الفصل الرابع

المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها الاحتمالية

Random Variables and their Probability Distributions

(٤-١) المتغير العشوائي **Random Variable**

تستخدم كلمة تجربة (كما ذكرنا سابقا) لأي إجراء نعلم مسبقا جميع النواتج الممكنة له وإن كنا لا نستطيع أن نتنبأ بأي من هذه النواتج سيتحقق فعلا. ربما لا يكون من الضروري دراسة فئة كل النواتج الممكنة (فراغ العينة) لتجربة إحصائية ولكن يكون اهتمامنا منصبا على قيم رقمية مرتبطة بهذه النواتج الممكنة. إن القيم الممكنة هذه هي ما نعبر عنه بقيم المتغير العشوائى.

تعريف : الدالة المعرفة علي فراغ العينة لتجربة ما والتي تخصص عددا حقيقيا لكل نقطة عينة تسمى المتغير العشوائى.

سوف نستخدم الرمز X ليمثل المتغير العشوائي، x لواحدة من قيمه.

مثال (٤-١) اختيرت بذرتان من نبات مزهر عشوائيا من كيس يحتوى على خمس بذور زهورها حمراء وثلاث بذور زهورها صفراء وذلك لاستخدامها في تجربة معينة. فراغ العينة يكون :

$$S = \{yy, ry, yr, rr\}$$

حيث r ترمز إلى البذرة التي زهورها حمراء، y ترمز إلى البذرة التي زهورها صفراء. بفرض أننا عرفنا الدالة X التي تمثل عدد البذور التي زهورها حمراء في العينة. هذه الدالة سوف تخصص عددا حقيقيا لكل نقطة عينة في فراغ العينة S المرافق لتجربتنا الإحصائية. في الجدول التالي نجد أن كل نقطة في فراغ العينة ارتبطت بعدد حقيقي واحد عن طريق الدالة X.

x	0	1	1	2
نقطة العينة	yy	ry	yr	rr

وعلى ذلك X متغير عشوائي يأخذ القيم 0 , 1 , 2

قد يحتوى فراغ العينة على عدد محدود من النقط كما في المثال السابق، أو قد يكون فراغ العينة لانهائي معدود **countable infinite sample space** وهو الفراغ الذي يحتوى على عدد لانهائي من العناصر لكنه قابل للعد بمعنى أن هناك تقابل بين عناصره وفئة الأعداد الطبيعية ، مثل عدد البكتريا في لتر من الماء النقي أو عدد الفئران في فدان من القمح. يسمى فراغ العينة في هذه الحالة فراغ عينة منفصل (متقطع) **discrete sample space** . المتغير العشوائي المعرف على فراغ عينة منفصل يسمى متغير عشوائي منفصل (متقطع) **discrete random variable** .أيضا إذا كان فراغ العينة يحتوى على عدد لانهائي من النقط **infinite sample space** الغير معدودة مثل كل الأطوال الممكنة ، الأوزان ، درجات الحرارة ،

العمر ٠٠٠الخ فإننا نقول أن فراغ العينة متصل (مستمر) continuous sample space • المتغير العشوائي المعرف على فراغ عينة متصل يسمى المتغير العشوائي المتصل continuous random variable. في معظم التطبيقات المتغيرات العشوائية المنفصلة تمثل بيانات قابلة للعد ، مثل عدد الحوادث في السنة ، عدد الأخطاء في صفحة من قاموس، عدد الفئران في فدان من القمح٠٠٠الخ. أما المتغيرات العشوائية المتصلة فتمثل بيانات مقاسة.

(٤-٢) التوزيعات الاحتمالية المنفصلة (المتقطعة)

Discrete Probability Distributions

كل قيمة من قيم المتغير العشوائي المنفصل يفرض لها احتمال ففي مثال (٤ -١) تحسب الاحتمالات المختلفة لقيم المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد البذور التي زهورها حمراء في العينة (إذا كان الاختيار بدون إرجاع) كالتالي :-

$$P(X=0)=P(yy)=(\frac{3}{8})(\frac{2}{7})=\frac{6}{56},$$

$$P(X=1)=P(ry)+P(yr)$$

$$=(\frac{5}{8})(\frac{3}{7})+(\frac{3}{8})(\frac{5}{7})=\frac{30}{56},$$

$$P(X=2)=P(rr)=(\frac{5}{8})(\frac{4}{7})=\frac{20}{56}.$$

القيم المختلفة للمتغير العشوائي X مع احتمالاتها معطاة في الجدول التالي :-

x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{6}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{20}{56}$

مجموع الاحتمالات في الجدول السابق تساوى الواحد الصحيح.

مثال (٤-٢) المطلوب الاحتمالات المختلفة لقيم المتغير العشوائي X في مثال (٤-١) إذا كان الاختيار بإرجاع :-

الحل.

$$P(X=0)=P(yy)=(\frac{3}{8})(\frac{3}{8})=\frac{9}{64},$$

$$P(X=1)=P(ry)+P(yr)$$

$$=(\frac{5}{8})(\frac{3}{8})+(\frac{3}{8})(\frac{5}{8})=\frac{30}{64},$$

$$P(X=2)=P(rr)=(\frac{5}{8})(\frac{5}{8})=\frac{25}{64}.$$

القيم المختلفة للمتغير العشوائي X مع احتمالاتها معطاة في الجدول التالي :-

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{25}{64}$

عادة يفضل تمثيل كل احتمالات المتغير العشوائي **X** بصيغة. هذه الصيغة من الضروري أن تكون دالة في القيم الرقمية **x** . سوف نرمز للدالة بواحدة من الصيغ $f(x), g(x), h(x)$ ...الخ . وعلى ذلك يمكن كتابة $f(x) = P(X = x)$ ، فعلى سبيل المثال $f(2) = P(X = 2)$. الفئة من الأزواج المرتبة $(x , f(x))$ تسمى دالة الاحتمال **probability function** أو التوزيع الاحتمالي **probability distribution** للمتغير العشوائي **X**.

تعريف : كل جدول أو صيغة تعطى جميع القيم التي يأخذها متغير العشوائي منفصل، مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيع احتمالي منفصل.

مثال (٤-٣) إذا ألقيت عملة مرة واحدة وكان **X** متغير عشوائي حيث $x = 1$ إذا كانت النتيجة صورة و $x = 0$ إذا كانت النتيجة كتابة. في هذه الحالة يمكن وضع صيغة للدالة $f(x)$ الخاصة بالمتغير العشوائي X على الشكل :-

$$f(x) = \frac{1}{2}\ ,\ x = 0\ ,\ 1.$$

مثال (٤-٤) أوجد صيغة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي **X** الذي يمثل عدد الصور التي تظهر عند إلقاء خمس عملات مرة واحدة ؟

الحل. عدد النقط في فراغ العينة سوف يكون 2^5 . (الأحداث متساوية في إمكانية الحدوث). المقام لجميع الاحتمالات سوف يكون 32 . لإيجاد عدد الطرق للحصول على **x** من الصور عند إلقاء **5** عملات مرة واحدة فإننا نحتاج لمعرفة العدد الكلى لنقاط العينة في التجربة والتي تعطى **x** صور و **n-x** كتابة وهذا يساوى عدد الطرق لتبديل **n** من العناصر منها **x** من نوع (صورة) و **n-x** من نوع آخر (كتابة) ، وهذا يحدث بطرق عددها $\binom{5}{x}$ حيث x تأخذ القيم $0,1,2,3,4,5$ وعلى ذلك :-

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{5}{x}}{32}\ ,\ x = 0,1,2,3,4,5.$$

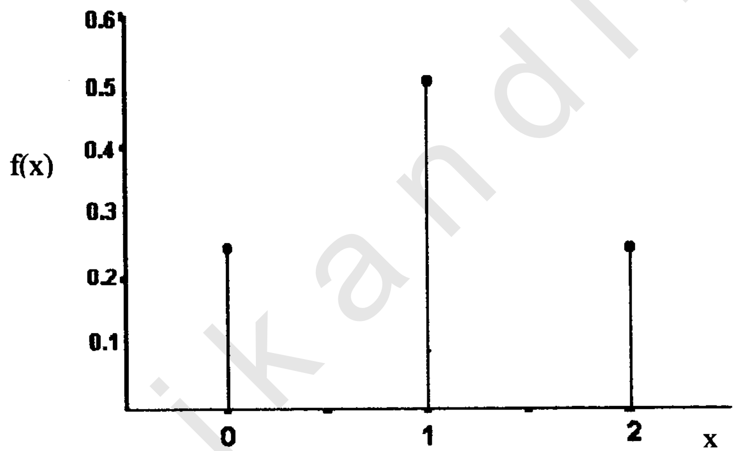
مثال (٤–٥) إذا كان X متغير عشوائي يمثل نواتج إلقاء زهرة نرد مرة واحدة فإن x تأخذ قيم من 1 إلى 6 . التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو :-

$$f(x) = \frac{1}{6} \ , \ x = 1,2,3,4,5,6.$$

مثال (٤–٦) إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الصورة التي تظهر عند إلقاء عملتين مرة واحدة فإن $x = 0,1,2$. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يمكن تمثيله بالجدول التالي :

x	0	1	2
f(x)	0.25	0.5	0.25

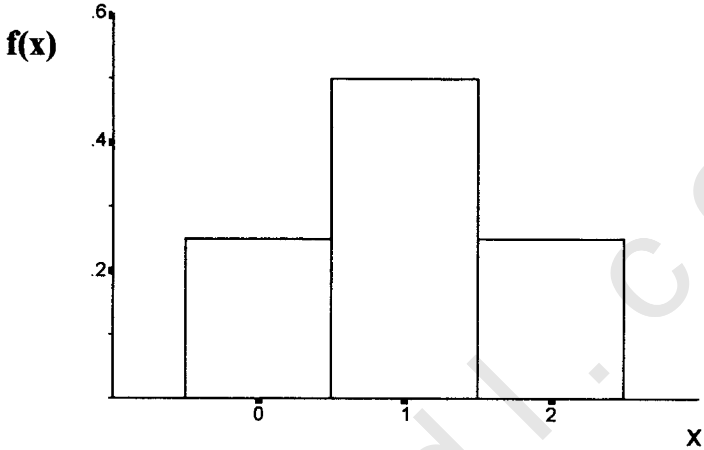
يمكن عرض هذا التوزيع بيانيا باستخدام طريقة الأعمدة **bar chart** كما في شكل (٤–١).



شكل (٤–١)

حيث يمثل المحور الأفقي قيم x ويمثل المحور الرأسي قيم f(x) فمثلا عند $x = 0$ يقام عمود إرتفاعة يتناسب مع قيمة الدالة عند هذه النقطة وهو 0.25 وكذلك عند $x = 1$ يقام عمود ارتفاعه 0.5 وعند $x = 2$ يقام عمود ارتفاعه 0.25 وبخلاف هذه النقط فالدالة ليس لها وجود. كما يمكن تحويل شكل (٤–١) إلى ما يسمى بالمدرج الاحتمالي **probability histogram** كما في شكل (٤–٢) وذلك بتحويل الأعمدة الموجودة إلى مستطيلات بحيث يكون ارتفاع كل مستطيل مساويا لاحتمال قيمة x الواقعة في منتصف قاعدة المستطيل. وعلى

ذلك فإن $P(X = x)$ يساوى مساحة المستطيل الذي تقع x في منتصف قاعدته، هذا المفهوم لحساب الاحتمالات ضروري في التوزيع الاحتمالي المتصل،

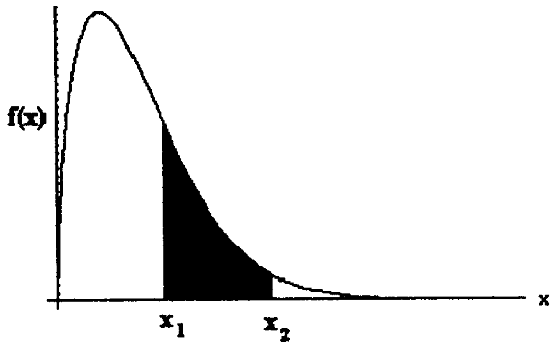


شكل (٤-٢)

(٤-٣) التوزيعات الاحتمالية المتصلة (المستمرة)

Continuous Probability Distributions

من صفات المتغير العشوائي المتصل أنه لا يمكن أن يكون هناك احتمال موجب مرافق لكل قيمة من قيم المتغير أى أن $P(X = x) = 0$ ولكن يكون هناك احتمال مرافق لكل فترة من فترات المتغير، ولهذا لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل بجدول ولكن نعبر عنه بصيغة دالة $f(x)$ والتي تسمى دالة كثافة الاحتمال **probability density function** ، التمثيل البياني للدالة $f(x)$ سوف يكون متصل ويأخذ أشكال كثيرة، واحد من هذه الأشكال موضح في شكل (٤-٣) ولابد أن تكون المساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ والمحددة بمحور x تساوى الواحد الصحيح، أيضا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة بين $x = x_2$ و $x = x_1$ يساوى المساحة المظللة تحت دالة كثافة الاحتمال بين $x = x_1$ و $x = x_2$ ، المساحة بالضبط يمكن الحصول عليها باستخدام طرق التكامل، سوف يكون اهتمامنا فقط بدوال كثافة الاحتمال الشائعة الاستخدام في التجارب والتي تحسب المساحات تحت منحناها باستخدام الجداول الإحصائية، ولأن المساحات تمثل احتمالات والاحتمالات قيم موجبة، فإن دالة كثافة الاحتمال لابد أن تكون فوق منحنى x ،

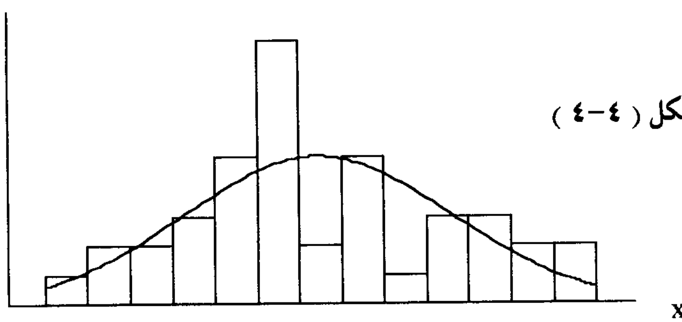


شكل (٤-٣)

تعريف : الدالة $f(x)$ تسمى دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل X إذا كانت المساحة الكلية تحت المنحنى والمحددة بمحور x تساوى الواحد الصحيح . أيضا المساحة تحت المنحنى بين أي قيمتين $x = x_2$ و $x = x_1$ تعطى احتمال أن المتغير العشوائي يقع بين $x = x_1$ و $x = x_2$.

عادة في التجربة التي تحتوى على متغير متصل تكون $f(x)$ غير معلومة ويفرض معادلتها . الاختيار الصحيح للمعادلة يعتمد على توفر معلومات عن المتغير موضع الدراسة . المدرج يلقى الضوء على شكل $f(x)$. على سبيل المثال إذا كان الاهتمام بوزن مجموعة من الحيوانات فإننا نقوم بتوزيع المشاهدات (الأوزان x) إلى فئات ونقدر نسبة المشاهدات في كل فئة (فترة) والتي تسمى التكرارات النسبية **relative frequencies** للفئات المختلفة . هذه المعلومات يمكن تمثيلها بالمدرج ومنها نحصل على $f(x)$ التقريبية وذلك بتمهيد المنحنى كما في شكل (٤-٤) . شكل المنحنى يساعدنا في الاختيار المناسب للدالة $f(x)$.

التكرار النسبي



شكل (٤-٤)

(٤-٤) التوقع الرياضي **Mathematical Expectation**

يمكن تسهيل فهم التوقع الرياضي بالمثال التالي : ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الصور التي تظهر عند إلقاء عمليتين مرة واحدة. وعلى ذلك X يأخذ القيم 0,1,2 باحتمالات 0.25,0.5, 0.25 على التوالي. بفرض أن التجربة كررت بعدد كبير جدا من المرات، وليكن N = 8000000 ، نتوقع أن نلاحظ تقريبا 2 مليون للحادثة "عدم ظهور الصورة " و 4 مليون للحادثة "ظهور صورة و كتابة " و 2 مليون للحادثة "ظهور صورتين ". وعلى ذلك متوسط عدد الصور في الرمية الواحدة يساوى:

$$\frac{\text{Sum of observations}}{N} = \frac{(0)(2000000) + (1)(4000000) + (2)(2000000)}{8000000}$$

$$= \frac{(0)(2000000)}{8000000} + \frac{(1)(4000000)}{8000000} + \frac{(2)(2000000)}{8000000}$$

$$= (0)(\frac{1}{4}) + (1)(\frac{1}{2}) + (2)(\frac{1}{4}) = 1.$$

حيث عدد المشاهدات = **sum of observations** . يلاحظ أن الحد الأول يساوى $(0)f(0)$ والحد الثاني يساوى $(1)f(1)$ والحد الثالث يساوى $(2)f(2)$ وعلى ذلك يمكن تعريف القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X (متوسط التوزيع أو متوسط المجتمع) كالتالي :-

$$\mu = E(X) = (0)(0.25) + (1)(0.5) + (2)(0.25) = 1.$$

تعريف : إذا كان X متغير عشوائي منفصل له التوزيع الاحتمالي التالي :-

x	x_1	x_2	...	x_n
P(X=x)	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

فإن التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة أو متوسط المجتمع μ **population mean**) لمتغير عشوائي X هو :-

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i).$$

مثال (٤-٧) اختيرت عينة من 3 وحدات بطريقة عشوائية من صندوق به 12 وحدة بينها 3 معيبة أوجد القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المعيبه.

الحل ، يتكون فراغ العينة S من $220 = \binom{12}{3}$ عينة متساوية الاحتمال حجمها 3 ، أيضا يوجد $84 = \binom{9}{3}\binom{3}{0}$ عينة ليست بها وحدات معيبة و $108 = \binom{9}{2}\binom{3}{1}$ عينة بها وحدة واحدة معيبة و $27 = \binom{9}{1}\binom{3}{2}$ عينة بها وحدتين معيبتين وعينة واحدة، $1 = \binom{9}{0}\binom{3}{3}$، بها ثلاث وحدات معيبة وبذلك يكون احتمال الحصول على 3,2,1,0 من الوحدات المعيبة على التوالي هو :-

$\frac{84}{220}, \frac{108}{220}, \frac{27}{220}, \frac{1}{220}$ ، أذن القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المعيبة هي :-

$$E(X) = (0)f(0) + (1)f(1) + (2)f(2) + (3)f(3)$$

$$= (0)(\frac{84}{220}) + (1)(\frac{108}{220}) + (2)(\frac{27}{220}) + (3)(\frac{1}{220}) = \frac{165}{220}.$$

مثال (٤-٨) يحتوى صندوق على 4 كرات ، اثنين منهم مرقمين بالرقم 2 ، وكرة مرقمة بالرقم 4 ، والأخيرة مرقمة بالرقم 8 سحبت كرة من الصندوق أوجد $E(X)$ ،

الحل، قيم المتغير العشوائي سوف تكون $x = 2,4,8$ باحتمالات :-

$$f(2) = \frac{1}{2}, f(4) = \frac{1}{4}, f(8) = \frac{1}{4}.$$

وعلى ذلك القيمة المتوقعة للمتغير X أو متوسط المجتمع هو :-

$$\mu = E(X) = (2)(\frac{1}{2}) + (4)(\frac{1}{4}) + (8)(\frac{1}{4}) = 4.$$

في الجزء السابق تناولنا كيفية إيجاد القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي، ليكن $h(X)$ دالة في متغير عشوائي (متغيرا عشوائيا جديد يعتمد على X)، وعلى ذلك يمكن تقدير قيم الدالة $h(X)$ بمعرفة قيم X، على سبيل المثال $h(X)$ قد تكون $(X-\mu)^2$ أو X^2 ، وعلى ذلك إذا كان X يأخذ القيمة 4 فإن $h(X)$ تأخذ القيمة $h(4)$ وعلى ذلك يمكن كتابة :- $P[h(X) = h(4)] = P(X = 4)$ ، عموما $P[h(X) = h(x)] = P(X = x) = f(x)$ ، وعلى ذلك يمكن الحصول على القيمة المتوقعة للدالة $h(X)$ باستخدام الاحتمالات المعطاة للدالة $f(x)$ ، على سبيل المثال إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الصور التي تظهر عند إلقاء عملتين مرة واحدة وبفرض أننا نرغب في إيجاد القيمة المتوقعة للدالة $Y = X^2$ ، التوزيع الاحتمالي للمتغير X وأيضا للمتغير العشوائي Y في الجدول التالي :-

x	0	1	2
y	0	1	4
P(X=x) =P(Y=y)	0.25	0.5	0.25

$$E(Y) = (0)(\frac{1}{4}) + (1)(\frac{1}{2}) + (4)(\frac{1}{4})$$

$$= \sum_{x=0}^{2} x^2 f(x) = 1.5.$$

تعريف : إذا كان X متغير عشوائي منفصلا له التوزيع الاحتمالي التالي :-

x	x_1	x_2	...	x_n
P(X=x)	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

وإذا كان $h(X)$ دالة في X فإن $h(X)$ تمثل أيضا متغيرا عشوائيا والقيمة المتوقعة له هي:-

$$E[h(X)] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) f(x_i)$$

مثال (٤-٩) إذا كان X متغيرا عشوائيا بتوزيع احتمالي معطى في الجدول التالي أوجد القيمة المتوقعة للمتغير $(X^2 - 1)$:-

الحل .

x	-1	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X^2 - 1) = \sum_{x=-1}^{2} (x^2 - 1) f(x)$$

$$= [(-1)^2 - 1]f(-1) + [(0)^2 - 1]f(0) + [(1)^2 - 1]f(1) + [(2)^2 - 1]f(2)$$

$$= (0)(\frac{1}{8}) + (-1)(\frac{1}{4}) + (0)(\frac{3}{8}) + (3)(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}.$$

مثال (٤-١٠) أوجد القيمة المتوقعة للدالة $(X-\mu)^2$ حيث أن X تمثل عدد الصور التي تظهر عند إلقاء عملتين مرة واحدة .

الحل . قد أثبتنا من قبل أن $E(X) = 1$ ، وعلى ذلك فإن :-

$$E(X-\mu)^2 = \sum_{x=0}^{2}(x \;\; -\mu)^2 f(x)$$
$$=(0-1)^2 f(0)+(1-1)^2 f(1)+(2-1)^2 f(2)$$
$$=(1)(0.25)+(0)(0.5)+(1)(0.25)=0.5.$$

القيمة المتوقعة للدالة $(X-\mu)^2$ تسمى التباين **variance** للمتغير العشوائي X ويرمز لها بالرمز σ^2 ، يعرف الانحراف المعياري **standard deviation** للمتغير العشوائي X بأنه الجذر التربيعي لتباين X ،

تعريف : التباين للمتغير العشوائي X هو :-

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2.$$

مثال (٤-١١) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X والذي يمثل عدد أجهزة الحاسب الآلي من 4 أجهزة والتي قد تتعرض للتلف أثناء عملية الشحن إلى مركز أبحاث، أوجد التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ،

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

الحل، بما أن التباين للمتغير العشوائي X معرف بالصيغة $\sigma^2 = E(X-\mu)^2$ ، أولا نحسب العدد المتوقع للأجهزة التالفة كالتالي :-

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{4} x\,f(x)$$

$$=0\cdot(\frac{1}{16})+1\cdot(\frac{4}{16})+2\cdot(\frac{6}{16})+3\cdot(\frac{4}{16})+4\cdot(\frac{1}{16})$$
$$=\frac{4}{16}+\frac{12}{16}+\frac{12}{16}+\frac{4}{16}=\frac{32}{16}=2.$$

الآن :-

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_{x=0}^{4}(x-2)^2 f(x)$$

$$= (0-2)^2(\frac{1}{16}) + (1-2)^2(\frac{4}{16}) + (2-2)^2(\frac{6}{16}) + (3-2)^2(\frac{4}{16}) + (4-2)^2(\frac{1}{16})$$

$$= (4)(\frac{1}{16}) + (1)(\frac{4}{16}) + (0)(\frac{6}{16}) + (1)(\frac{4}{16}) + (4)(\frac{1}{16}) = 1.$$

أيضا الانحراف المعياري للمتغير X هو $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1$ •

تعريف : العزم من الدرجة k (حيث k عدد صحيح موجب) حول نقطة الأصل للمتغير العشوائي X هو :-

$$\mu'_k = E(X^k).$$

والعزم من الدرجة k حول المتوسط هو :-

$$\mu_k = E(X-\mu)^k.$$

العزم من الدرجة الأولى حول الصفر يعطى متوسط المجتمع μ والعزم من الدرجة الثانية حول المتوسط يعطى التباين σ^2 • العزوم بصفة عامة لهم استخدامات كثيرة في الإحصاء سوف نتناول بعضها في الفصل الخامس •

(٤-٥) بعض خواص القيم المتوقعة

Some Properties of Expected Values

في هذا البند سوف نقدم بعض النظريات والتي عن طريقها يمكن حساب توقعات بدلالة توقعات أخرى معروفة أو توقعات سهلة في الحساب • كل النتائج التالية صحيحة سواء لمتغيرات عشوائية منفصلة أو متصلة • البراهين التالية سوف تقتصر على المتغيرات العشوائية المنفصلة المحدودة •

نظرية (٤-١) بفرض أن X متغيرا عشوائيا و b,a ثابتين فإن :-

$$E(aX+b) = aE(X)+b.$$

البرهان :-

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)f(x_i)$$
$$= (ax_1+b)f(x_1)+(ax_2+b)f(x_2)+\ldots+(ax_n+b)f(x_n)$$
$$= a[x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\ldots+x_nf(x_n)]$$
$$+ b[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]$$
$$= a\sum_{i=1}^{n}x_if(x_i)+b\sum_{i=1}^{n}f(x_i).$$

المجموع الأول من اليمين هو $E(X)$ والمجموع الثاني يساوى واحد صحيح ، وعلى ذلك فإن :-

$$E(aX+b) = aE(X)+b.$$

نتيجة (١) إذا كانت $a = 0$ ، فإن $E(b) = b$.

نتيجة (٢) إذا كانت $b = 0$ ، فإن $E(aX) = aE(X)$.

نظرية (٤-٢) التوقع الرياضي لمجموع دالتين (أو أكثر) في متغير عشوائي X تساوى مجموع القيم المتوقعة للدوال ، أي أن :-

$$E[g(X)+h(X)] = E[g(X)]+E[h(X)].$$

البرهان :-

$$E[g(X)+h(X)] = \sum_{i=1}^{n}[g(x_i)+h(x_i)]f(x_i)$$
$$= [g(x_1)+h(x_1)]f(x_1)+[g(x_2)+h(x_2)]f(x_2)+\ldots$$
$$+[g(x_n)+h(x_n)]f(x_n)$$
$$= [g(x_1)f(x_1)+g(x_2)f(x_2)+\ldots+g(x_n)f(x_n)]$$
$$+[h(x_1)f(x_1)+h(x_2)f(x_2)+\ldots+h(x_n)f(x_n)]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}g(x_i)f(x_i)+\sum_{i=1}^{n}h(x_i)f(x_i)$$
$$= E[g(X)]+E[h(X)].$$

نظرية (٤-٣) التباين للمتغير العشوائي X يعطى من الصيغة التالية :-

$$\sigma^2 = E(X)^2-\mu^2.$$

البرهان :-

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2$$
$$= E(X^2 - 2\mu x + \mu^2)$$
$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)$$
$$= E(X)^2 - \mu^2.$$

حيث أن $\mu = E(X)$ من التعريف و $E(\mu^2) = \mu^2$ من نظرية (٤-١) ونتيجة (١) ٠

مثال (٤-١٢) أوجد التباين للمتغير العشوائي X في مثال (٤-١٠)٠

الحل٠ قد أثبتنا من قبل أن $E(X) = 1$ ، الآن :-

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 f(x) = (0)(0.25) + (1)(0.5) + (2)^2(0.25) = 1.50.$$

وعلى ذلك :-

$$E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$
$$= (1.5) - (1)^2 = 0.5.$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من مثال (٤-١٠)٠

مثال (٤-١٣) أوجد التباين للمتغير العشوائي X في مثال (٤-١١) باستخدام الصيغة :-

$$E(X^2) - \mu^2.$$

الحل٠ $E(X) = 2$ تم الحصول عليه من مثال (٤-١١) الآن نوجد :-

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{4} x^2 f(x)$$

$$= (0)^2(\frac{1}{16}) + (1)^2(\frac{4}{16}) + (2)^2(\frac{6}{16}) + (3)^2(\frac{4}{16}) + (4)^2(\frac{1}{16})$$
$$= \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16} = \frac{80}{16} = 5.$$

وعلى ذلك فإن التباين للمتغير العشوائي X هو :-

$$\sigma^2 = E(X)^2 - \mu^2$$
$$= 5 - 2^2 = 1.$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من مثال (٤–١١)٠

تعريف : ليكن X متغير عشوائي بدالة كثافة احتمال $f(x)$ ٠ التباين لمتغير عشوائي جديد $g(X)$ هو:–

$$\sigma^2_{g(x)} = E[\{g(X) - \mu_{g(X)}\}^2].$$

نظرية (٤–٤) إذا كان X متغيرا عشوائيا و b ثابت ، فإن :–

$$\sigma^2_{X+b} = \sigma^2_X = \sigma^2.$$

البرهان :–

$$\sigma^2_{X+b} = E[\{(X+b) - \mu_{X+b}\}^2].$$

الآن

$$\mu_{X+b} = E(X+b) = E(X) + b$$
$$= \mu + b,$$

وذلك من نظرية (٤–١) وعلى ذلك :–

$$\sigma^2_{X+b} = E[(X + b - \mu - b)^2]$$
$$= E[(X - \mu)^2]$$
$$= \sigma^2.$$

نظرية (٤–٥) إذا كان X متغير عشوائي و a ثابت، فإن :–

$$\sigma^2_{aX} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2.$$

البرهان :–

$$\sigma^2_{aX} = E[\{aX - \mu_{aX}\}^2].$$

الآن :–

$$\mu_{aX} = E(aX) = aE(X) = a\mu,$$

وذلك من نظرية (٤–١) ، نتيجة (٢) وعلى ذلك :–

$$\sigma^2_{aX} = E[(aX - a\mu)^2]$$
$$= a^2E[(X - \mu)^2]$$
$$= a^2\sigma^2.$$

(٤-٦) التوزيعات الاحتمالية الثنائية المنفصلة

Discrete Bivariate Distributions

بفرض أن لدينا متغيرين عشوائيين Y, X بتوزيع احتمالي $h(y), g(x)$ على التوالي . التوزيع الاحتمالي لوقوع Y, X في آن واحد عبارة عن صيغة دالة عادة يشار إليها بالرمز $f(x,y)$ وتسمى التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين Y, X . وعلى ذلك في حالة التوزيع المنفصل، فإن . $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$. أي أن $f(x,y)$ تعطى احتمال وقوع Y, X في آن واحد على سبيل المثال إذا ألقينا زهرتي نرد مرة واحدة وإذا كانت X تمثل النقط التي تظهر على السطح العلوي الزهرة الأولى و Y تمثل عدد النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرة الثانية. فالتوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X , Y هو :-

$$P(X = x , Y = y) = f(x,y) = \frac{1}{36} \quad , \quad x = 1,2,3,4,5,6, \quad y = 1,2,3,4,5,6.$$

تعريف : إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشترك $f(x,y)$ ، فإن هذه الدالة تحقق الشروط التالية :-

(أ) $f(x,y) \geq 0$ لجميع القيم (x,y) ،

(ب) $\sum_{y}\sum_{x} f(x,y) = 1$

من المثال السابق نجد أن $f(x,y) \geq 0$ لجميع القيم (x,y) حيث $f(x,y) = \frac{1}{36}$ لجميع القيم (x,y) ، $y = 1,2,3,4,5,6$; $x = 1,2,3,4,5,6$ و $\sum_{y}\sum_{x} f(x,y) = \sum_{y}\sum_{x}\frac{1}{36} = 1$

إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين منفصلين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشترك $f(x,y)$ فإنه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي للمتغير X على حدة وتوزيع Y على حدة ويسمى التوزيع في هذه الحالة بالتوزيع الهامشي. وعلى ذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالي الهامشي للمتغير X هي :

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y).$$

وبالمثل دالة التوزيع الاحتمالي الهامشي للمتغير Y هي :-

$$h(y) = \sum_{x} f(x,y).$$

مثال (٤-١٤) اختيرت عينة من شخصين لإجراء اختبار معين عليهم من بين مجموعة مكونة من أربعة غير مدخنين وأثنين مدخنين. إذا كان **X** و **Y** معرفتان كالتالي **x=0** إذا كان الشخص الأول غير مدخن و **x=1** إذا كان الشخص الأول مدخنا. أيضا **y=0** إذا كان الشخص الثاني غير مدخن و **y=1** إذا كان الشخص الثاني مدخنا. فإن التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين **X** و **Y** في الجدول التالى. المطلوب إيجاد التوزيع الهامشي لكل من **X** و **Y**.

y \ x	0	1	h(y)
0	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{10}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$
g(x)	$\frac{10}{15}$	$\frac{5}{15}$	

الحل. أولا، لحساب دالة التوزيع الهامشي للمتغير X نجمع الأعمدة كما يلي :-

$$g(0)=\sum_{y=0}^{1} f(0,y)=f(0,0)+f(0,1)=\frac{10}{15},$$

$$g(1)=\sum_{y=0}^{1} f(1,y)=f(1,0)+f(1,1)=\frac{5}{15}.$$

ثانيا، لحساب دالة التوزيع الهامشي للمتغير Y نجمع الصفوف كما يلي : -

$$h(0)=\sum_{x=0}^{1} f(x,0)=f(0,0)+f(1,0)=\frac{10}{15},$$

$$h(1)=\sum_{x=0}^{1} f(x,1)=f(0,1)+f(1,1)=\frac{5}{15}.$$

تعريف : إذا كان Y,X متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمالية مشتركة، $f(x,y)$ فإن الدالة الاحتمالية المشروطة للمتغير Y بشرط أن $X=x$ تعرف بالصيغة :-

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}.$$

لقيم x بحيث أن $g(x)>0$.

وبنفس الشكل فإن الدالة الإحتمالية المشروطة للمتغير X بشرط أن $Y=y$ تعرف بالصيغة :-

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{h(y)}.$$

لقيم y بحيث أن $h(y)>0$ •

مثال (٤-١٥) أوجد $f_{Y|X}(y\,|\,0), f_{X|Y}(x\,|\,1)$ للبيانات في مثال (٤-١٤) :-

الحل • أولا، الدالة $f_{X|Y}(x\,|\,1)$ يمكن إيجادها كالتالي :-

$$f_{X|Y}(0\,|\,1)=\frac{f(0,1)}{h(1)}=\frac{4}{5},$$

$$f_{X|Y}(1\,|\,1)=\frac{f(1,1)}{h(1)}=\frac{1}{5}.$$

ثانيا، الدالة $f_{Y|X}(y\,|\,0)$ يمكن إيجادها كالتالي :-

$$f_{Y|X}(0\,|\,0)=\frac{f(0,0)}{g(0)}=\frac{6}{10},$$

$$f_{Y|X}(1\,|\,0)=\frac{f(0,1)}{g(0)}=\frac{4}{10}.$$

تعريف : يكون المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين إذا كان :-

$$f(x,y)=g(x)h(y)$$

لكل قيم (x,y) •

مثال (٤-١٦) في المثال (٤-١٤) هل Y, X مستقلين ؟

الحل• Y, X غير مستقلين لأنه بالنظر إلى الجدول المعروض في مثال (٤-١٤) نجد :-

$$f(x,y\ )\neq g(x)h(y\ ),\, x=0,1,\, y=0,1.$$

فعلى سبيل المثال $f(0,1)\neq g(0)h(1)$ حيث $f(0,1)=\frac{4}{15}, g(0)=\frac{10}{15}, h(1)=\frac{5}{15}$

نظرية (٤-٦) إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين فإن :-

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y).$$

فعلى سبيل المثال إذا ألقيت زهرة نرد مرتين وكانت X تمثل عدد النقط الذي تظهر على السطح العلوي في المرة الأولى و Y عدد النقط التي تظهر على السطح العلوي في المرة الثانية فإن $X + Y$ يمثل مجموع العددين اللذان يظهران على السطح العلوي للنرد عند إلقائها مرتين•

نظرية (٤-٧) إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين مستقلين فإن :-

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

على سبيل المثال عند إلقاء نردين مرة واحدة فإن XY تمثل حاصل الضرب للعددين الظاهرين على النردين .

نظرية (٤-٨) بفرض أن المتغيرين العشوائيين Y, X مستقلين , فإن :-

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y.$$

البرهان :-

$$\sigma^2_{X+Y} = E[\{(X+Y) - \mu_{X+Y}\}^2].$$

الآن :-

$$\mu_{X+Y} = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \mu_X + \mu_Y,$$

وذلك من نظرية (٤-٦) وعلى ذلك :-

$$\begin{aligned}\sigma^2_{X+Y} &= E[\{(X+Y) - (\mu_X + \mu_Y)\}^2] \\ &= E[\{(X - \mu_X) + (Y - \mu_Y)\}^2] \\ &= E[(X - \mu_X)^2] + E[(Y - \mu_Y)^2] \\ &+ 2E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].\end{aligned}$$

الحدين الأولين يمثلان على التوالي σ^2_Y, σ^2_X . المطلوب إثبات أن الحد الأخير يساوى صفر .

وعلى ذلك :-

$$\begin{aligned}E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] &= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y) \\ &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y = 0,\end{aligned}$$

وذلك لان $E(XY) = E(X)E(Y)$ للمتغيرات المستقلة. وعلى ذلك:-

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y.$$

نتيجة (٣) بفرض أن Y, X متغيرين عشوائيين مستقلين، فإن :-

$$\sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y.$$

النتيجة نحصل عليها بوضع $X - Y$ على الشكل $X + (-Y)$ وعلى ذلك:-

$$\sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_{(-Y)}.$$

من نظرية (٤-٥) نعلم أن $\sigma^2_{(-Y)} = (-1)^2 \sigma^2_Y = \sigma^2_Y$ وعلى ذلك :-

$$\sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y .$$

تعريف : القيمة المتوقعة للدالة $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ تعرف بالتغاير بين المتغيرين Y, X ويرمز لها بالرمز $Cov(X,Y)$ أي أن :-

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

وهو يقيس درجة الترافق بين التمغيرين. بعض خواص التغاير معطاة في النظريات التالية.

نظرية (٤-٩) إذا كانت Y, X متغيرين عشوائيين و b, a ثابتين فإن :-

$$Cov(aX, bY) = abCov(X,Y),$$
$$Cov(X+a, Y+b) = Cov(X,Y),$$
$$Cov(X, aX+b) = a\sigma^2_X .$$

مثال (٤-١٧) إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين مستقلين حيث :-

$$\sigma^2_Y = 16, \sigma^2_X = 4, E(Y) = 3, E(X) = 2$$

أوجد : (ا) $E(5X-Y)$ (ب) σ^2_{X-Y} , (جـ) $Cov(3X+2\ ,Y)$

(د) $Cov(X\ ,\ 5X-2)$

الحل. (ا) $E(5X-Y) = 5E(X) - E(Y) = (5)(2) - 3 = 7$

(ب)وحيث Y, X مستقلين فإن :-

$$\sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$
$$= 4 + 16 = 20.$$

(جـ) $Cov(3X+2\ , Y) = 3Cov(X,Y) = (3)(0) = 0$

(د) $Cov(X\ , 5X-2) = 5Cov(X,X) = 5\sigma^2_X = (5)(4) = 20$

نظرية (٤-١٠) إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين، فإن :-

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

كما أن $Cov(X,Y) = 0$ إذا كان Y, X مستقلين بينما العكس ، عموما ، غير صحيح بمعنى أنه بالإمكان أن يكون $Cov(X,Y) = 0$ ولكن Y, X غير مستقلين .

نظرية (٤-١١) إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال مشتركة $f(x,y)$ ، فإن:

$$\sigma^2_{X\pm Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \pm 2Cov(X,Y)$$

و $\sigma^2_{X\pm Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$ إذا كان Y, X مستقلين .

مثال (٤-١٨) إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال :

$$f(x,y)=\frac{1}{4}$$

حيث $(x,y)=(0,1),(1,0),(0,-1),(-1,0)$ و $g(\pm1)=\frac{1}{4},g(0)=\frac{1}{2}$ ودالة كثافة الاحتمال للمتغير Y نفس دالة كثافة الاحتمال للمتغير X وبما أن $E(XY)=0$ ، فإن :

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$$

ولكن $f(1,0)\neq g(1)h(0)$ ، وعلى ذلك Y,X متغيرين غير مستقلين ، عموما يمكن القـــول أن Y,X غير مستقلين إذا كان $Cov(X,Y)\neq 0$ ، ولكن $Cov(X,Y)=0$ لا يعنى أن المتغيرين Y,X مستقلين .

تعريف : إذا كان Y,X متغيرين عشوائيين بتباينى σ_X^2,σ_Y^2 وتغاير $Cov(X,Y)$ ، فـــإن معـــامل الارتباط بين Y,X هو :-

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

يقال للمتغيرين العشوائيين Y,X انهم غير مرتبطين إذا كان $\rho=0$ ، غير ذلك يقال أنهما مرتبطين .

نظرية (٤-١٢) إذا كان ρ معامل الارتباط بين المتغيرين Y,X فإن :-

$$-1\leq\rho\leq 1.$$

مثال (٤-١٩) إذا كان Y,X متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال مشتركة :-

$$f(x,y)=\frac{4}{5xy},x=1,2 \text{ and } y=2,3.$$

أوجد : (ا) معامل الارتباط بين Y,X (ب) هل Y,X مستقلين أم لا ؟ .

الحل . (ا) التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين Y,X في الجدول التالي :

y \ x	1	2
2	$\frac{12}{30}$	$\frac{6}{30}$
3	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$

وعلى ذلك :-

$$E(X) = (1)(\frac{20}{30}) + (2)(\frac{10}{30}) = \frac{4}{3},$$

$$E(Y) = (2)(\frac{18}{30}) + (3)(\frac{12}{30}) = \frac{12}{5},$$

$$E(X^2) = (1)^2(\frac{20}{30}) + (2)^2(\frac{10}{30}) = 2,$$

$$E(Y^2) = (2)^2(\frac{18}{30}) + (3)^2(\frac{12}{30}) = 6,$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = 2 - (\frac{4}{3})^2 = \frac{2}{9},$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - \mu_Y^2 = 6 - (\frac{12}{5})^2 = \frac{6}{25},$$

$$E(XY) = (1)(2)(\frac{12}{30}) + (2)(2)(\frac{6}{30}) + (1)(3)(\frac{8}{30}) + (2)(3)(\frac{4}{30}) = \frac{48}{15},$$

وعلى ذلك :-

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{48}{15} - (\frac{4}{3})(\frac{12}{5}) = 0.$$

الارتباط بين Y, X هو :-

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sqrt{(\frac{2}{9})(\frac{6}{25})}} = 0.$$

(ب) Y, X مستقلين لان $f(x,y) = g(x)h(y)$ لجميع قيم (x,y) ٠

تمارين

- ١ – صنف المتغيرات العشوائية التالية إلى منفصلة ومتصلة :-

(ا) الزمن اللازم لوصول طائرة (ب) الزمن اللازم لإنهاء امتحان (جـ) عدد المصابيح التالفة في صندوق يحتوى على 5 مصابيح (د) عدد الأخطاء التي يتعرض لها شخص ما عند كتابة خطاب على الآلة الكاتبة (ز) كمية اللبن الحليب التي تدرها بقرة في العام (ر) عدد البيض الذي تضعه دجاجة في الشهر ٠

– ٢ – ألقيت عملة متحيزة ثلاث مرات بحيث أن فرصة ظهور الصورة ضعف فرصة ظهور الكتابة. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي للعملة .

– ٣ – الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X :-

x	0	1	2
P(X=x)		0.4	0.2

(ا) ما هي قيمة $P(X=0)$ ؟ (ب) أوجد القيمة المتوقعة للمتغير X (جـ) $P(X>1)$.

– ٤ – إذا ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة أوجد :-

(ا) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y الذي يمثل مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للنردين ومثله بيانيا .

(ب) التوقع والتباين للمتغير Y .

(جـ) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل القيمة المطلقة للفرق بين مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي النردين.

(د) التوقع والتباين للمتغير X .

– ٥ – إذا كان التوزيع الاحتمالي للزيادة في سعر سلعة ما في خلال سنة قادمة محددة كما في الجدول التالي حيث $X=0$ تعنى عدم وجود زيادة و $X=1$ زيادة أقل من 3% و $X=2$ زيادة من 3% إلى 6% و $X=3$ زيادة أكثر من 6%.

x	0	1	2	3
P(X=x)	0.1	0.1	0.5	0.3

أوجد : التوقع والتباين للمتغير X .

– ٦ – أوجد الصيغة الاحتمالية للمتغير X الذي يمثل عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي عند إلقاء عملة متزنة سبع مرات وأيضا التوقع والتباين للمتغير X .

– ٧ – بفرض أن شركة شحن اشترت سيارة كبيرة بمبلغ 15000 دولار. إذا فقدت السيارة سواء بالسرقة أو بحادثة فإن ذلك يمثل فقد كلى .الفرصة في الفقد 0.002 ، أوجد القيمة التوقعة للفقد (المتغير العشوائي هنا يأخذ القيمة 0 لعدم الفقد والقيمة 15000 للفقد).

– ٨ – أوجد القيمة المتوقعة لعدد الرجال الذين يتم اختيارهم لمهمة علمية من 3 أشخاص من بين 5 رجال وسيدتين.

– ٩ – إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد أجهزة الحاسب الآلي التي تتعرض التلف من بين خمسة أجهزة وذلك أثناء توصيلها إلى مركز أبحاث . بفرض أن احتمال التلف 0.25. أيضا بفرض أن كل جهاز مستقل عن الآخر في التلف أو عدم التلف أوجد القيمة المتوقعة للأجهزة التالفة .

– ١٠ – إذا كانت المبيعات من سلعة ما في الساعة هي 20 , 21 , 22 عبوة باحتمال 0.2 , 0.5 , 0.3 على التوالى . أوجد القيمة المتوقعة والتباين لعدد العبوات المباعة في الساعة .

– ١١ – احتمال أن يحصل لاعب كرة التنس على هدف في أى مباراة يلعبها هو 0.3 .أوجد القيمة المتوقعة لعدد الأهداف التي يكسبها في خمس مباريات قادمة .

– ١٢ – بفرض أن إيرادات متجر في اليوم تمثل بالمتغير العشوائي X ، والذي له التوزيع الاحتمالي التالي :–

x	0	10	12	16	18
P(X=x)	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

أوجد التوقع والتباين .

– ١٣ – إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X هي :–

$$f(x) = \frac{1}{5}, x = 1,2,3,4,5.$$

أوجد احتمال أن X : (١) عدد زوجي – عدد فردى (ب) التوقع والتباين للمتغير X .

– ١٤ – يقوم بائع بتوصيل نوعين من المنظفات (B , A) إلى المنازل . المكسب من المنظف A وB على التوالي هو 5 , 10 جنيهات للعبوة . الفرصة لبيع المنظف A هي 2 من 10 جولات والفرصة لبيع المنظف B هي 3 من 10 جولات والفرصة لعدم البيع هي 5 من 10 جولات . أوجد القيمة المتوقعة للمكسب في الجولة الواحدة .

– ١٥ – لدى محل للرياضة 80 علبة تحتوى كل علبة على كرات تنس ذات لون واحد ، إما صفراء أو خضراء . إذا كان عدد العلب التي تحتوى على كرات صفراء 30 . سحبت عينة من 10 علب . أوجد : (١) التوزيع الاحتمالي لعدد العلب التي تحتوى على كرات صفراء (ب) القيمة المتوقعة لعدد العلب التي تحتوى على كرات صفراء .

– ١٦ – أى من الدوال التالية تمثل توزيع احتمالي :–

(١) $f(x) = \frac{2x}{5}, \quad x = 0,1,2$ (ب) $f(x) = \frac{x+2}{15}, \quad x = -2,-1,0,1,2$

جـ) $f(x)=\frac{x^2-1}{49}$, $x=0,1,2,3,4,5$ د) $f(x)=\frac{x}{3}$, $x=-1,0,1,2$

ز) $f(x)=\frac{x^2-x}{5}$, $x=0,1,2,3$

– ١٧ – في كل من الدوال التالية ، عين الثابت k بحيث تكون f(x) دالة كثافة احتمال :-

ا) $f(x)=\frac{k}{x^2}$, $x=1,2$ ب) $f(x)=\frac{k}{x}$, $x=1,2,3$

جـ) $f(x)=kx$, $x=0,1,2$ د) $f(x)=k(\frac{1}{2})^x$, $x=1,2,3$

ز) $f(x)=k[(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{2}]$, $x=0,1,2$

ر) $f(x)=k(8-x)$, $x=0,1,2,3,4,5$

– ١٨ – إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل الزمن بالثواني الذي يستغرقه حاسب في تنفيذ برنامج ما . إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو :-

$$f(x)=\frac{x}{21} \quad ,x=1,2,3,4,5,6.$$

(ا) اثبت أن f(x) دالة كثافة احتمال (ب) ما هو احتمال أن الزمن الذي يستغرقه الحاسب : بالضبط 4 ثواني في التنفيذ – على الأقل 3 ثواني وليس أكثر من 5 ثواني – أكثر من 5 ثواني .

– ١٩ – إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يترددون على شركة ما في اليوم هو :-

x	P(X=x)	x	P(X=x)
5	0.02	30	0.10
10	0.05	35	0.10
15	0.15	40	0.09
20	0.20	45	0.04
25	0.25		

أوجد القيمة المتوقعة لعدد العملاء في يوم محدد .

– ٢٠ – أى من الدوال التالية تمثل توزيع احتمالي :-

ا) $f(x)=x$, $x=\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ ب) $f(x)=\frac{2}{x}$, $x=3,4,5$

جـ) $f(x)=\frac{x^2}{4}$, $x=1,2,3$ د) $f(x)=\frac{x-3}{9}$, $x=3,4,5,6,7$

$f(x)=\frac{x^2-1}{50},\ x=2,3,4,5$ (ر) $f(x)=\frac{x}{3},\ x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$ (ز)

$f(x)=\frac{1}{x},\ x=2,3,4,5$ (هـ)

– ٢١ – إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير X هو :–

$$f(x)=\binom{3}{x}(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{3-x},x=0,1,2,3.$$

أوجد : (ا) توقع وتباين المتغير العشوائي X   (ب) $E[\{(x-E(x)\}^2]$

(جـ) $E[(2x+1)^2]$ (د) $E(2x^2+6)$

– ٢٢ – الجدول الآتي يعطى الدالة الاحتمالية للمتغيرين Y,X احسب معامل الارتباط وأوجد

$Cov(X\ ,\ 3X-7)\ ,\ Cov(2X\ ,Y)\ ,\ \sigma^2_{3X-2Y}\ ,\ E(7X-2Y)$

y \ x	0	1	h(y)
0	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{10}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$
g(x)	$\frac{10}{15}$	$\frac{5}{15}$	

– ٢٣ – الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات المعيبة في الإنتاج اليومي لأحد المصانع

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.884	0.1	0.01	0.003	0.002	0.001

المطلوب : (ا) تمثيل التوزيع بيانيا   (ب) التباين والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعيبة ٠

– ٢٤ – وعاء يحتوى على 40 كرة مرقمة من 1 إلى 40 فإذا تقرر اختيار كرة من الوعاء أذكر المتغير العشوائي X الذي يمثل رقم الكرة المختارة من الصندوق وأوجد توقعة وتباينه ٠