الفصل الخامس

التعبيرات المنطقية Logical expressions

في علم الحاسب نستعمل الرموز المنطقية "المنطق الرياضي" لتركيب جملة نسميها في علم البرمجة عبارة منطقية. ومن الضروري معرفة الحالات التي تكون فيها هذه التعبيرات إما صحيحة (True: T أو خاطئة (False: F).

بالانتهاء من هذا الفصل ستكتسب المعارف وتتدرب على المهارات التي تجعلك قادرا على:

- فهم التعبيرات والتعبيرات المركبة.
- جدول الحقائق.
- التوافق والتناقض.
- التكافؤ المنطقي.
- قانون ديمورغان.
- الفرق التناظري بين مجموعتين.

مقدمة

عند استعمال الكلمات وحدها للتعبير عن فكرة معينة هناك احتمال عدم وضوح هذه الفكرة لأن الكلمات عادة ما تكون لها أكثر من معني واحد. أما الرموز فهي مبهمة وحيادية. فإذن عند فشلنا في استخدام الطرق العادية لإيصال فكرة معينة يمكننا استخدام المنطق الرياضي (أو الرموز المنطقية) للوصول إلي طرح الفكرة بوضوح.

في علم الحاسب نستعمل هذه الرموز لتركيب جملة نسميها في هذا الباب عبارة منطقية. ومن الضروري معرفة الحالات التي تكون فيها هذه التعبيرات إما صحيحة (True: T) أو خاطئة (False: F). صحة أو خطأ هذه العبارة عادة ما تسمي قيمة الصدق.

التعبيرات والتعبيرات المركبة

العبارة المنطقية هي جملة خبرية تكون إما صحيحة أو خاطئة ولكن ليست صحيحة وخاطئة في نفس الوقت. فمثلا لتكن لدينا الجمل الآتية:

مثال ١ :

a) هذا الثوب أبيض.
b) مجموع الزوايا الداخلية لمثلث ما يساوي 180°.
c) $4 \div 2 = 1$
d) $x = 3$ هو حل للمعادلة: $x^2 = 16$
e) إلي أين أنت ذاهب؟
f) قم بواجبك من فضلك.

نلاحظ في هذا المثال أن الجمل الأربعة الأولى هي جمل خبرية يمكن الإجابة عليها بخطأ أو صح، فهذه الجمل نعتبرها تعبيرات منطقية. أما الجملتين الأخيرتين فهي ليست خبرية ولا نستطيع الإجابة عليها بخطأ أو صح، إذن لا نعتبرها رياضيا تعبيرات منطقية.

كثير من التعبيرات المنطقية تكون مركبة أي أنها تكون مركبة من تعبيرات جزئية بسيطة متصلة بروابط مختلفة. وتسمي العبارة عبارة بدائية إذا كان غير ممكن تجزئتها إلي تعبيرات بسيطة.

مثال٢ : بفرض أن لدينا الجمل التالية:

a) عمر طالب مجتهد وناصر طالب ذكي.
b) الشكل ABCD مربع وطول كل ضلع فيه يساوي 4cm
c) الورد أحمر والبنفسج أزرق.

الجمل الثلاث المذكورة في هذا المثال تعتبر كلها تعبيرات مركبة، فمثلا العبارة الأول مركبة من التعبيرات الجزئية البسيطة التالية: "عمر طالب مجتهد" و "ناصر طالب ذكي". في العبارة الثانية: "الشكل ABCD مربع" و "طول ضلعه 4cm" وفي العبارة الأخيرة: "الورد أحمر" و "البنفسج أزرق".

تحديد قيمة الصدق لعبارة مركبة مرتبط بقيمة الصدق للتعبيرات الجزئية الموجودة فيها مع الروابط التي استخدمت في تكوين هذه العبارة المركبة.

إذا سنتطرق فيما يلي إلي طريقة الوصول إلي قيمة الصدق للتعبيرات المركبة مع الإشارة إلي أننا سنستخدم الحروف اللاتينية الصغيرة........P, q , r ,s لنرمز إلي التعبيرات البسيطة الجزئية.

جدول الحقائق Truth table

P (p , q , r......) هو الرمز لعبارة مركبة من عدد من التعبيرات الجزئية المنطقية p , q , r...... (المتغيرات) وعدد من الروابط المنطقية ¬ , V , Λ (وأخرى سنتطرق إليها لاحقا). قيم الصدق لهذه العبارة المركبة تعتمد أساسا علي قيم الصدق للمتغيرات الموجودة فيها، أي أن قيم الصدق للعبارة المركبة تعرف عند معرفة قيم الصدق للمتغيرات.

الطريقة الأسهل والأسرع لتوضيح هذه العلاقة بين قيم الصدق للعبارة المركبة وقيم الصدق للمتغيرات هو من خلال جدول الحقائق أو الصدق كما هو المثال التالي:

مثال: أوجد جدول الصدق للعبارة المركبة التالية: $\neg(p\wedge\neg q)$

الحل

يكون جدول الصدق كالتالي:

p	q	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg(p\wedge\neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

لاحظ أن الأعمدة الأولي مخصصة للمتغيرات p و q، وأن هناك عدد كاف من الصفوف لتغطية جميع الحالات الممكنة من صحيح (T) وخطأ (F) لهذه المتغيرات. ثم بعد ذلك نقوم بملئ الأعمدة المتتالية التي تمثل المراحل البسيطة في تكوين العبارة المركبة. تحدد قيم الصدق في كل مرحلة من قيم الصدق في المراحل السابقة علي حسب

الروابط $\neg$, $\vee$, $\wedge$ المستخدمة. وأخيرا نحصل علي قيم الصدق للعبارة المركبة التي تظهر في العمود الأخير.

ويجب أن نلاحظ كذلك أن جدول الحقائق الفعلي للعبارة $\neg(p\wedge\neg q)$ يتكون فقط من عمودي المتغيرين ρ و q والعمود الأخير، أما الأعمدة الباقية فقد استخدمناها كمراحل للوصول إلي الحل. فإذن النتيجة تختصر فقط إلي جدول الحقائق التالي:

ρ	q	$\neg(\rho\wedge\neg q)$
T	T	T
T	T	F
F	T	T
F	F	T

لكي نتجنب استخدام عدد كبير من الأقواس عادة ما نتبع ترتيب معين لحساب الروابط كالتالي:

عملية النفي ($\neg$) تسبق عملية العطف ($\wedge$) والتي تسبق عملية التخيير($\vee$).

فمثلا $\neg p\wedge q$ يعني $(\neg p)\wedge q$ وليس $\neg(p\wedge q)$

التوافق والتناقض

عادة ما تكون العبارة تحتوي فقط صحيح (T) في كل الحالات، أي أن العمود الأخير (أو النتيجة) تكون دائمة صح لأية قيم صدق المتغيرات، ففي هذه الحالة نسمي العبارة توافق أي أنها دائما صحيحة.

وعكس ذلك أي عندما تكون النتيجة دائما خاطئة (F) (أي أن العمود الأخير يحتوي فقط علي (F)) فنقول أن العبارة تناقض.

مثال: بين أن

$a)\ \neg p\vee(p\vee q)$ توافق

$b)\ p\wedge q\wedge\neg(p\vee q)$ تناقض

الحل:

a) **نقوم بحساب جدول الحقائق كما رأينا في السابق:**

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \vee (p \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

إذن نلاحظ $\neg p \vee (p \vee q)$ **دائما صحيح (T) وذلك في كل الحالات، فنستنتج أنها توافق ونكتب:**

$$\neg p \vee (p \vee q) \equiv T$$

(سنتطرق للرمز $\equiv$ في الفقرة الآتية)

b) **بنفس الطريقة نحسب جدول الحقائق كالتالي:**

ρ	q	$\rho \wedge q$	$\rho \vee q$	$\neg(\rho \vee q)$	$(\rho \wedge q) \wedge \neg(\rho \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

فهنا نلاحظ أن $p \wedge q \wedge \neg(p \vee q)$ **تحتوي فقط علي (F)، فإذن العبارة تناقض، وتكتب:**

$$p \wedge q \wedge \neg(p \vee q) \equiv F$$

التكافؤ المنطقي

نقول علي عبارتين أنهما متكافئتان منطقيا (أو فقط متساويتان) إذا كان جدولا الصدق لهما متطابقين، ونرمز لهذا التطابق كالتالي: $\mathrm{P}\,(\,,q\,...) \equiv Q\,(\rho\,,q\,...)$ (إذن $\equiv$ هو رمز التطابق).

مثال: باستخدام جدول الحقائق للعبارتين كالتالي:

ρ	q	$\neg\rho$	$\neg q$	$\neg\rho\vee\neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

ρ	q	$\rho\wedge q$	$\neg(\rho\wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	T

نلاحظ أن العمود الأخير لكل من $\neg(p\wedge q)$ و $\neg p\vee\neg q$ متطابقان إذن:

$$\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$$

قانون ديمورغان *Demorgan' s Lows*

بفرض أن A وB مجموعتين ضمن المجموعة الشاملة U عندئذ يتحقق التالي:

$$b)\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \qquad a)\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

الفرق التناظري بين مجموعتين

نُعرِّف الفرق التناظري بين مجموعتين A وB بأنه مجموعة العناصر الموجودة إما في A أو B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي بمعني آخر العناصر الموجودة في اتحاد المجموعتين وفي نفس الوقت ليست موجودة في التقاطع. ونرمز لهذا الفرق التناظري بالرمز $A\oplus B$

$$A\oplus B=\{x : x\in A\cup B \text{ و } x\notin A\cap B\}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم

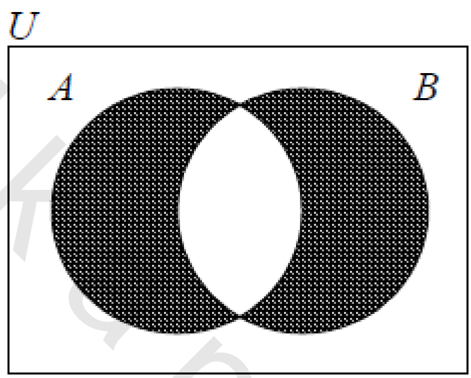
مثال: بفرض أن المجموعتان: $A=\{2,3,4,5\}\ B=\{2,4,a,b\}$

إذن: $A \oplus B = \{3,5,a,b\}$

خصائص الفرق التناظري:

1) $A \oplus A = \emptyset$ 2) $A \oplus \emptyset = A$ 3) $A \oplus U = \emptyset$

4) $A \oplus B = B \oplus A$ 5) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ 6) $A \oplus B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$



$A \oplus B$