الباب الثالث

الحـــلول

٣-١ أسئلة وحلول في الجبر

السـؤال الأول:

عدد الأزواج المرتبة (أ، ب) المكونة من عددين حقيقيين يحققان

$$\frac{\text{١}}{\text{أ}+\text{ب}}=\frac{\text{١}}{\text{أ}}+\frac{\text{١}}{\text{ب}}$$

هو:

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٣
هـ) لانهائي

الحـل:

إن أول ما قد يخطر ببالك عند النظر للمعادلة المعطاة هو توحيد المقامات. لننفذ هذا الاقتراح ونرى ما نحصل عليه. بعد توحيد المقامات نحصل على $\frac{\text{١}}{\text{أ}+\text{ب}}=\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ ب}}$، وبناءً على ذلك

$$\text{أ}^{\text{٢}}+\text{أ ب}+\text{ب}^{\text{٢}}=\text{٠}$$

لاشك أن هذا جيد، فلديك ولا شك معرفة جيدة عن حلول المعادلات التربيعية. يعني هذا أن أ حل للمعادلة $\text{س}^{\text{٢}}+\text{ب س}+\text{ب}^{\text{٢}}=\text{٠}$. لكن مميز هذه المعادلة التربيعية هو $\text{ب}^{\text{٢}}-\text{٤ ب}^{\text{٢}}=-\text{٣ ب}^{\text{٢}}<\text{٠}$، أي أنه لا يوجد لهذه المعادلة أية حلول حقيقية. نستنتج أنه لا يوجد أي عددين حقيقيين يحققان المعادلة المعطاة.

السـؤال الثاني:

$$\text{١}^{\text{٣}}+\text{٣}^{\text{٣}}+\cdots+(\text{٢ن}-\text{١})^{\text{٣}}=$$

أ) $\text{ن}^{\text{٢}}(\text{٢ ن}^{\text{٢}}-\text{١})$
ب) $\text{ن}^{\text{٢}}(\text{ن}^{\text{٢}}+\text{١})$
ج) $\frac{\text{ن}^{\text{٢}}(\text{٢ن}^{\text{٢}}-\text{١})}{\text{٢}}$
د) $\frac{\text{ن}^{\text{٣}}(\text{٢ن}^{\text{٣}}-\text{١})}{\text{٨}}$
هـ) $\text{٢ ن}^{\text{٢}}(\text{ن}^{\text{٢}}-\text{١})$

الحـــــل:

من المعلوم أن

$$\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ل}} \text{ك}^3 = \frac{\text{ل}^2 (\text{ل}+1)^2}{4}$$

كما ورد في مقدمة هذا الكتاب، وهي صيغة يمكنك إثباتها باستخدام الاستقراء الرياضي. لاحظ أن

$$\begin{aligned}
1^3 + 3^3 + \cdots + (2\text{ن}-1)^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (2\text{ن})^3) - (2^3 + \cdots + (2\text{ن})^3) \\
&= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (2\text{ن})^3) - 2^3 (1^3 + \cdots + \text{ن}^3) \\
&= \sum_{\text{ك}=1}^{2\text{ن}} \text{ك}^3 - 8 \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{ك}^3 \\
&= \frac{(2\text{ن})^2 (2\text{ن}+1)^2}{4} - 8 \times \frac{\text{ن}^2 (\text{ن}+1)^2}{4} \\
&= \text{ن}^2 \left[(4\text{ن}^2 + 4\text{ن} + 1) - 2(\text{ن}^2 + 2\text{ن} + 1)\right] \\
&= \text{ن}^2 (2\text{ن}^2 - 1)
\end{aligned}$$

الســــؤال الثالث:

إذا كانت جميع جذور المعادلة التكعيبية

$$\text{س}^3 + \text{ب}\,\text{س}^2 + \text{جـ}\,\text{س} + \text{ر} = 0$$

حقيقية وتقع في الفترة $(-2 ، 0)$، فإن

أ) $26 < \text{ب}+\text{جـ}+\text{ر} < 40$

ب) $0 < \text{ب}+\text{جـ}+\text{ر} < 26$

ج) $-2 < \text{ب}+\text{جـ}+\text{ر} < 0$

د) $-23 < \text{ب}+\text{جـ}+\text{ر} < -2$

هـ) $-40 < \text{ب}+\text{جـ}+\text{ر} < -23$

الحـــــل:

لتكن $\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{س}_3$ الجذور الحقيقية للمعادلة التكعيبية المعطاة. إذن

$$\text{س}^3 + \text{ب}\,\text{س}^2 + \text{جـ}\,\text{س} + \text{ر} = (\text{س} - \text{س}_1)(\text{س} - \text{س}_2)(\text{س} - \text{س}_3)$$

بتعويض $\text{س} = 1$، نحصل على

$$1 + \text{ب} + \text{جـ} + \text{ر} = (1 - \text{س}_1)(1 - \text{س}_2)(1 - \text{س}_3)$$

بالفرض −٢ < سن < ٠، ومن ذلك ١ < ١ − سن < ٣ لجميع قيم ن = ١، ٢، ٣.
نستنتج من ذلك أن

١ < (١ − س١) (١ − س٢) (١ − س٣) < ٢٧

١ < ١ + ب + جـ + د < ٢٧

٠ < ب + جـ + د < ٢٦

السـؤال الرابع:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من عددين صحيحين س و ص يحققان المعادلة

س ص + ٣س − ٧ص = −٥

هو

أ) ٢
ب) ٤
ج) ٦
د) ٨
هـ) ١٠

الحـل:

حيث أن س و ص عددان صحيحان، فمن حقك تمني أن يكون الطرف الأيمن حاصل ضرب عددين صحيحين. كيف يمكن تحقيق هذه الأمنية؟ بإضافة −٢١ لطرفي المعادلة نحصل على

س ص + ٣س − ٧ص − ٢١ = −٢٦

أي أن

(س − ٧)(ص + ٣) = −٢٦

حيث إن −٢٦ = −٢×١٣ = ٢×(−١٣)، وحيث إن ٢ وَ ١٣ عددان أوليان، نستنتج من النظرية الأساس للحساب أن لدينا الاحتمالات التالية

س − ٧ = ٢ ، ص + ٣ = −١٣، (س،ص) = (٩، −١٦)
س − ٧ = −٢ ، ص + ٣ = ١٣، (س،ص) = (٥، ١٠)
س − ٧ = ١٣ ، ص + ٣ = −٢، (س،ص) = (٢٠، −٥)
س − ٧ = −١٣ ، ص + ٣ = ٢، (س،ص) = (−٦، −١)

السـؤال الخامس:

عدد الثلاثيات (س،ص،ع) المكونة من أعداد حقيقية س، ص، ع تحقق

$$س(١-ص^{٢})(١-ع^{٢})+ص(١-س^{٢})(١-ع^{٢})+ع(١-س^{٢})(١-ص^{٢}) = ٤س ص ع$$
$$= ٤(س+ص+ع)$$

هو

أ) ١
ب) ٢
ج) ٣
د) ٤
هـ) لانهائي

الحـل:

كم معادلة يجب على الثلاثيات (س،ص،ع) تحقيقها؟ معادلة واحدة أم معادلتان؟

لتكن

$$أ = س(١-ص^{٢})(١-ع^{٢})+ص(١-س^{٢})(١-ع^{٢})+ع(١-س^{٢})(١-ص^{٢})$$
$$ب = س ص ع = س+ص+ع \quad \text{و} \quad جـ = س ص+ص ع+ع س$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned}
أ &= س(١-ص^{٢})(١-ع^{٢})+ص(١-س^{٢})(١-ع^{٢})+ع(١-س^{٢})(١-ص^{٢})\\
&= س-س ص^{٢}-س ع^{٢}+س ص^{٢}ع^{٢}+ص-ص س^{٢}-ص ع^{٢}+ص س^{٢}ع^{٢}+ع-ع س^{٢}-ع ص^{٢}+ع س^{٢}ص^{٢}\\
&= (س+ص+ع)-س(س ص+س ع)-ص(س ص+ص ع)-ع(س ع+ص ع)+س ص ع(س ص+ص ع+س ع)\\
&= (س+ص+ع)-س(س ص+س ع+ص ع)-ص(س ص+ص ع+ع س)-ع(س ع+ص ع+س ص)\\
&\quad +س ص ع(س ص+ص ع+س ع)+٣س ص ع\\
&= (س+ص+ع)-(س+ص+ع)(س ص+س ع+ص ع)+س ص ع(س ص+ص ع+س ع)+٣س ص ع\\
&= ب-ب جـ+ب جـ+٣ب\\
&= ٤ب
\end{aligned}$$

يعني هذا أن المساواة الأولى متحققة دائماً، وبالتالي فهي زائدة ولا تضيف أية معلومات عن (س، ص،ع).

نستنتج أن الشرط الفعلي الوحيد الذي يجب أن تحققه الثلاثيات (س، ص،ع) هو:

$$س ص ع = س+ص+ع \text{، أي أن } ع = \frac{س+ص}{س ص-١}\text{، } ص \neq \frac{١}{س}$$

نستنتج أن مجموعة الحل هي

$$\left\{ (س، ص،ع) \;\middle|\; ع = \frac{س+ص}{س ص-١}\text{، } س\text{، }ص \in ح\text{، } ص \neq \frac{١}{س} \right\}$$

كم عدد عناصر هذه المجموعة؟ نعم، لقد حزرت: إن عدد الثلاثيات التي تحقق المعادلتين لانهائي.

السـؤال السادس:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من عددين صحيحين س وَص يحققان المتباينة

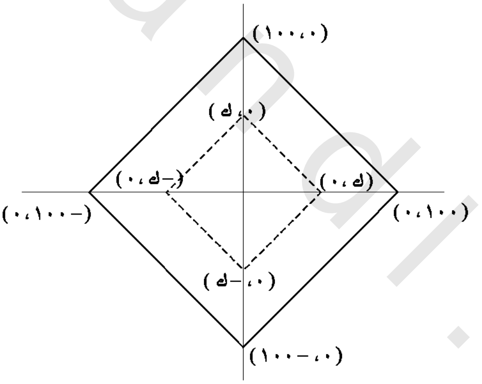
$$|س|+|ص|\leq ١٠٠$$

هو

أ) ١٩٨٠١
ب) ٢٠٢٠١
ج) ٤٠١
د) ١٠١
هـ) ٥١

الحـل:

ابدأ بتمثيل بعض هذه الأزواج المرتبة في المستوى الديكارتي. ماذا تلاحظ؟ تنحصر هذه الأزواج المرتبة داخل وعلى حدود المربع الوضح في الشكل المرفق.



لاحظ أن هناك زوجاً مرتباً مميزاً يحقق المتباينة المعطاة، وهو (س،ص)=(٠،٠). لاحظ أيضاً أن هذا الزوج المرتب هو الحل الوحيد للمعادلة $|س|+|ص|=٠$ هو (س،ص)=(٠،٠).

يمكنك الآن البدء بعد الأزواج المرتبة التي تحقق المطلوب ولكنك ستدرك بعد قليل أنها كثيرة!! لنجرب فكرة أخرى. لاحظ أن أي زوج من الأزواج المرتبة المطلوبة يقع على محيط مربع أصغر توازي أضلاعه أضلاع المربع الأكبر، كما هو موضح في الشكل المرفق.

هل يوحي لك ذلك بشيء؟ نعم، يمكنك تحويل المتباينة المعطاة إلى مجموعة من المعادلات.

ندرس الآن المعادلات

$$|س|+|ص|=ك\text{، حيث } ١\leq ك\leq ١٠٠ \qquad (*)$$

الحالة الأولى: ك فردي.
في هذه الحالة، تتحقق المعادلة (*) لكل زوج من الأزواج التالية
(ل،ك−ل)، (ل،ل−ك)، (ك−ل،ل)، (ل−ك،ل)، حيث ٠≤ل<ك (**)
كما يمكن التحقق بسهولة أن جميع هذه الأزواج مختلفة. من الواضح أنه لا توجد حلول أخرى للمعادلة (*). نستنتج أن عدد حلول المعادلة (*) هو ٤ك إذا كان ك فردياً.

الحالة الثانية: ك زوجي، وليكن ك = ٢م.
في هذه الحالة، تتحقق المعادلة (*) لكل زوج من الأزواج في (**). ولكن عند التحقق فيما إذا كانت هذه الأزواج مختلفة، نجد أن الزوجين الأول والثالث يتساويان عندما ل = م (لاحظ أن (ل،ك−ل) = (ك−ل،ل) ⇔ ك = ٢ل ⇔ ل = م). في هذه الحالة نحصل من (**) على ثلاثة أزواج مختلفة هي (م،م)، (م، −م)، (−م،م)، يضاف إليها زوج رابع هو (−م، −م). من الواضح أنه لا توجد حلول أخرى للمعادلة (*). إذن، عدد حلول المعادلة (*) هو ٤ك إذا كان ك زوجياً.

نستنتج أن عدد الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينة |س| + |ص| ≤ ١٠٠ هو

$$\text{١} + \sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{١٠٠}} \text{٤ك} = \text{١} + \text{٤}\sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{١٠٠}} \text{ك}$$

$$= \text{١} + \text{٤}\left(\frac{\text{١٠٠}(\text{١٠٠}+\text{١})}{\text{٢}}\right)$$

$$= \text{٢٠٢٠١}$$

السؤال السابع:

إذا كان أ≠٠ عدداً حقيقياً، فإن عدد الثلاثيات (س، ص،ع) المكونة من أعداد حقيقية س، ص،ع تحقق المعادلات

$$\begin{aligned} \text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} - \text{٢ع}^{\text{٢}} &= \text{٢أ}^{\text{٢}} \\ \text{س} + \text{ص} + \text{٢ع} &= \text{٤}(\text{أ}^{\text{٢}} + \text{١}) \\ \text{ع}^{\text{٢}} - \text{س ص} &= \text{أ}^{\text{٢}} \end{aligned}$$

هو

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٣
هـ) لانهائي

الحـــل:

بضرب المعادلة الثالثة في ٢ وإضافتها إلى المعادلة الأولى، نحصل على

$$س^{٢}+ص^{٢}-٢س ص=٤أ^{٢}$$

أي أن $(س-ص)^{٢}=٤أ^{٢}$ ، ومن ذلك

$$س-ص=٢أ \quad \text{أو} \quad س-ص=-٢أ \quad (*)$$

بضرب المعادلة الثالثة في ٢ وطرحها من المعادلة الأولى نحصل على

$$س^{٢}+ص^{٢}-٤ع^{٢}+٢س ص=٠$$

أي أن $(س+ص)^{٢}=٤ع^{٢}$، ومن ذلك نحصل على احتمالين

$$س+ص=٢ع \quad \text{أو} \quad س+ص=-٢ع.$$

لاحظ أن $س+ص\neq-٢ع$، لأن $س+ص+٢ع=٤(أ^{٢}+١)\geq٤$، أي أن

$$س+ص=٢ع \qquad (**)$$

بتعويض قيمة $س+ص$ من (**) في المعادلة الثانية نحصل على

$$ع=أ^{٢}+١ \quad \text{وَ} \quad س+ص=٢(أ^{٢}+١)$$

الحالة الأولى: $س-ص=٢أ$. في هذه الحالة $س=أ^{٢}+أ+١$ وَ $ص=أ^{٢}-أ+١$.

الحالة الثانية: $س-ص=-٢أ$. في هذه الحالة $س=أ^{٢}-أ+١$ وَ $ص=أ^{٢}+أ+١$.

نستنتج أن مجموعة الحل هي

$$\left\{(أ^{٢}+أ+١،\ أ^{٢}-أ+١،\ أ^{٢}+١)،\ (أ^{٢}-أ+١،\ أ^{٢}+أ+١،\ أ^{٢}+١)\right\}$$

أي أن هناك حلين لهذا النظام من المعادلات.

السـؤال الثامن:

$$\sqrt{٣٤-٢٤\sqrt{٢}}=$$

أ) $٥-\sqrt{٢}$

ب) $٥+\sqrt{٢}$

ج) $-٤+٣\sqrt{٢}$

د) $٤-٣\sqrt{٢}$

هـ) ٣

الحـــــل:

ما مغزى وجود العدد ٢ في المسألة؟ ماذا لو استبدلنا العدد ٣ بالعدد ٢؟ ماذا لو استبدلنا العدد ٦ بالعدد ٢؟

حيث أن ٢ عدد أولي، نعلم أن الحل يجب أن يكون على الصورة $أ+ب\sqrt{٢}$، حيث أ وَ ب عددان صحيحان، وهذه المعلومة هي – ولا شك – مفتاح الحل. بتربيع طرفي المعادلة

$$\sqrt{٣٤-٢٤\sqrt{٢}}=أ+ب\sqrt{٢}$$

نحصل على

$$٣٤-٢٤\sqrt{٢}=\left(أ^{٢}+٢ب^{٢}\right)+٢أب\sqrt{٢}$$

بمساواة المعاملات على طرفي المعادلة نحصل على

$$أ^{٢}+٢ب^{٢}=٣٤$$

$$٢أب=-٢٤$$

لاحظ أن $أ\neq ٠$. بتعويض قيمة $ب=-\frac{١٢}{أ}$ من المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نحصل على

$$أ^{٢}+٢\left(-\frac{١٢}{أ}\right)^{٢}=٣٤$$

$$أ^{٤}-٣٤أ^{٢}+٢٨٨=٠$$

بتعويض $ج=أ^{٢}$، نحصل على

$$ج^{٢}-٣٤ج+٢٨٨=٠$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلات التربيعية لنحصل على

$$ج=\frac{-(-٣٤)\mp\sqrt{(٣٤)^{٢}-٤\times١\times٢٨٨}}{٢\times١}=\frac{٣٤\mp\sqrt{٤}}{٢\times١}=١٨ \text{ أو } ١٦.$$

بما أن $ج=أ^{٢}$ وَ أ عدد صحيح، نستبعد $ج=١٨$، ونبقي $ج=١٦$ لنستنتج أن

$أ=٤، ب=-٣$ أو $أ=-٤، ب=٣$

نعلم أن $\sqrt{٢}>\frac{٤}{٣}$، ومن ذلك $٤-٣\sqrt{٢}<٠$. بما أن ناتج الجذر التربيعي هو عدد موجب دائماً، نستنتج أن

$$\sqrt{٣٤-٢٤\sqrt{٢}}=-٤+٣\sqrt{٢}$$

الســــؤال التاسع:

عند صف جميع الأعداد الصحيحة الموجبة كما يلي

١٢٣٤٥٦٧٨٩١٠١١١٢١٣١٤١٥١٠٠...

فإن الرقم الذي يحتل الخانة ٢٠٦٧٨٨ من اليمين هو

أ) ٣
ب) ٤
ج) ٥
د) ٦
هـ) ٧

الحـــــل:

اكتب العدد كما يلي

١…٩   ١٠…٩٩   ١٠٠…٩٩٩   ١٠٠٠…٩٩٩٩   ١٠٠٠٠…٩٩٩٩٩   …

ما هو مفتاح حل هذه المسألة؟ هل فكرت مثلاً في عدد الخانات التي يتكون منها الرقم المنشود؟ لاحظ أن عدد الخانات حتى ٩٩٩٩ هو

١×٩+٢×٩٠+٣×٩٠٠+٤×٩٠٠٠=٣٨٨٨٩

وأن مجموع الخانات حتى ٩٩٩٩٩ هو

١×٩+٢×٩٠+٣×٩٠٠+٤×٩٠٠٠+٥×٩٠٠٠٠=٤٨٨٨٨٩

بما أن ٣٨٨٨٩ < ٢٠٦٧٨٨ < ٤٨٨٨٨٩، نستنتج أن الرقم المطلوب موجود في عدد مكون من ٥ خانات بين ١٠٠٠٠ وَ ٩٩٩٩٩. نستطيع أن نكون أكثر تحديداً، ونحسب ترتيب هذا العدد بين الأعداد ذات الخمس منازل كما يلي:

حاصل قسمة ٢٠٦٧٨٨−٣٨٨٨٩=١٦٧٨٩٩ على ٥ هو ٣٣٥٧٩ والباقي ٤. يعني هذا أن الرقم المطلوب يحتل الخانة الرابعة في العدد ذي الترتيب ٣٣٥٧٩ بين الأعداد ذات الخمس منازل. حيث أن كل عدد من هذه الأعداد يزيد ٩٩٩٩ عن ترتيبه ضمن مجموعة الأعداد الطبيعية، نستنتج أن الرقم المطلوب يحتل الخانة الرابعة في العدد ٣٣٥٧٩+٩٩٩٩=٤٣٥٧٨ وهو الرقم ٣.

السـؤال العاشر:

عدد الثلاثيات (أ،ب،جـ) المكونة من أعداد صحيحة موجبة تحقق

$$\left(1+\frac{1}{\text{أ}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ب}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{جـ}}\right)=2$$

هو

أ) ٣
ب) ٥
ج) ٢٧
د) ٣٠
هـ) لا نهائي

الحـــــل:

يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على الصيغة

$$(\text{أ}+١)(\text{ب}+١)(\text{جـ}+١)=٢\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جـ} \qquad (*)$$

هل لاحظت التناظر بين أ و ب و جـ. ولكن ما فائدة هذه الملاحظة عن التناظر؟

افرض بدون فقدان التعميم أن $\text{أ}\le\text{ب}\le\text{جـ}$. بناءً على هذا الفرض نحصل على المتباينة

$$٢=\left(١+\frac{١}{\text{أ}}\right)\left(١+\frac{١}{\text{ب}}\right)\left(١+\frac{١}{\text{جـ}}\right)\le\left(١+\frac{١}{\text{أ}}\right)^{٣}$$

بالتجربة يتبين لنا أن قيم أ التي تحقق المتباينة هي $\text{أ}=١،٢،٣$ (لاحظ أن $\left(١+\frac{١}{٤}\right)^{٣}=\frac{١٢٥}{٦٤}<٢$).

الحالة الأولى: $\text{أ}=١$. بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على $١=\left(١+\frac{١}{\text{ب}}\right)\left(١+\frac{١}{\text{جـ}}\right)>١$ (تناقض).

الحالة الثانية: $\text{أ}=٢$. بالتعويض في (*) نحصل على

$$٣(\text{ب}+١)(\text{جـ}+١)=٤\,\text{ب}\,\text{جـ}$$
$$\text{ب}\,\text{جـ}-٣\,\text{ب}-٣\,\text{جـ}=٣$$
$$(\text{ب}-٣)(\text{جـ}-٣)=١٢$$

بحساب جميع الاحتمالات المبنية على قواسم ١٢، نجد أن

$$(\text{أ}،\text{ب}،\text{جـ})\in\{(٢،٤،١٥)،(٢،٥،٩)،(٢،٦،٧)\}$$

بإسقاط الشرط $\text{أ}\le\text{ب}\le\text{جـ}$، نحصل على مجموعة الحل الجزئية

$$\left\{\begin{array}{l}(٢،٤،١٥)،(٢،١٥،٤)،(٤،٢،١٥)،(٤،١٥،٢)،(١٥،٢،٤)،(١٥،٤،٢)،\\(٢،٥،٩)،(٢،٩،٥)،(٥،٢،٩)،(٥،٩،٢)،(٩،٢،٥)،(٩،٥،٢)،\\(٢،٦،٧)،(٢،٧،٦)،(٦،٢،٧)،(٦،٧،٢)،(٧،٢،٦)،(٧،٦،٢)\end{array}\right\}$$

الحالة الثالثة: $\text{أ}=٣$. بالتعويض بالتعويض في (*) نحصل على

$$٢(\text{ب}+١)(\text{جـ}+١)=٣\,\text{ب}\,\text{جـ}$$
$$\text{ب}\,\text{جـ}-٢\,\text{ب}-٢\,\text{جـ}=٢$$
$$(\text{ب}-٢)(\text{جـ}-٢)=٦$$

بحساب جميع الاحتمالات المبنية على قواسم ٦، نجد أن

$$(\text{أ}،\text{ب}،\text{جـ})\in\{(٣،٣،٨)،\ (٣،٤،٥)\}$$

بإسقاط الشرط $\text{أ}\le\text{ب}\le\text{جـ}$، نحصل على مجموعة الحل الجزئية

{(٣،٣،٨)، (٣،٨،٣)، (٨،٣،٣)، (٣،٤،٥)، (٣،٥،٤)، (٤،٣،٥)، (٤،٥،٣)، (٥،٣،٤)، (٥،٤،٣)}

إذن، هناك ٢٧ ثلاثية تحقق المعادلة المعطاة.

السـؤال الحادي عشر:

عدد كثيرات الحدود ك(س) التي تحقق

ك(س+ص) − ك(س − ص) = ٤س ص

لجميع قيم س،ص ∈ ح، وتحقق الشرط ك(٠) = ١ هو

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٣
هـ) لانهائي

الحـل:

لاحظ أن ٤س ص = (س+ص)² − (س − ص)²، وبذلك يمكن إعادة كتابة المعادلة أعلاه على الشكل

ك(س+ص) − ك(س − ص) = (س+ص)² − (س − ص)²

ك(س+ص) − (س+ص)² = ك(س − ص) − (س − ص)²

ليكن ع = س+ص، وَ ر = س − ص. نحصل من ذلك على

ك(ع) − ع² = ك(ر) − ر² لجميع قيم ع، ر ∈ ح

بتعويض ر = ٠، نحصل على ك(ع) − ع² = ١ لجميع قيم ع ∈ ح، أي أن

ك(س) = س² + ١

نستنتج من ذلك أن هناك كثيرة حدود واحدة تحقق الشرط المطلوب.

السـؤال الثاني عشر:

عدد الخماسيات المرتبة (أ،ب،جـ،د،هـ) المكونة من أعداد حقيقية موجبة تحقق المعادلات

أ+ب = جـ²، ب+جـ = د²، جـ+د = هـ²، د+هـ = أ²، هـ+أ = ب²

هو

أ) ٠
ب) ١

ج) ١٢٠
د) ٢٤٠
هـ) لا نهائي

الحـــــل:

هل لاحظت التناظر بين أ وَ ب وَ جـ وَد وَ هـ؟ ماذ يعني وجود هذا التناظر؟

ليكن س أكبر الأعداد في المجموعة {أ،ب،جـ،د،هـ}، وليكن ص أصغرها.

من المعادلات المعطاة، س٢ هو مجموع عددين كل منهما أقل من أو يساوي س، أي أن

$$س^{٢} \le ٢س$$
$$س(س-٢) \le ٠$$
$$س-٢ \le ٠$$
$$س \le ٢$$

كذلك، ص٢ هو مجموع عددين كل منهما أكبر من أو يساوي ص، أي أن

$$ص^{٢} \ge ٢ص$$
$$ص(ص-٢) \ge ٠$$
$$ص \ge ٢$$

من ذلك نحصل على

$$٢ \le ص \le س \le ٢$$
$$س = ص = ٢$$

$$\therefore (أ،ب،جـ،د،هـ) = (٢،٢،٢،٢،٢)$$

الســـــؤال الثالث عشر:

أكبر قيمة للدالة

$$د(س،ص) = س^{٢}ص - ص^{٢}س \text{، حيث } ٠ \le س \le ١ \text{ وَ } ٠ \le ص \le ١$$

هي:

أ) $\frac{١}{٦}$

ب) $\frac{١}{٤}$

ج) $\frac{١}{٣}$

د) $\frac{١}{٢}$

هـ) $\frac{٢}{٣}$

الحـــــــل:

لاحظ أن المعادلة

$$س^{٢}ص - ص^{٢}س = س(س ص - ص^{٢}) = س\left[ص(س - ص)\right]$$

متناظرة. لذا، وبدون فقدان التعميم، يمكننا افتراض أن $س \le ص$.

حيث أن المطلوب هو إيجاد أكبر قيمة للدالة د(س،ص) ، فلا شك أنك ستبدأ باستعراض المتباينات التي سبق ذكرها في الباب الأول من هذا الكتاب.

باستخدام متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي، نعلم أن

$$\sqrt{ص(س - ص)} \le \frac{ص + (س - ص)}{٢} = \frac{س}{٢}\text{، أي أن } ص(س - ص) \le \frac{س^{٢}}{٤}$$

نستنتج من ذلك أن

$$س^{٢}ص - ص^{٢}س \le \frac{س^{٣}}{٤} \le \frac{١}{٤}$$

هل يعني هذا أن $\frac{١}{٤}$ هي القيمة العظمى المنشودة؟ ليس بالضرورة!! كل ما توصلنا له حتى الآن هو أن $\frac{١}{٤}$ حد أعلى لقيم د(س،ص) في المنطقة المعطاة. ليكون $\frac{١}{٤}$ قيمة عظمى للدالة يجب أن نجد زوجاً مرتباً (س،ص) بحيث يكون د(س،ص) $= \frac{١}{٤}$. من الواضح أن هذا هو واقع الحال حيث أن

$$د(١، \tfrac{١}{٢}) = (١)^{٢} \times \frac{١}{٢} - ١ \times (\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$$

السـؤال الرابع عشر:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من عددين صحيحين س وَ ص يحققان المعادلة

$$(٣س^{٢} + ص^{٢} - ٤ص - ١٧)^{٣} - (٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٤ص - ٦)^{٣} = (س^{٢} - ص^{٢} - ١١)^{٣}$$

هو

أ) ٤
ب) ٦
ج) ٨
د) ١٠
هـ) ١٢

الحـــــل:

لاحظ أن

$$(٣س^٢+ص^٢-٤ص-١٧)-(٢س^٢+٢ص^٢-٤ص-٦)=س^٢-ص^٢-١١$$

بتعويض

$$ك=٣س^٢+ص^٢-٤ص-١٧ \quad و \quad ل=٢س^٢+٢ص^٢-٤ص-٦ \qquad (*)$$

نحصل على

$$\begin{aligned} ك^٣-ل^٣&=(ك-ل)^٣\\ (ك-ل)(ك^٢+كل+ل^٢)&=(ك-ل)(ك-ل)^٢\\ (ك-ل)\left[(ك^٢+كل+ل^٢)-(ك-ل)^٢\right]&=٠\\ (ك-ل)\left[٣كل\right]&=٠ \end{aligned}$$

أي أن $ك=ل$ أو $ك=٠$ أو $ل=٠$.

الحالة الأولى: $ك=ل$. في هذه الحالة

$$س^٢-ص^٢-١١=٠$$

لاحظ أن ١١ عدد أولي، ومن ذلك نستنتج أن

$$(س-ص)(س+ص)=١١$$

تعطينا القيم التالية فقط:

$س-ص=١١$ وَ $س+ص=١$، أي أن $(س،ص)=(٦،-٥)$
$س-ص=١$ وَ $س+ص=١١$، أي أن $(س،ص)=(٦،٥)$
$س-ص=-١١$ وَ $س+ص=-١$، أي أن $(س،ص)=(-٦،٥)$
$س-ص=-١$ وَ $س+ص=-١١$، أي أن $(س،ص)=(-٦،-٥)$

الحالة الثانية: $ك=٠$. في هذه الحالة

$$\begin{aligned} ٣س^٢+ص^٢-٤ص-١٧&=٠\\ ٣س^٢+(ص-٢)^٢&=٢١ \end{aligned}$$

حيث أن $س^٢\le ٧$، نستنتج أن قيم س المحتملة هي $س=٠،\mp١،\mp٢$. لاحظ أن $س=٠،\mp١$ لا يمكن أن تعطي قيماً صحيحة للمتغير ص، بينما نحصل من قيم $س=\mp٢$ على مجموعة الحل الجزئية

$$\{(٢،٥)،(٢،-١)،(-٢،٥)،(-٢،-١)\}$$

الحالة الثالثة: ل=٠. في هذه الحالة

$$٢س^٢+٢ص^٢-٤ص-٦=٠$$
$$س^٢+(ص-١)^٢=٤$$

حيث أن $س^٢ \le ٤$، فإن قيم س المحتملة هي س=٠، ∓١، ∓٢. لاحظ أن س=∓١ لا يمكن أن تعطي قيماً صحيحة للمتغير ص، بينما نحصل من قيم س=٠، ∓٢ على مجموعة الحل الجزئية

$$\{(٠،٣)،(٠،-١)،(٢،١)،(-٢،١)\}$$

بتجميع الحلول التي حصلنا عليها في الحالات الثلاث، نحصل على ١٢ زوجاً مرتباً تشكل مجموعة الحل

$$\left\{\begin{matrix}(٦،٥)،(٦،-٥)،(-٦،٥)،(-٦،-٥)،(٢،٥)،(٢،-١)، \\ (-٢،٥)،(-٢،-١)،(٠،٣)،(٠،-١)،(٢،١)،(-٢،١)\end{matrix}\right\}$$

السـؤال الخامس عشر:

عرف المتتابعة $\{س_ن \mid ن \ge ١\}$ كما يلي:

$$س_١=١٦ \text{ وَ } س_{ن+١}=س_ن+٨ن+١٢،\ \forall ن\ge٢$$

إذا كان $\sum_{ن=١}^{\infty}\frac{١}{ن^٢}=\frac{ط^٢}{٦}$، فإن $\sum_{ن=٠}^{\infty}\frac{١}{س_{ن+١}}=$

أ) $\frac{ط^٢}{٢}$

ب) $\frac{ط^٢}{٣}$

ج) $\frac{ط^٢-١}{٣}$

د) $\frac{ط^٢-٦}{٢٤}$

هـ) $\frac{ط^٢-٢}{١٢}$

الحـل:

هل تتمنى أن تعرف صيغة مغلقة لهذه المتتابعة؟ كيف يمكن اكتشاف هذه الصيغة إن وجدت؟ لا شك أن معرفة بعض عناصرها لا يعني أن بإمكاننا معرفة هذه الصيغة المغلقة، ولكن لم لا نبدأ بدراسة سلوك المتتابعة؟ لنبدأ بالجدول التالي:

ن	$\text{س}_{\text{ن}}$
١	١٦
٢	٣٦
٣	٦٤
٤	١٠٠

من الواضح أن $\text{س}_{\text{ن}}=٤(\text{ن}+١)^{٢}$، حيث $١\le \text{ن}\le ٤$. ولكن هل هذه الصيغة صحيحة لجميع قيم $\text{ن}\ge ١$؟ نحاول إثبات ذلك باستخدام الاستقراء الرياضي.

لاحظ أن الصيغة صحيحة عندما $\text{ن}=١$. افرض أن الصيغة صحيحة عندما $\text{ن}=\text{ك}$، أي أن $\text{س}_{\text{ك}}=٤(\text{ك}+١)^{٢}$. من خلال تعريف المتتابعة المعطى، نحصل على

$$\text{س}_{\text{ك}+١}=\text{س}_{\text{ك}}+٨\text{ك}+١٢=٤(\text{ك}+١)^{٢}+٨\text{ك}+١٢=٤\text{ك}^{٢}+١٦\text{ك}+١٦=٤(\text{ك}+٢)^{٢}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $\text{ن}=\text{ك}+١$. بتطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج أن العبارة صحيحة لجميع قيم $\text{ن}\ge ١$. من ذلك نحصل على

$$\sum_{\text{ن}=٠}^{\infty}\frac{١}{\text{س}_{\text{ن}+١}}=\sum_{\text{ن}=١}^{\infty}\frac{١}{\text{س}_{\text{ن}}}=\sum_{\text{ن}=١}^{\infty}\frac{١}{٤(\text{ن}+١)^{٢}}$$

$$=\frac{١}{٤}\sum_{\text{ن}=٢}^{\infty}\frac{١}{\text{ن}^{٢}}=\frac{١}{٤}\left(\sum_{\text{ن}=١}^{\infty}\frac{١}{\text{ن}^{٢}}-١\right)$$

$$=\frac{١}{٤}\left(\frac{\text{ط}^{٢}}{٦}-١\right)=\frac{\text{ط}^{٢}-٦}{٢٤}$$

السؤال السادس عشر:

عرف المتتابعة $\{\text{س}_{\text{ن}}\,|\,\text{ن}\ge ١\}$ كما يلي:

$$\text{س}_{١}=٢ \quad \text{و} \quad \text{س}_{\text{ن}+١}=\frac{\text{س}_{\text{ن}}^{٤}+٩}{١٠\,\text{س}_{\text{ن}}}،\ \forall\,\text{ن}\ge ١$$

إذا كانت $\text{ن}\ge ٢$، فإن

أ) $٠,٩\le \text{س}_{\text{ن}}\le ١$

ب) $٠,٩<\text{س}_{\text{ن}}\le ١,٢٥$

ج) $٠,٩٥<\text{س}_{\text{ن}}\le ١,٢٥$

د) $٠,٩<\text{س}_{\text{ن}}\le ١,٢$

هـ) $١\le \text{س}_{\text{ن}}\le ٢$

الحـــــل:

نحسب

$$\text{س}_1=2،\quad \text{و}\quad \text{س}_2=\frac{5}{4}،\ \text{و}\quad \text{س}_3=\frac{2929}{3200}\approx 0{,}915<1 \qquad (*)$$

لاحظ أنه يمكننا، بالاعتماد على (*)، استثناء جميع الخيارات المطروحة باستثناء (ب). ولكن هل هذا الخيار صحيح؟ هل يمكنك إثبات أن المؤلف لم يخطىء في اعتبار (ب) الإجابة الصحيحة؟ إذن، لا بد من التحقق من صحة (ب)!!

لاحظ أولاً أن جميع عناصر المتتابعة موجبة. باستخدام متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي نحصل على

$$\text{س}_{\text{ن}+1}=\frac{\text{س}_{\text{ن}}^4+9}{10\,\text{س}_{\text{ن}}}=\frac{\text{س}_{\text{ن}}^3}{10}+\frac{9}{10\,\text{س}_{\text{ن}}}$$

$$=\frac{\text{س}_{\text{ن}}^3}{10}+\frac{3}{10\,\text{س}_{\text{ن}}}+\frac{3}{10\,\text{س}_{\text{ن}}}+\frac{3}{10\,\text{س}_{\text{ن}}}$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{\text{س}_{\text{ن}}^3}{10}\times\frac{3}{10\,\text{س}_{\text{ن}}}\times\frac{3}{10\,\text{س}_{\text{ن}}}\times\frac{3}{10\,\text{س}_{\text{ن}}}}$$

$$=\frac{4}{10}\sqrt[4]{27}$$

$$>\frac{4}{10}\times\frac{9}{4}=\frac{9}{10}$$

نستخدم الآن الاستقراء الرياضي لإثبات أن

$$\text{س}_{\text{ن}}\leq\frac{5}{4}،\ \forall\ \text{ن}\geq 2 \qquad (**)$$

لاحظ أن $\text{س}_2=\frac{5}{4}$ تحقق (**). افرض أن (**) متحققة عنما $\text{ن}=\text{ك}\geq 2$، أي أن $\text{س}_{\text{ك}}\leq\frac{5}{4}$.

الحالة الأولى: $1\leq\text{س}_{\text{ك}}\leq\frac{5}{4}$. في هذه الحالة

$$\text{س}_{\text{ك}+1}-\text{س}_{\text{ك}}=\frac{\text{س}_{\text{ك}}^4+9}{10\,\text{س}_{\text{ك}}}-\text{س}_{\text{ك}}=\frac{\text{س}_{\text{ك}}^4-10\,\text{س}_{\text{ك}}^2+9}{10\,\text{س}_{\text{ك}}}=\frac{(\text{س}_{\text{ك}}^2-5)^2-16}{10\,\text{س}_{\text{ك}}}\leq 0$$

أي أن

$$\text{س}_{\text{ك}+1}\leq\text{س}_{\text{ك}}\leq\frac{5}{4}$$

الحالة الثانية: $\frac{٩}{١٠} < س_ن \le ١$. في هذه الحالة

$$س_{ن+١} - س_ن = \frac{س_ن^{٤} + ٩}{١٠ س_ن} \le \frac{١^{٤} + ٩}{١٠ س_ن} = \frac{١}{س_ن} < \frac{١}{\frac{٩}{١٠}} = \frac{١٠}{٩} < \frac{٥}{٤}$$

نستنتج مما تقدم أن

$$\frac{٩}{١٠} < س_ن \le \frac{٥}{٤}، \ \forall ن \ge ٢$$

الســـــؤال السابع عشر:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من عددين حقيقيين س وَ ص يحققان

$$س + ص = ١$$
$$س^{٥} + ص^{٥} = ٣١$$

هو

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٤
هـ) ٦

الحـــــل:

لاحظ أن

$$س^{٥} + ص^{٥} = (س+ص)^{٥} - ٥ س ص (س^{٣} + ٢ س^{٢} ص + ٢ س ص^{٢} + ص^{٣})$$

$$= (س+ص)^{٥} - ٥ س ص (س+ص)^{٣} + ٥ (س ص)^{٢} (س+ص)$$

بتعويض $س + ص = ١$ في المعادلة الثانية نحصل على

$$١ - ٥ س ص + ٥ (س ص)^{٢} = ٣١$$
$$(س ص)^{٢} - س ص - ٦ = ٠$$
$$(س ص - ٣)(س ص + ٢) = ٠$$

الحالة الأولى: $س ص = ٣$. في هذه الحالة

$$\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}}$$
$$\text{س} + \frac{٣}{\text{س}} = ١$$
$$\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣ = ٠$$

بما أن مميز هذه المعادلة التربيعية هو $-١١ < ٠$، فإنه لا يوجد لها أية جذور حقيقية.

الحالة الثانية: $\text{س ص} = -٢$. في هذه الحالة

$$\text{ص} = -\frac{٢}{\text{س}}$$
$$\text{س} - \frac{٢}{\text{س}} = ١$$
$$\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = ٠$$
$$(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠$$

أي أن $(\text{س،ص}) = (٢،-١)$، أو $(\text{س،ص}) = (-١،٢)$.

السؤال الثامن عشر:

لتكن $\text{د}(\text{س})$ دالة تحقق

$$\text{د}(\text{ن}+١) = (-١)^{\text{ن}+١}\,\text{ن} - ٢\,\text{د}(\text{ن})،\ \forall\, \text{ن} \geq ١$$

إذا كانت $\text{د}(١٠١) = \text{د}(١)$، فإن $\sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \left(\text{ن} + ٣٠٠\,\text{د}(\text{ن})\right) =$

الحل:

هل فكرت في دراسة سلوك هذه المتتابعة؟ من المعطيات

$$\text{د}(٢) = ١ - ٢\,\text{د}(١)$$
$$\text{د}(٣) = -٢ - ٢\,\text{د}(٢)$$

$$\text{د}(٤) = ٣ - ٢\,\text{د}(٣)$$
$$\text{د}(٥) = -٤ - ٢\,\text{د}(٤)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$د(١٠٠) = ٩٩ - ٢د(٩٩)$$
$$د(١٠١) = -١٠٠ - ٢د(١٠٠)$$

بإضافة الأعمدة نحصل على

$$\sum_{ن=٢}^{١٠١} د(ن) = \left(\sum_{ك=١}^{٥٠} -١\right) - ٢ \times \sum_{ن=١}^{١٠٠} د(ن)$$
$$= -٥٠ - ٢ \times \sum_{ن=١}^{١٠٠} د(ن)$$

بما أن $د(١٠١) = د(١)$، فإننا نحصل على

$$\sum_{ن=٢}^{١٠١} د(ن) = \sum_{ن=١}^{١٠٠} د(ن)\text{، أي أن } \sum_{ن=١}^{١٠٠} د(ن) = -\frac{٥٠}{٣}$$

من ذلك

$$\sum_{ن=١}^{١٠٠}\left(ن + ٣٠٠د(ن)\right) = \sum_{ن=١}^{١٠٠} ن + ٣٠٠ \times \sum_{ن=١}^{١٠٠} د(ن)$$
$$= \frac{١٠٠(١٠٠+١)}{٢} + ٣٠٠ \times \left(-\frac{٥٠}{٣}\right)$$
$$= ٥٠ \times (١٠١ - ١٠٠) = ٥٠$$

السـؤال التاسع عشر:

إذا كان $ن = ل^{٢}$ مربعاً كاملاً مكوناً من أربع خانات، بحيث يكون الرقمان في الخانتين الأولى والثانية متساويين، والرقمان في الخانتين الثالثة والرابعة متساويين، فإن $ل =$

الحـل:

ليكن هذا العدد $ن = أأب ب$.

ما الخطوة الأولى لفهم طبيعة أي عدد صحيح موجب؟ لا شك أنه تحليل هذا العدد كحاصل ضرب عوامله الأولية. ولكن ما هي القواسم الأولية لهذا العدد؟ لا شك أن شكل هذا العدد يوحي لك أنه من مضاعفات العدد ١١، وبالتالي يمكن كتابته على الصورة $١١ \times أ٠ب$. حيث إن هذا العدد مربع كامل، يتوجب أن يكون العدد $أ٠ب$ على الصورة $أ٠ب = ١١ \times جـ^{٢}$ حيث يتكون $جـ^{٢}$ من خانتين. نقوم باختبار جميع الاحتمالات:

جـ=١، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=١١ (احتمال مرفوض)
جـ=٢، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=٤٤ (احتمال مرفوض)
جـ=٣، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=٩٩ (احتمال مرفوض)
جـ=٤، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=١٧٦ (احتمال مرفوض)
جـ=٥، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=٢٧٥ (احتمال مرفوض)
جـ=٦، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=٣٩٦ (احتمال مرفوض)
جـ=٧، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=٥٣٩ (احتمال مرفوض)
جـ=٨، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=٧٠٦ (احتمال مقبول، لاحظ وجود الصفر في الخانة الوسطى)
جـ=٩، أ٠ب=١١×جـ^{٢}=١٠٨٩ (احتمال مرفوض)

نستنتج أن ن=١١^{٢}×٨^{٢}=٧٧٤٤، وَ ل=١١×٨=٨٨

السـؤال العشرون:

لتكن د:ك ←ك دالة تحقق الشروط التالية:

١) د(ن+١)>د(ن)، ∀ن∈ك.

٢) د(ن+د(م))=د(ن)+م+١، ∀م،ن∈ك.

أوجد د(٩٩٨).

الحـــل:

ليكن ك=د(٠).
بتعويض م=ن=٠ في الشرط الثاني نحصل على
د(ك)=ك+١

بتعويض م=٠ وَ ن=ك في الشرط الثاني نحصل على
د(٢ك)=د(ك)+١=ك+٢

من الشرط الأول نحصل على
([د(٢ك)−د(٢ك−١)]+[د(٢ك−١)−د(٢ك−٢)]+⋯+[د(ك+١)−د(ك)])≥ك

لاحظ أن طرف المتباينة الأيمن هو

$$د(٢ك)-د(ك)=١$$

ونستنتج من ذلك أن $ك\leq ١$.

الحالة الأولى: $ك=٠$. في هذه الحالة نحصل على $ك=د(٠)=١$ ، وهذا تناقض.

الحالة الثانية: $ك=١$. في هذه الحالة، وبتعويض $م=٠$ في الشرط الثاني نحصل على

$$د(ن+١)=د(ن)+١،\ \forall ن \in ك$$

أي أن

$$د(ن)=د(ن-١)+١=د(ن-٢)+٢=\cdots=د(٠)+ن،\ \forall ن\in ط$$

إذن

$$د(٩٩٨)=د(٠)+٩٩٨=١+٩٩٨=٩٩٩$$

السـؤال الواحد والعشرون:

عدد الأعداد الصحيحة ك بحيث توجد دالة $د: ط \to ص$ تحقق $د(٢)\neq ٠$ والشرط التالي

$$د(م ن)=د(م)+د(ن)+ك\, د(ق.م.أ(م،ن))$$

هو

الحـــل:

هل تجدي دراسة بعض القيم الخاصة؟ بتعويض $م=ن$، نحصل على

$$د(ن^٢)=(ك+٢)\,د(ن)$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned} د(ن^٣) &= د(ن^٢\times ن) \\ &= د(ن^٢)+(ك+١)\,د(ن) \\ &= (٢ك+٣)\,د(ن) \end{aligned}$$

بذلك نحصل على

$$\begin{aligned} د(ن^٤) &= د(ن^٢\times ن^٢) \\ &= (ك+٢)\,د(ن^٢) \\ &= (ك+٢)(ك+٢)\,د(ن) \\ &= (ك+٢)^٢\,د(ن) \end{aligned}$$

يمكننا حساب $د(ن^٤)$ بطريقة أخرى:

$$\begin{aligned} \text{د}(\text{ن}^{٤}) &= \text{د}(\text{ن}^{٣} \times \text{ن}) \\ &= \text{د}(\text{ن}^{٣}) + (\text{ك}+١)\,\text{د}(\text{ن}) \\ &= (٢\text{ك}+٣)\,\text{د}(\text{ن}) + (\text{ك}+١)\,\text{د}(\text{ن}) \\ &= (٣\text{ك}+٤)\,\text{د}(\text{ن}) \end{aligned}$$

من ذلك نحصل على

$$(\text{ك}+٢)^{٢}\,\text{د}(\text{ن}) = (٣\text{ك}+٤)\,\text{د}(\text{ن})$$

بتعويض $\text{ن}=٢$، وحيث أن $\text{د}(٢)\neq ٠$، نحصل على

$$\begin{aligned} (\text{ك}+٢)^{٢} &= (٣\text{ك}+٤) \\ \text{ك}^{٢}+\text{ك} &= ٠ \\ \text{ك}(\text{ك}+١) &= ٠ \\ \text{ك}=٠ \quad &\text{أو} \quad \text{ك}=-١ \end{aligned}$$

الحالة الأولى: $\text{ك}=٠$.

في هذه الحالة يمكننا تعريف

$$\text{د}(\text{ن})=\text{ل}،\ \text{حيث}\ \ \text{ن}=٢^{\text{ل}}\times\text{ب}\ \text{وَ}\ ٢\nmid\text{ب}$$

الحالة الثانية: $\text{ك}=-١$.

في هذه الحالة يمكننا تعريف

$$\text{د}(\text{ن})=\begin{cases} ١ ، & ٢\mid\text{ن} \\ ٠ ، & ٢\nmid\text{ن} \end{cases}$$

نستنتج من ذلك أن العدد المطلوب هو ٢.

السـؤال الثاني والعشرون:

إذا كانت أ،ب،جـ جذور المعادلة $\text{س}^{٣}-\text{س}-١=٠$، فإن

$$\frac{١-\text{أ}}{١+\text{أ}}+\frac{١-\text{ب}}{١+\text{ب}}+\frac{١-\text{جـ}}{١+\text{جـ}}=$$

الحـــل:

هل حاولت إيجاد هذه الجذور؟ قد يكون ذلك صعباً جداً. في الحقيقة يوجد لهذه المعادلة جذر حقيقي وحيد وهو – على وجه التقريب – ١,٣٢٤٧، أما الجذران الآخران فهما غير حقيقيين.

ماذا عن العلاقات بين معاملات كثيرات الحدود ومعاملاتها؟ هل تتذكر تلك الخاصة بالمعادلات التكعيبية؟

من المعلوم أنه إذا كان $أ_٠ \neq ٠$، فإن مجموع معكوسات جذور المعادلة التكعيبية $أ_٣ س^٣ + أ_٢ س^٢ + أ_١ س + أ_٠ = ٠$ هو $-\frac{أ_١}{أ_٠}$.

لاحظ أن $أ+١$، $ب+١$، $جـ+١$ جذور لكثيرة الحدود

$$ك(س) = (س-١)^٣ - (س-١) - ١ = س^٣ - ٣س^٢ + ٢س - ١$$

من ذلك نحصل على

$$\frac{١}{أ+١} + \frac{١}{ب+١} + \frac{١}{جـ+١} = \frac{-٢}{-١} = ٢$$

لاحظ أن

$$\frac{١-أ}{١+أ} + \frac{١-ب}{١+ب} + \frac{١-جـ}{١+جـ} = \frac{(١+أ)-٢أ}{١+أ} + \frac{(١+ب)-٢ب}{١+ب} + \frac{(١+جـ)-٢جـ}{١+جـ}$$

$$= ٣ - ٢ \times \left(\frac{أ}{١+أ} + \frac{ب}{١+ب} + \frac{جـ}{١+جـ} \right)$$

ليكن $ر = \frac{أ}{١+أ} + \frac{ب}{١+ب} + \frac{جـ}{١+جـ}$. من ذلك نحصل على

$$\left(\frac{١}{١+أ} + \frac{١}{١+ب} + \frac{١}{١+جـ} \right) - ر = ٣ - ٢ر$$

$$٢ + ر = ٣$$

$$ر = ١$$

نستنتج أن

$$\frac{١-أ}{١+أ} + \frac{١-ب}{١+ب} + \frac{١-جـ}{١+جـ} = \left(\frac{١}{أ+١} + \frac{١}{ب+١} + \frac{١}{جـ+١} \right) - \left(\frac{أ}{١+أ} + \frac{ب}{١+ب} + \frac{جـ}{١+جـ} \right)$$

$$= ٢ - ١$$

$$= ١$$

الســـــؤال الثالث والعشرون:

إذا كانت الأعداد الحقيقية الموجبة أ، ب، جـ، ر تحقق المعادلتين:

$$أ + ب + جـ + ر = ١٢$$

$$أ ب جـ ر = ٢٧ + أب + أجـ + أر + ب جـ + ب ر + جـ ر$$

فإن $أ ب جـ ر =$

الحــــــل:

ما الذي يوحيه لك وجود أبجد وَ أ+ب+جـ+د؟ لاحظ أن كلا الحدين يظهران في متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي، ولكن ظاهر السؤال ليس عن متباينة ولكن عن معادلتين!! وليكن، لا تنس أن أية مساواة ك=ل تكافئ في الحقيقة المتباينة ك≤ل≤ك .

بتطبيق متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي على أ،ب،جـ،د، نحصل على

$$\sqrt[٤]{\text{أبجد}} \le \frac{\text{أ+ب+جـ+د}}{٤}$$

$$\sqrt[٤]{\text{أبجد}} \le ٣$$

$$\text{أبجد} \le ٨١$$

لاحظ أننا نحصل على مساواة عندما (أ،ب،جـ،د)=(٣،٣،٣،٣)، وأن هذه الرباعية تحقق المعادلتين.

من المعادلة الثانية نحصل على

$$\text{أب+أجـ+أد+بجـ+بد+جـد} = \text{أبجد} - ٢٧$$

بتطبيق متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي على الأعداد أب،أجـ،أد،بجـ،بد،جـد نحصل على

$$\sqrt[٦]{(\text{أب})(\text{أجـ})(\text{أد})(\text{بجـ})(\text{بد})(\text{جـد})} \le \frac{\text{أب+أجـ+أد+بجـ+بد+جـد}}{٦}$$

$$\sqrt{\text{أبجد}} \le \frac{\text{أبجد}-٢٧}{٦}$$

أي أن $\text{س} = \sqrt{\text{أبجد}}$ تحقق المتباينة $\text{س}^{٢} - ٦\text{س} \ge ٢٧$، وهي متباينة مكافئة للمتباينة

$$(\text{س}-٣)^{٢} = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ \ge ٣٦$$

حيث إن هذه المتباينة تتحقق إذا وفقط إذا كانت س≤−٣ أو س≥٩، وحيث أن $\sqrt{\text{أبجد}} \ge ٠$، نستنتج أن $\sqrt{\text{أبجد}} \ge ٩$، أي أن أبجد≥٨١.

من المتباينة ٨١≤أبجد≤٨١، نحصل على أبجد=٨١.

الســــؤال الرابع والعشرون:

عرّف

$$\text{د}(\text{س}) = \lfloor \text{س} \rfloor + \lfloor ١٠\times\text{س} \rfloor + \lfloor ١٠٠\times\text{س} \rfloor$$

أوجد عدداً صحيحاً موجباً ن بحيث

١) لا يوجد لأي من المعادلتين د(س)=ن وَ د(س)=ن+١ أي حل

٢) يوجد للمعادلتين د(س)=ن−١ وَ د(س)=ن+٢، كل على حدة، حل واحد على الأقل.

الحـــــــل:

يمكن كتابة أي عدد حقيقي موجب $ع$ على الشكل $ع=\cdots جبأ,م$ حيث يمثل $م$ الجزء الصحيح لهذا العدد. لاحظ أن

$$د(ع)=\lfloor ع\rfloor+\lfloor ١٠\times ع\rfloor+\lfloor ١٠٠\times ع\rfloor$$

$$=\lfloor \cdots جبأ,م\rfloor+\lfloor \cdots جب,أم\rfloor+\lfloor \cdots ج,بأم\rfloor$$

$$=م+أم+بأم$$

إذا كانت $م=٠$، فإن

$$د(ع)=أ+بأ\le ٩+٩٩=١٠٨$$

لاحظ أن $د(٠,٩٩)=٠+٩+٩٩=١٠٨$.

أما إذا كانت $م\ge ١$، فإن

$$د(ع)\ge م+١٠م+١٠٠م\ge ١١١$$

لاحظ أن $د(١)=١+١٠+١٠٠=١١١$.

بالتالي فإنه لا يوجد للمعادلة $د(س)=١٠٩$ أو للمعادلة $د(س)=١١٠$ أية حلول.

من الواضح أن $ن=١٠٩$ يحقق الشروط المطلوبة.

الســـــؤال الخامس والعشرون:

أثبت أنه لأية أعداد حقيقية موجبة $أ_١،\cdots،أ_ن،ب_١،\cdots،ب_ن$:

$$(أ_١\times\cdots\times أ_ن)^{\frac{١}{ن}}+(ب_١\times\cdots\times ب_ن)^{\frac{١}{ن}}\le\Big((أ_١+ب_١)\times\cdots\times(أ_ن+ب_ن)\Big)^{\frac{١}{ن}}$$

الحـــــــل:

ليكن

$$س_ك=\frac{أ_ك}{أ_ك+ب_ك} \quad و \quad ص_ك=\frac{ب_ك}{أ_ك+ب_ك}$$

لجميع قيم $ك=١،\cdots،ن$. لاحظ أن

$$س_ك+ص_ك=١$$

باستخدام متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي نحصل على

$$(\text{س}_1\times\cdots\times\text{س}_{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}}+(\text{ص}_1\times\cdots\times\text{ص}_{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}}\le\frac{(\text{س}_1+\text{ص}_1)+\cdots+(\text{س}_{\text{ن}}+\text{ص}_{\text{ن}})}{\text{ن}}$$

$$=\frac{1+\cdots+1}{\text{ن}}$$

$$=\frac{\text{ن}}{\text{ن}}=1$$

من ذلك نحصل على

$$\left(\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_1+\text{ب}_1}\times\cdots\times\frac{\text{أ}_{\text{ن}}}{\text{أ}_{\text{ن}}+\text{ب}_{\text{ن}}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}+\left(\frac{\text{ب}_1}{\text{أ}_1+\text{ب}_1}\times\cdots\times\frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{أ}_{\text{ن}}+\text{ب}_{\text{ن}}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}\le 1$$

$$(\text{أ}_1\times\cdots\times\text{أ}_{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}}+(\text{ب}_1\times\cdots\times\text{ب}_{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}}\le\left((\text{أ}_1+\text{ب}_1)\times\cdots\times(\text{أ}_{\text{ن}}+\text{ب}_{\text{ن}})\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}$$

السـؤال السادس والعشرون:

لتكن $\{\text{س}_1,\cdots,\text{س}_{\text{ن}}\}$، حيث $\text{ن}\ge 2$، مجموعة من الأعداد الحقيقية الموجبة. أثبت أن

$$\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}\text{ك}\,\text{س}_{\text{ك}}\le\binom{\text{ن}}{2}+\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}\text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}$$

الحـل:

حيث أن حدين من أصل ثلاثة في المتباينة على شكل مجموع منتهٍ، لا بد أنك قد توقعت أن أن تكون بداية الحل إعادة كتابة الحد المتبقي، أي $\binom{\text{ن}}{2}$، على شكل مجموع منتهٍ. هل يمكنك ذلك؟ لاحظ أن

$$\binom{\text{ن}}{2}=\frac{\text{ن}!}{2!(\text{ن}-2)!}=\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}=\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}-\text{ن}=\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}(\text{ك}-1)$$

بتطبيق متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي على الأعداد

$$\underbrace{1,\cdots,1}_{\text{ك}-1},\text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}$$

نحصل على

$$\text{س}_{\text{ك}}=\sqrt[\text{ك}]{1\times\cdots\times1\times\text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}}\le\frac{(\text{ك}-1)+\text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}}{\text{ك}}$$

أي أن

$$\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{ك}\,\text{س}_{\text{ك}} \ge \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} (\text{ك}-1) + \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}} = \binom{\text{ن}}{2} + \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}$$

السـؤال السابع والعشرون:

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً، ولتبدأ بالمتتابعة $1، \frac{1}{2}، \dots، \frac{1}{\text{ن}}$، لتكوّن متتابعة جديدة عدد عناصرها $\text{ن}-1$ تحسب حدودها كما يلي:

الحد الأول هو الوسط الحسابي للحدين الأول والثاني في المتتابعة أعلاه، والحد الثاني هو الوسط الحسابي للحدين الثاني والثالث في المتتابعة أعلاه، وهكذا لتحصل على المتتابعة

$$\frac{3}{4}، \frac{5}{12}، \dots، \frac{2\text{ن}-1}{2\text{ن}(\text{ن}-1)}$$

استمر بتكوين متتابعات جديدة بحيث يكون الحد العام ذو الترتيب ل في أية متتابعة جديدة مساوياً للوسط الحسابي للحد ذي الترتيب ل، والحد ذي الترتيب $\text{ل}+1$ في المتتابعة التي سبقتها مباشرة.

أثبت أن العدد أ الذي نحصل عليه بعد تكرار هذه العملية $\text{ن}-1$ من المرات أقل من $\frac{2}{\text{ن}}$.

الحـــــل:

لا بد أنك تفضل البدء بتجربة بعض قيم ن وهذا جيد لفهم أفضل للسؤال.

لأية متتابعة $\{\text{س}_{\text{ل}}\}$ عرّف

$$\text{و}_0(\text{س}_{\text{ل}}) = \text{س}_{\text{ل}}$$

$$\text{و}_1(\text{س}_{\text{ل}}) = \frac{\text{س}_{\text{ل}} + \text{س}_{\text{ل}+1}}{2}$$

$$\text{و}_{\text{م}+1}(\text{س}_{\text{ل}}) = \text{و}(\text{و}_{\text{م}}(\text{س}_{\text{ل}}))$$

وذلك لجميع قيم $\text{م} = 1، \dots، \text{ن}-1$ وَ $\text{ل} = 1، \dots، \text{م}-1$.

باستخدام الاستقراء الرياضي، نثبت أنه إذا كانت ل ثابتة، فإن

$$\text{و}_{\text{م}}(\text{س}_{\text{ل}}) = \frac{\sum_{\text{ك}=0}^{\text{م}} \binom{\text{م}}{\text{ك}} \text{س}_{\text{ل}+\text{ك}}}{2^{\text{م}}} \qquad (*)$$

إذا كانت $\text{م} = 1$، فإن المعادلة (*) صحيحة. افترض أن المعادلة (*) صحيحة عندما $\text{م} = \text{ر} \ge 1$. نستنتج من ذلك أن

$$ق_{ر+١}(س_ل)=ق(ق_ر(س_ل))$$

$$=\frac{ق_ر(س_ل)+ق_ر(س_{ل+١})}{٢}$$

$$=\frac{١}{٢}\times\left(\frac{\sum_{ك=٠}^{ر}\binom{ر}{ك}س_{ل+ك}}{٢^{ر}}+\frac{\sum_{ك=٠}^{ر}\binom{ر}{ك}س_{ل+١+ك}}{٢^{ر}}\right)$$

$$=\frac{س_ل+\sum_{ك=١}^{ر}\binom{ر}{ك}س_{ل+ك}+\sum_{ك=٠}^{ر-١}\binom{ر}{ك}س_{ل+١+ك}+س_{ر+١+ك}}{٢^{ر+١}}$$

$$=\frac{س_ل+\sum_{ك=١}^{ر}\left[\binom{ر}{ك}+\binom{ر}{ك-١}\right]س_{ل+ك}+س_{ر+١+ك}}{٢^{ر+١}}$$

$$=\frac{س_ل+\sum_{ك=١}^{ر}\binom{ر+١}{ك}س_{ل+ك}+س_{ر+١+ك}}{٢^{ر+١}}$$

$$=\frac{\sum_{ك=٠}^{ر+١}\binom{ر+١}{ك}س_{ل+ك}}{٢^{ر+١}}$$

إذن المعادلة (*) صحيحة عندما $م=ر+١$. يعني هذا أن المعادلة (*) صحيحة لجميع قيم $م=١،\dots،ن-١$ وَ $ل=١،\dots،م-١$.

نحصل من المعادلة (*) على

$$أ=ق_{ن-١}(س_١)=\frac{\sum_{ك=٠}^{ن-١}\binom{ن-١}{ك}س_{١+ك}}{٢^{ن-١}}$$

لكن

$$\binom{ن-١}{ك}س_{ك+١} = \binom{ن-١}{ك}\frac{١}{ك+١}$$

$$= \frac{(ن-١)!}{(ن-١-ك)!\,ك!\,(ك+١)}$$

$$= \frac{١}{ن}\,\frac{ن\,(ن-١)!}{(ن-١-ك)!\,ك!\,(ك+١)}$$

$$= \frac{١}{ن}\binom{ن}{ك+١}$$

نستنتج من ذلك أن

$$أ = \frac{\sum_{ك=٠}^{ن-١}\frac{١}{ن}\binom{ن}{ك+١}}{٢^{ن-١}}$$

$$= \frac{\sum_{ك=٠}^{ن-١}\frac{١}{ن}\binom{ن}{ك+١}}{٢^{ن-١}}$$

$$< \frac{١}{ن\times ٢^{ن-١}}\sum_{ك=٠}^{ن}\binom{ن}{ك}$$

$$= \frac{١}{ن\times ٢^{ن-١}}\times ٢^{ن}$$

$$= \frac{٢}{ن}$$

الســـــؤال الثامن والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٨١):

لتكن $د(س،ص)$ دالة معرفة لجميع الأعداد الكلية س،ص، وتحقق المعادلات التالية

$$د(٠،ص) = ص+١$$
$$د(س+١،٠) = د(س،١)$$
$$د(س+١،ص+١) = د(س،د(س+١،ص))$$

أوجد $د(٤،١٩٨١)$.

الحـــــل:

حيث أن المطلوب هو د(٤،١٩٨١)، فإن فكرة تعويض بعض قيم س وَ ص الخاصة لا تبدو فكرة سيئة.
بتعويض ص=٠ في المعادلة الأولى، ثم س=٠ في المعادلة الثانية، نجد أن

د(٠،١)=١+١=٢ وَ د(١،٠)=د(٠،١)=٢

بتعويض س=٠ في المعادلة الثالثة، ثم باستخدام المعادلة الأولى، نحصل على

د(١،ص+١)=د(٠،د(١،ص))=د(١،ص)+١

هل توصلت إلى صيغة محتملة لقيم د(١،ص) ؟ هل يمكنك إثبات صحتها؟ من السهل الآن – باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي – إثبات أن

د(١،ص)=ص+٢، لجميع قيم ص≥٠ (*)

بتعويض س=١ في المعادلة الثانية، ثم باستخدام (*)، نجد أن

د(٢،٠)=د(١،١)=١+٢=٣

وبتعويض س=١ في المعادلة الثالثة، ثم باستخدام (*)، نجد أن

د(٢،ص+١)=د(١،د(٢،ص))
=د(٢،ص)+٢

هل توصلت إلى صيغة محتملة لقيم د(٢،ص) ؟ هل يمكنك إثبات صحتها؟ من السهل الآن – باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي – إثبات أن

د(٢،ص)=٢ص+٣، لجميع قيم ص≥٠ (**)

نستنتج أن د(٢،٢)=٧ وَ د(٣،٠)=د(٢،١)=٥. بتعويض س=٢ في المعادلة الثالثة، ثم باستخدام (**)، نجد أن

د(٣،ص+١)=د(٢،د(٣،ص))=٢د(٣،ص)+٣

هل توصلت إلى صيغة محتملة لقيم د(٣،ص) ؟ هل يمكنك إثبات صحتها؟ من السهل الآن – باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي – إثبات أن

د(٣،ص)=$٢^{ص+٣}$−٣، لجميع قيم ص≥٠ (***)

نستنتج أن د(٣،٣)=٦١. بتعويض س=٣ في المعادلة الثانية، نجد أن د(٤،٠)=د(٣،١)=١٣.
بتعويض س=٣ في المعادلة الثالثة، ثم باستخدام (***)، نجد أن

د(٤،ص+١)=د(٣،د(٤،ص))
=$٢^{د(٤،ص)+٣}$−٣

هل توصلت إلى صيغة محتملة لقيم د(٤،ص) ؟ هل يمكنك إثبات صحتها؟ باستخدام الاستقراء الرياضي، يمكننا إثبات أن

د(٤،ص)=$\underbrace{٢^{٢^{\cdot^{\cdot^{٢}}}}}_{ص+٣}$−٣، لجميع قيم ص≥٠ (****)

بتعويض ص=١٩٨١ في (****)، نحصل على

$$د(٤،١٩٨١)=\underbrace{٢^{٢^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{٢}}}}}}_{١٩٨٤}-٣$$

السؤال التاسع والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ٢٠٠٤):

أوجد جميع كثيرات الحدود $ك(س)$ التي معاملاتها أعداد حقيقية وتحقق

$$ك(أ-ب)+ك(ب-جـ)+ك(جـ-أ)=٢ك(أ+ب+جـ)$$

لجميع الثلاثيات المرتبة $(أ،ب،جـ)$ التي تحقق

$$أب+بجـ+جـأ=٠$$

الحل:

لتكن

$$ك(س)=أ_٠+أ_١س+أ_٢س^٢+\cdots+أ_مس^م+\cdots+أ_نس^ن$$

كيف نبدأ؟ هل تعرف ثلاثيات مرتبة $(أ،ب،جـ)$ تحقق $أب+بجـ+جـأ=٠$. لنحاول إيجاد بعضها. لاحظ أن جميع الثلاثيات

$$(أ،ب،جـ)=(٦ل،٣ل،-٢ل)\text{، حيث } ل\in ح$$

تحقق

$$أب+بجـ+أجـ=(٦ل)(٣ل)+(٣ل)(-٢ل)+(-٢ل)(٦ل)=٠$$

من ذلك نحصل على

$$ك(٣ل)+ك(٥ل)+ك(-٨ل)=٢ك(٧ل) \qquad (*)$$

بمساواة معاملات $ل^م$ على طرفي المعادلة (*)، لجميع قيم $٠\le م\le ن$، نحصل على $أ_م=٠$ أو (في حالة $أ_م\ne ٠$):

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times ٨^م-٢\times ٧^م=٠$$

الحالة الأولى: $م=٠$. في هذه الحالة

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times ٨^م-٢\times ٧^م=١>٠$$

الحالة الثانية: $م$ فردي. في هذه الحالة

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times ٨^م-٢\times ٧^م=(٣^م-٨^م)+(٥^م-٢\times ٧^م)<٠$$

الحالة الثالثة: $م=٢$ أو $م=٤$. في هذه الحالة

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times ٨^م-٢\times ٧^م=٠$$

الحالة الرابعة: $م\ge ٦$ عدد زوجي: في هذه الحالة

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times ٨^م-٢\times ٧^م=٣^م+٥^م+٨^م-٢\times ٧^م>٠.$$

نستنتج من ذلك أن

$$\text{ك}(\text{س})=\text{أ}_{٢}\,\text{س}^{٢}+\text{أ}_{٤}\,\text{س}^{٤}\text{، حيث } \text{أ}_{٢}\text{،}\text{أ}_{٤}\in\text{ح}$$

بالتعويض نتأكد أن قيم ك(س) أعلاه تحقق الشرط المطلوب.

الســــؤال الثلاثون (أولمبياد الرياضيات العالمي ٤٢، الولايات المتحدة ٢٠٠١):

أثبت أنه لأية ثلاثة أعداد موجبة $\text{أ،ب،ج}>٠$:

$$\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢}+٨\,\text{ب ج}}}+\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}^{٢}+٨\,\text{ج أ}}}+\frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ج}^{٢}+٨\,\text{أ ب}}}\geq ١$$

الحـــــل:

كما هي الحال في مثل هذه المسائل، لنبدأ بتدوين بعض الملاحظات. لاحظ أن

$$\frac{\text{أ}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}}}+\frac{\text{ب}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}}}+\frac{\text{ج}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}}}=\frac{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}}}$$

$$=١$$

لاحظ أيضاً أن الطرف الأيمن متناظر في أ،ب،ج، وبذلك يكفينا إيجاد عدد ك بحيث يكون

$$\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢}+٨\,\text{ب ج}}}\geq\frac{\text{أ}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}}}\qquad(*)$$

بتربيع طرفي المتباينة (*) وإعادة الترتيب نحصل على المتباينة المكافئة

$$\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{أ}^{٢}+٨\,\text{ب ج}}\geq\frac{\text{أ}^{٢\text{ك}}}{(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}})^{٢}}$$

$$\text{أ}^{٢}(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}})^{٢}\geq\text{أ}^{٢\text{ك}}(\text{أ}^{٢}+٨\,\text{ب ج})$$

$$(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}})^{٢}\geq\text{أ}^{٢\text{ك}-٢}(\text{أ}^{٢}+٨\,\text{ب ج})$$

$$(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}})^{٢}-\text{أ}^{٢\text{ك}}\geq ٨\,\text{أ}^{٢\text{ك}-٢}\,\text{ب ج}$$

بإعادة كتابة الطرف الأيمن من المتباينة الجديدة كفرق بين مربعين، نحصل على

$$(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}})^{٢}-\text{أ}^{٢\text{ك}}=(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}})^{٢}-(\text{أ}^{\text{ك}})^{٢}$$

$$=(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}})(\text{ب}^{\text{ك}}+\text{ج}^{\text{ك}})$$

بتطبيق متباينة المتوسط الحسابي – الوسط الهندسي على مجموعتي الأعداد $\{أ^ك، أ^ك، ب^ك، جـ^ك\}$ وَ $\{ب^ك، جـ^ك\}$، نحصل على المتباينتين

$$\frac{أ^ك+أ^ك+ب^ك+جـ^ك}{٤} \ge أ^{\frac{ك}{٤}}\times أ^{\frac{ك}{٤}}\times ب^{\frac{ك}{٤}}\times جـ^{\frac{ك}{٤}} \qquad (**)$$

$$\frac{ب^ك+جـ^ك}{٢} \ge ب^{\frac{ك}{٢}}\times جـ^{\frac{ك}{٢}} \qquad (***)$$

من المتباينتين (**) وَ (***)، نحصل على

$$(أ^ك+ب^ك+جـ^ك)^٢-أ^{٢ك} = (٢أ^ك+ب^ك+جـ^ك)(ب^ك+جـ^ك)$$

$$\ge (٤أ^{\frac{ك}{٢}}ب^{\frac{ك}{٤}}جـ^{\frac{ك}{٤}})(٢ب^{\frac{ك}{٢}}جـ^{\frac{ك}{٢}})$$

$$= ٨أ^{\frac{ك}{٢}}ب^{\frac{٣ك}{٤}}جـ^{\frac{٣ك}{٤}}$$

يجب أن نختار العدد ك بحيث يكون

$$٨أ^{\frac{ك}{٢}}ب^{\frac{٣ك}{٤}}جـ^{\frac{٣ك}{٤}} \ge ٨أ^{٢ك-٢}ب جـ$$

ولكن، كيف يمكنك إيجاد مثل هذا العدد؟ يمكن أن نحصل على أحد هذه الأعداد من خلال المساواة

$$٨أ^{\frac{ك}{٢}}ب^{\frac{٣ك}{٤}}جـ^{\frac{٣ك}{٤}} = ٨أ^{٢ك-٢}ب جـ$$

$$ك=\frac{٤}{٣}$$

من ذلك نحصل على

$$\frac{أ}{\sqrt{أ^٢+٨ب جـ}} \ge \frac{أ^{\frac{٤}{٣}}}{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+جـ^{\frac{٤}{٣}}}$$

$$\frac{ب}{\sqrt{ب^٢+٨أ جـ}} \ge \frac{ب^{\frac{٤}{٣}}}{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+جـ^{\frac{٤}{٣}}}$$

$$\frac{جـ}{\sqrt{جـ^٢+٨أ ب}} \ge \frac{جـ^{\frac{٤}{٣}}}{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+جـ^{\frac{٤}{٣}}}$$

أي أن

$$\frac{أ}{\sqrt{أ^٢+٨ب جـ}}+\frac{ب}{\sqrt{ب^٢+٨أ جـ}}+\frac{جـ}{\sqrt{جـ^٢+٨أ ب}} \ge \frac{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+جـ^{\frac{٤}{٣}}}{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+جـ^{\frac{٤}{٣}}}=١$$

٣-٢ أسئلة وحلول في نظرية الأعداد

السـؤال الأول:

عدد القواسم الموجبة للعدد ١٩٦٠٠٠ هو

أ) ٦٠
ب) ٨٥
ج) ٧٠
د) ٨٠
هـ) ٧٢

الحـل:

لا بد أنك قد سألت نفسك: هل توجد صيغة تعطينا عدد القواسم المنشود؟ ما هي هذه الصيغة؟

للحصول على عدد القواسم الموجبة، نحلل العدد إلى عوامله الأولية: $١٩٦٠٠٠ = ٢^{٥} \times ٥^{٣} \times ٧^{٢}$. أي قاسم للعدد ١٩٦٠٠٠ سيكون على صورة $٢^{م} \times ٥^{ن} \times ٧^{هـ}$ حيث م، ن، هـ أعداد صحيحة تحقق $٠ \le م \le ٥$، $٠ \le ن \le ٣$، $٠ \le هـ \le ٢$. بذلك يكون عدد القواسم الموجبة للعدد ١٩٦٠٠٠ هو

$$(٥+١)(٣+١)(٢+١) = ٧٢$$

السـؤال الثاني:

رقم الآحاد للعدد $٢١٣٧^{٢٠٠٩}$ يساوي

أ) ١
ب) ٣
ج) ٥
د) ٧
هـ) ٩

الحـل:

ما هو رقم الآحاد لحاصل ضرب ن من الأعداد؟ هل هو حاصل ضرب الأرقام في خانات الآحاد؟ ماذا لو كان هذا الناتج أكثر من ١٠؟ هل يكفي، في هذه الحالة، أن نأخذ باقي قسمة حاصل الضرب على ١٠؟

لاحظ أولاً أن رقم الآحاد للعدد $٢١٣٧^{ن}$ هو نفس رقم الآحاد للعدد $٧^{ن}$ أي أنه يساوي ١ إذا كانت $ن = ٠$، ويساوي ٧ إذا كانت $ن = ١$، ويساوي ٩ إذا كانت $ن = ٢$، ويساوي ٣ إذا كانت $ن = ٣$، ويعود إلى ١ عندما تكون $ن = ٤$ أو مضاعفاتها، وهكذا تتكرر الأعداد ١-٧-٩-٣ في خانة الآحاد في دورة رباعية (١-٧-٩-٣).

لاحظ الآن أن

$$٢١٣٧^{٢٠٠٩} = ٢١٣٧^{٢٠٠٨+١} = \left[٢١٣٧^{٤}\right]^{٥٠٢} \times ٢١٣٧$$

لاحظ أيضاً أن رقم الآحاد للعدد $\left[٢١٣٧^{٤}\right]^{٥٠٢}$ هو ١ (لأن الأس من مضاعفات ٤)، وأن رقم الآحاد للعدد ٢١٣٧ هو ٧. إذن آحاد العدد $٢١٣٧^{٢٠٠٩}$ هو آحاد العدد الناتج من ضرب آحاد العدد $\left[٢١٣٧^{٤}\right]^{٥٠٢}$ في آحاد العدد ٢١٣٧، وهذا يعني أن رقم الآحاد للعدد $(٢١٣٧)^{٢٠٠٩}$ هو $١ \times ٧ = ٧$.

السؤال الثالث:

عدد الأعداد الأولية التي يمكن كتابتها على الصورة ١٠٠٠١٠١٠١ هو

أ) لانهائي
ب) ٣
ج) ٢
د) ١
هـ) ٠

الحل:

ما عدد مرات تكرار الرقم ١ في العدد المعطى؟ ليكن $س_{ن} = ١٠٠٠١٠١$ (الرقم ١ يتكرر ن مرة).

لاحظ أن $س_{١} = ١$ غير أولي، وأن $س_{٢} = ١٠١$ أولي.

افرض أن $ن \le ٣$.

الحالة الأولى: ن عدد فردي. في هذه الحالة

$$س_{ن} = ١٠٠٠١١ \times ٩٠٠٠٠٩٠٩١$$

حيث يتكرر الرقم ١ عدد ن من المرات في العدد الأول، ويتكرر الرقم ٩ عدد $\frac{ن-١}{٢}$ من المرات في العدد الثاني. في هذه الحالة لا يمكن أن يكون $س_{ن}$ أولياً.

الحالة الثانية: ن عدد زوجي. في هذه الحالة يكون $س_{ن}$ من مضاعفات ١٠١.

نستنتج أن ١٠١ هو العدد الأولي الوحيد الذي يمكن كتابته على الصورة المعطاة.

السؤال الرابع:

الرقم في خانة آحاد العدد $٧^{٧^{٧}}$ هو

أ) ١
ب) ٣
ج) ٥
د) ٧
هـ) ٩

الحل:

لا شك أن الرقم المطلوب هو ب، حيث $٧^{٧^{٧}} \equiv ب \; \|١٠\|$.

نلاحظ أولاً أن $٧^{٢} = ٤٩ \equiv ١ \; \|٤\|$ وأن $٧^{٢} = ٤٩ \equiv -١ \; \|١٠\|$.

بذلك نحصل على

$$٧^{٧} = (٧^{٢})^{٣} \times ٧ \equiv \left((١)^{٣} \times ٧\right) \; \|٤\| \equiv ٣ \; \|٤\|$$

أي أن $٧^{٧} = ٤ك + ٣$، حيث ك عدد صحيح موجب.

نستنتج من ذلك أن

$$\begin{aligned} ٧^{٧^{٧}} &\equiv ٧^{٤ك+٣} \; \|١٠\| \\ &\equiv \left((٧^{٢})^{٢}\right)^{ك} \times (٧^{٢}) \times ٧ \; \|١٠\| \\ &\equiv \left((-١)^{٢}\right)^{ك} \times (-١) \times ٧ \; \|١٠\| \\ &\equiv -٧ \; \|١٠\| \\ &\equiv ٣ \; \|١٠\| \end{aligned}$$

إذن، العدد المطلوب هو ٣.

السؤال الخامس:

عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ن بحيث يكون $ن^{٤} + ٤^{ن}$ عدداً أولياً هو

أ) لانهائي
ب) ٤
ج) ٣
د) ٢
هـ) ١

الحـــــل:

هل بدأت بتجريب بعض قيم $ن$؟ لاحظ أنه عندما تكون $ن=١$، فإننا نحصل على العدد الأولي ٥. هل وجدت قيماً أخرى للعدد $ن$ تعطيك عدداً أولياً؟ ماذا يعني هذا؟

الحالة الأولى: $ن$ عدد زوجي. في هذه الحالة $ن^{٤}+٤^{ن}$ عدد زوجي أكبر من ٢، وبالتالي ليس عدداً أولياً.

الحالة الثانية: $ن$ عدد فردي. كما لاحظنا سابقاً، إذا كانت $ن=١$، فإننا نحصل على العدد الأولي ٥.

ليكن $ن=٢ل+١$، حيث $ل\geq ١$. في هذه الحالة

$$ن^{٤}+٤^{ن}=(ن^{٢}+٢^{ن})^{٢}-٢ن^{٢}٢^{ن}$$

$$=(ن^{٢}+٢^{ن})^{٢}-(٢^{ل+١}ن)^{٢}$$

$$=(ن^{٢}+٢^{ن}-٢^{ل+١}ن)(ن^{٢}+٢^{ن}+٢^{ل+١}ن)$$

لاحظ أن

$$ن^{٢}+٢^{ن}-٢^{ل+١}ن=ن^{٢}+٢^{ل}(٢^{ل+١}-٢ن)>١$$

من الواضح أن $ن^{٢}+٢^{ن}+٢^{ل}ن>١$، أي أن $ن^{٤}+٤^{ن}$ ليس عدداً أولياً. إذن، نحصل على عدد أولي فقط عندما $ن=١$.

السـؤال السادس:

عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $ن$ بحيث يقبل العدد $ا=٢٩٠٣^{ن}-٨٠٣^{ن}-٤٦٤^{ن}+٢٦١^{ن}$ القسمة على ٧ بدون باقي هو

أ) ١
ب) ٢
ج) ٧
د) ٢٧١
هـ) لانهائي

الحـــــل:

ما العلاقة بين الأعداد

٢٩٠٣، ٨٠٣، ٤٦٤، ٢٦١، ٧؟

هل لاحظت أن $٢٩٠٣-٨٠٣=٢١٠٠$ وَ $٤٦٤-٢٦١=٢٠٣$ من مضاعفات ٧؟

باستخدام المتطابقة

$$(س^{ن} - ص^{ن}) = (س - ص)(س^{ن-١} + س^{ن-٢}ص + \cdots + س ص^{ن-٢} + ص^{ن-١})$$

نلاحظ أن س − ص يقسم $س^{ن} - ص^{ن}$ لجميع الأعداد الطبيعية ن. الآن نكتب أ على صورة

$$\begin{aligned} أ &= ٢٩٠٣^{ن} - ٨٠٣^{ن} - ٤٦٤^{ن} + ٢٦١^{ن} \\ &= (٢٩٠٣^{ن} - ٨٠٣^{ن}) - (٤٦٤^{ن} - ٢٦١^{ن}) \\ &= (٢٩٠٣ - ٨٠٣)ك - (٤٦٤ - ٢٦١)ل \\ &= ٢١٠٠ك - ٢٠٣ل \\ &= ٧ \times ٣٠٠ك + ٧ \times ٢٩ل \\ &= ٧ \times (٣٠٠ك + ٢٩ل) \end{aligned}$$

حيث ك وَ ل عددان صحيحان موجبان، أي أن ٧ تقسم أ لجميع الأعداد الطبيعية ن.

السـؤال السابع:

عدد كثيرات الحدود د(س) ∈ ص[س] التي تحقق الشرطين: د(٧) = ١١ وَ د(١١) = ١٣ يساوي

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٥
هـ) لانهائي

الحـل:

لنفرض أن $د(س) = \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر \cdot س^ر$ حيث $أ_ر$ عدد صحيح لجميع قيم ر. ما العلاقة بين الأعداد ٧، ١١، ١٣ (عدا عن كونها أعداداً أولية)؟ لاحظ أن س − ص قاسم لـ

$$\begin{aligned} د(س) - د(ص) &= \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر \cdot س^ر - \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر \cdot ص^ر \\ &= \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر (س^ر - ص^ر) \end{aligned}$$

لأن س − ص هو أحد عوامل $س^ر - ص^ر$ لجميع قيم ر ≤ ٠، وبناءً على ذلك فإن د(١١) − د(٧) من مضاعفات ١١ − ٧ = ٤، وهذا مستحيل لأن د(١١) − د(٧) = ١٣ − ١١ = ٢.

إذن لا توجد أية كثيرة حدود تحقق هذه الشروط.

السـؤال الثامن:

القاسم المشترك الأعظم للعددين $\underbrace{\text{١١١...١١}}_{\text{٤٠}}$ (بتكرار الرقم واحد ٤٠ مرة)، والعدد $\underbrace{\text{١١...١١}}_{\text{١٢}}$ (بتكرار الرقم واحد ١٢ مرة) هو

أ) ١١
ب) ١١١
ج) ١١١١
د) ١١١١١
هـ) ١١١١١١

الحـل:

ليكن $\text{س}_{\text{ن}} = \underbrace{\text{١١١...١١}}_{\text{ن}}$ (بتكرار الرقم واحد ن مرة). لاحظ أن

$$\text{س}_{\text{ن}-\text{ل}} = \text{س}_{\text{ن}} - \text{١٠}^{\text{ن}-\text{ل}} \times \text{س}_{\text{ل}} \quad \text{لجميع قيم } \text{١} \le \text{ل} < \text{ن}$$

إذن، المطلوب هو $\text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{٤٠}}، \text{س}_{\text{١٢}})$. هل تتذكر كيفية الحصول على القاسم المشترك الأكبر لعددين؟

باستخدام خوارزمية إقليدس كما يلي:

$$\begin{aligned}
\text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{٤٠}}، \text{س}_{\text{١٢}}) &= \text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{٤٠}} - \text{١٠}^{\text{٢٨}} \times \text{س}_{\text{١٢}}، \text{س}_{\text{١٢}}) \\
&= \text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{٢٨}}، \text{س}_{\text{١٢}}) \\
&= \text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{٢٨}} - \text{١٠}^{\text{١٦}} \times \text{س}_{\text{١٢}}، \text{س}_{\text{١٢}}) \\
&= \text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{١٦}}، \text{س}_{\text{١٢}}) \\
&= \text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{١٦}} - \text{١٠}^{\text{٤}} \times \text{س}_{\text{١٢}}، \text{س}_{\text{١٢}}) \\
&= \text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{٤}}، \text{س}_{\text{١٢}}) \\
&= \text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{٤}}، \text{س}_{\text{١٢}} - \text{١٠}^{\text{٨}} \times \text{س}_{\text{٤}}) \\
&= \text{ق.م.أ.}(\text{س}_{\text{٤}}، \text{س}_{\text{٨}})
\end{aligned}$$

$$= ن \cdot م \cdot ا \cdot (س_{٤}س_{٨} - ١٠^{٤} \times س_{٤})$$

$$= ن \cdot م \cdot ا \cdot (س_{٤}س_{٤})$$

$$= س_{٤} = ١١١١$$

السـؤال التاسع:

لنفرض أن $ن = ٢^{هـ-١}\,(٢^{هـ} - ١)$ وأن $٢^{هـ} - ١$ عدد أولي. مجموع القواسم الموجبة للعدد $ن$ يساوي

أ) $ن$
ب) $٢ن$
ج) $ن^{٢}$
د) $ن + ١$
هـ) $ن^{ن}$

الحـل:

ما هي قواسم العدد $ن$؟

إذا فرضنا أن $م = ٢^{هـ} - ١$ فإن $ن = ٢^{هـ-١}\, م$، وبذلك تكون قواسم العدد $ن$ هي:

$$١، ٢، ٢^{٢}، \cdots، ٢^{هـ-٢}، ٢^{هـ-١}$$
$$م، ٢م، ٢^{٢}م، \cdots، ٢^{هـ-١}\, م$$

مجموع المتتالية الأولى يساوي

$$١ + ٢ + ٢^{٢} + \cdots + ٢^{هـ-٢} + ٢^{هـ-١} = \frac{٢^{هـ} - ١}{٢ - ١} = ٢^{هـ} - ١ = م$$

أما مجموع المتتالية الثانية فيساوي

$$(١ + ٢ + ٢^{٢} + \cdots + ٢^{هـ-١})م = م \cdot م = م^{٢}$$

وبذلك يكون مجموع قواسم العدد $ن$

$$م + م^{٢} = م(م + ١) = م(٢^{هـ} - ١ + ١) = م \times ٢^{هـ} = ٢ن$$

السـؤال العاشر:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكوّنة من عددين صحيحين س،ص يحققان

$$١٥\text{س}^{٢} - ٧\text{ص}^{٢} = ٩$$

هو

أ) ٠
ب) ٦
ج) ١٢
د) ١٨
هـ) لانهائي

الحـل:

ليكن (س،ص) زوجاً مرتباً يحقق المطلوب. حيث أن $٧\text{ص}^{٢} = ١٥\text{س}^{٢} - ٩ \equiv ٠ \ \|٣\|$، وحيث أن $٣ \nmid ٧$، نستنتج أن $٣ \mid \text{ص}$، أي أن $\text{ص} = ٣\text{ص}_{١}$ حيث $\text{ص}_{١}$ عدد صحيح. نستنتج من ذلك أن $١٥\text{س}^{٢} = ٦٣\text{ص}_{١}^{٢} + ٩$، أي أن

$$٥\text{س}^{٢} = ٢١\text{ص}_{١}^{٢} + ٣ \equiv ٠ \ \|٣\| \qquad (*)$$

حيث أن $٣ \nmid ٥$، فإن $٣ \mid \text{س}$، أي أن $\text{س} = ٣\text{س}_{١}$ حيث $\text{س}_{١}$ عدد صحيح. بالتعويض في (*)، نحصل على $٤٥\text{س}_{١}^{٢} - ٢١\text{ص}_{١}^{٢} = ٣$، أي أن $١٥\text{س}_{١}^{٢} - ٧\text{ص}_{١}^{٢} = ١$.

نستنتج أن $٧\text{ص}_{١}^{٢} = ١٥\text{س}_{١}^{٢} - ١$، ومن ذلك $\text{ص}_{١}^{٢} \equiv -١ \ \|٣\|$، وهذا تناقض لأنه لا يوجد أي عدد صحيح يحقق هذا التطابق: لاحظ أن

$$\text{ص}_{١} \equiv ٠ \ \|٣\| \Leftarrow \text{ص}_{١}^{٢} \equiv ٠ \ \|٣\|،\ \text{وَ}\ \text{ص}_{١} \equiv ١ \ \|٣\| \Leftarrow \text{ص}_{١}^{٢} \equiv ١ \ \|٣\|،\ \text{وَ}\ \text{ص}_{١} \equiv ٢ \ \|٣\| \Leftarrow \text{ص}_{١}^{٢} \equiv ١ \ \|٣\|$$

نستنتج أنه لا يوجد أي زوج مرتب يحقق المطلوب.

السـؤال الحادي عشر:

عدد الأزواج المرتبة (أ، ب) المكونة من عددين أوليين يحققان $\text{أ}^{٢} - ٢\text{ب}^{٢} = ١$ هو

أ) ١
ب) ٢
ج) ٣
د) ٤
هـ) لانهائي

الحـــــل:

هل يمكن أن يكون أ زوجياً؟ بالطبع لا (لماذا؟)!. لاحظ أيضاً أن الزوج المرتب (أ،ب)=(٣،٢) يحقق المعادلة المعطاة، بينما لا يحقق الزوج المرتب (٣،٣) المعادلة المعطاة.

افرض الآن أن أ، ب≤٥. من المعلوم أنه في هذه الحالة أ≡١ ‖٦‖ أو أ≡−١ ‖٦‖، وكذلك ب≡١ ‖٦‖ أو ب≡−١ ‖٦‖. نستنتج من ذلك أن

$$أ^{٢}-٢ب^{٢}\equiv\left((\pm١)^{٢}-٢\times(\pm١)^{٢}\right)\|٦\|\equiv-١\|٦\|\not\equiv١\|٦\|$$

بذلك يكون (٣،٢) الزوج المرتب الوحيد الذي يحقق المطلوب.

السـؤال الثاني عشر:

رقم الآحاد للعدد ن = ١! + ٢! + ٣! + ... + ٩٩! يساوي

أ) ٩
ب) ٨
ج) ٥
د) ٣
هـ) ٠

الحـــــل:

ما هو رقم الآحاد لحاصل جمع عدة أعداد؟ لا شك أنك قد عرفت الإجابة، وهي أنه باقي قسمة مجموع الأرقام في خانات آحاد كل عدد من هذه الأعداد على ١٠.

لاحظ أن

$$\begin{aligned}ن &= ١!+٢!+٣!+٤!+٥!+\cdots+٩٩!\\ &= ١+(١\times٢)+(١\times٢\times٣)+(١\times٢\times٣\times٤)+(١\times٢\times٣\times٤\times٥)+\cdots+٩٩!\\ &= ١+٢+٦+٢٤+١٠هـ\end{aligned}$$

حيث هـ عدد صحيح موجب، لأن كل حد من الحدود ٥!، ٦!، ٧!، ...، ٩٩! يحتوي على العاملين ٢ وَ ٥، وبذلك يكون من مضاعفات ١٠.

إذن رقم الآحاد للعدد ن يساوي رقم الآحاد للعدد ١+٢+٦+٢٤=٣٣ أي ٣.

الســــــؤال الثالث عشر:

أوجد أصغر عدد صحيح ن بحيث لو قُسم على ١٠ لكان الباقي ٩، ولو قُسم على ٩ لكان الباقي ٨، ولو قُسم على ٨ لكان الباقي ٧، وهكذا نزولاً إلى قسمته على ٢ ليكون الباقي ١.

أ) ٥٩
ب) ٤١٩
ج) ١٢٥٩
د) ٢٥١٩
هـ) ١٥٩

الحــــــل:

ليكن

$$ن = ١٠أ_٩ + ٩ = ٩أ_٨ + ٨ = ٨أ_٧ + ٧ = \cdots = ٢أ_١ + ١$$

حيث $أ_ي$ هو خارج قسمة ن على ي+١، حيث ١ ≤ ي ≤ ٩. إذن، يمكننا كتابة

$$ن + ١ = ١٠(أ_٩ + ١) = ٩(أ_٨ + ١) = ٨(أ_٧ + ١) = \cdots = ٢(أ_١ + ١)$$

وعليه فإن الأعداد ٢، ٣، ... ، ١٠ هي عوامل للعدد ن +١. حيث أن المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد هو

$$٢^٣ \times ٣^٢ \times ٥ \times ٧ = ٢٥٢٠$$

فإن ن = ٢٥٢٠ − ١ = ٢٥١٩ هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق المطلوب.

الســــــؤال الرابع عشر:

ليكن أ عدداً أولياً. عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من أعداد صحيحة موجبة تحقق

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{١}{أ}$$

هو

أ) ١
ب) ٣
ج) أ−١
د) أ
هـ) أ+١

الحـــــــل:

ما العلاقة بين الأعداد س ، ص، أ. لاحظ أن س>أ وَ ص>أ. لتكن ب=س−أ وَ جـ=ص−أ. من ذلك نحصل على

$$\frac{١}{\text{أ}+\text{ب}}+\frac{١}{\text{أ}+\text{جـ}}=\frac{١}{\text{أ}}$$

أي أن

$$\text{أ}^{٢}+\text{أ}(\text{ب}+\text{جـ})+\text{ب}\,\text{جـ}=٢\text{أ}^{٢}+\text{أ}(\text{ب}+\text{جـ})$$
$$\text{أ}^{٢}=\text{ب}\,\text{جـ}$$

إذا كانت ب=١، فإن جـ=أ^٢، ونحصل بذلك على (س،ص) = (أ+١،أ^٢ +أ).
إذا كانت جـ=١، فإن ب=أ^٢، ونحصل بذلك على (س،ص) = (أ^٢ +أ،أ+١).

إذا كانت ب≠١ وَ جـ≠١، فإن ب=جـ=أ حيث أن أ هو العدد الأولي الوحيد الذي يمكن أن يظهر في تحليل كل من ب وَ جـ إلى عواملهما الأولية، وبالتالي فكلا العددين من مضاعفات أ. في هذه الحالة نحصل على (س،ص) = (٢أ،٢أ).

توجد إذن ثلاثة أزواج مرتبة فقط تحقق المطلوب.

ملاحظة: إذا لم يكن أ عدداً أولياً، فإن عدد هذه الأزواج المرتبة أكبر من ٣، وذلك لأن هناك أكثر من زوج مرتب يحقق المعادلة ب جـ=أ^٢ أعلاه.

السـؤال الخامس عشر:

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة ن بحيث يكون $٢^{\text{ن}}$ قاسماً للعدد $٣^{\text{ن}}+١$

أ) ٣
ب) ١
ج) ٦
د) ١٦
هـ) لانهائي

الحـــــــل:

لاحظ أولاً أن باقي قسمة مربع أي عدد فردي على ٨ هو ١: إذا كان هـ = ٢م+١ عدداً فردياً فإن

$\text{هـ}^{٢} = (٢\text{م}+١)^{٢} = ٤\text{م}(\text{م}+١)+١$ ، وبما أن م أو (م+١) زوجي فإن ٤م(م+١) من مضاعفات ٨.
إذن، $\text{هـ}^{٢} \equiv ١ \;\|٨\|$.

الحالة الأولى: إذا كان $ن = ٢س$ عدداً زوجياً، فإن

$$٣^{ن} + ١ = ٣^{٢س} + ١ = \left(٣^{س}\right)^{٢} + ١ \equiv (١+١) \,\|٨\| \equiv ٢ \,\|٨\|$$

بينما $٢^{ن} \equiv ٠ \,\|٤\|$ (لاحظ أن $ن > ١$). نستنتج أنه إذا كان $ن$ زوجياً، فإن $٢^{ن}$ ليس قاسماً للعدد $٣^{ن} + ١$.

الحالة الثانية: إذا كان العدد $ن = ٢س + ١$ عدداً فردياً، فإن

$$٣^{ن} + ١ = ٣^{٢س+١} + ١ = \left(٣^{س}\right)^{٢} \times ٣ + ١ \equiv (١ \times ٣ + ١) \,\|٨\| \equiv ٤ \,\|٨\|$$

إذا كان $ن = ١$، فإن $٢^{ن} = ٢$ يقسم $٣^{ن} + ١ = ٤$.

أما إذا كان $ن > ١$، فإن $٢^{ن} \equiv ٠ \,\|٤\|$ وفي هذه الحالة لا يمكن أن يكون $٢^{ن}$ قاسماً للعدد $٣^{ن} + ١$.

نستنتج أن العدد $٢^{ن}$ يقسم العدد $٣^{ن} + ١$ فقط إذا كانت $ن = ١$، وبذلك يكون المجموع المطلوب يساوي ١.

السـؤال السادس عشر:

عدد الثلاثيات المرتبة (أ،ب،ج) المكوّنة من أعداد صحيحة موجبة أ،ب،ج، بحيث تشكل هذه الأعداد متوالية هندسية، ويكون مجموعها ١١١، هو

أ) ١
ب) ٢
ج) ٣
د) ٤
هـ) ٥

الحـل:

ما هي العلاقة بين عناصر المتتالية الهندسية؟ ليكن $ب = ر\,أ$ وَ $ج = ر^{٢}\,أ$، حيث $ر = \frac{ل}{م}$ ولنفرض أن ق.م.أ.$(ل، م) = ١$.

لاحظ أن $ج = ر^{٢}\,أ = \frac{ل^{٢}}{م^{٢}}\,أ$ عدد صحيح، وبذلك يكون أ من مضاعفات $م^{٢}$، أي أن $أ = ك\,م^{٢}$ حيث ك عدد صحيح موجب. بذلك نحصل على

$$ك\,(م^{٢} + ل\,م + ل^{٢}) = ١١١ = ٣ \times ٣٧$$

حيث أن ٣ وَ ٣٧ أعداد أولية، نستنتج أن $م^{٢} + ل\,م + ل^{٢} = ٣$ أو ٣٧ أو ١١١.

يوضح الجدول التالي قيم $م^{٢} + ل م + ل^{٢}$ بعد حذف النواتج التي تزيد عن ١١١ :

الحالة الأولى: م ≤ ل.

م \ ل	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
١	٣	٧	١٣	٢١	٣١	٤٣	٥٧	٧٣	٩١	١١١
٢			١٩	٢٨	٣٩	٥٢	٦٧	٨٤	١٠٣	
٣				٣٧	٤٩	٦٣	٧٩	٩٧		
٤					٦١	٧٦	٩٣			
٥						٩١				

نحصل من الجدول أعلاه على الاحتمالات التالية:

(م، ل) = (١، ١)، وبناءً على ذلك ك= ٣٧ وَ ر = $\frac{ل}{م}$ = ١. أي أن
(أ،ب،جـ) = (٣٧،٣٧،٣٧)

(م، ل) = (١،١٠)، وبناءً على ذلك ك= ١ وَ ر = $\frac{ل}{م}$ = ١٠. أي أن
(أ،ب،جـ) = (١،١٠،١٠٠)

(م، ل) = (٣، ٤)، وبناءً على ذلك ك = ٣ وَ ر = $\frac{ل}{م} = \frac{٤}{٣}$. أي أن
(أ،ب،جـ) = (٢٧،٣٦،٤٨)

الحالة الثانية: م > ل.

بملاحظة التناظر بين ل وَ م نحصل على

(م، ل) = (١٠، ١)، وبناءً على ذلك ك= ١ وَ ر = $\frac{ل}{م} = \frac{١}{١٠}$. أي أن
(أ،ب،جـ) = (١٠٠،١٠،١)

(م، ل) = (٤، ٣)، وبناءً على ذلك ك= ٣ وَ ر = $\frac{ل}{م} = \frac{٣}{٤}$. أي أن
(أ،ب،جـ) = (٤٨،٣٦،٢٧)

بذلك يكون عدد الثلاثيات التي تحقق الشروط المعطاة ٥.

الســـــؤال السابع عشر:

عدد الحلول الحقيقية للمعادلة

$$\left\lfloor \frac{س}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{س}{٣} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{س}{٥} \right\rfloor = س$$

هو

أ) ١٠
ب) ٢٠
ج) ٣٠
د) ٤٠
هـ) لانهائي

الحـــــل:

هل يمكن أن يكون العدد الحقيقي س = أ الذي يحقق المعادلة غير صحيح؟ لاحظ أن الطرف الأيمن عدد صحيح وبالتالي يجب أن يكون س عدداً صحيحاً. لاحظ أن ٢×٣×٥ = ٣٠، وأنه يوجد عددان صحيحان خ وَ ب، حيث ٠ ≤ ب < ٣٠، وَ أ = ٣٠ خ + ب. من ذلك نحصل على

$$\left\lfloor \frac{\text{أ}}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{أ}}{٣} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{أ}}{٥} \right\rfloor = \text{أ} \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{٣٠\text{خ} + \text{ب}}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{٣٠\text{خ} + \text{ب}}{٣} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{٣٠\text{خ} + \text{ب}}{٥} \right\rfloor = ٣٠\text{خ} + \text{ب}$$

$$\Leftrightarrow ٣١\text{خ} + \left\lfloor \frac{\text{ب}}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{ب}}{٣} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{ب}}{٥} \right\rfloor = ٣٠\text{خ} + \text{ب} \Leftrightarrow \text{خ} = \text{ب} - \left\lfloor \frac{\text{ب}}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{ب}}{٣} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{ب}}{٥} \right\rfloor$$

نستنتج من ذلك أنه لكل قيمة من قيم ب ∋ {٠، ١، ...، ٢٩} توجد قيمة وحيدة من قيم خ، وبالتالي قيمة وحيدة من قيم أ التي تحقق المعادلة المعطاة. بذلك يكون هناك ٣٠ حلاً للمعادلة المعطاة.

الســــــؤال الثامن عشر:

لنفرض أن ن وَ م عددان فرديان موجبان وأن ن > م. أكبر عدد صحيح يقسم جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة ن² − م² هو

الحـــــل:

ليكن ن = ٢ر + ١ وَ م = ٢هـ + ١ حيث ر وَ هـ عددان كليان وَ ر > هـ. إذن

$$\text{ن}^{٢} - \text{م}^{٢} = (٢\text{ر} + ١)^{٢} - (٢\text{هـ} + ١)^{٢} = ٤(\text{ر} - \text{هـ})(\text{ر} + \text{هـ} + ١)$$

ماذا تلاحظ على العدد (ر − هـ)(ر + هـ + ١)؟ إذا كان ر − هـ عدداً فردياً فإن ر + هـ + ١ عدد زوجي، أما إذا كان ر − هـ عدداً زوجياً فإن ر + هـ + ١ عدد فردي؛ أي أن (ر − هـ)(ر + هـ + ١) عدد زوجي في كلتا الحالتين. نستنتج من ذلك أن ن² − م² = ٤(ر − هـ)(ر + هـ + ١) يقبل القسمة على ٤×٢ = ٨ بدون باقي.
لاحظ هنا أن ٨ هو أكبر عدد صحيح يقسم جميع الأعداد ن² − م²، لأنه إذا أخذنا ن = ٣ وَ م = ١ فإن ن² − م² = ٨.

الســـــــؤال التاسع عشر:

ما هو عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن ١٠٠٠ وليست من مضاعفات أي من العددين ٥ وَ ٧؟

الحــــــل:

ما هو عدد مضاعفات أي عدد صحيح موجب م في المتتابعة ١، ٢، ...، ن؟ بإمكانك التحقق أن هذا العدد هو

$\left\lfloor \frac{\text{ن}}{\text{م}} \right\rfloor$، حيث $\lfloor \text{س} \rfloor$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي س

إذن، عدد مضاعفات العدد ٥ التي تقل عن ١٠٠٠ هو $\left\lfloor \frac{٩٩٩}{٥} \right\rfloor = ١٩٩$، وعدد مضاعفات العدد ٧ التي تقل عن ١٠٠٠ هو $\left\lfloor \frac{٩٩٩}{٧} \right\rfloor = ١٤٢$.

لاحظ أن مضاعفات العدد $٣٥ = ٥ \times ٧$ التي تقل عن ١٠٠٠، وعددها $\left\lfloor \frac{٩٩٩}{٣٥} \right\rfloor = ٢٨$، قد تكررت مرة ضمن مضاعفات ٥ ومرة أخرى ضمن مضاعفات ٧.

بذلك يكون عدد مضاعفات ٥ أو ٧ التي تقل عن ١٠٠٠ هو

$$١٩٩ + ١٤٢ - ٢٨ = ٣١٣$$

أي أن العدد المطلوب هو

$$٩٩٩ - ٣١٣ = ٦٨٦$$

الســـــــؤال العشرون:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب ن بحيث يكون مجموع الأرقام في خانات العدد ٧ن أقل ما يمكن.

الحــــــل:

لكل عدد صحيح موجب ك نعرّف $\text{م}(\text{ك})$ كمجموع الأرقام في خانات العدد ك.

هل يمكن أن يكون $\text{م}(٧\text{ن}) = ١$؟ هل يمكن أن يكون $\text{م}(٧\text{ن}) = ٢$؟

لاحظ أنه إذا كان $\text{م}(٧\text{ن}) = ١$، فإن $٧\text{ن} = ١٠^{\text{ل}} = ٢^{\text{ل}} \times ٥^{\text{ل}}$، $\text{ل} \geq ٠$، ولكن هذا مستحيل لأن ٧ عدد أولي وَ $٧ \nmid ٢^{\text{ل}}$، $٧ \nmid ٥^{\text{ل}}$ $\forall \text{ل} \geq ٠$.

إذا كان $م(٧ن) = ٢$، فهناك احتمالان

الاحتمال الأول: $٧ن = ٢ × ١٠^{ل} = ٢^{ل+١} × ٥^{ل}$، $ل ≥ ٠$، وهذا مستحيل كما بينا أعلاه.

الاحتمال الثاني: $٧ن = ١٠^{ك} + ١٠^{ل} = ١٠^{ك}(١ + ١٠^{ل-ك}) = (٢^{ك} × ٥^{ك})(١ + ١٠^{ل-ك})$، $٠ ≤ ك < ل$. في هذه الحالة، وحيث أن $٢ \nmid ٧$ وَ $٥ \nmid ٧$، فإن $ن = ١٠^{ك} × ب$، حيث ب عدد صحيح موجب. بذلك نحصل على

$$٧ × ١٠^{ك} × ب = ١٠^{ك}(١ + ١٠^{ل-ك})$$
$$٧ب = ١ + ١٠^{ل-ك}$$

لاحظ أن $١١ = ١ + ١٠^{١}$ وَ $١٠١ = ١ + ١٠^{٢}$ ليسا من مضاعفات ٧، بينما

$$١ + ١٠^{٣} = ١٠٠١ = ٧ × ١٤٣$$

نستنتج أن $ن = ١٤٣$ هو العدد المطلوب (لاحظ أن $ل = ٣$ وَ $ك = ٠$).

السـؤال الحادي والعشرون:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب $ن ≤ ٦$ بحيث توجد مثلثات قائمة، باقي قسمة أطوال أضلاعها على ن يساوي ٤ وَ ٥ وَ ٦.

الحـل:

ليكن عندنا مثلث قائم تحقق أطوال أضلاعه س،ص،ع الشرط المطلوب، أي أن

$$س = كن + ٤$$
$$ص = لن + ٥$$
$$ع = من + ٦$$

حيث ك،ل،م أعداد صحيحة موجبة.

الحالة الأولى: س هو طول الوتر. في هذه الحالة

$$س^{٢} = ص^{٢} + ع^{٢}$$
$$(كن + ٤)^{٢} = (لن + ٥)^{٢} + (من + ٦)^{٢}$$
$$(ك^{٢} - ل^{٢} - م^{٢})ن^{٢} + (٨ك - ١٠ل - ١٢م)ن = ٤٥$$

إذن، $ن \mid ٤٥$، وبما أن $ن ≤ ٦$، فإن $ن ∈ \{٩، ١٥، ٤٥\}$.

الحالة الثانية: ص هو طول الوتر. في هذه الحالة

$$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}$$
$$(\text{ل}\,\text{ن} + ٥)^{٢} = (\text{ك}\,\text{ن} + ٤)^{٢} + (\text{م}\,\text{ن} + ٦)^{٢}$$
$$(\text{ل}^{٢} - \text{ك}^{٢} - \text{م}^{٢})\,\text{ن}^{٢} + (١٠\text{ل} - ٨\text{ك} - ١٢\text{م})\,\text{ن} = ٢٧$$

إذن، $\text{ن} \mid ٢٧$، وبما أن $\text{ن} \geq ٦$، فإن $\text{ن} \in \{٩، ٢٧\}$.

الحالة الثالثة: ع هو طول الوتر. في هذه الحالة

$$\text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$
$$(\text{م}\,\text{ن} + ٦)^{٢} = (\text{ك}\,\text{ن} + ٤)^{٢} + (\text{ل}\,\text{ن} + ٥)^{٢}$$
$$(\text{م}^{٢} - \text{ك}^{٢} - \text{ل}^{٢})\,\text{ن}^{٢} + (١٢\text{م} - ٨\text{ك} - ١٠\text{ل})\,\text{ن} = ٥$$

إذن، $\text{ن} \mid ٥$، ولكن هذا مستحيل لأن $\text{ن} \geq ٦$.

بذلك تكون لدينا ٤ قيم محتملة للعدد ن وهي عناصر المجموعة $\{٩، ١٥، ٢٧، ٤٥\}$.
العدد المطلوب هو أصغر هذه الأعداد أي $\text{ن} = ٩$.

هل يمكنك الجزم أن $\text{ن} = ٩$ هو العدد المنشود؟ لاحظ أنه لا بد من أن نتأكد من وجود مثلث قائم تحقق أطوال أضلاعه الشروط المطلوبة:

بما أن $\text{س} \equiv ٤ \pmod{٩}$، $\text{ص} \equiv ٥ \pmod{٩}$، $\text{ع} \equiv ٦ \pmod{٩}$، فإن أحد الاحتمالات الممكنة هي
$$\text{س} = ٤٠، \text{ص} = ٣٢، \text{ع} = ٢٤$$
لاحظ أن
$$(٤٠)^{٢} = (٣٢)^{٢} + (٢٤)^{٢}$$

الســــــؤال الثاني والعشرون:

لتكن $\text{سـ} = \{١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، \ldots\}$ مجموعة مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة. أوجد العنصر هـ في هذه المجموعة بحيث يكون هـ + ٤٣ أيضاً عنصراً في سـ.

الحـــــل:

ماذا يعني كون هـ وَ هـ + ٤٣ في سـ؟ بشكل مبسط، يعني هذا أن ٤٣ فرق بين مربعين.

ليكن $\text{هـ} = \text{س}^{٢}$ و $\text{هـ} + ٤٣ = \text{ص}^{٢}$، حيث س، ص عددان صحيحان موجبان. بما أن
$$٤٣ = \text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢} = (\text{ص} - \text{س})(\text{ص} + \text{س})$$

وحيث أن ٤٣ عدد أولي، فإننا نستنتج أن ص − س = ١ وَ ص + س = ٤٣. بحل المعادلتين

$$\text{ص} - \text{س} = ١$$
$$\text{ص} + \text{س} = ٤٣$$

نحصل على ص = ٢٢ وَ س = ٢١. وللتحقق من ذلك نلاحظ أن $٢١^{٢} + ٤٣ = ٢٢^{٢}$، أي أن

$$\text{هـ} = ٢١^{٢} = ٤٤١$$

السـؤال الثالث والعشرون:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب بحيث لو حذفنا أول رقم منه على اليسار ينتج عدد يساوي حاصل قسمة العدد الأصلي على ٢٩.

الحـل:

لنفرض أن س تمثل الرقم الأول من اليسار للعدد ولنفرض أيضاً أن ص هو العدد المتبقي بعد حذف س.
نستطيع كتابة العدد الأصلي على صورة $\text{س} \times ١٠^{\text{ن}} + \text{ص}$ حيث ن عدد صحيح موجب. الآن

$$\text{س} \times ١٠^{\text{ن}} + \text{ص} = ٢٩\text{ص}$$
$$\text{س} \times ١٠^{\text{ن}} = ٢٨\text{ص}$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر يقبل القسمة على ٧ بدون باقي. إذن الطرف الأيمن يقبل القسمة على ٧ بدون باقي. لكن ١٠ لا تقبل القسمة على ٧ بدون باقي. إذن العدد س من مضاعفات ٧ ، وبما أن س < ١٠ فإن س = ٧.

بقسمة الطرفين على ٧ نحصل على $١٠^{\text{ن}} = ٤\text{ص}$، أي أن

$$\text{ص} = \frac{١٠^{\text{ن}}}{٤} = ٢٥ \times ١٠^{\text{ن}-٢}\text{، حيث ن} = ٢، ٣، ٤، \ldots$$

من هنا نستنتج أن العدد يجب أن يكون على صورة

$$\text{س} \times ١٠^{\text{ن}} + \text{ص} = ٧ \times ١٠^{\text{ن}} + ٢٥ \times ١٠^{\text{ن}-٢} = ٧٢٥ \times ١٠^{\text{ن}-٢}\text{، حيث ن} = ٢، ٣، ٤، \ldots \quad (*)$$

أصغر هذه الأعداد عندما تكون ن = ٢، أي ٧٢٥. لاحظ هنا أن $\frac{٧٢٥}{٢٩} = ٢٥$ وهو العدد المتبقي بعد حذف الرقم الأيسر ٧.

ملاحظة: يمكن الحصول على بقية الأعداد في (*) التي تحقق نفس الخاصية بإضافة أصفار إلى يمين العدد ٧٢٥.

السـؤال الرابع والعشرون:

أوجد أصغر عدد ن يحقق الشروط التالية:

(١) توجد ٣ قواسم أولية فقط للعدد ن

(٢) ٣٠ | ن
(٣) عدد قواسم ن هو ٢٤
(٤) عدد قواسم $ن^{٢}$ هو ١٠٥
(٥) عدد قواسم $ن^{٣}$ هو ٢٨٠

الحـــــل:

ما هي القواسم الأولية الثلاثة للعدد ن؟ ليكن $ن = أ_{١}^{س} \times أ_{٢}^{ص} \times أ_{٣}^{ع}$، حيث $\{أ_{١}،أ_{٢}،أ_{٣}\}$ مجموعة القواسم الأولية للعدد ن. لاحظ أن ٣٠=٢×٣×٥ ، أي أن $\{أ_{١}،أ_{٢}،أ_{٣}\}=\{٢،٣،٥\}$.

من الشروط (٣) – (٥) نحصل على المعادلات

(س+١)(ص+١)(ع+١) = ٢٤
(٢س+١)(٢ص+١)(٢ع+١) = ١٠٥
(٣س+١)(٣ص+١)(٣ع+١) = ٢٨٠

بعد فك الأقواس نحصل على

(س+ص+ع)+(س ص+ص ع+س ع)+س ص ع = ٢٣
٢(س+ص+ع)+٤(س ص+ص ع+س ع)+٨س ص ع = ١٠٤
٣(س+ص+ع)+٩(س ص+ص ع+س ع)+٢٧س ص ع = ٢٧٩

بتعويض

ك=س+ص+ع ، ل=س ص+ص ع+س ع، م=س ص ع

نحصل على

ك+ل+م = ٢٣
٢ك+٤ل+٨م = ١٠٤
٣ك+٩ل+٢٧م = ٢٧٩

بضرب المعادلة الأولى في –٢ وإضافتها للمعادلة الثانية، ثم ضرب المعادلة الأولى في –٣ وإضافتها للمعادلة الثالثة نحصل على المعادلتين

٢ل+٦م = ٥٨

٦ل+٢٤م = ٢١٠

نجد حلول هاتين المعادلتين بضرب المعادلة الأولى في –٣ وإضافتها للمعادلة الثانية لنحصل على

م=٦، ل=١١، ك=٦

لاحظ أنه توجد ستة ثلاثيات تحقق المعادلة

س+ص+ع=٦

وهي

$$(س،ص،ع)=(١،٢،٣)،\ ن=٢^{١}\times ٣^{٢}\times ٥^{٣}=٢٢٥٠$$
$$(س،ص،ع)=(١،٣،٢)،\ ن=٢^{١}\times ٣^{٣}\times ٥^{٢}=١٣٥٠$$

$$(س،ص،ع)=(٢،١،٣)،\ ن=٢^{٢}\times ٣^{١}\times ٥^{٣}=١٥٠٠$$
$$(س،ص،ع)=(٢،٣،١)،\ ن=٢^{٢}\times ٣^{٣}\times ٥^{١}=٥٤٠$$

$$(س،ص،ع)=(٣،١،٢)،\ ن=٢^{٣}\times ٣^{١}\times ٥^{٢}=٦٠٠$$
$$(س،ص،ع)=(٣،٢،١)،\ ن=٢^{٣}\times ٣^{٢}\times ٥^{١}=٣٦٠$$

بذلك يكون $ن=٣٦٠$ هو العدد المطلوب.

السـؤال الخامس والعشرون:

لأي عدد طبيعي $ن$ نعرف الدالة

$$د(ن)=\left\lfloor\frac{ن+١}{٢}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{ن+٢}{٤}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{ن+٤}{٨}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{ن+٢^{ر}}{٢^{ر+١}}\right\rfloor+\cdots \qquad (*)$$

حيث $\lfloor م\rfloor$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي $م$. أوجد $د(٩٩٩)$.

الحـــل:

لاحظ أولاً أنه لأي عدد حقيقي $س$ فإن

$$\left\lfloor س+\frac{١}{٢}\right\rfloor=\lfloor ٢س\rfloor-\lfloor س\rfloor \qquad (**)$$

هل يمكنك إثبات ذلك؟

لإثبات ذلك نكتب $س$ على صورة كسر عشري مقرب إلى خانة عشرية واحدة: $س=أ,ب$ حيث تمثل $ب$ الجزء العشري وتمثل $أ$ الجزء الصحيح للعدد $س$. إذا كان $ب\geq ٥$ فان الطرف الأيمن للمعادلة (**) يساوي $\lfloor س\rfloor+١$ ويكون الطرف الأيسر

$$\lfloor ٢س\rfloor-\lfloor س\rfloor=(٢\lfloor س\rfloor+١)-\lfloor س\rfloor=\lfloor س\rfloor+١$$

وهو نفس قيمة الطرف الأيمن.

أما إذا كان $ب<٥$ فان الطرف الأيمن للمعادلة (**) يساوي $\lfloor س\rfloor$ ويكون الطرف الأيسر

$$\lfloor ٢س\rfloor-\lfloor س\rfloor=٢\lfloor س\rfloor-\lfloor س\rfloor=\lfloor س\rfloor$$

وهو نفس قيمة الطرف الأيمن.

الآن

$$د(ن) = \left\lfloor \frac{ن+١}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{ن+٢}{٤} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{ن+٤}{٨} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{ن+٢^{ن-١}}{٢^{ن}} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{ن}{٢} + \frac{١}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{ن}{٤} + \frac{١}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{ن}{٨} + \frac{١}{٢} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{ن}{٢^{ن}} + \frac{١}{٢} \right\rfloor$$

$$= \left(\lfloor ن \rfloor - \left\lfloor \frac{ن}{٢} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{ن}{٢} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{ن}{٤} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{ن}{٤} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{ن}{٨} \right\rfloor \right) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{ن}{٢^{ن-١}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{ن}{٢^{ن}} \right\rfloor \right)$$

$$= \lfloor ن \rfloor - \left\lfloor \frac{ن}{٢^{ن}} \right\rfloor$$

من هنا نستنتج أن

$$د(٩٩٩) = \lfloor ٩٩٩ \rfloor - \left\lfloor \frac{٩٩٩}{٢^{٩٩٩}} \right\rfloor = ٩٩٩$$

الســــــؤال السادس والعشرون:

أوجد جميع الأعداد الأولية على صورة $ن^{ن}+١$ والتي تقل عن $١٠^{١٩}$.

الحــــــل:

هل يمكنك الحصول على بعض هذه الأعداد الأولية؟

لاحظ أولاً أنه عندما $ن=١$ أو $ن=٢$، فإننا نحصل على العددين الأوليين ٢ وَ ٥ على الترتيب. أما إذا كانت $ن=١$، فإننا نحصل على $٣^{٣}+١=٢٨$ وهو عدد غير أولي. هل توجد أعداد أولية عدا ٢ وَ ٥ يمكن كتابتها على صورة $ن^{ن}+١$؟

لاحظ أنه لكل عدد فردي $ل \geq ٣$:

$$\begin{aligned} س^{ل}+١ &= (س+١)(س^{ل-١} - س^{ل-٢} + س^{ل-٣} - س^{ل-٤} + \cdots + ١) \\ &= (س+١)\left((س^{ل-١} - س^{ل-٢}) + \cdots + (س^{٢} - س) + ١\right) \end{aligned} \qquad (*)$$

ليكن $ن^{ن}+١$ عدداً أولياً حيث $ن \geq ٣$. نلاحظ أنه ليس لـِ $ن$ أي قاسم فردي لأن ذلك سيجعل العدد $ن^{ن}+١$ قابلاً للتحليل كما هو مبين في (*)، أي أن $ن=٢^{ر}$. ملاحظة أخيرة هنا أن الأس $ر$ أيضاً ليس له قاسم فردي، لأنه إذا كانت $ر=مع$ حيث $م$ عدد فردي فإن $ن^{ن} = \left(٢^{ر}\right)^{٢^{ر}} = (٢^{مع})^{٢^{مع}} = ٢^{مع \times ٢^{مع}} = \left(٢^{ع \times ٢^{مع}}\right)^{م}$. ومن ذلك يكون $ن^{ن}+١$ عدداً قابلاً للتحليل كما هو

مبين في (*). إذن، يجب أن تكون $م$ على صورة $٢^{هـ}$. إذن العدد $ن$ يجب أن يكون على صورة $ن = ٢^{٢^{هـ}}$ أي أن

$$ن^{ن}+١=\left(٢^{٢^{هـ}}\right)^{(٢^{٢^{هـ}})}+١\text{، حيث } هـ \ge ٠$$

إذا كانت $هـ = ٠، ١، ٢$ فإنها تعطي الأعداد الأولية ٥، ٢٥٧، $١٦^{١٦}+١$ على التوالي. ولكن العدد

$$
\begin{aligned}
١٦^{١٦}+١ &= ٢^{٦٤}+١\\
&= ٢^{٤}\times ٢^{٦٠}+١\\
&= ١٦\times(٢^{١٠})^{٦}+١\\
&= ١٦\times(١٠٢٤)^{٦}+١\\
&> ١٠\times(١٠٠٠)^{٦}+١\\
&> ١٠^{١٩}
\end{aligned}
$$

إذن الأعداد المطلوبة هي ٢، ٥، ٢٥٧.

الســـــؤال السابع والعشرون:

أثبت أنه لا توجد أية ثلاثة أعداد صحيحة، بحيث يساوي باقي قسمة مجموع مربعاتها على ٨ العدد ٧.

الحـــــل:

هل يمكنك إعادة صياغة المطلوب؟

المطلوب هو إثبات العبارة التالية:

لا توجد حلول مكونة من أعداد صحيحة للمعادلة

$$س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}=٨ل+٧ \qquad (*)$$

حيث $ل$ عدد صحيح. من الواضح أنه لا توجد حلول صحيحة للمعادلة (*) إذا كانت $ل\le ٠$. لذلك نفرض أن $ل\ge ١$.

الحالة الأولى: يوجد عدد زوجي واحد فقط بين الأعداد $س، ص، ع$. افرض دون فقدان التعميم أن

$$س=٢أ، ص=٢ب+١، ع=٢جـ+١\text{، حيث } أ، ب، جـ \in ص$$

نحصل في هذه الحالة على

$$
\begin{aligned}
٨ل+٧ &= س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}\\
&= (٢أ)^{٢}+(٢ب+١)^{٢}+(٢جـ+١)^{٢}\\
&= ٤\,(أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+ب+جـ)+٢
\end{aligned}
$$

وهذا تناقض، لأن $٨ل+٧\equiv ٣ \;\|٤\|$، بينما $٤\,(أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+ب+جـ)+٢\equiv ٢ \;\|٤\|$.

الحالة الثانية: يوجد عددان زوجيان فقط بين الأعداد $س، ص، ع$. افرض دون فقدان التعميم أن

$\text{س}=2\text{أ}،\ \text{ص}=2\text{ب}،\ \text{ع}=2\text{جـ}+1$، حيث $\text{أ}،\text{ب}،\text{جـ}\in\text{ص}$

نحصل في هذه الحالة على

$$\begin{aligned} 8\text{ل}+7 &= \text{س}^2+\text{ص}^2+\text{ع}^2 \\ &= (2\text{أ})^2+(2\text{ب})^2+(2\text{جـ}+1)^2 \\ &= 4(\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2+\text{جـ})+1 \end{aligned}$$

وهذا تناقض، لأن $8\text{ل}+7\equiv 3\ \|4\|$، بينما $4(\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2+\text{جـ})+1\equiv 1\ \|4\|$.

الحالة الثالثة: جميع الأعداد $\text{س}،\text{ص}،\text{ع}$ زوجية، ولنفرض أن

$\text{س}=2\text{أ}،\ \text{ص}=2\text{ب}،\ \text{ع}=2\text{جـ}$، حيث $\text{أ}،\text{ب}،\text{جـ}\in\text{ص}$

نحصل في هذه الحالة على

$$\begin{aligned} 8\text{ل}+7 &= \text{س}^2+\text{ص}^2+\text{ع}^2 \\ &= (2\text{أ})^2+(2\text{ب})^2+(2\text{جـ})^2 \\ &= 4(\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2) \end{aligned}$$

وهذا تناقض، لأن $8\text{ك}+7\equiv 3\ \|4\|$، بينما $4\left(\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2\right)\equiv 0\ \|4\|$.

السـؤال الثامن والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٧١):

أثبت أن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي يمكن كتابتها على صورة $2^{\text{ن}}-3$، حيث $\text{ن}=2،3،\cdots$ تحتوي على مجموعة جزئية لانهائية كل عنصرين من عناصرها أوليان فيما بينهما.

الحـــل:

لاحظ أنه إذا كانت $\text{ن}=3،4،5$ فإن $2^{\text{ن}}-3$ تساوي $5،13،29$ على التوالي، وهي أعداد أولية.
لاحظ أيضاً أنه إذا كانت $\text{ن}=7$ فإن $2^7-3=125$ وهو عدد مؤلّف له قاسم مشترك مع العدد ٥.

لنفرض أننا وجدنا الأعداد الفردية $\text{أ}_1،\text{أ}_2،\cdots،\text{أ}_{\text{ك}}$ والتي تحقق الشرط المطلوب. نعرّف العدد

$$\text{هـ}=\text{أ}_1\times\text{أ}_2\times\cdots\times\text{أ}_{\text{ك}}$$

ونأخذ الأعداد $2^0،2^1،2^2،\cdots،2^{\text{هـ}}$. بما أن عددها $\text{هـ}+1$، فعند قسمتها على العدد هـ يكون هناك على الأقل عددان منها لهما نفس الباقي (حسب مبدأ برج الحمام). ليكن هذان العددان $2^{\text{م}}$ وَ $2^{\text{ر}}$ حيث $\text{م}>\text{ر}$. الآن العدد

$$2^{\text{م}}-2^{\text{ر}}=2^{\text{ر}}\left(2^{\text{م}-\text{ر}}-1\right)$$

يقسم على هـ بدون باقي، وبما أن العدد هـ فردي لأنه حاصل ضرب أعداد فردية، فإن العدد هـ لا يقسم العدد $2^{\text{ر}}$ بل يقسم العدد $2^{\text{م}-\text{ر}}-1$؛ وهذا يعني أنه يوجد عدد صحيح م حيث $2^{\text{م}-\text{ر}}-1=\text{م}\,\text{هـ}$. الآن نأخذ العدد الجديد

$$\text{أ}_{\text{ك}+1}=4\text{م}\,\text{هـ}+1=4\left(2^{\text{م}-\text{ر}}-1\right)+1=2^{\text{م}-\text{ر}+2}-3$$

وهذا العدد أولاً على صورة $٢^{ن} - ٣$، وثانياً ليس له أي قاسم مشترك (أكبر من ١) مع أيٍّ من الأعداد $أ_{١}، أ_{٢}، \cdots، أ_{ك}$، لأنه لو كان هناك قاسم مشترك مع أيٍّ منها ولنقل مع $أ_{و}$ حيث $(و \leq ك)$ فإن هذا القاسم المشترك سيقسم هـ لأن $هـ = أ_{١} \times أ_{٢} \times \cdots \times أ_{ك}$ ويقسم $٢٤هـ + ١$ لأن $أ_{ك+١} = ٢٤هـ + ١$ وهذا مستحيل لأنه سوف يقسم عندئذ العدد ١. كما نلاحظ أيضاً أن هذا العدد أكبر من الأعداد $أ_{١}، أ_{٢}، \cdots، أ_{ك}$ لأنه أكبر من حاصل ضربها مجتمعة. بهذه الطريقة نستطيع ايجاد عدد لانهائي من هذه الأعداد والتي لها نفس الخاصية.

السـؤال التاسع والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٩٨):

أوجد جميع الأزواج المرتبة $(أ، ب)$ المكوَّنة من عددين صحيحين موجبين أ وَ ب بحيث يقسم العدد $أب^{٢} + ب + ٧$ العدد $أ^{٢}ب + أ + ب$.

الحـل:

ليكن

$$أ^{٢}ب + أ + ب = ك(أب^{٢} + ب + ٧)،$$ حيث ك عدد صحيح موجب.

من ذلك نحصل على

$$ب(أ^{٢}ب + أ + ب) - أ(أب^{٢} + ب + ٧) = بك(أب^{٢} + ب + ٧) - أ(أب^{٢} + ب + ٧)$$

$$ب^{٢} - ٧أ = (بك - أ)(أب^{٢} + ب + ٧)$$

أي أن $ب^{٢} - ٧أ$ من مضاعفات $أب^{٢} + ب + ٧$.

لاحظ أن $ب^{٢} - ٧أ < أب^{٢} + ب + ٧$، وبالتالي فلا يمكن أن يكون $ب^{٢} - ٧أ$ عدداً موجباً.

الحالة الأولى: $ب^{٢} - ٧أ = ٠$، أي أن $ب^{٢} = ٧أ$. حيث أن ٧ عدد أولي، نستنتج أن $٧ \mid ب^{٢}$، ونستنتج من ذلك أن $٧ \mid ب$، أي أن $ب = ٧ل$ حيث ل عدد صحيح موجب. من ذلك نحصل على

$$ب^{٢} = ٧أ، ٤٩ل^{٢} = ٧أ، أ = ٧ل^{٢}$$

بالتعويض نجد أن

$$\begin{aligned} أ^{٢}ب + أ + ب &= ٧ل^{٢} \times ٧ل^{٢} \times ٧ل + ٧ل^{٢} + ٧ل \\ &= ل(٧ل^{٢} \times ٧ل \times ٧ل + ٧ل + ٧) \\ &= ل(أب^{٢} + ب + ٧) \end{aligned}$$

أي أن الأزواج المرتبة التالية تحقق الشرط المطلوب

$(أ، ب) = (٧ل^{٢}، ٧ل)$، حيث ل عدد صحيح موجب.

الحالة الثانية: $ب^2 - 7أ < 0$، أي أن العدد الصحيح الموجب $7أ - ب^2$ من مضاعفات $أب^2 + ب + 7$.
نستنتج من ذلك أنه يوجد عدد صحيح موجب $م$ يحقق المعادلة

$$7أ - ب^2 = م(أب^2 + ب + 7) \quad (*)$$

إذا كانت $ب = 1$، فإننا نحصل من (*) على $7أ - 1 = م(أ + 8)$، أي أن

$$أ = \frac{8م + 1}{7 - م}$$

نستنتج من ذلك أن $1 \le م \le 6$، لأن $م > 7 \Leftarrow أ < 0$.
بتعويض قيم $م$، نجد أن قيم $م$ التي تعطي قيماً صحيحة هي $م = 4$، ومن ذلك $(أ،ب) = (11،1)$، أو $م = 6$، أي أن $(أ،ب) = (49،1)$.

إذا كانت $ب = 2$، فإننا نحصل من (*) على $7أ - 4 = م(4أ + 9)$.

إذا كانت $م = 1$، فإننا نحصل على $3أ = 13$، وهذا تناقض لأنه لا يوجد عدد صحيح يحقق هذا الشرط.

إذا كانت $م \ge 2$، فإننا نحصل على $أ = -\frac{(4 + 9م)}{(7 - 4م)} < 0$، وهذا تناقض.

إذا كانت $ب \ge 3$، فإن $7أ - ب^2 < 9أ < أب^2 + ب + 7$، وهذا تناقض.

نستنتج أن مجموعة الحل هي

$$\{(11،1)،(49،1)،(7ل^2، 7ل) \mid ل \in ط\}$$

الســـــــؤال الثلاثون (أولمبياد الرياضيات العالمي 2006):

أوجد جميع الأزواج المرتبة $(س،ص)$ المكونة من عددين صحيحين $س،ص$ يحققان المعادلة

$$ص^2 = 1 + 2^س + 2^{(2س+1)}$$

الحـــــل:

في البداية، نستثني ما يمكن استثناؤه من المجموعة الكلية التي تنتمي إليها الحلول. في المسألة المعطاة، من الواضح انه يجب استبعاد إمكانية $س < 0$، حيث أن $س < -1$ تجعل العدد في الطرف الأيسر غير صحيح، وبالتالي يتعذر على $ص$ أن تكون عدداً صحيحاً، أما إذا كانت $س = -1$، فإننا نحصل على $ص^2 = 2$ ولا يمكن أن تكون $ص$ عدداً صحيحاً. إذن، يمكننا افتراض أن $س \ge 0$. كما يمكننا استبعاد $ص = 1$ وَ $ص = -1$ لأن قيمة الطرف الأيسر أكبر من 1 لجميع قيم $س$.

ندرس أي تناظر محتمل في المعادلة المعطاة. بالرغم من أن وجود تناظر في المسألة هو أمر غير وارد في كثير من الأحيان، إلا أن وجود أي نوع من أنواع التناظر في مسألة ما يوفر غالباً الجهد والوقت المبذول في حل المسألة. نلاحظ في المسألة أعلاه أن ثمة تناظراً مصدره المتغير ص الموجود على شكل مربع كامل فقط، أي أن استبدال $-\text{ص}$ بـ ص لا يغير المعادلة، وبالتالي إذا حقق زوج مرتب (س،ص) المعادلة، فإن الزوج المرتب (س،$-$ص) يحقق المعادلة أيضاً.

نعامل الحالات الخاصة والتي غالباً ما تمكننا من إيجاد حلول جزئية بشكل سهل نسبياً. في المعادلة أعلاه، تعتبر الحالة س=٠ حالة خاصة تعطينا $\text{ص}^{٢}=٤$ أي أن ص$=\mp٢$. لاحظ أننا اعتبرنا $٢^{٠}=١$، وهو أمر متفق عليه رياضياً.

نستثني الحالات الخاصة التي سبق التعامل معها. في المسألة قيد الحل، يمكننا الآن اعتبار س≥١ و (بدون فقدان التعميم) ص $\geq$ ٣. (لاحظ أننا استثنينا ص=١، كما أنه يمكننا الحصول على الحلول التي فيها ص سالبة من خلال التناظر الذي تقدم ذكره).

من المفيد أحيانا إعادة ترتيب المعادلات الواردة في المسألة مما قد يسهل التعامل معها. في المسألة المعطاة نعيد ترتيب المعادلة لتصبح

$$\text{ص}^{٢}-١=٢^{\text{س}}(١+٢^{\text{س}+١}) \qquad (*)$$

بتحليل الطرف الأيمن كفرق بين مربعين نحصل على

$$(\text{ص}-١)(\text{ص}+١)=٢^{\text{س}}(١+٢^{\text{س}+١}) \qquad (**)$$

نستعمل الآن مهاراتنا الرياضية المكتسبة (وأية قوانين يمكن تطبيقها) لإيجاد صيغة عامة للحل. نلاحظ أن العدد في الطرف الأيسر زوجي مما يعني أن ص عدد فردي، وبالتالي فإنه بإمكاننا كتابته على النحو التالي: ص$=٢\text{ن}+١$، حيث ن عدد صحيح موجب (لاحظ الفرض ص>١).
حيث أن ٤ تقسم طرفي المعادلة (**)، فإن س≥٢، وبما أن س=٢ لا تعطي أية حلول فيمكننا الافتراض أن س≥٣.

الحالة الأولى: ن عدد زوجي. نلاحظ في هذه الحالة أن $٤ \mid \text{ص}-١$ بينما $٤ \nmid \text{ص}+١$. نستنتج أيضاً أن ص-١ يمكنه أن يكون مضاعفاً للعدد $٢^{\text{س}-١}$ ولكن ليس للعدد $٢^{\text{س}}$: إذا كان ص$-١=\text{ك}٢^{\text{س}}$، حيث ك عدد صحيح موجب، فإننا نحصل من (**) على

$$\text{ك}٢^{\text{س}}(\text{ص}+١)=٢^{\text{س}}(١+٢^{\text{س}+١})$$
$$\text{ك}(\text{ص}+١)=١+٢^{\text{س}+١}$$

وهذا تناقض، لأن ص$+١$ عدد زوجي بينما $١+٢^{\text{س}+١}$ عدد فردي.

الحالة الثانية: ن عدد فردي. نلاحظ في هذه الحالة أن $٤ \mid \text{ص}+١$ بينما $٤ \nmid \text{ص}-١$. نستنتج أيضاً أن ص$+١$ يمكنه أن يكون مضاعفاً للعدد $٢^{\text{س}-١}$ ولكن ليس للعدد $٢^{\text{س}}$ (الإثبات مشابه للإثبات في الحالة الأولى ولذلك لا داعي لإعادته).

يمكننا الآن أن نجد صيغة عامة للعدد ص:

$$\text{ص}=\text{ل}\,٢^{\text{س}-١}+\text{م}،\ \text{حيث ل عدد صحيح موجب فردي و}\ \text{م}=\pm١$$

نعوض الصيغة العامة للمتغير ص في المعادلة (*) لنحصل على

$$
\begin{aligned}
٢^{\text{س}}\left(١+٢^{\text{س}+١}\right) &= \text{ص}^{٢}-١\\
&= \left(\text{ل}\,٢^{\text{س}-١}+\text{م}\right)^{٢}-١\\
&= \text{ل}^{٢}\times ٢^{٢\text{س}-٢}+\text{ل}\,\text{م}\,٢^{\text{س}}+\left(\text{م}^{٢}-١\right)\\
&= ٢^{\text{س}}\left(\text{ل}^{٢}\,٢^{\text{س}-٢}+\text{ل}\,\text{م}\right)
\end{aligned}
$$

باختصار $٢^{\text{س}}$ وإعادة ترتيب المعادلة نحصل على

$$\left(\text{ل}^{٢}-٨\right)\times ٢^{\text{س}-٢}=١-\text{ل}\,\text{م} \qquad (***)$$

نقسم الحل إلى حلول جزئية إن أمكن، مع ملاحظة ضرورة رفض أية نتائج غير منطقية أو تلك التي تسبب تناقضاً.

الحالة الأولى: $\text{م}=١$. بالتعويض في (***) نجد (مع ملاحظة افتراضنا أن ل عدد صحيح موجب فردي) أن

$$
\begin{aligned}
&\left(\text{ل}^{٢}-٨\right)\times ٢^{\text{س}-٢}=١-\text{ل}\le ٠.\\
&\text{ل}^{٢}-٨\le ٠.\\
&\text{ل}=١\\
&-٧\times ٢^{\text{س}-٢}=٠.
\end{aligned}
$$

وهذا تناقض.

الحالة الثانية: $\text{م}=-١$. بالتعويض في (***)، نجد (مع ملاحظة افتراضنا أن **ل** عدد صحيح موجب فردي) أن

$$
\begin{aligned}
&\text{ل}^{٢}-٨\le\left(\text{ل}^{٢}-٨\right)\times ٢^{\text{س}-٢}=١+\text{ل}\\
&\text{ل}\left(\text{ل}-١\right)\le ٩
\end{aligned}
$$

من ذلك نستنتج أن $\text{ل}=١$، وهي قيمة مرفوضة لأنها تؤدي إلى التناقض $٢=-٧\times ٢^{\text{س}-٢}$، أو $\text{ل}=٣$ التي نحصل بتعويضها في (***) على $٤=٢^{\text{س}-٢}$، أي أن $\text{س}=٤$.

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على $\text{ص}^{٢}=٥٢٩$، أي أن $\text{ص}=٢٣$ (لاحظ الفرض $\text{ص}\le ٣$).

نوضح الحل الكامل بتجميع الحلول الجزئية، مع الحرص على عدم التكرار، وعدم نسيان الحلول الناتجة من الحالات الخاصة، وعدم إغفال الحلول الناتجة عن وجود تناظر ما. نستنتج أن مجموعة الحل هي

$$\left\{(٠،٢)،(٠،-٢)،(٤،٢٣)،(٤،-٢٣)\right\}$$

ملاحظة: قد يدور في ذهن البعض أن بالإمكان إيجاد مجموعة الحل هذه بالتجريب فقط، لاسيما أن أقصى قيمة للإحداثي الأول س هي ٤ كما هو واضح من مجموعة الحل.

إن مما يجب فهمه للرد على هذا التساؤل (المشروع) هو أن تجربة بعض الأرقام فقط قد تؤدي إلى إيجاد بعض الحلول أو حتى كامل مجموعة الحل (بالصدفة)، ولكن لا يمكن لمن قام بتجربة الأرقام فقط أن يزعم أن ما حصل عليه يمثل مجموعة الحل الكاملة دون إثبات.