

الفصل الرابع

العمليات المنطقية الأساسية

لا يستغني أي برنامج جيد من العمليات الأساسية الثلاثة التالية:

- رابط العطف (Conjunction): "و" "and" ورمزه: \wedge
- رابط التخيير (disjunction): "أو" "or" ورمزه: \vee
- رابط النفي (negation): "غير صحيح أن..." "not" ورمزه: \neg

وهي العمليات التي سنشرحها في هذا الفصل

رابط العطف (Conjunction): "و" "and" ورمزه: \wedge

يمكننا الحصول علي عبارة جديدة مركبة باستخدام عبارتين بسيطتين مربوطتين برابط العطف "و" ("and"). ونرمز لهذه العبارة الجديدة كالتالي: $p \wedge q$. وتقرأ " q و p ". قيمة الصدق للعبارة $p \wedge q$ تعتمد علي قيمة الصدق للتعبيرات الجزئية لكل من q و p . تكون العبارة $p \wedge q$ صحيحة في حالة واحدة فقط وذلك عندما يكون q و p صحيحين في نفس الوقت، ويكون $p \wedge q$ خطأ في كل الحالات الأخرى. يمكن تلخيص قيم الصدق للعبارة $p \wedge q$ في جدول عادة ما نسميه جدول الصدق أو الحقائق كما هو موضح في الجدول 1.

فمثلاً نفهم من الصف الأول في الجدول أنه إذا كان p صحيحاً و q صحيحاً فإن $p \wedge q$ صحيحاً، وأما في الصف الثاني من الجدول نفهم أنه إذا كان p صحيحاً و q خطأً فإن $p \wedge q$ يكون خطأً وهكذا.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الجدول 1

نلاحظ أن هناك أربعة صفوف تغطي الحالات الأربعة الممكنة للصححة (T) والخطأ (F) لكل من التعبيرات الجزئية p و q ، كما نلاحظ أيضاً أن $p \wedge q$ يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كان كل من p و q صحيحاً.

مثال: بفرض أن لدينا التعبيرات الأربعة التالية:

(a) الرياض عاصمة المملكة وجدة مدينة من مدن المملكة.

(b) الرياض عاصمة المملكة و $4 + 2 = 7$.

(c) جدة عاصمة المملكة و ٦ يقبل القسمة علي ٢.

(d) عدد أيام الأسبوع 6 و 0 عدد طبيعي.

ففي هذا المثال فقط العبارة الأولى صحيحة لأن التعبيرات الجزئية فيها صحيحة، أما باقي التعبيرات فكلها خطأ لأن علي الأقل واحد من التعبيرات الجزئية خطأ.

رابط التعبير (disjunction): "أو" "or" ورمزه: \vee

يمكننا الحصول علي عبارة جديدة مركبة باستخدام عبارتين بسيطتين جزئيتين مربوطتين

برابط العطف "أو" ("or "). ويرمز لهذا العبارة الجديدة كالتالي: $p \vee q$

وتقرأ " p أو q ". قيمة الصدق للعبارة $p \vee q$ تعتمد علي قيم الصدق للتعبيرات الجزئية لكل من p و q . تكون العبارة $p \vee q$ صحيحة إذا كان أحد أو كلا من التعبيرات الجزئية p و q صحيحة، وتكون $p \vee q$ خطأ في حالة واحدة وهي عندما يكون p و q خطأ في نفس الوقت.

يمكن تلخيص قيم الصدق للعبارة $p \vee q$ في جدول الصدق أو الحقائق كما هو موضح في الجدول 2.

فمن الجدول واضح أن $p \vee q$ دائماً صحيحة إلا في حالة واحدة وهي عندما يكون فيها p و q خطأ في نفس الوقت.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الجدول 2

مثال: بفرض لدينا التعبيرات الأربعة التالية:

(a) الرياض عاصمة المملكة وجدة مدينة من مدن المملكة.

(b) الرياض عاصمة المملكة و $4 + 2 = 7$.

(c) جدة عاصمة المملكة و ٦ يقبل القسمة علي ٢.

(d) عدد أيام الأسبوع 6 و 0 عدد طبيعي.

في هذا المثال فقط العبارة الرابعة خطأ وباقي التعبيرات كل واحد منها صحيحة إذ أن علي الأقل أحد التعبيرات الجزئية صحيحة.

تستخدم كلمة "أو" في اللغة بطريقتين مختلفتين. أحياناً تستخدم كلمة أو بمفهومها الشامل أي أن " p أو q " أو كليهما معا. بمعنى آخر أن علي الأقل أحد البديلين يحدث. كما أن كلمة "أو" تستخدم بمفهومها الاستثنائي أي أن " p أو q " يعني إما p يحدث أو q يحدث وليس كليهما معا، بمعنى آخر فقط واحد من البديلين يحدث. فمثلا في الجملة "الخطوط L_1 و L_2 متوازيان أو متقاطعان" تستخدم "أو" بالمعني الثاني (الاستثنائي).
سوف نستخدم الرابط "أو" بالمعني الأول في هذه الوحدة إلا إذا ذكر خلاف ذلك. إذن تعرّف $p \vee q$ علي أنها دائما تعني " p أو q ".

رابط النفي (negation): "غير صحيح أن..." "not" ورمزه: \neg

يمكن الحصول علي عبارة جديدة من عبارة ما بإدخال صيغة النفي عليها. ويتم بإضافة الكلمات "غير صحيح أن....." قبل العبارة، وباستخدام الرمز إذا كانت العبارة هي p فإن نفيها يكتب: $\neg p$.

وتقرأ نفي p . قيمة صدق $\neg p$ تعتمد علي قيمة صدق p صحيح يكون $\neg p$ خطأ وإذا كان p خطأ يكون $\neg p$ صحيح فالتالي يكون جدول الصدق كما يلي:

p	$\neg p$
T	F
F	T

الجدول 3

مثال: بفرض أن لدينا التعبيرات التالية:

(a) الباب مغلق.

(b) هذا الثوب أبيض.

(c) كل الطلاب أذكاء.

لنفي العبارة الأولى نقول: "غير صحيح أن الباب مغلق" أو ممكن أن نقول "الباب ليس مغلق". وفي العبارة الثانية نقول: "غير صحيح أن هذا الثوب أبيض" أو نقول "هذا الثوب ليس أبيضاً". وفي العبارة الثالثة نقول: "غير صحيح أن كل الطلاب أذكاء" ولكن من الخطأ أن نقول: "كل الطلاب أغبياء" لأن هذا ليس نفيًا للعبارة كما عرفناه.

ليس من الضروري أن تحتوي التعبيرات المركبة علي عبارتين جزئيتين p و q فقط، وإنما يمكن الحصول علي عبارة مركبة من عدة عبارات جزئية وعدة روابط متكررة ولكن في هذا الفصل سنكتفي بإعطاء التعبيرات المركبة من ثلاثة عبارات جزئية كحد أقصى. في حالة وجود ثلاثة عبارات جزئية p, q, r .



يصبح جدول الحقائق يحتوي علي ثمانية صفوف لكي نغطي كل الحالات الممكنة كالتالي:

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

تعريف البوابات المنطقية والدوائر

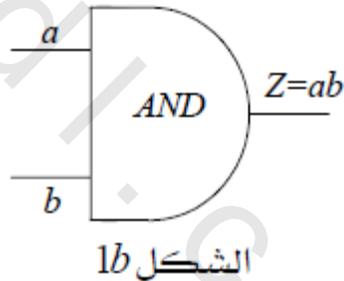
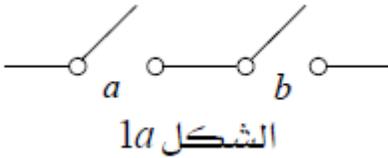
الدوائر المنطقية (كما تسمى كذلك الشبكة المنطقية) هي عبارة عن هياكل مصممة من عدد من الدوائر البدائية تسمى بوابات منطقية. كل واحدة من هذه الدوائر المنطقية يمكن النظر إليها كما كمينة L تحتوي علي جهاز أو أكثر للإدخال وجهاز إخراج واحد فقط. في أي لحظة كل جهاز إدخال في L يستوعب وحدة أساسية واحدة من المعلومات 0 أو 1 ثم تعالج هذه البيانات بالدائرة لتعطي الناتج وحدة أساسية واحدة 0 أو 1 علي جهاز إخراج. وبالتالي يمكن تخصيص متتابعات من الوحدات الأساسية لكل جهاز إدخال (حيث كل المتتابعات لها نفس العدد من الوحدات الأساسية) حيث L تعالج وحدة أساسية في كل مرة لتنتج للخروج متتابعة لها نفس العدد من الوحدات. يمكن تفسير الوحدة الأساسية كدفعة فولتية خلال جهاز الإدخال أو الإخراج.

البوابات المنطقية

هناك ثلاثة بوابات منطقية أساسية سنذكرها فيما يلي، إضافة إلى بوابات أخرى. يمكن افتراض أن البوابات تعالج المتتابعة من اليسار إلى اليمين أو من اليمين إلى اليسار وسوف نعتبر في هذا الفصل الفرضية الأولى ما لم يذكر خلاف ذلك.

البوابة AND (و)

كل إشارة خروج ناتجة من بوابة AND لها قيمة صدق صحيحة (أي 1) إذا فقط إذا كانت إشارات الإدخال لها قيم صدق صحيحة (أي 1). مفتاحا تشغيل موصلان في تسلسل (الشكل 1a) يشكلان بوابة AND. تعطي إشارة الخروج كالتالي: $z=ab$. ترسل الإشارة (أي أن الخرج 1) إذا فقط إذا فقط إذا كان مفتاحي التشغيل A AND B مقفلين (أي أن $a=1$ AND $b=1$). الشكل b1 يمثل البوابة AND. جدول الصدق يبين المخرج Z للبوابة AND لكل توافق (حالات) a و b. فمثلا نلاحظ من الجدول أن $Z=0$ إذا $a=0$ و $b=0$. لثلاثة مداخل a,b,c يكون الخرج: $z=abc$

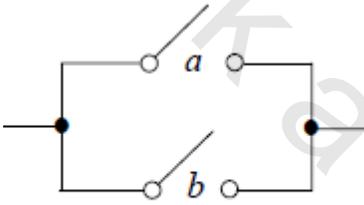


a	b	Z = ab
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

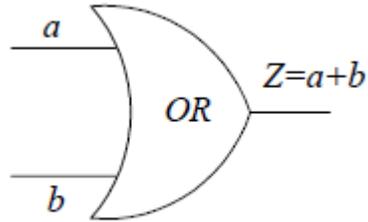
البوابة "أو" OR

نتج البوابة OR هو إشارة خروج صحيحة (أي 1) إذا كانت واحدة من إشارات الإدخال صحيحة (أي 1). مفتاحا تشغيل موصلان بشكل موازي (الشكل 2a) يشكلا بوابة OR. تعطي إشارة الخرج كالتالي: $Z=a+b$. ترسل الإشارة (أي أن $Z=1$) إذا كان أحد مفتاحي التشغيل مقفل (أي أن $a=1$ OR $b=1$). الشكل 2b يمثل البوابة AND. جدول الصدق يبين المخرج Z للبوابة OR لكل توافق (حالات) a و b.

فمثلا نلاحظ من الجدول أن $Z=1$ إذا كان $a=0$ و $b=1$.



الشكل 2a



الشكل 2b

a	b	Z = a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

البوابة NOT (المنفي)

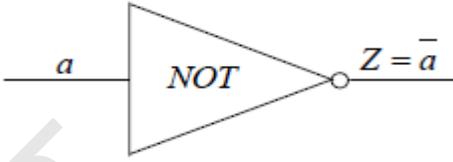
هذه البوابة تزود الشرط أنه لن تكون هناك إشارة خروج عندما يكون هناك إشارة إدخال، أي أن:

$a=1$ لما $Z=0$ و $a=0$ لما $Z=1$

وهذا يعني أن المخرج Z هو معكوس الإدخال. وهذا يكافئ المتممة في جبر بول، أي أن:

$$Z=a$$

تمثيل البوابة NOT وجدول الصدق يكون كالتالي:



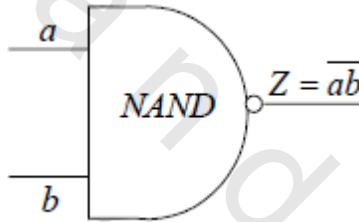
a	$Z = \bar{a}$
0	1
1	0

البوابة NAND

البوابة NAND هي البوابة NOT AND. إشارة الخرج من البوابة NAND هي معكوسة إشارة الخرج من البوابة AND. إذن المخرج من البوابة NAND هو متممة المخرج لبوابة AND، أي أن:

$$Z = \overline{ab}$$

تمثيل البوابة NAND وجدول الصدق يكون كالتالي:



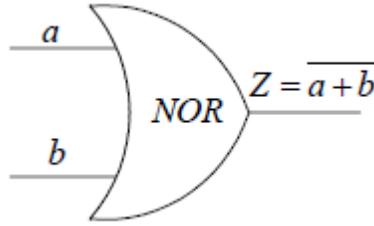
a	b	ab	$Z = \overline{ab}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

البوابة NOR

البوابة NOR هي البوابة NOT OR. المخرج من البوابة NOR هو معكوس مخرج البوابة OR. إذن إشارة الخرج من البوابة NOR هي معكوسة إشارة مخرج البوابة OR،

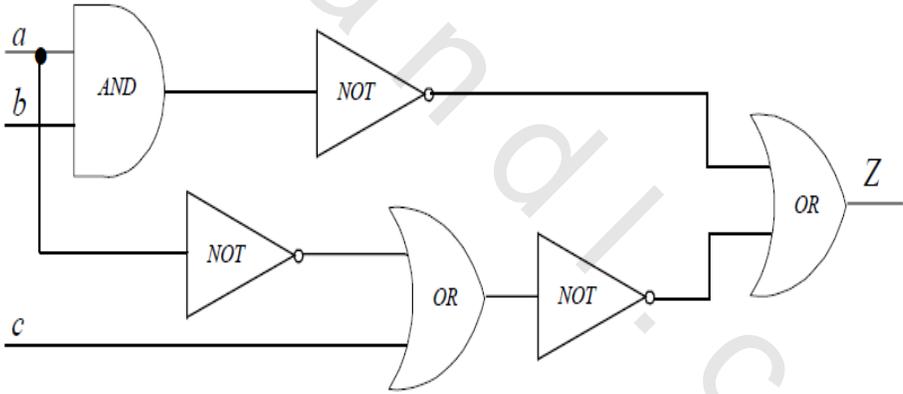
$$Z = \overline{a + b} \quad \text{أي أن:}$$

تمثيل البوابة NOR وجدول الصدق يكون كالآتي:



a	b	$a + b$	$Z = \overline{a + b}$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

مثال: أوجد المخرج Z لدائرة المنطقية التالية:



الحل:

المدخل علي البوابة AND a and b : ab : المخرج من البوابة AND

المخرج من البوابة NOT (الأعلي) \overline{ab} : المخرج من البوابة NOT (الأسفل) \overline{a}

المدخل علي البوابة OR \overline{a} and c : المخرج من البوابة OR $\overline{a} + c$

المخرج من البوابة NOT $\overline{\overline{a} + c}$: المخرج من البوابة OR علي المدخل $\overline{\overline{a} + c}$ and \overline{ab}

وفي النهاية يكون المخرج Z من البوابة OR : $Z = ab + a + b$
 مثال: أوجد واختصر المخرج Z للدائرة المنطقية التالية ثم ارسم الدائرة المنطقية المطابقة لهذا المخرج.

الحل:

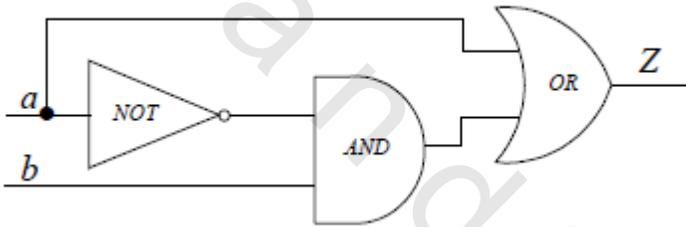
المخرج من البوابة NOT : \bar{a}

الدخل علي البوابة AND : \bar{a} and b

المخرج من البوابة AND : $\bar{a}b$

الدخل علي البوابة OR : $\bar{a}b$ and a

إذن المخرج من البوابة الأخيرة OR يكون : $Z = a + \bar{a}b$



وكما رأينا من قبل باستخدام قوانين جبر بول:

$$Z = a + ab = (a + \bar{a})(a + b) \quad (\text{قانون 6 و 11})$$

$$Z = a + b \quad (\text{قانون 11})$$

وخارج مثل هذا يمكن الحصول عليه من البوابة OR كما في الشكل:

