# الفصل السادس

## مبادئ الرياضة الرقمية Discrete mathematics

**الهدف من هذا الفصل ليس شرح الرياضة الرقمية، فهذا موضوع آخر. الهدف هو التعرف علي بعض المفاهيم التي تساعدك في كتابة برنامج جيد.**

**بالانتهاء من هذا الفصل ستكتسب المعارف وتتدرب على المهارات التي تجعلك قادرا على فهم:**

- **الفئات أو المجموعات**
- **الدوال**
- **الخوارزميات**

## الفئات أو المجموعات

***تعريف المجموعة:***

**نعرف المجموعة رياضيا أو منطقيا بأنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تمييزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه.**

**فمثلا: نفرض أن لدينا المجموعات التالية:**

a) **مجموعة الأعداد** 2,4,6,8,10

b) **مجموعة الاثني عشر شهرا في السنه.**

c) **مجموعة الأعداد الكبيرة.**

d) **مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة.**

**في هذا المثال نعتبر a) و b) مجموعتين لأن عناصرها معروفة ومحددة أما بالنسبة للمجموعتين c) و d) فلا نعتبرهم رياضيا مجموعتين لأن المعايير الموجودة فيها هي معايير نسبية وليست دقيقة، فمعيار الكبر والجمال يتفاوت من شخص إلي آخر. فإذا عناصر c) و d) غير معروفة ومحددة وبالتالي لا نعتبرها مجموعتين. عندما ترد كلمة مجموعة في دراستنا اللاحقة نفهم ضمنا أننا نعني مجموعة رياضية.**

## رموز المجموعة وعناصرها

عادة ما نرمز للمجموعات (تسميتها) بحروف لاتينية كبيرة مثل: A, B, X, Y......إلخ بينما نرمز للأشياء التي تتألف منها المجموعة والتي تسمي بعناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل: a, b, x, y....إلخ. وعادة ما تكتب هذه العناصر بين قوسين من النوع { } وتوضع فواصل بينها. فبهذا التعريف نكتب المجموعة A التي عناصرها $-2, 0, 1, \pi$ كالتالي: $A = \{-2, 0, 1, \pi\}$

ولما كان 0 عنصرا من المجموعة A فإننا نرمز لذلك رياضيا بالعبارة $0 \in A$ ونقرأها 0 ينتمي إلي A. أما العنصر 5 مثلا فلا ينتمي إلي A ونعبر عن هذا بـ $5 \notin A$ وتقرأ 5 لا ينتمي إلي A.

### طرق تعريف المجموعات

هناك ثلاثة طرق لتعريف المجموعة وهي كما يلي:

- طريقة التعريف بعبارة.

في هذه الطريقة نكتفي بذكر جملة معينة يمكن عند قراءتها تحديد عناصر المجموعة فمثلا نقول A هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

هذه الطريقة غير مناسبة للمجموعات التي تكون فيها العلاقة بين العناصر غير واضحة.

- طريقة السرد أو حصر العناصر

وفيها نقوم بكتابة جميع عناصر المجموعة. فمثلا A مجموعة الأعداد الزوجية بين ١ و ٩ هي: $A = \{2,4,6,8,\}$

طبعا هذه الطريقة غير مناسبة إلا لمجموعات قليلة العناصر فمثلا لا يمكن سرد كل عناصر مجموعة الأعداد الزوجية. أيضا يلاحظ الطالب أن ترتيب العناصر غير مهم في المجموعة فإن المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة: $A = \{2,4,6,8,\}$ كما يلاحظ كذلك أن تكرار العنصر لا يغير المجموعة فمثلا المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة $A = \{2, 4, 4, 6, 8, 2\}$

- طريقة القاعدة المعينة

وفيها يكون تسلسل العناصر له نمطاً ظاهرا بحيث يمكن التعبير عنه بقاعدة معينة. فمثلا المجموعة $A = \{2,4,6,8,\}$ يمكن كتابتها بالقاعدة التالية:

$A = \{x : x \in N, x$ زوجي $, 8 \geq x \geq 2\}$ حيث $N$ مجموعة الأعداد الطبيعية.

وتقرأ $A$ هي المجموعة المكونة من العناصر $x$ عدد زوجي طبيعي أو أكبر أو يساوي 2 وأصغر أو يساوي 8.

***المجموعة الجزئية***

نقول أن $B$ هي مجموعة جزئية من المجموعة $A$ إذا كانت محتواه في $A$ أو بمعني آخر أن جميع عناصر $B$ موجودة في المجموعة $A$ ونرمز لهذا كالتالي: $B \subseteq A$

ويمكن كتابة هذا رياضيا كالتالي:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x, x \in B \Rightarrow \in A) \quad (\forall : \text{يقرأ مهما يكون})$$

إذا كانت $B \subseteq A$ و $A \neq B$ فنقول أن $B$ مجموعة جزئية فعلية من $A$ ونكتب $B \subset A$. أما إذا كانت $B$ ليست مجموعة جزئية من $A$ فنكتب $B \not\subset A$.

مثال ١: بفرض أن لدينا المجموعات التالية:

$$A = \{3.5.11,24\} \quad B = \{5,24\} \quad C = \{3,11,12\}$$

نلاحظ في هذا المثال عند مقارنة $B$ و $C$ مع $A$ أن: $B \subset A$ و $C \not\subset A$

***خصائص المجموعة الجزئية***

$a) \emptyset \subseteq A \subseteq U \qquad b) A \subseteq A \qquad c) A \subseteq B$ و $B \subseteq C \Rightarrow C \subseteq C$

$d) A = B \Rightarrow A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

***تساوي مجموعتين***

نقول أن المجموعتين $A$ و $B$ متساويتان ونكتب $A = B$ إذا كانت كل منها مجموعة جزئية من الأخرى أي أن:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \text{ و } \forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$$

**مثال ٢ : هل المجموعتان التاليتان متساويتان:**

$$A = \{0,1\} \quad B = \{x: x \in N, x^2 - x = 0\}$$

**الحل:**

**عناصر المجموعة $A$ معروفة ومحددة ولكن عناصر المجموعة $B$ غير محصورة فيجب علينا إذا تحديد عناصرها ويتم ذلك بحل المعادلة المعطاة:**

$x^2 - x = x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ أو $x - 1 = 0$ ,$x = 1$

**إذا :** $B = \{0,1\}$ ومنه نستنتج أن $A = B$

## *المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية*

**عند دراسة أية ظاهرة عملية أو اجتماعية فإننا نتعامل مع مجموعة أساسية كبيرة تحتوي علي جميع المجموعات تحت الدراسة. فمثلا يمكن أن نعتبر جميع طلبة الكلية كمجموعة أساسية بينما مجموعات الطلبة في التخصصات المختلفة هي مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية. عادة ما نسمي مثل هذه المجموعة الأساسية بالمجموعة الشاملة ونرمز لها بالرمز $U$ . فمثلا تعتبر المجموعة $U = \{-5,2,7,21\}$ هي مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات $A = \{2,21\}$ و $B = \{-5,7.21\}$ لأن المجموعات $A$ و $B$ مجموعات جزئية من $U$.**

**المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي علي أي عنصر ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\ \}$. فمثلا المجموعة $A = \{x: x \neq x\}$ هي مجموعة خالية لأنه ليس هناك عنصر يحقق الشرط المذكور. مفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد. تعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أية مجموعة أخري.**

# الدوال

**استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.**

**ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.**

تعريف ١ : تكون علاقة $f$ من مجموعة $X$ إلي مجموعة $Y$ دالة إذا كان كل عنصر من $X$ في علاقة مع عنصر واحد علي الأكثر من $Y$، أي أنه من أجل أي عنصرين $x_1$ و $x_2$ من $X$ هما في علاقة مع عنصرين من $Y$ يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث أن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو علاقة مع $x$.

نسمي المجموعة $X$ مجموعة المنطلق والمجموعة $Y$ مجموعة الوصول والعنصر $f(x)$ صورة $x$ بواسطة الدالة $f$ والعنصر $x$ أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة $f$ ونقول بأن $f(x)$ غير معرفة في $Y$ إذا كان $x$ ليس في علاقة مع أي عنصر من $Y$ أي أن $f(x)$ غير موجود في $Y$..

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f: X \to Y$

تجدر الإشارة إلي أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة علي الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

تعريف ٢: مجال الدالة $f$ (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالة $f$ هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة $f$ بالرمز $D_f$ ولمداها بالرمز $R_f$.

تعريف ٣: تكون دالتان $f$ و g متساويان إذا تحقق ما يلي:

1) $D_f = D_g$
2) $x \in D_f \Longrightarrow f(x) = g(x)$

نرمز لذلك بالرمز: $f$=g.

تعريف ٤: نقول عن دالة $f: X \to Y$ إنها تطبيق إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، أي أن مجالها هو مجموعة المنطلق: $D_f = X$.

نظرية ١: إذا كانت $f: X \to Y$ دالة فإن $f: D_f \to Y$ تطبيق.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلي تطبيق باستبدال مجموعة المنطق بمجال الدالة (أي أننا نحذف من مجموعة المنطلق العناصر التي ليس لها صورة في مجموعة الوصول).

تعريف ٥: نقول عن دالة $f: X \to Y$ إنها تباين (أو تطبيق متباين) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطق صورة واحدة فقط وكل صورة لها أصل واحد، أي أنه من أجل أي عنصرين $x_1$ و $x_2$ لهما صورة فإن: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ و $D_f = X$.

تعريف ٦: نقول عن دالة $f: X \to Y$ إنها تغامر (أو تطبيق غامر) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل عنصر من مجموعة الوصول له أصل واحد علي الأقل، أي أن: $R_f = Y$ و $D_f = X$.

نظرية ٢: إذا كانت $f: X \to Y$ دالة فإن $f: D_f \to R_f$ تغامر.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلي تغامر بحذف العناصر التي ليس لها صورة من مجموعة المنطلق والعناصر التي ليس لها أصل من مجموعة الوصول.

تعريف ٧: نقول عن دالة $f: X \to Y$ إنها تقابل (أو تطبيق متقابل) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط ولكل عنصر من مجموعة الوصول أصل واحد فقط، أي أن الدالة تباين وتغامر في آن واحد.

خلاصة: تكون علاقة f من X إلي Y:

١) دالة إذا تحقق ما يلي:

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين $x_1$ و $x_2$ لهما صورة.

٢) تطبيقاً إذا تحقق ما يلي:

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين $x_1$ و $x_2$ لهما صورة.

و $D_f = X$

٣) تبايناً إذا تحقق ما يلي:

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين $x_1$ و $x_2$ لهما صورة.

و $D_f = X$

و $f(x_1) = (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ من أجل عنصرين $x_1$ و $x_2$ لهما صورة.

٤) **تغامرا إذا تحقق ما يلي:**

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين $x_2$ و $x_1$ لهما صورة.

و $D_f = X$

و $R_f = Y$

٥) **تقابلا إذا تحقق ما يلي:**

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين $x_2$ و $x_1$ لهما صورة.

و $D_f = X$

و $f(x_1) = (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ من أجل عنصرين $x_2$ و $x_1$ لهما صورة.

و $R_f = Y$

**تعريف ٨:** لتكن لدينا الدالتان $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$

تركيب هاتين الدالتين $g \circ f$ هو دالة من $X$ إلي $Z$ بحيث:

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

**نظرية ٣:** تركيب الدوال تجميعي ليس تبديليا.

**تعريف ٩:** الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

***منحنى الدالة:***

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمي بالمستوى الديكارتي وذلك باتباع الخطوات التالية:

١) انشاء جدول لقيم $x$ (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلي أكبرها وقيم $y = f(x)$ الموافقة لها.

٢) رسم النقاط $(x, y)$ الناتجة في المستوى الديكارتي.

٣) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر $x$ لها صورة....

وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمي منحني الدالة.

**تعريف ١٠:** نقول عن دالة إنها:

١) فردية إذا كان:

$f(-x)+f(x)=0$ أو $f(-x)=-f(x)$ من أجل أي $x \in D_f$ و $-x \in D_f$.

٢) زوجية إذا كان:

$f(-x)-f(x)=0$ أو $f(-x)=f(x)$ من أجل أي $x \in D_f$ و $-x \in D_f$.

### *الدوال الجبرية:*

**تعريف ١١: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة. (المطولة).**

**وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط ، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.**

**ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التآلفية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.**

### *الدوال غير الجبرية:*

**أما الدوال غير الجبرية فمنها: الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.**

## الخوارزميات

**الخوارزميات هي أساس البرمجة في الحاسب. وسنتناول نبذة مختصرة عنها.**

### *تعريف الخوارزميات*

**تعريف ١: نسمي كل قائمة منتهية من المعطيات وسؤال متعلق بها. مسألة وحل المسألة هو إعطاء جواب لسؤالها مهما تغيرت قيم المعطيات.**

**مثال١: نريد أن نحسب قيمة كثير الحدود التالي من أجل $x = 5$:**

$$f(x)=2x^3-7x^2+4x-15$$

**فالمعطيات هنا هي: كثير الحدود $f(x)$ والقيمة المعينة للمتغير $x = 5$**

**والسؤال هو : أوجد قيمة $f(5)$.**

**وحل هذه المسألة هو: $f(5) = 80$.**

**تعريف ٢**: نسمي حجم معطيات المسألة حجم الحيز الذي تشغله المعطيات في الذاكرة.

**مثال٢**: نعتبر المسألة السابقة: المعطيات هنا ثابتة فلا نحتاج إلي تخزينها في الذاكرة.

ولكن لو اعتبرنا مسألة أعم منها وهي حساب قيمة كثير الحدود نفسه من أجل أية قيمة ما للمتغير فنحتاج إلي إدخال قيمة المتغير كمتغير حقيقي. وسيكون الحيز الذي يخصص في الذاكرة لتخزين هذا المتغير الحقيقي هو حجم المعطيات.

**مثال٣**: نعتبر المسألة التالية:

المعطيات: كثير حدود $f(x)$ من الدرجة الثالثة وقيمة معينة للمتغير $x = a$.

السؤال: أوجد قيمة $f(a)$.

فيجب إدخال معاملات كثير الحدود من أصغر درجة إلي أكبرها وهذا يحتاج إلي مصفوفة $4 \times 1$ (مثلا) كما أننا نحتاج إلي متغير حقيقي لإدخال قيمة المتغير. فحجم المعطيات سيكون بهذا الترميز هو الحيز الذي تشغله المصفوفة والمتغير الحقيقي.

**تعريف ٣**: نسمي خوارزمية كل قائمة منتهية من الخطوات لحل مسألة ما أي إيجاد جواب للمسألة.

يمكن أن نتصور الخوارزمية كبرنامج حاسب لحل مسألة ما:

**مثال ٤**: نعتبر مسألة المثال١: يمكن حلها بطريقة التعويض التالية:

$$\begin{aligned} f(5) &= 2(5^3) - 7(5^2) + 4(5) - 15 \\ &= (2 \times 5 \times 5 \times 5) - (7 \times 5 \times 5) + (4 \times 5) - 15 \\ &= 250 - 175 + 20 - 15 = 75 + 20 = 95 - 15 \\ &= 80 \end{aligned}$$

احتجنا في هذه الخوارزمية إلي أداء $3 + 2 + 1 = 6$ عمليات ضرب و ٣ عمليات جمع.

كما يمكن حلها بطريقة هورنير التالية:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 7x^2 + 4x - 15 = (2x^2 - 7x + 4)x - 15 \\ &= \big((2x - 7)x + 4\big)x - 15 \end{aligned}$$

ومنه فيكون:

$$\begin{aligned} f(5) &= \big((2 \times 5 - 7) \times 5 + 4\big) \times 5 - 15 \\ &= \big((10 - 7) \times 5 + 4\big) \times 5 - 15 \\ &= (3 \times 5 + 4) \times 5 - 15 = (15 + 4) \times 5 - 15 \\ &= 19 \times 5 - 15 = 95 - 15 = 80 \end{aligned}$$

احتجنا في هذه الخوارزمية إلي أداء 3 عمليات ضرب و 3 عمليات جمع.

إذن خوارزمية هورنير أسرع من خوارزمية التعويض من حيث الوقت المستغرق لإعطاء الجواب.

تجدر الإشارة إلي أن التحليل المعطي لكثير الحدود في طريقة هورنير ليس جزء من الجواب وإنما يوضح صحة الطريقة فقط إذ يمكن تطبيقها مباشرة كالتالي:

الخطوة الأول: ضرب معامل 3 في قيمة المتغير.

الخطوة الثانية: إضافة الناتج السابق إلي معامل 2 .

الخطوة الثالثة: ضرب الناتج السابق في قيمة المتغير.

الخطوة الرابعة: إضافة الناتج السابق إلي معامل $x$.

الخطوة الخامسة: ضرب الناتج السابق في قيمة المتغير.

الخطوة السادسة: إضافة الناتج السابق إلي المعامل الثابت.

الجواب: الناتج الأخير هو قيمة كثير الحدود عند قيمة المتغير.

فواضح من خطوات الخوارزمية بأننا نحتاج إلي أداء 3 عمليات ضرب و 3 عمليات جمع فقط.

وهذه الخوارزمية يمكن تطبيقها لحل مسألة المثال ٣.

مثال٥: نعتبر المسألة التالية:

المعطيات: عددان طبيعيان $a$ و b بحيث $a$ >b .

السؤال: ما هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقتين مختلفتين:

١) الطريقة المباشرة: نطبق الخوارزمية التالية:

الخطوة الأولي: إيجاد قواسم كل من العددين.

الخطوة الثانية: إيجاد القاسم المشترك الأكبر.

مثلا لو كان $a = 258$ و $b = 60$ فيكون:

الخطوة الأولي: قواسم $a = 258$ هي : 1, 2, 3, 6, 86, 129, 258

وقواسم $b = 60$ هي: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

الخطوة الثانية: القاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 258$ و $b = 60$ هو: 6.

٢) الطريقة الثانية: نطبق خوارزمية إقليدس التالية:

الخطوة الأولي: نقسم $a$ علي فنحصل علي باقي $r_1$.

الخطوة الثانية: إذا كان الباقي يساوي الصفر فإن القاسم المشترك الأكبر هو المقسوم عليه.

الخطوة الثالثة: إذا لم يكن الباقي يساوي الصفر فنقسم المقسوم عليه علي الباقي فنتحصل علي باق جديد.

الخطوة الرابعة: نكرر الخطوتين الثانية والثالثة إلي أن نجد القاسم المشترك الأكبر.

مثلا لو كان $a = 258$ و $b = 60$ فيكون:

الخطوة الأولي: نقسم $a = 258$ علي $b = 60$ فنتحصل علي الباقي: $r_1 = 18$.

الخطوة الثالثة: نقسم $b = 60$ علي $_1 = 18$ فنتحصل علي الباقي: $r_2 = 6$.

الخطوة الرابعة: نقسم $_1 = 18$ علي $r_2 = 6$ فنتحصل علي الباقي: $r_3 = 0$.

الخطوة الثانية: الباقي ويساوي الصفر إذن القاسم المشترك الأكبر هو المقسوم عليه الأخير: $r_2 = 6$.

هذه الخوارزمية منتهية لأن الباقي يتناقض إلي أن يصبح صفرا:

$$a = 258 > b = 60 > r_1 = 18 > r_2 = 6 > r_3 = 0$$

**تعقد الخوارزمية:**

إن تحليل الخوارزميات مهمة رئيسية في علوم الحاسب... ولمقارنة الخوارزميات يمكن اعتبار عاملين مهمين هما: الفضاء والزمن.

نعني بالفضاء الحيز الذي تشتغله الخوارزمية في الذاكرة فكلما كان صغيرا كلما كان أحسن، رغم أن هذا العامل ليس هو الأهم.

ونعني بالزمن الوقت الذي تستغرقه الخوارزمية لحل المسألة المطروحة فكلما كان الوقت أقصر كلما كانت الخوارزمية أكثر فعالية. وهذا العامل يكاد أن يكون هو الأساسي.

**تعريف ٤ : نسمي تعقد خوارزمية ما عدد العمليات الأساسية التي نؤديها في تنفيذ الخوارزمية وفي أسوأ حالة وذلك بدلالة حجم المعطيات. ومن العمليات الأساسية: المقارنة والمساواة والجمع والطرح والضرب والقسمة.**

**مثال ٦ :نعتبر مسألة المثال ٣ ونعتبر خوارزمية التعويض لحلها والموضحة في المثال ٤.**

**ما هو تعقد هذه الخوارزمية؟**

**الحل:**

**نحتاج في هذه الخوارزمية إلي أداء $6 = 1 + 2 + 3$ عمليات ضرب و $3$ عمليات جمع، أي أن تعقد الخوارزمية هو: ٩ عمليات أساسية.**

**بينما تعقد خوارزمية هورنير هو : ٦ عمليات أساسية.**

**مثال ٧: نعتبر المسألة التالية:**

**المعطيات: كثير حدود $f(x)$ من الدرجة $n$ وعدد حقيقي $a$.**

**السؤال: احسب $f(a)$.**

**ما هو تعقد خوارزمية التعويض لحل هذه المسألة؟ وما هو تعقد خوارزمية هورنير؟**

**الحل:**

**١) في خوارزمية التعويض نحتاج إلي أداء $n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ عملية ضرب و $n$ عملية جمع أي أن التعقد هو:**

$$\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$$

**عملية أساسية.**

**٢) في خوارزمية هورنير نحتاج إلي أداء $n$ عملية ضرب و $n$ عملية جمع أي أن التعقد هو: $n + n = 2n$ عملية أساسية.**

**٣) ومنه فيمكن أن نقول بأن خوارزمية هورنير أحسن من خوارزمية التعويض.**

***نسبة التزايد والرمز O الكبير:***

**لما نقول بحساب تعقد خوارزمية معينة فإننا لا نحتاج إلي كل التفاصيل ولكن يكفي أن نعرف الحد المهيمن في هذا التعقد. وذلك لأننا نريد أن نعرف نسبة التزايد لما يزيد حجم المعطيات. وهذه قيم تقريبية لنسب تزايد بعض الدوال المشهورة:**

| $n$ | $\log_2 n$ | $n$ | $n \log_2 n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 5 | 15 | 25 | 125 | 32 |
| 10 | 4 | 10 | 40 | 100 | $10^3$ | $10^3$ |
| 100 | 7 | 100 | 700 | $10^4$ | $10^6$ | $10^{30}$ |
| 1000 | 10 | $10^3$ | $10^4$ | $10^6$ | $10^9$ | $10^{300}$ |

وللتعبير عن الحد المهيمن في التعقد نستخدم الرمز $O$ .

مثال ٨: تعقد خوارزمية التعويض هو :$O(n^2)$، بينما خوارزمية هورنير تعقدها هو: $O(n)$.

أي أن نسبة تزايد التعقد بدلالة حجم المعطيات هي من جنس تزايد الدالة المشار إليها.

وبهذه الطريقة، سنعرف مسبقا الخوارزميات التي ستستغرق وقتا معقولا والتي ستستغرق وقتا طويلا جدا وبالتالي فلا فائدة عملية من تنفيذها.