذه المقــاطع مبينــة فــي الشكل (a.b.c-52-6) . أما إذا كان المقطع غير متماثــل بالنســبة للمحــور المحايد كمقطع قضبان السكة الحديدية مثلاً ، فأن المادة توزع في الغالب بين الجهتين العليــا والســفلى بحيــث يكــون مركــز المقطــع بــالقرب مــن منتصف ارتفاعه .

أما بالنسبة للمادة التي هي ذات مقاومة منخفضة في حالة الشد ومرتفعــة في حالة الضغط . مثل مادتي الحديد الزهر والخرسانة ، فأن أفضــل مقطــع للعتبة هو ليس ذلك المتماثل بالنسبة للمحور المحايد وإنما المقطع التي تكــون فيه المسافتان c_1 ، c_2 من المحور المحايد إلى الألياف الخارجية في حالــة الشد والضغط هما كنسبة المقاومتين للمادة في حالة الشد والضغط .

وبهذه الطريقة نحصل على مقاومتين متساويتين في الشد والضغط . فمثلاً لمقطع على شكل T كما يبين الشكل (d.52-6) يمكننا أن نتحكم في موضــع مركز الحركة وذلك عن طريق تغيير نسبة بعد الوترة إلى بعد الجدار .



الشكــل (6-52)

وعند تصميم العتبات المعرضة للانحناء يجب مراعاة إلى جانب عوامل المقاومة الاقتصاد في وزن العتبة . فإذا وجد مقطعان متساويان من حيث معامل المقطع ، ومواصفات المقاومة اللازمة ، وعامل الأمان فان المقطع الأصغر مساحة يكون هو الأكثر اقتصاداً ، ولمقارنة بعض الأشكال المختلفة لمقاطع العتبات نأخذ أولاً مقطع مستطيل عمقه h وعرضه b كما يبين الشكل (a.52-6) ، حيث أن معامل المقطع لهذا المستطيل يعطى كما يلي :

$$Z=\frac{bh^2}{6}=\frac{1}{6}Ah \qquad (6-14)$$

حيث أن :

A- هي مساحة المقطع .

h- هو عمق المستطيل .

ويتضح من هذه العلاقة أنه كلما زاد العمق h يكون المقطع المستطيل أكثر اقتصاد ، إلا أنه يوجد هناك حداً لهذه الزيادة إذ يقل عادةً استقرار العتبة للمقاطع الرهيفة ذات المقطع المستطيل ، والتي قد تتعرض إلى الانهيار ليس نتيجة ضعف في مقاومة المادة بل نتيجة التحدب أيضا ، أما بالنسبة لمقطع دائري قطره d كما يبين الشكل (d.52-6) فأن معامل المقطع يساوي :

$$Z = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{1}{8} Ad \text{ ....} (15-6)$$

فإذا قارنا مقطع دائري قطره d مع مقطع مربع مساوي له في المســاحة طول ضلعه h نجد أن :

$$h = d\sqrt{\pi}/2$$

وبالتعويض عن ذلك في معادلة معامل المقطع للمستطيل السابقة نجد أن :

$$Z = 0.148\, Ad$$

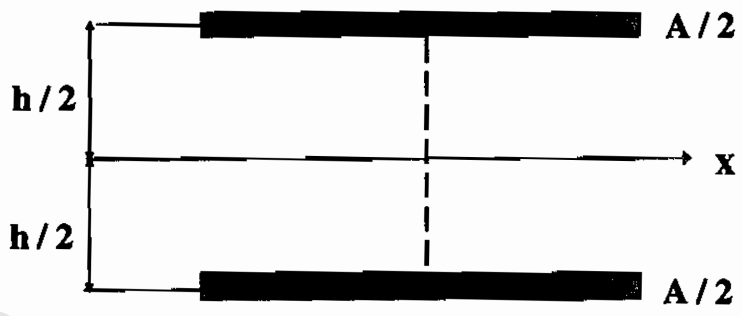
وبمقارنة هذه العلاقة مع معادلة معامل المقطع بالنسبة لمقطع دائري قطــره d نستنتج أن المقطع المربع يكون أكثر اقتصاداً من المقطع الدائري .

من توزيع أجهادات الانحناء في مقطع العتبة المبينة فــي الشــكل (6-42) يتضح لنا أنه للاقتصاد في التصميم يجب وضع معظم مادة العتبة أبعد ما يمكن عن المحور المحايد . حيث يكون الوضع الامثل نظرياً لمقطــع مســاحته A وارتفاعه h هو أن توضع نصف المساحة على مسافة h/2 إلى الأعلــى مــن المحور المحايد ، والنصف الأخر على مسافة h/2 إلى الأسفل مــن المحــور المحايد كما يبين الشكل (6-53) وبالتالي نحصل على :

$$I = 2\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} A h^2$$

ويصبح معامل المقطع في هذه الحالة :

$$Z = \frac{1}{2} Ah \text{...} (16-6)$$



الشكل (6-53)

وعلى الرغم أن هذا الحد الامثل لا يمكن الوصول إليه وتحقيقه . إلا أنه يمكن الاقتراب منه عملياً باستخدام مقطع على شكل الحرف I أو مقطع عريض الجدار ، حيث تتواجد معظم المادة في الجدارين كما يبين الشكل (e.52-6) . وبسبب ضرورة وضع جزء المادة في الوترة ، فأنه من غير الممكن تحقيق الشرط الحدي الذي حصلنا عليه في العلاقة (6-16) ،ألا أنه بالنسبة للمقاطع ذات الجدران العريضة نجد أن :

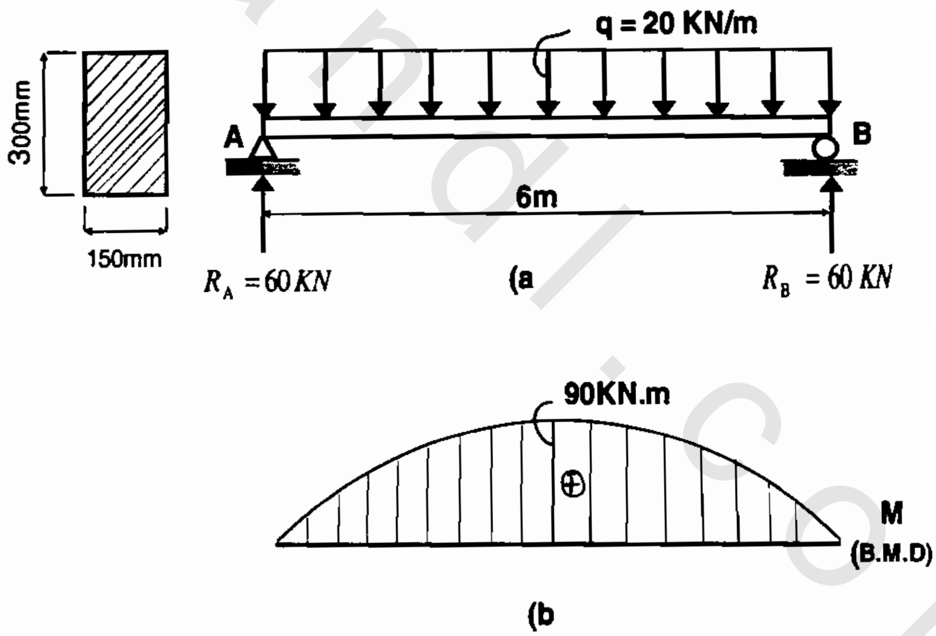
$$Z = \frac{1}{3} Ah \text{...} (17-6)$$

وبأجراء مقارنة بين العلاقتين (6-17) و (6-14) نجد أن مقطع على شكل I يكون أكثر اقتصادا من مقطع مستطيل مساوٍ له في العمق . كذلك فأن مقطع على شكل الحرف I يكون بسبب جداريه العريضين أكثر استقرارا بالنسبة للتحدب الجانبي من مقطع مستطيل مساو له في العمق وفي معامل المقطع .

ويستخدم دليل خاص لتصميم واختيار مقاطع العتبات يبين الخصائص المختلفة للمقاطع الإنشائية المختلفة مثل عزم القصور الذاتي ، ومعامل المقطع وغيرها من الخصائص اللازمة عند التصميم .

مثـــال (6-15)

الشكل (6-54) يبين عتبة معرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 20 KN/m ، وطولها 6m ومرتكزة ارتكازا بسيطاً عند نهايتيها A , B ، إذا علمت أن المقطع المستعرض للعتبة مستطيل أبعاده 150 × 300 mm . أوجد قيمة وموضع أجهاد الانحناء الأقصى في العتبة . ثم عين أجهاد الانحناء عند النقطة 50 mm أسفل السطح الأعلى للعتبة عند مقطع في منتصف المسافة بين المركزين .



الشكل (6-54)

الحـل :

اشرنا في البند السابق أن الرسم البياني لمخطط عـزم الانحنـاء لحمولـة موزعة بانتظام تؤثر على عتبة بسيطة هو عبارة عن قطع ناقص يتغير مـن الصفر عند نهايتي العتبة إلى قيمة قصوى عند منتصفه . ونحسب قيمة عـزم الانحناء في مركز العتبة كما يلي :

$$
\begin{aligned}
M &= 60(3) - (20)(3)(1.5) \\
&= 180 - 90 = 90\ KN.m
\end{aligned}
$$

وبما أن القيمة القصوى لعزم الانحناء تكون عند منتصف العتبة فأن أجهاد الانحناء الأقصى يجب أن يحدث أيضا عند منتصف العتبة أي عند x = 3m ، ويكون أجهاد الانحناء عند أي ليفة أو شريحة تقع على مسافة y مـن محـور التعادل للمقطع مساويا :

$$
\sigma = \frac{M\,y}{I} = 90 \times 10^3\ y / I
$$

وحيث أن I عزم القصور الذاتي للمقطع يساوي :

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{12} b h^3 \\
&= \frac{1}{12} (150)(300)^3 \\
&= 33.7 . 10^7\ mm^4
\end{aligned}
$$

وبالتعويض نجد أن عزم الانحناء في منتصف المقطع يساوي :

$$\sigma = 90\times10^3\,(10^3)\,y/33.7.10^7$$

أن أجهاد الانحناء الأقصى عند أي مـن الشـرائح الطرفيـة العليـا أو السفلى . عند الشرائح السفلى أي عند y = 150mm نجد أن :

$$\sigma = 90\times10^3\,(10^3)(150)/33.7.10^7$$
$$=135.10^8/33.7.10^7$$
$$=40\,MPa$$

ونجد أن الألياف والشرائح على مدى السطح السفلي للعتبـة تسـتطيل ، وبالتالي يكون الأجهاد في الشرائح في حالة شد . أما فـي الشـرائح العليـا عند y = 150mm فأنه يوجد أجهاد ضغط بنفس القيمة .

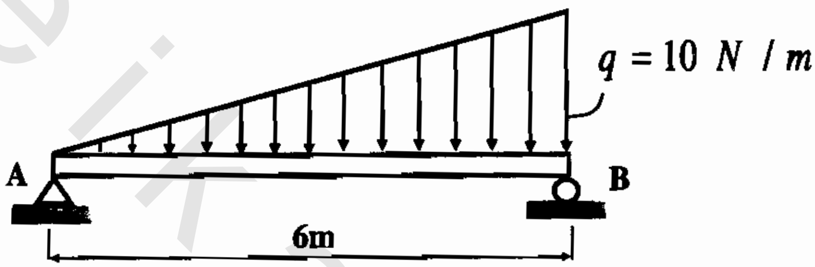
أما عند النقطة x = 50mm أسفل السطح العلوي للعتبة فأن أجهاد الانحنـاء عند هذا المقطع في المنتصف يكون هو :

$$\sigma = 33.7\times10^3\,(10^3)\,(-100)/33.7.10^7$$
$$=90.10^8/33.7.10^7$$
$$=-26.7\,MPa$$

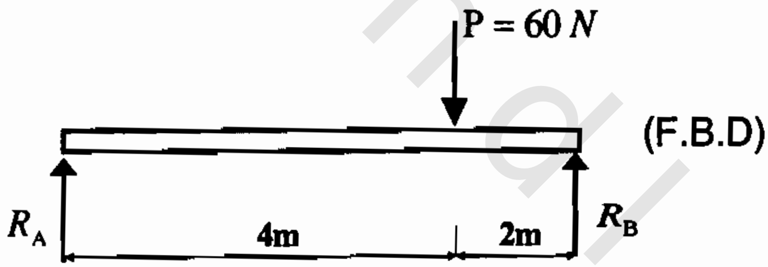
ويجب الإشارة إلى انه تم أخذ y سالبة في حساب الأجهـاد σ حيـث أن النقطة موضع الدراسة تقع فوق محور التعادل . وبالتالي فأن الأجهاد يكـون أجهاد انحناء ضغط كما تبين الإشارة السالبة النهائية .

مثـــال (16-6)

الشكل (a.55-6) يبين عتبة بسيطة معرضة إلى حمولة موزعـــة بانتظـــام كثافتها القصوى تساوي 10 N/m عند النهاية اليمنى للعتبة . فإذا كانت العتبة عبارة عن مقطع ذي شفة عريضة له الأبعاد المبينة في الشكل (55-6) حـــدد كثافة الحمولة القصوى q التي يمكن تطبيقها إذا كان الأجهاد المسموح به في حالة الشد والضغط يساوي 125 MPa .



(a



(b

الشكـــل (55-6)

الحـــل :

نقوم بتحديد ردود الأفعال R_A , R_B بدلالة q الحمولة المتغيرة بانتظام عـــن طريق استبدال هذه الحمولة بمحصلتها حيث أن :

$$P = \frac{1}{2} q.e = \frac{1}{2} 10.6 = 30 N$$

تؤثر خلال مركز ثقل الرسم البياني لمثلث الحمولة أي 4m على يمين المفصل A كما هم مبين في الشكل (b.55-6) . وبتطبيق شروط الاتزان الإستاتيكي نجد أن :

$$R_A 20N \quad , \quad R_B = 40N$$

أن كيفية رسم الرسومات البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء قد تم عرضها في البند السابق من هذا الباب لمثل هذا النوع من الحمولات وهي مبينة في الشكل (56-6) .

وبأخذ محور مثل x ينطبق مع العتبة وتكون نقطة الأصل A . فأننا نحصل على كثافة الحمولة على مسافة مثل x إلى يمين رد الفعل الأيسر R_A من علاقة تشابه المثلثات لتكون $q = \left(\frac{x}{6}\right)$ ، وطبقاً للأمثلة التي تم حلها في البند السابق من هذا الباب .

أن قوة القص Q عند مقطع على مسافة x من الطرف الأيسر للمفصل A تعطى كما يلي :

$$Q = 10 - \frac{1}{2}(x/6)10\,x$$
$$= 10 - \frac{1}{2}(10)\,x^2$$

وتسري هذه العلاقة لجميع قيم x ويمكن منها رسم مخطط قوة القص كما هو مبين في الشكل (a.56-6) . كما ويمكن إيجاد النقطة التي يكــون عنــدها القص يساوي صفر وذلك من خلال مساواة الصيغة بالصفر حيث :

$$10-\frac{1}{12}10\,x^2 = 0$$

ومنه نجد أن :

$$x=\sqrt{12}=3.46m$$

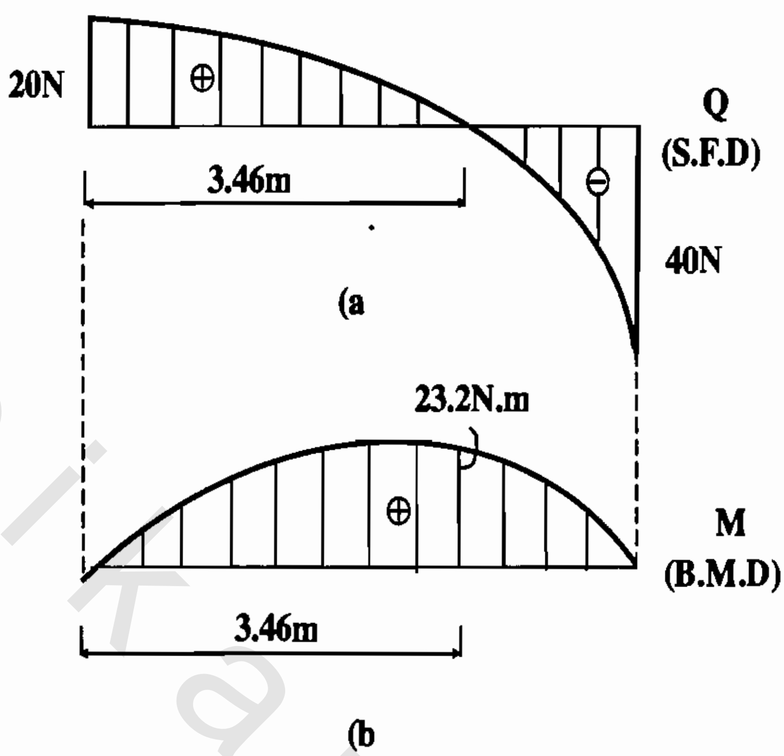
وهذه هي النقطة التي يكون فيها عزم الانحناء ذو قيمة قصوى . ويعطى عزم الانحناء M عند مقطع على مسافة x من الركيزة اليسرى A كالأتي :

$$\begin{aligned} M &= 10\,x-\frac{1}{2}(x/6)\,10\,\frac{x^3}{3} \\ &= 10\,x-\frac{1}{36}10\,x^3 \end{aligned}$$

وتسري هذه المعادلة لجميع قيم x ، ومنها يمكن رسم الرسم البياني لمخطــط عزم الانحناء على الشكل المبين (b.56-6) .

وعند النقطة x = 3.46 m ، يمكن إيجاد عزم الانحناء بــالتعويض فــي العلاقة السابقة حيث :

$$\begin{aligned} M &= 3.46\,(10)-\frac{1}{36}(10)\,(3.46)^3 \\ &= 23.2\,N.m \end{aligned}$$



الشكـــل (6-56)

وهذا هو عزم الانحناء الأقصى في العتبة . أن أجهاد الانحناء على أي ليفة أو شريحة على مسافة y من محور التعادل للعتبة يعطى بالعلاقة التالية :

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

نجد أن عزم القصور الذاتي أو ما يسمى بالعزم الثاني للمساحة I للعتبة :

$$I = \frac{150\,(250)^3}{12} - 2\left[\frac{65\,(210)^3}{12}\right]$$

$$= 95 \times 10^4\ mm^4$$

أن أجهاد الشد الأقصى يحدث عند الشرائح والألياف السفلية للعتبة حيث :

y = 125 mm

عند المقطع الذي يكون لعزم الانحناء عنده القيمة القصـــوى ، ويكـــون هـــذا الأجهاد 125 MPa ومنه نجد أن :

$$\sigma = \frac{M\,y}{I}$$

ومن هنا يمكننا إيجاد كثافة الحمولة القصوى التي يمكن تطبيقها اعتماداً علـــى الأجهاد المسموح به :

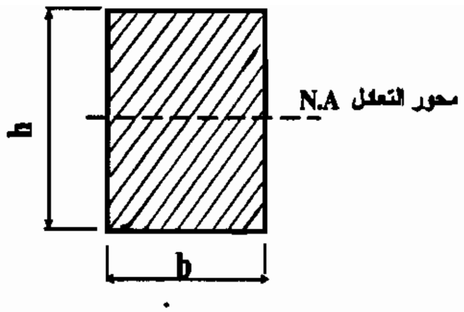
$$125 \times 10^6 = \frac{(2.32\,.q)\,(0.125)}{95 \times 10^6\,(10^{-12})}$$

ومنه نجد كثافة الحمولة القصوى :

$$q = 41 KN/m$$

مثـــال (17-6)

أوجد معامل أو معاير المقطع للعتبة ذات الشكل المستطيل والمبـــين فـــي الشكل (57-6) .



الشكــل (6-57)

الحــل :

ترمز h إلى عمق العتبة و b إلى عرضها . وكما اشرنا ســابقاً أن الانحنــاء الخالص يفترض أن يحدث حول المحور المحايد أو محور التعادل والذي يمر بمركز ثقل المقطع المستعرض للعتبة . أن عزم القصــور الــذاتي للمســاحة المستطيلة حول محور التعادل يساوي :

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

وقد اشرنا أيضا إلى أن المسافة عند الشرائح والألياف الخارجية إلى محور التعادل هي h / 2 والتي يرمز لها عادة بالرمز c ، وفي هذه الحالــة يمكــن إيجاد أجهادات الانحناء العظمى عند الشرائح والألياف الخارجية حسب العلاقة التالية :

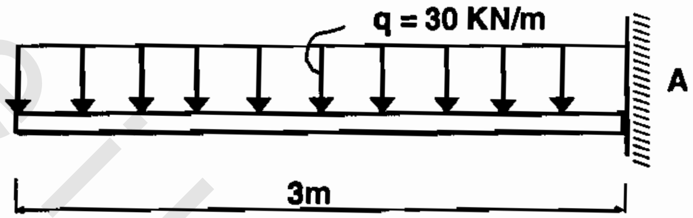
$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c}$$

وتسمى النسبة I / c بمعامل أو معاير المقطع للعتبة ويرمز لهــذه النســبة بالرمز Z . ومنه تصبح أجهادات الانحناء العظمــى $\sigma_{max} = \frac{M}{Z}$ للعتبــة ذات المقطع المستعرض المستطيل ، ويمكن إيجاد Z بــالتعويض عــن قيمــة I ، وقيمة c للمستطيل حيث :

$$Z = \frac{I}{c} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

مثـــال (6-18)

عتبة كابولية طولها 3m معرضة لحمولـــة موزعـــة بانتظـــام مقـــدارها 30KN/m ، الشكل (a.58-6) . إذا علمت أن قيمة الأجهاد المسموح به فـــي حالة الشد أو الضغط تساوي 150MPa . إذا كان المقطع المستعرض للعتبـــة مستطيل ، حدد الأبعاد إذا كان ارتفاع العتبة هو ضعف عرضها .



(a

(b

الشكـــل (6-58)

الحـــل :

نقوم أولاً برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة ، وقد تم عرض ذلك في البنود السابقة من هذا الباب ، حيث وجد أن مخطط عزم الانحناء لهذه العتبة يكون على شكل قطع ناقص يتغير من الصفر عند النهاية الحرة للعتبـــة إلى قيمة قصوى عند المسند المثبت A كما يبين الشكل (b.58-6) . أن عزم الانحناء الأقصى عند المسند المثبت يمكن إيجاده من الشرط الثالث للاتزان أي عن طريق أيجاد العزم عند أي نقطة من العتبة ولتكن النقطة A مثلاً :

$$\sum M_{(A)}\curvearrowleft^{+} = 0 ;$$

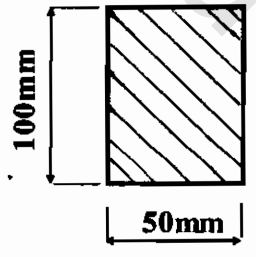
$$30(3)(1.5) + M_A = 0$$

ومنه :

$$M_A = -135 KN.m$$

أن هذه المسالة تختلف عن المسائل السابقة لأنها تتضمن تصـــميم العتبـــة وليس تحليل الأجهادات المؤثرة في العتبات ذات الأبعاد المعروفة والمعرضة لحمولات مختلفة . وأن المقطع الوحيد المطلوب اعتباره لأغراض التصميم هو المقطع الذي تكون قيمة عزم الانحناء قيمة قصوى ، وهذه القيمة تكون عنــد المسند الثابت A .

وهكذا نريد تصميم عتبة مستطيلة تقاوم عزم انحناء مقـداره 135KN.m مع أجهاد انحناء أقصى مقداره 150MPa . أن المقطع المســتعرض للعتبــة مبين في الشكل (6-59) ، حيث نرمز لعرض العتبة بالرمز b ، وللارتفــاع بالرمز h = 2b طبقاً لمتطلبات المسألة .



الشكــل (6-59)

نجد عزم القصور الذاتي للمساحة حول محور التعادل والذي يمــر فــي مركز ثقل المقطع كما يلي :

$$I=\frac{bh^3}{12}$$

وبالتعويض عن h = 2b نجد أن :

$$I=\frac{b(2b)^3}{12}=\frac{2}{3}b^4$$

نقوم بإيجاد أجهاد الانحناء عند المقطع المستعرض للعتبة المجاور للمسند الثابت حسب العلاقة :

$$\sigma=\frac{My}{I}$$

أن إجهاد الانحناء الأقصى يحدث على مدى السطح العلوي للعتبة حيث أن هـــذه الأليـــاف والشـــرائح تســـتطيل قلـــيلاً . وعنـــد هـــذا السطح y = -b و $\sigma=150MPa$ ، ومنه نجد أن :

$$\sigma=\frac{M\ y}{I}$$

$$150=\frac{-135\times10^3\,(10)^3\,(-b)}{(2/3)\,b^4}$$

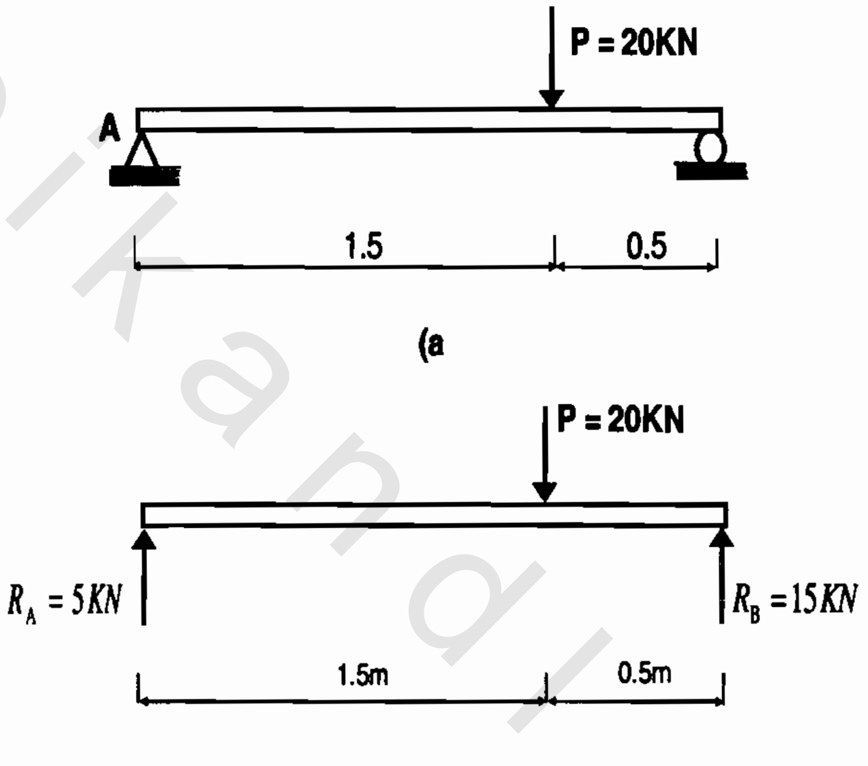
ومن هذه العلاقة يمكننا أيجاد إبعاد مقطع العتبة طبقاً لمواصفات المســألة حيث أن :

b = 110mm , h = 2b = 220mm

وهكذا استطعنا تحديد الأبعــاد حســب المعطيــات والمواصــفات المطلــوب تحديدها .

مثـــال (19-6)

الشكل (60-6) يبين عتبة بسيطة ذات مقطع مستعرض مستطيل ومعرضة لقوة مركزة واحدة . والمطلوب تحديد أجهاد القص في العتبة . ومن ثم تحديد أجهاد القص أيضاً عند النقطة 25mm أسفل العتبة عند مقطع على بعـــد 1m على يمين المفصل A أي النهاية اليسرى للعتبة .

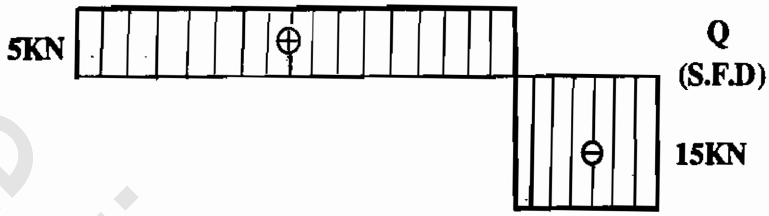


الشكـــل (60-6)

الحـــل :

نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة ، حيث يمكن بعد ذلك الحصول على قيم ردود الأفعال المبينة في (a.60-6) من شـــروط الاتـــزان

الثلاث ، بعد ذلك نقوم برسم الرسم البياني لمخطط قوة القص Q والذي يبينه الشكل (6-61) . وبدراسة هذا الرسم البياني لقوة القص نجد أن القيمة القصوى لهذه القوة تحدث عند جميع المقاطع المستعرضة على يمين الحمولة المركزة 20KN ، والتي تساوي 15KN .



الشكل (6-61)

وتكون القيمة المتوسطة لإجهاد القص المؤثرة على أي مقطع مستعرض في هذه المنطقة هي قوة القص مقسومة على مساحة المقطع المستعرض ، أي أن :

$$\tau_{\text{متوسط}} = \frac{20\times10^{3}}{0.1(0.05)} = 4\,MPa$$

ويكون أجهاد القص الأقصى أكبر من القيمة المتوسطة بمرة ونصف حسب العلاقة التالية :

$$\tau_{\max} = \frac{Qh^{2}}{8bh^{3}/12} = \frac{3Q}{2bh}$$
$$= \frac{3}{2}(4) = 6\,MPa$$

أن أجهاد القص هذا يحدث عند جميع النقاط على مدى محور التعادل للعتبة على يمين الحمولة 20KN .

من الرسم البياني لمخطط قوة القص نجد أن قوة القص المؤثرة على مسافة 1m يمين رد الفعل الأيسر تساوي 5KN ، وقد تم في البنود السابقة إيجاد أجهاد القص τ عند أي نقطة في هذا المقطع على مسافة y من محور التعادل حيث أن :

$$\tau = \frac{Q}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$$

عند النقطة 25mm أسفل الألياف والشرائح العلوية للعتبة نجد أن :

$y_o = 26mm$

وحيث أن :

$h = 100mm$

فأن عزم القصور الذاتي يكون :

$$I = \frac{bh^3}{12} = 50\,(100)^3/12$$
$$= 4.167 \times 10^6\ mm^4$$

وبالتعويض عن قيمة عزم القصور الذاتي يمكن إيجاد أجهاد القص عند النقطة 25mm أسفل قمة العتبة عند مقطع على بعد 1m على يمين المفصل A نجد أن :

$$\tau = \frac{5\times10^3}{2\,(4.167\times10^6)}\left(\frac{100^2}{4} - 25^2\right)$$
$$= 1.125\ MPa$$

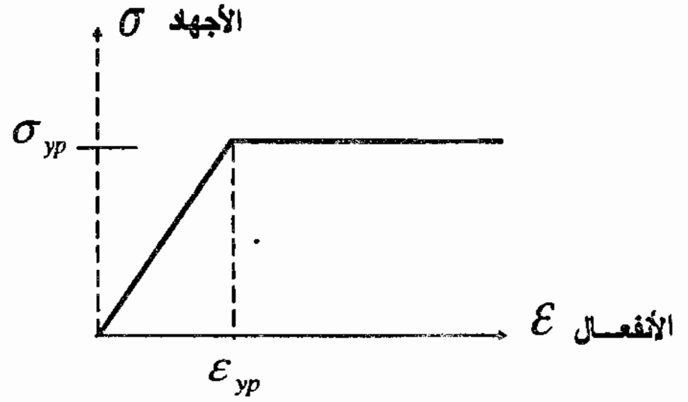
14.6 الانحنـــاء اللـــدن للعتبـــات

قمنا في البند السابق بدراسة الانحناء المرن للعتبات ، حيث اشرنا إلى أنه إذا كان تصرف العتبة كامل المرونة عند محور التعادل أو ما يســمى أحيانــا بمحور التعادل (Neutral Axis) يمر بمركز الثقل للمقطع المستعرض لهــذه العتبة . وكلما ازدادت الحمولات يبدأ التصرف اللدن بالظهور مــن الأليــاف والشرائح الخارجية بالانتشار إلى الداخل مما يؤدي إلى تحرك موضع التعادل من موضع إلى موضع آخر ، يمكن تحديده بادراك أن القوة العمودية المحصلة على أي مقطع مستعرض تختفي .

وفي النهاية أي عندما يكون تصرف العتبة كامل اللدونــة فــأن محــور التعادل يأخذ موضعاً بحيث تقسم المساحة الكلية للمقطع المستعرض إلى قسمين متساويين .

ولتوضيح ذلك نقوم بدراسة المراحل التالية لتصرف المادة والتي تتضمن أن تجهد ألياف عتبة ما حتى حد الخضوع للمادة ، وهذا مــا يبينــه منحنــى الأجهاد والانفعال بشكله المبسط والمبين في الشكل (6-62) ، حيث يفتــرض في هذا المنحنى أن حد التناسب وحد الخضوع متطابقان .

وأن منطقة الخضوع أي الجزء الأفقي من هذا المخطط يمتــد إلــى مــا لانهاية . ويسمى هذا التمثيل عادة لمخطط الأجهاد – والانفعــال بالتصــرف المرن كامل اللدونة ، حيث تمثل σ_{yp} حد الخضــوع للمــادة وتمثــل ε_{yp} الانفعال المناظر لهذا الأجهاد ، على افتراض أن خواص المادة متشابهة فــي حالة الشد والضغط .

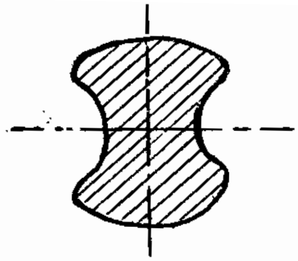


الشكــل (6-62)

أن التصرف المرن واللدن يحدث عندما تتعرض العتبة لعزم انحناء كبيــر بحيث تجهد الألياف الداخلية في المجال المرن بينما تصل الألياف الخارجيــة إلى حد الخضوع للمادة . وعند زيادة عزم الانحناء فأن تصرف العتبة يقترب من الحالة التي يكون عندها جميع الألياف مجهدة إلى حد الخضوع للمادة .

يسمى عزم الانحناء المناظر للتصرف كامل اللدونة للعتبة بعزم الانحنــاء كامل اللدونة ويرمز له عادة بالرمز M_P . أن ارسم البياني لمخطط الأجهاد والانفعال المبين في الشكل (6-62) يفترض أنه لا يمكن أن ينشأ عزم انحناء أكبر من هذا العزم .

ولتحديد عزم الانحناء المؤثر على العتبة عندما تصــل جميــع الشــرائح والألياف على مسافة y_1 من محور التعادل إلى حد الخضوع للمــادة ، نقــوم بدراسة عتبة ذات مقطع مستعرض اختياري متماثل حول محوريه كما يبــين الشكل (6-63) ومعرضة لانحناء صرف .



الشكــل (6-63)

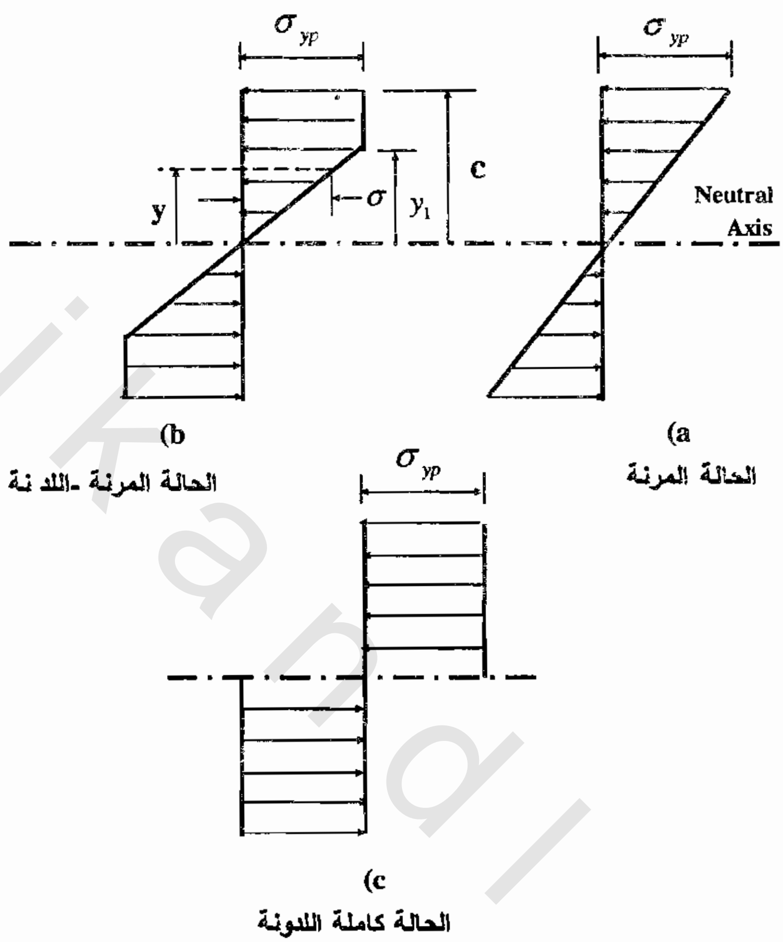
أن المادة تعتبر مرنة كاملــة اللدونــة عنــدما يكــون الرســم البيــاني للإجهاد – والانفعال كما هو مبين في الشكل (6-62) ، وتكــون خصــائص الأجهاد – والانفعال في الشد والضغط متماثلة ومتشابهة .

ويلاحظ هنا أنه على الرغم من أن انحناء العتبة قد تسبب فــي خضــوع الشرائح والألياف الخارجية فأنه يظل منطقياً افتراض أن المقــاطع المســتوية للعتبة العمودية على المحور قبل تأثير الحمولات تبقى مستوية وعمودية على المحور بعد التحميل ، وبالتالي تظل الانفعالات لشرائح والألياف الطولية للعتبة تتغير خطياً مع مسافة الشريحة من محور التعادل .

وبازدياد قيمة العزم المؤثر فأن الشرائح والألياف المتطرفة للعتبة تصــل أولاً لحد خضوع المادة وتبدأ الأجهادات العمودية بالتغير على جميع الشــرائح الداخلية خطياً على مسافة الشريحة من محور التعادل ، وتلك الحالــة يبينهــا الشكل (6-64.a) .

وعند الزيادة الإضافية في قيمة العزم تصل شــرائح داخليــة عنــد حــد الخضوع مع تقديم الخضوع من الشرائح الداخلية إلى الداخل ، أي أن منحنى الأجهاد والانفعال يبدأ بالتغير كما يبين الشكل (6-64.b) . في الحالة النهائية

أي في النهاية عندما تجهد جميع الشرائح إلى حد الخضوع فأن منحنى توزيع الأجهاد يكون على النحو المبين في الشكل (c.64-6) .ويسمى الانحناء المناظر في هذه الحالة بالعزم كامل اللدونة .



الشكل (64-6)

بالعودة إلى العتبة المعرضة لانحناء صرف كما اشرنا سابقاً فان محصلة القوى العمودية يجب أن تختفي وتتلاشى على المقطع المستعرض للعتبة . ويكون واضحاً بالتالي من خلال دراستنا لمنحنى توزيع الأجهاد المبين في الشكل (b.64-6) أنه للمقطع المتماثل حول محوريه يجب أن يمر محور

التعادل لمركز الثقل لهذا المقطع أي يجب أن تساوي المساحة فوق محور التعادل المساحة أسفل ذلك المحور .

ومع ذلك ففي الحالة العامة أي عند دراسة مقطع مستعرض غير متماثل حول محوريه ، فان محور التعادل بعد خضوع شرائح وألياف معينة لا يظل كما هو في حالة التصرف خالص المرونة للعتبة حيث يمر محور التعادل لمركز ثقل المقطع المستعرض . ومن الشكل (b.64-6) نلاحظ أنه عند $y < y_1$ يمكن إيجاد الأجهاد ، من تشابهه المثلثين نجد أن :

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_{yp}}{y_1}$$

ومنه نجد أن الأجهاد σ يساوي :

$$\sigma = \frac{y}{y_1}\sigma_{yp}$$

وعندما يكون الأجهاد يساوي الأجهاد كامل اللدونة أي $\sigma = \sigma_{yp}$ فأنه يمكننا إيجاد عزم الانحناء باستخدام التكامل لمساحة منحنى توزيع الأجهاد حيث :

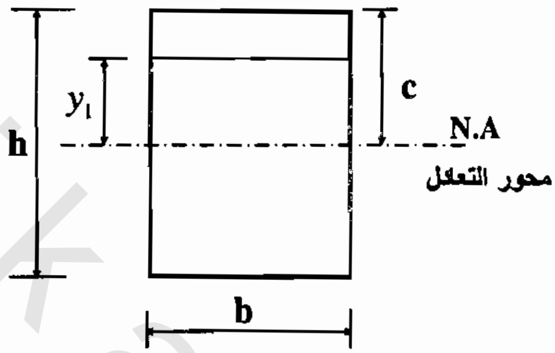
$$M = \int \sigma\, y.dA = 2\int_0^{y_1} \frac{y}{y_1}.\sigma_{yp}.\, dA + 2\int_{y_1}^{c} \sigma_{yp}.\, y\, dA$$

$$= \frac{2\sigma_{yp}}{y_1}\int_0^{y_1} y^2.dA + 2\sigma_{yp}\int_{y_1}^{c} y\, dA$$

وهكذا باستخدام التكامل نستطيع أن نجد صيغة لحساب عزم الانحناء في حالة تصرف اللدن للعتبة .

مثـــال (6-20)

أوجد قيمة العزم عندما تصل جميع الألياف والشرائح على مسافة y_1 مـــن محور التعادل إلى حد الخضوع لمادة عتبة ذات مقطع مســتطيل مبينـــة فـــي الشكل (6-65) .



الشكـــل (6-65)

الحـــل :

اعتماد على شكل المقطع المستعرض للعتبة الشكل المستطيل نجد أن :

$$M=\frac{2\sigma_{yp}}{y_1}\left(\frac{1}{3}by_1^3\right)+2\sigma_{yp}\,b(c-y_1)\left(\frac{c+y_1}{2}\right)$$
$$=\left(bc^2-\frac{b}{3}y_1^2\right)\sigma_{yp}$$

وكما اشرنا في البند السابق أنه في النهاية أي عند $y_1=0$ كما يوضـــح الشكل (c.64-6) يكون العزم كامل اللدونة لهـــذه العتبـــة المســـتطيلة ومنـــه نجد أن :

$$M_P=bc^2\,\sigma_{yp}=\frac{bh^2}{4}\sigma_{yp}$$

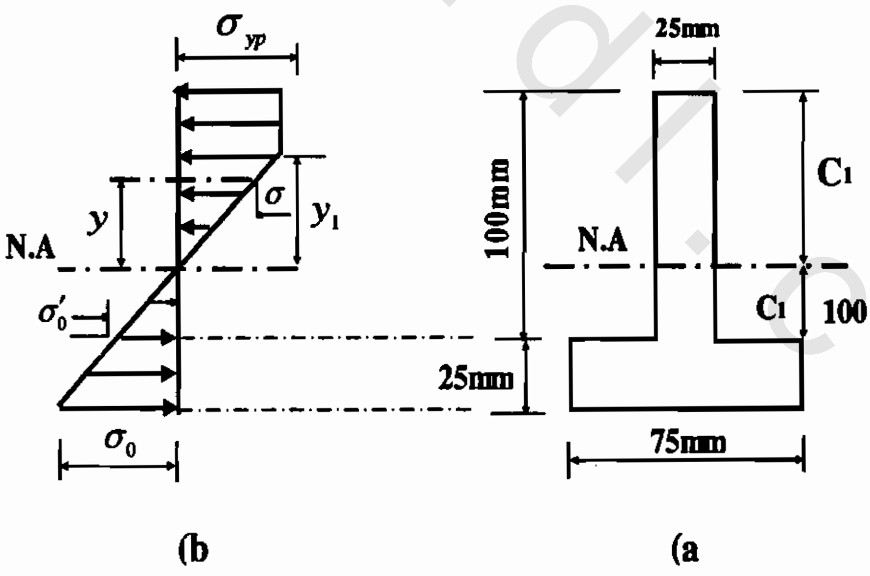
ويجب ملاحظة أن أقصى عزم مرن محتمل ، أي بمجرد وصول الألياف المتطرفة لحد الخضوع ، بينما تظل جميع الشرائح الداخلية في مجال التصرف المرن فأن :

$$M_e = \frac{bh^3}{6}\sigma_{yp}$$

وهكذا للمقطع المستعرض المستطيل يكون العزم المستطيل يكون العزم كامل اللدونة أكبر بـــ 50% من قيمة العزم المرن الأقصى الممكن .

مثـــال (6-21)

الشكل (6-66) يبين مقطع مستعرض لعتبة من الصلب اللدن على شكل T وذو حد خضوع يساوي 200MPa . ارتفاعــه 200mm وعــرض شــفتيه 150mm وسمكه 15mm . أوجد العزم كامل اللدونة ومن ثــم قارنـــه مـــع أقصى عزم مرن ممكن يستطيع أن يحمله نفس المقطع .



الشكـــل (6-66)

الحـــل :

أن العزم كامل اللدونة M_P يمكن الحصول عليه بالعلاقة التالية :

$$M_P = \sigma_{yp} Z_p$$

حيث أن Z_p هو معامل المقطع اللدن ويمكن الحصول عليه من الجداول الخاصة الملحقة بالمقاطع المختلفة للعتبات حيث أنه يســاوي للمقطــع تحــت الدراسة :

$$Z_p = 5.25 \times 10^5 \, mm^3$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{aligned} M_P &= (200 \times 10^6)(25.25 \times 10^5)(10^{-9}) \\ &= 105 \, KN.m \end{aligned}$$

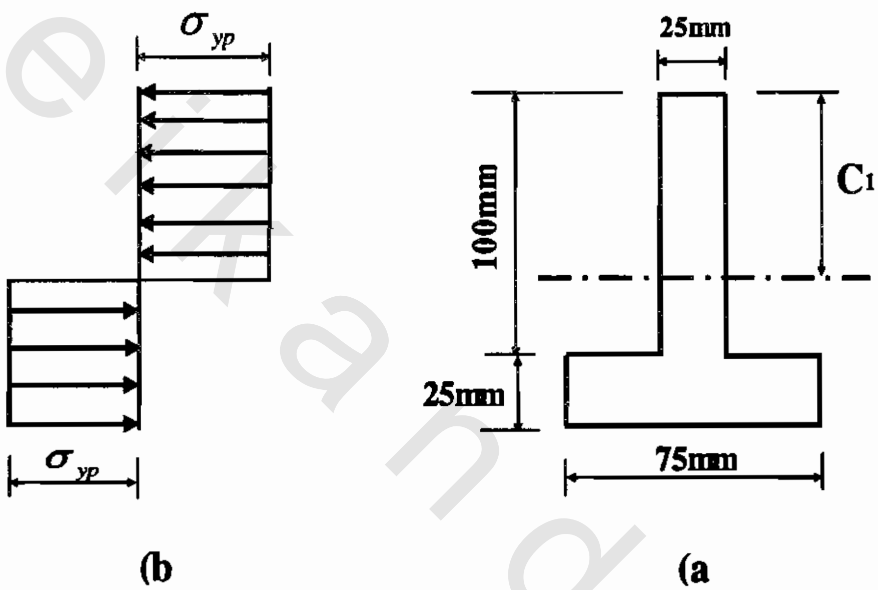
أما أقصى عزم مرن ممكن فيمكن الحصول عليه كما يلي :

$$\begin{aligned} M_e &= (200 \times 10^6)(4.47 \times 10^5)(10^{-9}) \\ &= 89.4 \, KN.m \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن العزم اللدن أكبر بمقدار 17% فقط من أقصى عزم مــرن لهذا المقطع بالذات وفي الواقع فأن العزم كامل المرونة يزيد عادةً عن أقصى عزم مرن ممكن بحوالي 12% إلى 15% لأغلب المقاطع عريضة الشفة .

مثـــال (6-22)

الشكل (a.67-6) يبين عتبة ذو مقطع على شكل حرف T . حدد موضـــع محور التعادل عندما يكون تصرف العتبة كامل اللدونة علـــى كــل المقطـــع المستعرض . ثم عين قدرة حمل العزم للتصرف كامل اللدونة وقارنـــه مـــع العزم المرن الأقصى .



الشكــل (6-67)

الحــل :

نقوم برسم الرسـم البيـاني لمخطـط القـوة العموديـة والمبـين فـي الشكل (b.66-6) . ومن اتزان القوة العمودية علــى المقطــع المســتعرض نجد أن :

$$-\sigma_{yp}(25)(c_1)+[\sigma_{yp}(125-c_1)(50)]=0$$

ومنه نجد أن :

$$c_1 = 87.5 \text{ mm}$$

وهكذا نجد أن محور التعادل يقسم المعرض المستعرض إلـــى مســـاحتين متساويتين في حالة التصرف كامل اللدونة لمادة العتبة . أما العزم الذي يناظر التصرف كامل اللدونة للعتبة فيمكن الحصول عليه كما يلي :

$$\begin{aligned} M_P &= \int \sigma\, y\, dA \\ &= \int_0^{c_1} \sigma_{yp}(y)(25)\,dy + \int_0^{(125-c_1)} \sigma_{yp}(y)(75)\,dy - \int_0^{(100-c_1)} \sigma_{yp}(y)(50)\,dy \\ &= 25\sigma_{yp}[c_1^2 - 175c_1 + 1.35\times10^4] \end{aligned}$$

وعند $c_1 = 87.5$ mm نحصل على :

$$M_P = (1.46\times10^{-4})\sigma_{yp}$$

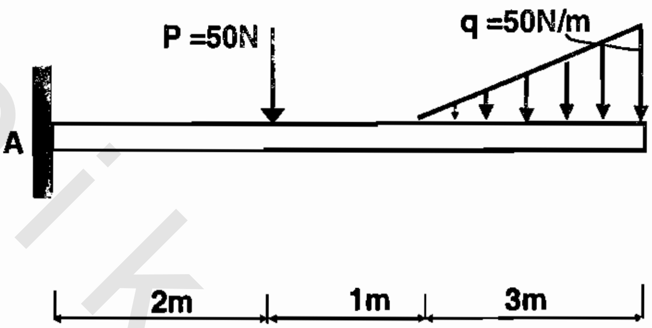
وبوضع $y_1 = c_1$ نستطيع أن نجد محور التعادل لحالة أقصى عــزم ممكــن ، والذي يكون عند $c_1 = 76.8$ mm أي أن محور التعادل يمــر بمركــز ثقــل المقطع المستعرض للعتبة . ومنه نحصل على أقصى عزم ممكن :

$$M_e = (8.29\times10^{-5})\sigma_{yp} \quad (N.m)$$

وهكذا نجد أن العزم كامل اللدونة يزيد بنسبة 75% عن أقصى عــزم مــرن ممكن .

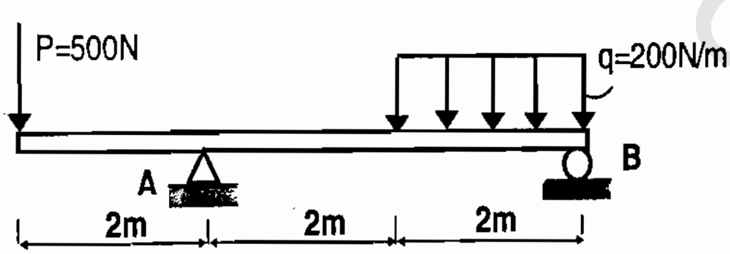
15.6 تمـــارين

س1: الشكل (6-68) يبين عتبة كابوليــة مثبتــة عنــد النقطــة A بمســند مثبت ، ومعرضة لقوة مركزة مقدارها 50N ، وحمولة موزعة متغيرة بانتظام إلى قيمة قصوى مقدارها 100N/m . أوجـد ردود الأفعـال فـي المسـند المثبت A على العتبة .



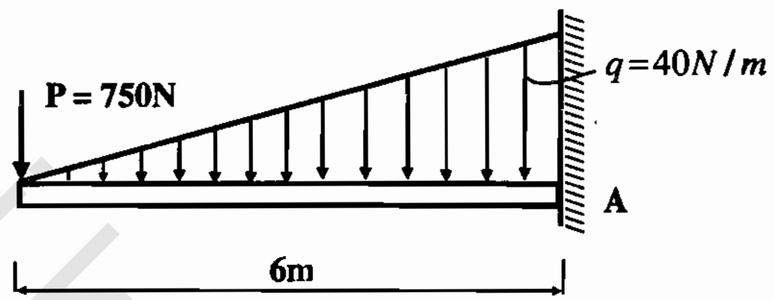
الشكــل (6-68)

س2: عتبــة بســيطة ذات بــروز جانبيــة مسـلط عليهـا قــوة مركــزة مقداراها 500N ، وحمولة موزعة بانتظام مقدارها 200N/m ، ومثبته عنــد بمفصل عند A ومسند متدحرج عند B ، كما يبين الشــكل (6-69) . أوجــد ردود الأفعال في المسند المتدحرج B والمفصل A على العتبة .



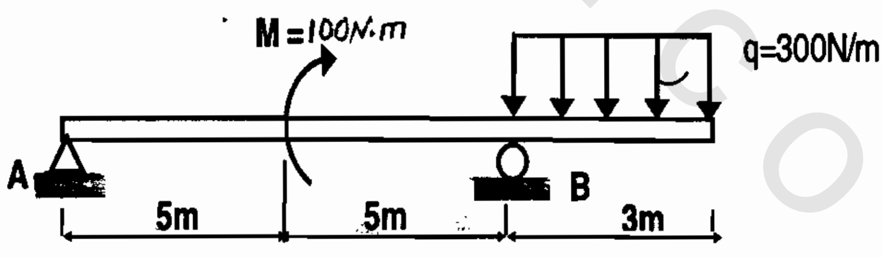
الشكــل (6-69)

س3: الشكل (6-70) يبين عتبة كابولية مثبتة عند أحد طرفيها حائط رأسي في النقطة A ، ومعرضة عند نهايتها الحرة إلى قوة مركــزة مقــدارها 750N ، وحمولة موزعة ومتغيرة بانتظام من الصفر عند النهاية اليسرى إلــى قيمــة قصوى مقدارها 40N/m . أوجد ردود الأفعال عند النقطة A على العتبة .



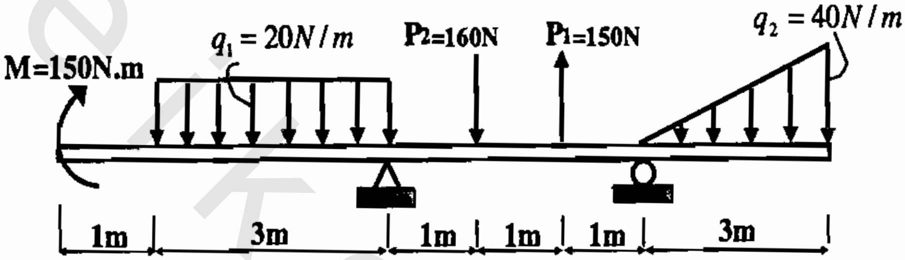
الشكـــل (6-70)

س4: عتبة بسيطة مثبتة عند A بمفصل وعند B بمسند متدحرج كمــا هــو موضح في الشكل (6-71) . ومعرضة إلى حمولة موزعة بانتظــام مقــدارها 300N/m وعزم ازدواج مقداره 100N.m . أوجد ردود الأفعال عند المسند المتدحرج A والمفصل B على العتبة .



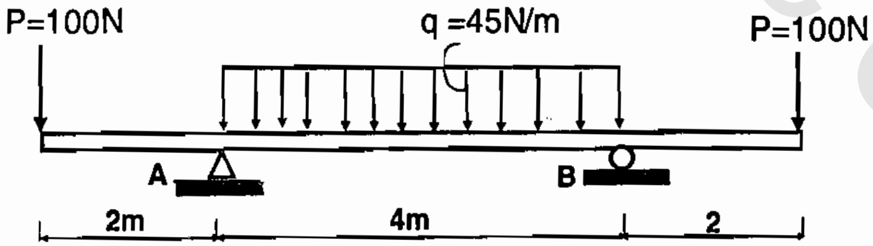
الشكـــل (6-71)

س5: في الشكل (6-72) العتبة مثبتة عند النقطة A بمفصل وعند النقطة B بمسند متدحرج ، ومعرضة إلى قوتين مركزتين الأولى اتجاهها إلى الأعلى ومقدارها 150N والثانية متجهة إلى الأسفل ومقدارها 160N ، وعزم ازدواج عند نهايته اليسرى مقداره 150N.m ، وحمولة موزعة بانتظام مقدارها 20N/m ، وحمولة موزعة ومتغيرة مقدارها 40N/m . أوجد ردود الأفعال في A ، B على العتبة .



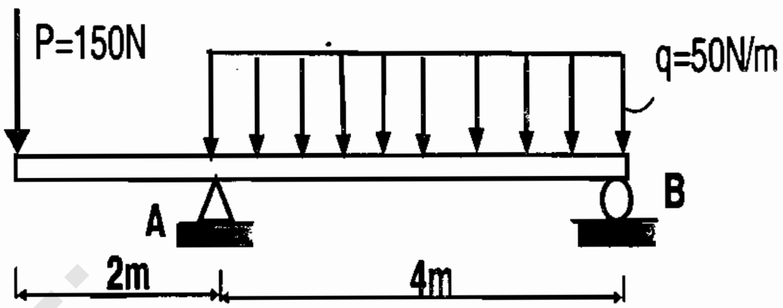
الشكل (6-72)

س6: الشكل (6-73) يبين عتبة بسيطة ذات بروز من الطرفين مثبتة عند النقطة A بمفصل وعند النقطة B بمسند متدحرج ، ومعرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 45N/m ، وقوتين مركزتين مقدار كل منها 100N . أوجد ردود الأفعال عند المفصل A والمسند المتحرك B على العتبة .



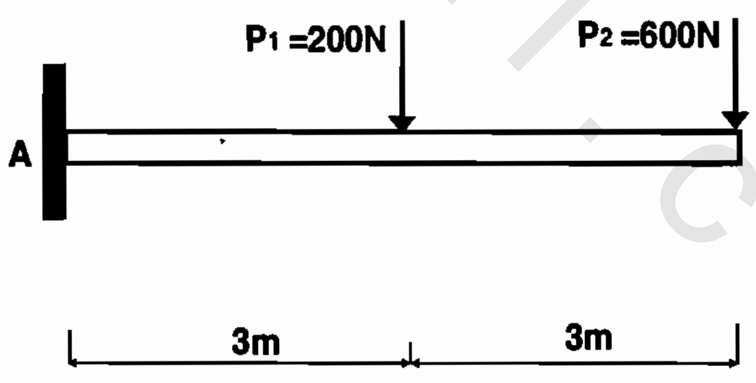
الشكل (6-73)

س7: الشكل (6-74) يبين عتبة بسيطة مثبتة عند A بمفصل وعند B بمسـند متدحرج . ومعرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 50N/m وقوة مركـزة مقدارها 150N . أرسم الرسومات البيانية لقوة القص وعزم الانحناء .



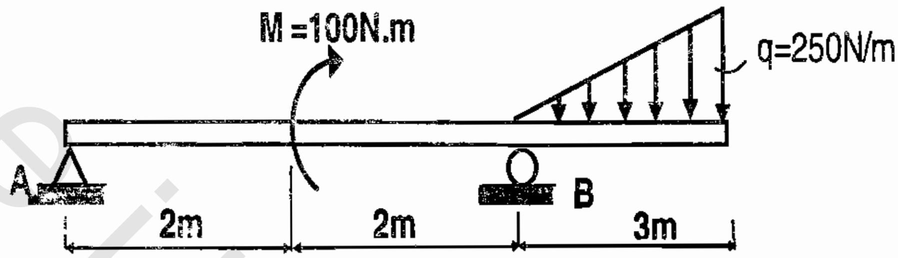
الشكـل (6-74)

س8: عتبة كابولية مثبتة عند النقطة A بمسند مثبت كما هو موضح في الشكل (6-75) ، ومعرضة لقوتين مركزتين الأولى مقدارها $P_1=200N$ ، والثانيـة تساوي $P_2=600N$. ارسم الرسوم البيانية لمخططات قـوة القـص وعـزم الانحناء .



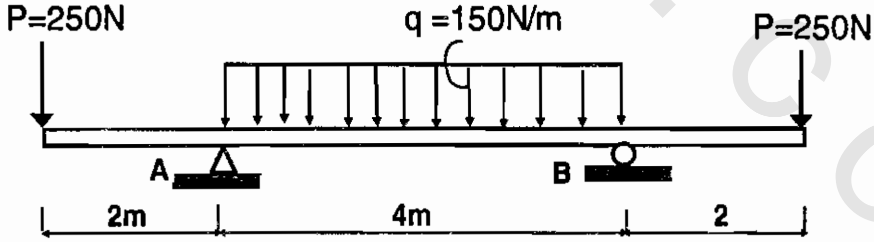
الشكـل (6-75)

س9: عتبة بسيطة مثبتة عند A بمفصل وعند B بمسند متدحرج ، ومعرضة إلى حمولة موزعة ومتغيرة بانتظام مقدارها 250N/m وعزم ازدواج مقداره 100N.m كما يبين الشكل (6-76) . ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء .



الشكل (6-76)

س10: عتبة بسيطة مثبتة عند A بمفصل وعند B بمسند متدحرج ذات بروز معرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 150N/m وقوتين مركزتين مؤثرتين على طرفيها مقدار الواحدة منها 250N كما هو موضح في الشكل (6-77) . ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء .



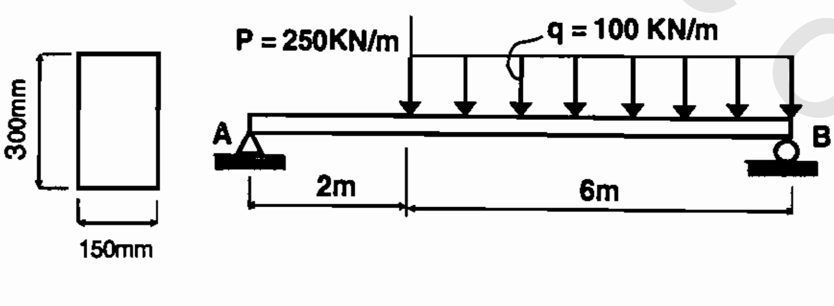
الشكل (6-77)

س11: عتبة من الحديد الصلب طولها 4m ومثبتة عند نهايتيها تثبيتاً بسـيطاً ومعرضة لحمولة مركزة مقدارها 200KN مؤثرة على مسافة 2m من أحـد المسندين . أوجد أجهادات الانحناء القصوى الناشئة في العتبة لو أن المقطـع المستعرض مستطيل ارتفاعه 200mm وعرضه 100mm .

س12: أوجد معاير المقطع إذا كان أقصى عزم انحناء يمكن تأثيره على عتبة يساوي 100KN.m ، وتم اختيار مقطع تجاري وكان أقصى أجهاد مسـموح به في الشد أو الضغط يساوي 220MPa .

س13: عتبة كابولية من الصلب طولها 4m معرضة لحمولة مركـزة عنـد نهايتها الحرة مقدارها 45N ، إذا علمت أن إجهاد الانحناء الأقصى يجـب أن لا يزيد عن 134MPa ، أوجد القطـر المطلـوب إذا كـان مقطـع العتبـة دائري الشكل .

س14: الشكل (6-78) يبين عتبة بسيطة معرضة لحمولة موزعـة بانتظـام مقدارها 100KN/m ، وقوة مركزة مقدارها 250K ، إذا علمت أن المقطـع المستعرض للعتبة مستطيل أبعاده 150×300mm . أوجـد قيمـة وموضـع أجهاد الانحناء الأقصى في العتبة . ثم عين أجهـاد الانحنـاء عنـد النقطـة 50mm أسفل السطح الأعلى للعتبة عنـد مقطـع فـي منتصـف المسـافة بين المركزين .



الشكل (6-78)

المراجـــــــــع

1. مبادئ مقاومة المواد . تيموشنكو، ترجمة د.مجدي إبراهيم غبريال، د.باسم محمود كلور- الجامعة التكنولوجية - بغداد.

2. مقاومة المواد . وليم أ.ناش - ترجمة د.عمرو عزت سلامة قسم العلوم الإنشائية - جامعة حلوان - مصر الطبعة الخامسة 2000 .

3. سلسلة ملخصات شوم "نظريات ومسائل في مقاومة المواد" . وليم أ.ناش - دار ماكجروهيل للنشر - دار الرائد العربي بيـروت - لبنـان - الطبعـة الثانية 1994.

4. مقاومة المواد . د.فيصل محمد حسن - الجامعة التكنولوجية - بغـداد - 1978 .

5. مقاومة المواد . د. ب ستيوبين – ترجمة د. داود سليمان المنير - دار مير للطباعة والنشر - موسكو 1968.

6. تحليل الآجهادات ونظرية الإنشاءات . د.عبدالفتاح ديوان ، د. احمد فهمي عبد الرحمن - الجزء الأول ، والجزء الثاني - دار الراتب الجامعية 1986.

7. تصميم المبانـي الخرسانيـة. د. عـلاء محمـود التميمـي - الـدار العربيـة للموسوعات - بيروت لبنان 1999 .

8. مسائل في الميكانيكا النظرية .أ. ف. ميشرسكي - موسكـو - دار ميـر للطباعـة والنشر 1977 .

9 . ميكانيكا المواد . ايــان جــون هيــران - بريطانيــا برمنكهــام ترجمــة د. صلاح محمد جميل - جامعة الموصل 1989 .

10. الوحــدات الدوليـــــة " SI " - جداول التحويـــل - الثوابت الفيزيائيـــة.
د. إبراهيم إبراهيم شريف دار الراتب الجامعية - بيروت لبنان .

11. مبادئ ميكانيكا الأجسام الصلبة - أيكو رلي بوبون - جامعة كاليفورنيا.
ترجمة د. خزعل ياسين - جامعة صلاح الدين العراق 1989 .

12 - "Engineering Mechanics Volume I - Static" Meriam J .L and L .G. Kraige 2nd Edition , SI - Version, John Wiley and Sons , New York - 1987 .

13- "Vector Mechanics for Engineers" (STATICS). Ferdinand P . Beer , E . Russel Johanston 2nd Edition - 1990 .