الفصل السادس

بعض التوزيعات الاحتمالية

Some Probability Distributions

بالرغم من وجود أنواع لانهائية من التوزيعات الاحتمالية فإن عدد محدود منهم يستخدم في مجال واسع من التطبيقات الإحصائية • يتناول هذا الفصل بعض هذه التوزيعات •

(٦-١) التوزيع المنتظم **Uniform Distribution**

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، حيث أن جميع قيم المتغير العشوائي X لها الاحتمال نفسه • لهذا التوزيع بعض التطبيقات المحدودة خاصة في المعاينة الإحصائية •

تعريف : إذا كان فراغ المتغير العشوائي X هو $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_c\}$ فإن التوزيع المنتظم يأخذ الصيغة التالية :

$$f(x;c) = \frac{1}{c} \ , \ x = x_1, x_2, \ldots, x_c.$$

سوف نستخدم الصيغة $f(x;c)$ بدلا من $f(x)$ لتوضيح أن التوزيع المنتظم يعتمد على المعلمة c •

مثال (٦-١) يتكون الكتاب الخاص بدائرة المعلومات البريطانية لعام ما من 20 جزء، فإذا كان المطلوب اختيار جزءاً عشوائيا • أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل رقم الجزء المختار •

الحل • عند اختيار جزءاً عشوائيا من 20 جزء فإن كل عنصر في فراغ المتغير العشوائي $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_{20}\}$ يقع باحتمال $\frac{1}{20}$ وعلى ذلك يكون لدينا توزيع منتظم بدالة كثافة احتمال :

$$f(x;20) = \frac{1}{20} \ , \ x = 1,2,\ldots,20.$$

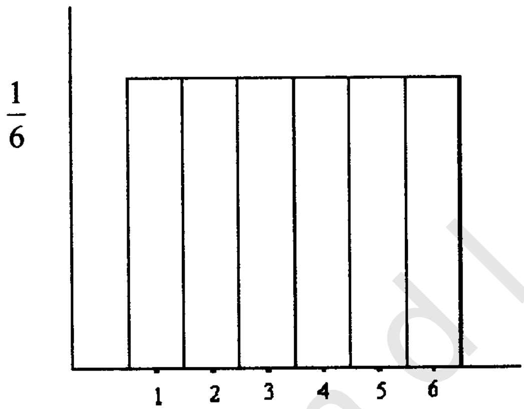
مثال (٦-٢) أوجد التوزيع الاحتمالي لكل العينات الممكن اختيارها من الحجم $n = 2$ من القيم $\{1,2,3,4\}$ •

الحل • عدد العينات الممكن اختيارها هو $\binom{4}{2} = 6$ وهي على التوالي $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ • كل العينات السابقة لها نفس الفرصة في الظهور عند اختيار عينة عشوائية من الحجم $n = 2$ من القيم $\{1,2,3,4\}$ • توزيع العينات يتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال :

$$f(x\,;6) = \frac{1}{6} \ , \ x = 1,2,\ldots,6.$$

حيث 1 تعنى العينة $\{1,2\}$ و 2 تعنى العينة $\{1,3\}$...الخ ،وعلى ذلك فإن احتمال اختيار العينة $\{1,2\}$ هو $P(\{1,2\}) = P(X=1) = \frac{1}{6}$ ، عموما عند اختيار عينة عشوائية من الحجم n من مجتمع محدود حجمه N فإن قيمة c في صيغة التوزيع المنتظم تعطى من $\binom{N}{n}$ ،

عند التمثيل البياني للتوزيع المنتظم بالمدرج **histogram** نحصل على مستطيلات متساوية الارتفاع كما في شكل (٦-١) لمثال (٦-٢).



شكل (٦-١)

(٦-٢) توزيع ذي الحدين **Binomial Distribution**

في كثير من الأحيان قد تشتمل تجربة ما على n من المحاولات المتكررة المستقلة بحيث يكون لكل محاولة نتيجتين اثنتين فقط، تسمى الأولى نجاح وتسمى الأخرى فشل، حيث احتمال النجاح p واحتمال الفشل $q = 1 - p$ ، تسمى التجربة التي تحقق هذه الشروط بتجربة ثنائي الحدين **binomial experiment** ، فعلى سبيل المثال عند إلقاء عملة متزنة 5 مرات حيث كل محاولة قد تكون صورة أو كتابة وذلك تحت فرض أن النجاح هو ظهور الصورة، هنا المحاولات المتكررة مستقلة كما أن احتمال النجاح ثابت من محاولة إلى أخرى ويساوى $p = \frac{1}{2}$ ، ويجب ملاحظة أنه يمكن تعريف النجاح والفشل عكس ذلك تماما، أى جعل ظهور الكتابة نجاح، وفى هذه الحالة تتبدل قيمتي p, q ،

عموما يمكن القول أن تجربة ذي الحدين هي التجربة التي تحقق الشروط الآتية :-

- ا - التجربة التي تتكون من n من المحاولات المتكررة.
- ب - نتيجة كل محاولة يمكن تصنيفها إلى نجاح أو فشل.
- جـ - احتمال النجاح، وهو p يبقى ثابت من محاولة إلى محاولة.
- د - المحاولات المتكررة مستقلة بعضها عن بعض.

ففي حالة إلقاء عملة 3 مرات وتحت فرض أن النجاح هو ظهور الصورة تعتبر عدد حالات النجاح متغير عشوائي يأخذ قيم صحيحة من 0 إلى 3 . النواتج الثمانية الممكنة وقيم x المقابلة معطاة في الجدول التالي.

النواتج	TTT	THT	TTH	HTT	THH	HTH	HHT	HHH
x	0	1	1	1	2	2	2	3

وحيث أن المحاولات مستقلة باحتمال نجاح ثابت ويساوى $\frac{1}{2}$ ، فإن :

$$P(HTH) = P(H)P(T)P(H) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}.$$

وبنفس الشكل، تحدث النواتج الأخرى باحتمال $\frac{1}{8}$. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X معطى في الجدول التالي :

x	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

هذا و يمكن وضع صيغة للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X على الشكل :-

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}, \quad x = 0,1,2,3.$$

تعريف : عدد حالات النجاح X في n من المحاولات لتجربة ذي الحدين يسمى متغير عشوائي يتبع ذي الحدين binomial random variable .

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X يتبع ذي الحدين يسمى توزيع ذي الحدين binomial distribution وسوف نرمز له بالرمز b(x;n,p) وذلك لأن قيمه تعتمد على عدد المحاولات واحتمال النجاح في محاولة معطاه. وعلى ذلك عند إلقاء عملة 3 مرات فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X سوف يعاد كتابته كالآتي :

$$b(x;3,\frac{1}{2}) = \frac{\binom{3}{x}}{8}, \quad x = 0,1,2,3.$$

الآن دعنا نعمم المثال السابق للحصول على صيغه لـ $b(x;n,p)$ • أي أننا نرغب في إيجاد صيغه تعطى احتمال الحصول على x حالات نجاح و $n-x$ حالات فشل في n من المحاولات لتجربة ذي الحدين • أولا نوجد احتمال الحصول على x حالات نجاح و $(n-x)$ حالات فشل في ترتيب معين • وحيث أن المحاولات مستقلة، فإنه يمكن ضرب كل الاحتمالات المقابلة للنواتج المختلفة • كل نجاح يحدث باحتمال p وكل فشل يحدث باحتمال $q=1-p$ • وعلى ذلك، الاحتمال للترتيب المعين هو $p^x q^{n-x}$ وبالطبع ترتيب الضرب هنا غير مهم • الآن لا بد من حساب العدد الكلى من نقاط العينة في التجربة (الترتيبات) والتي تعطى x حالات نجاح و $(n-x)$ حالات فشل • هذا العدد يساوى عدد الطرق لتبديل n من العناصر حيث x منهم من نوع (نجاح) و $n-x$ من نوع آخر (فشل) • وهذا يحدث بطرق عددها $\binom{n}{x}$ • وحيث أن الترتيبات التي عددها $\binom{n}{x}$ متنافية في إمكانية الحدوث وتحدث باحتمال متساوي ، فإنه يمكن الحصول على توزيع ذي الحدين بجمع الاحتمالات لكل الترتيبات أو ببساطة ضرب $p^x q^{n-x}$ في $\binom{n}{x}$ • وعلى ذلك فإن الصيغة العامة لتوزيع ذي الحدين سوف تكون على الشكل :

$$b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}, x=0,1,2,\ldots n.$$

ويجب أن نتذكر أنه في مثال إلقاء عملة 3 مرات حيث $n=3, p=\frac{1}{2}$ فإن :

$$b(x;3,\frac{1}{2})=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=\frac{\binom{3}{x}}{8}$$

والتي تتفق مع الإجابة التي سبق أن حصلنا عليها •

في الحقيقة فإن التوزيع الاحتمالي لذي الحدين أشتق أسمه من أن $(n+1)$ من الحدود في مفكوك ذي الحدين $(p+q)^n$ تقابل قيم $b(x;n,p)$ ، حيث $x=0,1,2,\ldots n$ ، أي أن :

$$(p+q)^n=\binom{n}{0}q^n+\binom{n}{1}pq^{n-1}+\binom{n}{2}p^2q^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}p^n$$
$$=b(0;n,p)+b(1;n,p)+\ldots+b(n;n,p).$$

وحيث أن $p+q=1$ فإننا نجد أن $\sum_{x=0}^{n} b(x;n,p)=1$ وهو الشرط الذي لابد من تحققه لأي توزيع إحتمالى • في الحقيقة سوف يكون الاهتمام بإيجاد $P(X\le r)$ أو $P(a\le X\le b)$ • لحسن الحظ فإن $\sum_{x=0}^{r} b(x;n,p)$ معطاة في جدول ذي الحدين في ملحق(١) حيث **n=5,10,15,20,25.**

مثال (٦-٣) إذا ألقيت زهرة نرد متزنة 6 مرات . أوجد احتمال ظهور الرقم 5 أربع مرات بالضبط .

الحل . هنا يعتبر ظهور الرقم 5 نجاح وعلى ذلك احتمال النجاح في كل محاولة من المحاولات الستة المستقلة هو $\frac{1}{6}$. وعلى ذلك احتمال (الفشل) عدم ظهور الرقم خمسة هو $\frac{5}{6}$. بفرض أن X تمثل عدد مرات ظهور الرقم 5 ولها دالة كثافة الاحتمال :

$$b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}, x=0,1,2,\dots n.$$

وعلى ذلك الاحتمال المطلوب هو :

$$b(4;6,\frac{1}{6})=\binom{6}{4}(\frac{1}{6})^{4}(\frac{5}{6})^{2}$$

$$=\frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{5^{2}}{6^{6}}=0.00803755.$$

مثال (٦-٤) صندوق به 10 ثمرات منها 3 تالفة، اختيرت منه ثمرتين . أحسب احتمال أن تكون واحدة تألفه (السحب بإرجاع) .

الحل . بفرض أن X تمثل عدد الثمار التالفة ولها دالة كثافة الاحتمال :

$$b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}, x=0,1,2,\dots n.$$

وعلى ذلك الاحتمال المطلوب هو :

$$b(1;2,0.3)=\binom{2}{1}(0.3)^{1}(0.7)^{1}$$

$$=\frac{2!}{1!1!}\cdot(0.3)^{1}(0.7)^{1}=0.42.$$

مثال (٦-٥) احتمال أن يشفى مريض من مرض نادر في الدم هو 0.2، فإذا كان معروف أن 15 شخص عندهم هذا المرض ما هو احتمال أن (ا) يشفى 9 على الأقل من المرض (ب) يشفى من 4 إلى 8 من هذا المرض (جـ) يشفى على الأكثر أثنين من هذا المرض؟

الحل . (ا) بفرض أن X تمثل عدد المرضى الذين سوف يشفوا من هذا المرض فإن :

$$P(x\geq 9)=1-P(x<9)=1-P(x\leq 8)$$

$$=1-\sum_{x=0}^{8}b(x;15,0.2)=1-0.999=0.001.$$

(ب)

$$P(4\leq X\leq 8)=\sum_{x=0}^{8}b(x;15,0.2)-\sum_{x=0}^{3}b(x;15,0.2)$$

$$=0.999-0.648=0.351.$$

(جـ)
$$P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} b(x;15,0.2) = 0.3980.$$

نظرية (٦-١) الوسط الحسابي والتباين لتوزيع ذي الحدين $b(x;n,p)$ هما :

$$\mu = np \;\; , \sigma^2 = npq$$

البرهان : بفرض أن نتيجة المحاولة رقم j يمثل بالمتغير العشوائي I_j والــذي يسمى (متغير برنولى) والذي يأخذ القيمة 0 أو 1 باحتمالات p,q على التوالي، أي أن $I_j = 0$ تدل على فشل و $I_j = 1$ تدل على نجاح. وعلى ذلك، في تجربة ذي الحدين يمكن كتابة عـدد حـالات النجاح كحاصل جمع لعدد n من متغيرات برنولى المستقلة، وعلى ذلك :

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_n.$$

الوسط الحسابي لأي I_j هو $E(I_j) == 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$ وعلى ذلك، وباستخدام نظرية (٤-٦) فإن الوسط الحسابي لتوزيع ذي الحدين هو :

$$\mu = E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \ldots + E(I_n)$$
$$= p + p + \ldots + p = np.$$

وذلك لأن عدد الحدود يساوى n .

التباين لأي I_j هو :

$$\sigma_{I_j}^2 = E(I_j - p)^2 = E(I_j^2) - p^2$$
$$= (0)^2 q + (1)^2 p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

وعلى ذلك ، وباستخدام نظرية (٤-٨) فإن التباين لتوزيع ذي الحدين هو :

$$\sigma_X^2 = \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \ldots + \sigma_{I_n}^2$$
$$= pq + pq + \ldots + pq = npq.$$

مثال (٦-٦) أوجد الوسط الحسابي والتباين لتوزيع ذي الحدين في مثال (٦-٥) .

الحل . حيث $n = 15$, $p = 0.2$ وباستخدام نظرية (٦-١) فإن :

$$\mu = (15)(0.2) = 3 \;\; , \sigma^2 = (15)(0.2)(0.8) = 2.4.$$

تجربة ذي الحدين تسمى تجربة متعددة الحــــدود **multinomial experiment** إذا كانت كل محاولة لها **k** من النواتج حيث **k>2** . عموما إذا كانت لمحاولة معطاة **k** من النواتــج الممكنة $E_1, E_2, \ldots, E_k$ باحتمالات $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ، فإن التوزيع المتعدد الحدود ســوف يعطى الاحتمال أن E_1 تحدث x_1 من المرات وأن E_2 تحدث x_2 من المــرات و...و E_k تحدث x_k من المرات في **n** من المحاولات المستقلة، حيث $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$. سوف

نرمز للتوزيع المتعدد الحدود بالرمز $f(x_1, x_2, ..., x_k; p_1, p_2, ..., p_k, n)$ • من الواضح أن $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$ لأن نتيجة كل محاولة لابد أن تكون واحدة من k من النواتج الممكنة• لاشتقاق الصيغة العامة سوف نتبع نفس الأسلوب المستخدم في توزيع ذي الحدين• وحيث أن المحاولات مستقلة وأنه في ترتيب معين نحصل على x_1 نواتج من E_1 و x_2 من E_2 و ••• و x_k من E_k باحتمال $p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$ • العدد الكلى من الترتيبات والذي يؤدى إلى نفس النتائج في n من المحاولات المستقلة يساوى عدد الطرق لتبديل n من العناصر حيث x_1 منها تنتمي إلى E_1 و x_2 تنتمي إلى E_2 و •••و x_k تنتمي إلى E_k والذي يحدث بطرق عددها $\frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!}$ • وحيث أن الترتيبات (نقاط العينة) التي عددها $\frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!}$ متنافية في إمكانية الحدوث وتحدث باحتمال متساوي ، فإنه يمكن الحصول على التوزيع المتعدد الحدود بضرب الاحتمال لترتيب معين في $\frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!}$ •وعلى ذلك فإن التوزيع متعدد الحدود يكون على الصورة :

$$f(x_1, x_2, ..., x_k; p_1, p_2, ..., p_k, n) = \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k},$$

حيث $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ • وقد اشتق التوزيع المتعدد الحدود اسمه من أن الحدود في المفكوك $(p_1 + p_2 + ... + p_k)^n$ تقابل كل القيم الممكنة للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_k; p_1, p_2, ..., p_k, n)$ •

مثال (٦-٧) ألقيت زهرة نرد متزنة 11 مرة أوجد احتمال الحصول على رقم واحد مرة ، ورقم 2 مرتين ورقم 3 خمس مرات ورقم أربعة مرتين ورقم 6 مرة واحدة•

الحل • احتمال ظهور أي رقم عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة متساوي ويساوى $\frac{1}{6}$ وعلى ذلك فإن الاحتمال المطلوب هو :

$$f(1,2,5,2,1;\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},11)$$
$$=\frac{11!}{1!2!5!2!1!}(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^5(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^1$$
$$=\frac{11!}{1!2!5!2!1!}\cdot\frac{1}{6^{11}}=0.000229219.$$

(٦-٣) التوزيع الهندسي الزائدى **Hypergeometric Distribution**

بفرض أن مجتمع يتكون من عدد محدود من الوحدات، وليكن N ، وأن هناك **k** من الوحدات من النوع A (نجاح) والوحدات الباقية من نوع B (فشل)، و بفرض أن عينة عشوائية من الحجم n اختيرت من هذا المجتمع بدون إرجاع. بفرض أن X تمثل عدد الوحدات من نوع A التي تظهر في العينة. اهتمامنا سوف يكون في إيجاد P(X=x). التجربة السابقة تسمى تجربة الهندسي الزائدى **hypergeometric experiment** . تحقق تجربة الهندسي الزائدى الشروط التالية :

-ا- عينة عشوائية من الحجم n تختار من مجتمع يحتوى على N من الوحدات.

-ب- في المجتمع الذي حجمه N فإن k من الوحدات تصنف نجاح و $N-k$ تصنف فشل.

تعريف : عدد حالات النجاح في تجربة الهندسي الزائدى يسمى متغير عشوائي يتبع الهندسي الزائدى.

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي الزائدى يسمى التوزيع الهندسي الزائدى ويمثل بالرمز $h(x;N,n,k)$ وذلك لأن عدد حالات النجاح x تعتمد على k الموجودة في الفئة N ،حيث يختار من N وحدات عددها n . في المثال (٦-٤) استخدمنا توزيع ذي الحدين إذا كان السحب بإرجاع (المحاولات مستقلة) . الآن بفرض أن السحب بدون إرجاع (المحاولات غير مستقلة) . في هذه الحالة سوف يكون هناك $\binom{3}{1}$ طريقة لاختيار ثمرة تالفة ولكل واحدة من هذه الطرق يوجد $\binom{7}{1}$ طريقة لاختيار ثمرة سليمة. وعلى ذلك عند اختيار ثمرتين من الصندوق بدون إرجاع فإن عدد الطرق الكلية للحصول على ثمرة تالفة وثمرة سليمة هو $\binom{3}{1}\binom{7}{1}$. العدد الكلى من الطرق لاختيار ثمرتين من الصندوق المحتوى على 10 ثمرات هو $\binom{10}{2}$.وعلى ذلك احتمال الحصول على ثمرة تالفة وثمرة سليمة عند اختيار عينة من الحجم n=2 من الصندوق المحتوى على 10 ثمرات هو :

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15}$$

المثال السابق يوضح ما يسمى بتجربة الهندسي الزائدى.

مثال (٦-٨) يراد اختيار لجنة من ثلاثة أشخاص من بين 4 سيدات و 5 رجال والمطلوب إيجاد التوزيع الاحتمالي لعدد السيدات في اللجنة المختارة.

الحل . بفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد السيدات في اللجنة المختارة. الشروط لتجربة الهندسي الزائد متوفرة وعلى ذلك :

$$P(X=0)=h(0;9,3,4)=\frac{\binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{10}{84},$$

$$P(X=1)=h(1;9,3,4)=\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{40}{84},$$

$$P(X=2)=h(2;9,3,4)=\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{30}{84},$$

$$P(X=3)=h(3;9,3,4)=\frac{\binom{4}{3}\binom{5}{0}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

ويمكن تمثيل التوزيع الهندسي الزائدى بالجدول التالي :

x	**0**	**1**	**2**	**3**
P(X=x)	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

هذا ويمكن وضع صيغة لإيجاد التوزيع الاحتمالي للمثال السابق على الشكل :

$$P(X=x)=h(x;9,3,4)=\frac{\binom{4}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{9}{3}},\ x=0,1,2,3.$$

الآن يمكن تعميم صيغة التوزيع الاحتمالي في المثال السابق وذلك للحصول على صيغة للدالة $h(x;N,n,k)$. العدد الكلى للعينات من الحجم n المختارة من N من الوحدات هو $\binom{N}{n}$. هذه العينات يفترض أنها متساوية في إمكانية الحدوث . يوجد $\binom{k}{x}$ طريقة لاختيار x

من k حالات النجاح ، ولكل طريقة من هذه الطرق يمكن اختيار (n-x) من حـــالات الفشـــل بطرق عددها $\binom{N-k}{n-x}$ • وعلى ذلك العدد الكلى من العينات المرغوب فيها من $\binom{N}{n}$ عينـــة هو $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$ • وعلى ذلك فإن التوزيع الهندسي الزائدى يمكن الحصول عليه كالآتي :

$$h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x=0,1,2,\ldots,n.$$

مثال (٦-٩) اختيرت عينة عشوائية من الحجم n=6 من صندوق يحتوى على 5 كرات حمراء و 4 كرات سوداء • ما هو احتمال ظهور ثلاث كرات حمراء في العينة المختارة•

الحل • باستخدام التوزيع الهندسي الزائدى حيث $x=3, k=5, n=6, N=9$ ، فإن :

$$h(3;9,6,5)=\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{3}}{\binom{9}{6}}=\frac{40}{84}.$$

نظرية (٦-٢) الوسط الحسابي والتباين للتوزيع الهندسي الزائدى هما :

$$\mu=\frac{nk}{N}, \sigma^2=\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N}).$$

إذا كانت n صغيرة بالنسبة إلى N فإنه يمكن استخدام توزيـــع ذي الحديـــن كتقريـــب للتوزيع الهندسي الزائدى حيث $p=\frac{k}{N}$ •وعلى ذلك يمكن تقريب الوسط الحســـابي والتبـــاين بالصيغة :

$$\mu=np=\frac{nk}{N}, \sigma^2=npq=n\cdot\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N}).$$

بمقارنة الصيغتين السابقتين بالصيغتين في نظرية (٦-٢) فإننا نجد أن الوسط الحسابي هـــو نفســـه بينما التباين يختلف بمعامل تصحيح $\frac{N-n}{N-1}$ وهذا يمكن إهماله عندما تكون n صغيرة بالنسبة إلى بالنسبة N .

مثال (٦-١٠) في سنترال وجد أنه من بين 4000 تليفون تم تركيبهم في منطقة حديثة يوجد 3000 منهم يختلف لونهم عن اللون الأسود • تحدث 5 أشخاص عشوائيا، فما هو احتمال أن 2 منهم بالضبط سوف يتحدثون من تليفون لونه أسود•

الحل • وحيث أن المجتمع حجمه N=4000 وهذا الحجم كبير نسبيا بالنسبة لحجم العينـــة n=5 فإننا سوف نقرب الاحتمال المطلوب باستخدام توزيع ذي الحدين• احتمال أن شخص يتحـــدث من تليفون أسود هو 0.25 وعلى ذلك احتمال أن 2 بالضبط يتصلون من تليفون أسود هو :

$$h(2;4000,5,1000) \approx b(2;5,0.25)$$
$$= \sum_{x=0}^{2} b(x;5,0.25) - \sum_{x=0}^{1} b(x;5,0.25) = 0.896 - 0.633 = 0.263.$$

يمكن تعميم التوزيع الهندسي الزائدى ليعامل للحالة التي يكون فيها المجتمع مقسم إلى k من الخلايا $A_1, A_2, ..., A_k$ حيث a_1 وحدة في الخلية A_1 و a_2 وحدة في الخلية A_2 و ... و a_k وحدة في الخلية A_k • الآن سوف يكون اهتمامنا في إيجاد صيغة لاحتمال أن العينة العشوائية من الحجم n سوف تعطى x_1 عنصر من A_1 و x_2 عنصر من A_2 و ... و x_k عنصر من A_k والتي سوف تمثل الاحتمال بالصيغة :

$$f(x_1, x_2, ..., x_k; a_1, a_2, ..., a_k, N, n).$$

لإيجاد صيغة عامة فإننا نعرف أن العدد الكلي من العينات من الحجم n التي يمكن اختيارها من مجتمع حجمه N هو $\binom{N}{n}$ • وعلى ذلك هناك $\binom{a_1}{x_1}$ طريقة لاختيار x_1 من الوحدات الموجودة في A_1 ولكل واحدة من هذه الطرق فإننا يمكن اختيار x_2 من الوحدات الموجودة في A_2 بطرق عددها $\binom{a_2}{x_2}$ • وعلى ذلك يمكن اختيار x_1 من الوحدات الموجودة في A_1 و اختيار x_2 من الوحدات الموجودة في A_2 بطرق عددها $\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}$ • وبالاستمرار في هذا الأسلوب يمكن اختيار كل الوحدات التي عددها n والتي تحتوى على x_1 من الوحدات الموجودة في A_1 و x_2 من الوحدات الموجودة في A_2 و ... و x_k من الوحدات الموجودة في A_k بطرق عددها $\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}..\binom{a_k}{x_k}$. وعلى ذلك فإن التوزيع الاحتمالي المطلوب سوف يكون :

$$f(x_1, x_2, ..., x_k; a_1, a_2, ..., a_k, N, n) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}..\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}.$$

حيث $\sum_{i=1}^{k} a_i = N, \ \sum_{i=1}^{k} x_i = n$ •

مثال (٦-١١) يحتوى صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء• يرغب شخص في اختيار 4 كرات من الصندوق، ما هو الاحتمال أن يختار كرة حمراء و2 كرة بيضاء وواحدة سوداء ؟

الحل • باستخدام الصيغة العامة للتوزيع الهندسي الزائدى حيث $a_1 = 3, x_1 = 1, a_2 = 4, x_2 = 2, a_3 = 5, x_3 = 1, N = 12, n = 4$ فإن :

$$f(1,2,1;3,4,5,12,4) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{90}{495}.$$

(٦-٤) توزيع بواسون **Poisson Distribution**

أن التجارب التي تعطينا عدد حالات النجاح والتي تحدث في فترة زمنية معينة أو في منطقة محددة، تسمى تجارب بواسون **poisson experiment** • الفترة الزمنية المعينة قد تكون دقيقة، يوم، أسبوع، شهر أو حتى سنة• وعلى ذلك تجربة بواسون قد تنتج مشاهدات لمتغير عشوائي X يمثل عدد المكالمات التليفونية في الساعة والمستقبلة من مكتب، أو عدد الأيام في السنة والتي تغلق فيها بعض المدارس بسبب الصقيع في بلد ما• المنطقة المحددة يمكن أن تكون خط الأعداد الحقيقية، مساحة، حجم أو ربما قطعة من المعدن• في هذه الحالة X يمكن أن تمثل عدد الفئران في فدان من القمح، عدد البكتريا في لتر من الماء النقي، عدد الأخطاء في صفحة من قاموس• تجارب بواسون يجب أن تحقق الشروط التالية :

-ا- متوسط عدد حالات النجاح، μ ، والتي تحدث في الفترة الزمنية المعطاة أو في المنطقة المحددة معلوم•

-ب- احتمال وقوع حالة نجاح واحدة في فترة قصيرة أو منطقة صغيرة يتناسب مع طول هذه الفترة أو حجم هذه المنطقة ولا يعتمد على عدد حالات النجاح التي تحدث خارج هذه الفترة أو المنطقة•

-جـ- احتمال وقوع أكثر من حالة نجاح في الفترة القصيرة أو المنطقة الصغيرة مهمل•

تعريف : عدد حالات النجاح X في تجربة بواسون يسمى متغير عشوائي يتبع بواسون•

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X يتبع توزيع بواسون يمثل بالصيغة $p(x;\mu)$ وذلك لأن قيمته تعتمد فقط على μ • متوسط عدد حالات النجاح التي تحدث في الفترة المعينة أو المنطقة المحددة تساوى التباين• اشتقاق توزيع بواسون خارج نطاق هذا الكتاب• التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يتبع بواسون هو :

$$p(x;\mu)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!},x=0,1,2,\ldots,$$

حيث μ متوسط عدد حالات النجاح التي تحدث في الفترة المعطاة أو المنطقة الخاصة و $e=2.71828...$ •

الجدول في ملحق (٢) يحتوى على حاصل جمع احتمالات بواسون أي $\sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$ لقيم محددة من μ تتراوح بين 0.1 إلى 20 • سوف نشرح طريقة عمل هذه الجداول بالمثالين التالين•

مثال (٦-١٢) تعطُل ماكينة لتصنيع الحلوى في المتوسط خمس مرات في الأسبوع ما هو الاحتمال أن تعطل الماكينة ثلاث مرات خلال أسبوع.

الحل . باستخدام توزيع بواسون حيث $\mu = 5,\ x = 3$ ومن جدول بواسون في ملحق (٢) فإن :

$$p(3;5) = \frac{e^{-5}5^3}{3!} = \sum_{x=0}^{3} p(x;5) - \sum_{x=0}^{2} p(x;5)$$
$$0.265 - 0.125 = 0.14.$$

مثال (٦-١٣) إذا كان متوسط عدد الفئران في فدان من القمح هو $\mu = 3$. أوجد احتمال وجود على الأقل 12 فأرا في فدان معطى.

الحل . بفرض أن X تمثل عدد الفئران في فدان من القمح وباستخدام جداول بواسون في ملحق (٢) فإن :

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12)$$
$$== 1 - \sum_{x=0}^{11} p(x;3)$$
$$= 1 - P(X \leq 11) = 1 - 1.000 = 000.0.$$

المدرج التكراري لكل من توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون تقريبا لهم نفس الشكل عندما تكون n كبيرة و p تقترب من الصفر وعلى ذلك إذا تحقق هذا الشرط، فإن توزيع بواسون بمتوسط $\mu = np$، يمكن استخدامه كتقريب لإيجاد احتمالات توزيع ذي الحدين. إذا اقتربت p من الواحد يمكن تغيير ما قمنا بتعريفه نجاح إلى فشل والعكس الفشل إلى نجاح . وعلى ذلك تتغير p إلى قيمة قريبة من الصفر

مثال (٦-١٤) يحتوى كتاب على 1000 صفحة يوجد بها 400 خطا موزعة على صفحات الكتاب ما هو احتمال الحصول على ستة أخطاء في صفحة مختارة ؟

الحل . المتغير العشوائي X يمثل عدد الأخطاء في إحدى الصفحات وهو يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمتين n, p حيث $p = \frac{1}{1000}$ و n=400 وحيث أن n كبيرة و p صغيرة فإن توزيع X يؤول إلى توزيع بواسون بمعلمة $\mu = np = (400)(\frac{1}{1000}) = 0.4$ و باستخدام جداول بواسون في الملحق (٢) حيث $\mu = 0.4$, فإن :

$$p(x = 6) = b(x;400,0.001) \approx p(6;0.4),$$

$$p(6;0.4)=\frac{e^{-0.4}0.4^6}{6!}=\sum_{x=0}^{6}p(x;0.4)-\sum_{x=0}^{5}p(x;0.4)=1.000-1.000=000.0.$$

مثال (٦-١٥) بفرض أنه في المتوسط يوجد شخص من بين 1000 شخص يدخن السجائر في مدينة ما. أوجد احتمال أنه في عينة عشوائية من 8000 شخص نحصل على 6 أشخاص يدخنون.

الحل. في هذا المثال يكون لدينا تجربة ذي الحدين حيث n=8000 ، p=0.001 وحيث أن p تقترب كثيرا من الصفر وأن n كبيرة بدرجة كافية، فإنه يمكن استخدام توزيع بواسون حيث $\mu=(8000)(0.001)=8$. وعلى ذلك إذا كانت X تمثل عدد المدخنين، فإن :

$$p(X=6)=b(x;8000,0.001)$$

$$\approx p(6;8)=\sum_{x=0}^{6}p(x;8)-\sum_{x=0}^{5}p(x;8)$$

$$=0.313-0.191=0.122.$$

(٦-٥) توزيع ذي الحدين السالب Negative Binomial Distribution

بفرض أن تجربة ما لها نفس الخصائص التي سبق أن ذكرناها لتوزيع ذي الحدين، ولكن مع تكرار المحاولات حتى يمكن الحصول على عدد ثابت من حالات النجاح. وعلى ذلك، بدلا من إيجاد احتمال الحصول على x نجاح في n من المحاولات، فإن الاهتمام سوف يكون في إيجاد احتمال أن النجاح رقم k سوف يحدث في المحاولة رقم x . التجارب من هذا النوع تسمى تجارب ذي الحدين السالب negative binomial experiment . بفرض أن لاعب كرة السلة ينجح في التصويب نحو الهدف في 80% من المحاولات. المطلوب إيجاد احتمال أن ينجح في تصويب الهدف الخامس في المحاولة رقم 8 . سوف نرمز للنجاح في التصويب بالرمز F' ونرمز للفشل في التصويب بالرمز F ، وعلى ذلك لترتيب مطلوب سوف نحصل على $F'F'FFFF'F'F'$ والذي يحدث باحتمال:

$(0.8)(0.8)(0.2)(0.2)(0.2)(0.8)(0.8)(0.8)=(0.8)^5(0.2)^3$. ويمكن حصر كل الترتيبات بإعادة ترتيب حالات النجاح والفشل ما عدا المحاولة الأخيرة، والتي لابد أن تكون النجاح رقم خمسة. العدد الكلي من الترتيبات الممكنة يساوى عدد الطرق لتبديل 7 عناصر منها 4 من نوع نجاح و 3 من نوع فشل. هذا العدد الكلي من الترتيبات الممكنة يحدث بطرق متنافية عددها $\binom{7}{4}$. وحيث أن X تمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على 5 أهداف، فإن :

$$P(X=8)=\binom{7}{4}(0.8)^5(0.2)^3=0.0917504.$$

تعريف : العدد X من المحاولات والذي ينتج k حالات نجاح في تجربة ذي الحدين السالب يسمى متغير عشوائي يتبع ذي الحدين السالب .

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يتبع ذي الحدين السالب يسمى توزيع ذي الحدين السالب، وسوف نمثله بالصيغة $b^*(x;k,p)$ حيث أن قيمه تعتمد على عدد حالات النجاح المطلوبة واحتمال النجاح في المحاولة المعطاه . لإيجاد الصيغة العامة سوف نوجد أولا احتمال الحصول على

نجاح في المحاولة رقم x والتي تكون مسبوقة بعدد (k-1) من حالات النجاح و (x-k) من حالات الفشل وذلك في ترتيب خاص . وحيث أن المحاولات مستقلة، فإنه يمكن ضرب كل الاحتمالات المقابلة لكل نتيجة مطلوبه . كل حالة نجاح تحدث باحتمال p وكل حالة فشل تحدث باحتمال q=1-p . وعلى ذلك، الاحتمال أن الترتيب المطلوب ينتهي بحالة نجاح هو $p^{k-1}q^{x-k}p = p^kq^{x-k}$. العدد الكلى من نقاط العينة في التجربة والذي ينتهي بحالة نجاح، بعد k-1 من حالات النجاح و x-k من حالات الفشل في أي ترتيب، يساوى عدد الطرق لتبديل x-1 من المحاولات منهم k-1 حالات نجاح و x-k حالات فشل والتي تساوى $\binom{x-1}{k-1}$. كل الترتيبات المطلوبة تكون متنافية في إمكانية الحدوث وتحدث باحتمال متساوي وهو p^kq^{n-k}، وعلى ذلك يمكن الحصول على الاحتمال المطلوب بضرب p^kq^{x-k} في $\binom{x-1}{k-1}$، وعلى ذلك توزيع ذي الحدين السالب يأخذ الصيغة التالية :

$$b^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1}p^kq^{x-k},\ \ x = k, k+1, k+2, \ldots$$

مثال (٦-١٦) إذا كان احتمال ولادة ذكر في أي ولادة تمر بها سيدة هو $\frac{1}{2}$ أوجد احتمال أن تضع ذكرين بعد أربع ولادات .

الحل . باستخدام توزيع ذي الحدين السالب حيث $x = 4,\ k = 2,\ p = \frac{1}{2}$ فإن :

$$b^*(4;2,0.5) = \binom{3}{1}0.5^2 0.5^2$$

$$= \frac{3!}{1!2!}\cdot(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2 \ = \frac{3}{16}.$$

في الحقيقة أشتق اسم توزيع ذي الحدين السالب من أن كل حد في المفكوك $p^k(1-q)^{-k}$ يقابل قيمة من قيم $b^*(x;k,p)$ حيث $x = k, k+1, k+2, \ldots$ •

عندما n=1 فإننا نحصل على الحالة الخاصة من توزيع ذي الحدين السالب، أي نحصل على التوزيع الاحتمالي لعدد المحاولات المطلوبة للحصول على حالة نجاح واحدة • توزيع ذي الحدين السالب سوف يختزل إلى الشكل :

$$b^*(x;1,p) = pq^{x-1}, x = 1,2,3,\ldots$$

والذي يسمى التوزيع الهندسي وسوف نرمز له بالرمز g(x;p) •

مثال (٦-١٧) أوجد (أ) التوزيع الاحتمالي لعدد المحاولات اللازمة للحصول على صورة واحدة وذلك عند إلقاء عملة متزنة (ب) احتمال الحصول على صورة في المحاولة الرابعة •

الحل • باستخدام التوزيع الهندسي حيث $p = \frac{1}{2}$ نحصل على :

(أ) $$g(x;0.5) = (0.5)(0.5)^{x-1}, x = 1,2,3,\ldots$$

(ب) $$g(4;\frac{1}{2}) = (0.5)(0.5)^3 = \frac{1}{16}.$$

(٦-٦) التوزيع الطبيعي **Normal Distribution**

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة في علم الإحصاء، حيث يصف كثيرا من المجتمعات الموجودة في الطبيعة ، الصناعة ، الأبحاث. دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

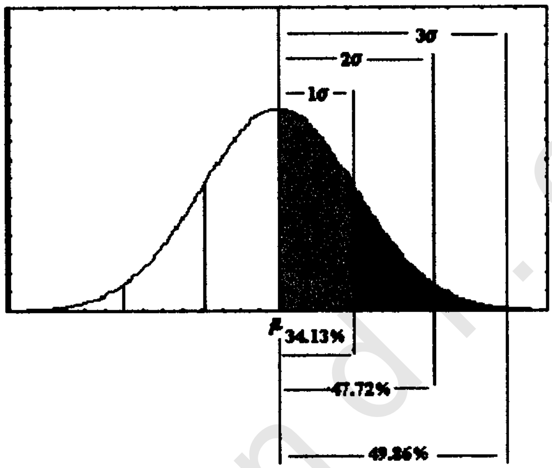
على الفترة $-\infty < x < \infty$ حيث e=2.71828... و π =3.14159... و μ و σ هما الوسط الحسابي (المتوسط) والانحراف المعياري على التوالي. بيان f(x) في شكل (٦-٢) على شكل ناقوس متماثل حول العمود المقام على الوسط الحسابي • ينطبق الوسط الحسابي على الوسيط وأيضا على المنوال • يتقارب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$ •

لأي توزيع طبيعي فإن :-

(ا) المساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي بين النقطتين μ و (μ + σ) تمثل 34.13% من المساحة الكلية كما يتضح من شكل (٦-٢).

(ب) المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي بين النقطتين μ و (μ+2σ) تمثل 47.72 من المساحة الكلية كما يتضح من شكل (٦-٢).

(جـ) المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي بين النقطتين μ و (μ+3σ) تمثل % 49.86 من المساحة الكلية كما يتضح من شكل (٦-٢).



شكل (٦-٢)

وبما أن المنحنى الطبيعي متماثل فإن القيم السابقة تتحقق عند طرح الانحراف المعياري من المتوسط .

(٦-٦-١) التوزيع الطبيعي القياسي :

Standard Normal Distribution

إذا كان التوزيع الطبيعي متوسطه صفر وتباينه الواحد الصحيح فإنه يسمي التوزيع الطبيعي القياسي . بفرض أن Z ترمز لمتغير عشوائي متصل له توزيع طبيعي قياسي فإن دالة الكثافة الاحتمالية لذلك المتغير تأخذ الشكل الآتي :

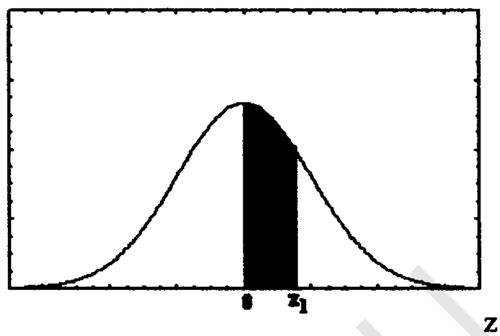
$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty \le z \le \infty.$$

إذا كان z_1 عدد حقيقي موجب فان الاحتمال $(0 < Z < z_1)$ يساوي المساحة المظللة في شكل (٦-٣)، ويمكن الحصول عليها من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣). المساحات الواقعة تحت المنحني الطبيعي القياسي غير معطاة في الجدول لقيم z السالبة ولكن يمكن حسابهم باستخدام خاصية التماثل للمنحنى الطبيعي. المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي

القياسي بين $z = 0$ و $z = -z_1$ تســاوي المساحة الواقعة بين $z = z_1$ و $z = 0$ أي أن :

$$P(-z_1 < Z < 0) = P(0 < Z < z_1)$$

معظم المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي تقع في الفترة (3,3-) ونادرا ما نجد قيم تقع خارج هذه الفترة .



شكل (٦-٣)

مثال (٦-١٨) إذا كان Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي احسب الاحتمالات الآتية مع توضيح ذلك بيانيا .

(ا) $P(0 < Z < 1.05)$ (ب) $P(-1.06 < Z < 1.06)$

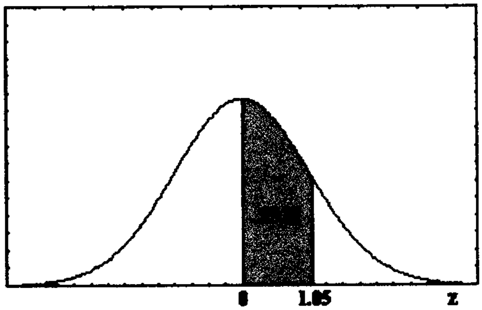
(جـ) $P(-0.47 < Z < 0.95)$ (د) $P(1.6 < Z < 2)$

(هـ) $P(Z > 2.02)$ (و) $P(Z < -0.45)$ (ز) $P(Z < 1.07)$

الحل . (أ) لإيجاد قيمة الاحتمال $P(0 < Z < 1.05)$ نبحث في العمود الأول على الشــمال من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) عن القيمة 1.0 ثم نتحرك أمام هذه القيمة أفقيا حتى نصل إلى العمود الذي رأس عنوانه الرقم 0.05 فتكون هي المساحة المطلوبة أي أن :

$$P(0 < Z < 1.05) = 0.3531.$$

والتي تمثل المساحة المظللة في شكل (٦-٤) .



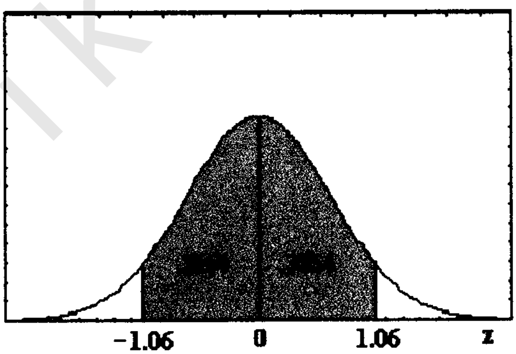
شكل (٦-٤)

(ب) الاحتمال المطلوب هو $P(-1.06 < Z < 1.06)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شـــكل (٦-٥) ٠

ونظرا لتماثل المنحنى الطبيعي فان :

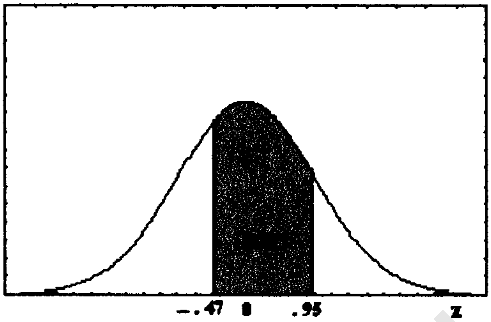
$$P(-1.06 < Z < 1.06) = P(-1.06 < Z < 0) + P(0 < Z < 1.06)$$
$$= 2P(0 < Z < 1.06) = 2(0.3554) = 0.7108.$$

شكل (٦-٥)



(جـ) الاحتمال المطلوب هو $P(-0.47 < Z < 0.95)$ وهو يساوي المســـاحة المظللـــة في شكل (٦-٦) ٠ ونظرا لتماثل المنحنى الطبيعي فإن :

$$P(-0.47 < Z < 0.95) = P(-0.47 < Z < 0) + P(0 < Z < 0.95)$$
$$= P(0 < Z < 0.47) + P(0 < Z < 0.95) = 0.1808 + 0.3289 = 0.5097.$$

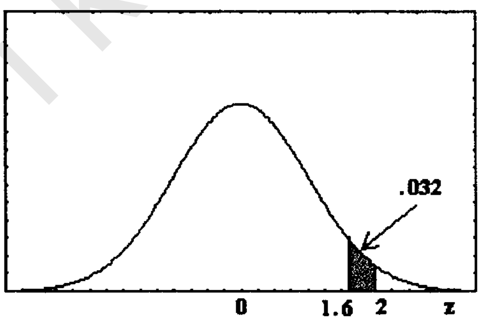


شكل (٦-٦)

(د) الاحتمال المطلوب هو $P(1.6 < Z < 2)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شكل(٦-٧) .

أي أن :

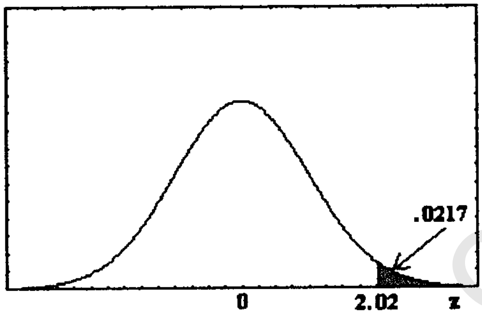
$$P(1.6 < Z < 2) = P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 1.6)$$
$$= 0.4772 - 0.4452 = 0.032.$$



شكل (٦-٧)

(هـ) من شكل (٦-٨) وباستخدام حقيقة أن $P(Z > 0)$ يساوي نصف المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي أي أن $P(Z > 0) = 0.5$ وعلى ذلك :

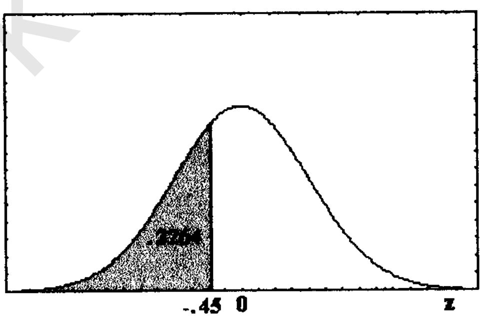
$$P(Z > 2.02) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 2.02)$$
$$= 0.5 - 0.4783 = 0.0217.$$



شكل (٦-٨)

(و) الاحتمال المطلوب هو $P(Z < -0.45)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شـــكل (٦-٩) ونظرا لتماثل المنحنى الطبيعي فإن :

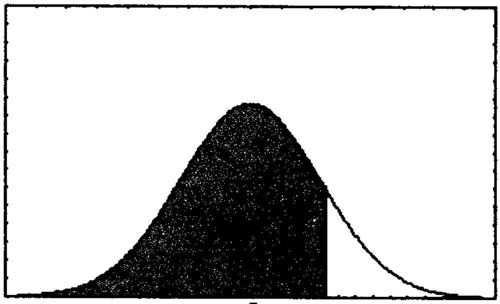
$$P(Z < -0.45) = P(Z > 0.45)$$
$$= P(Z > 0) - P(0 < Z < 0.45)$$
$$= 0.5 - 0.1736 = 0.3264.$$



شكل (٦-٩)

(ز) الاحتمال المطلوب هو $P(Z < 1.07)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شـــكل (٦-١٠).
ولان المنحنى الطبيعي متماثل ومساحة كل جانب من جانبي المنحنى تساوي 0.5 فان :

$$P(Z < 1.07) = P(Z < 0) + P(0 < Z < 1.07)$$
$$= 0.5 + 0.3577 = 0.8577.$$



شكل (٦-١٠)

استخدام التوزيع الطبيعي القياسى لاستخراج المساحات تحت المنحنى الطبيعي

الآن نعود مرة أخري إلى حالة متغير عشوائي طبيعي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ. يمكن تحويل المتغير X إلى متغير طبيعي قياسي Z باستخدام الصيغة التالية :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

التحويل من X إلى Z يمثل انتقال لنقطة الأصل مصحوبا بتغير لمقياس الرسم. عندما $x=\mu$ فإن $z=0$ ، وعندما $x=\mu-\sigma$ فإن $z=-1$ ، وعندما $x=\mu+2\sigma$ فإن $z=2$ وهكذا. أي أن مقياس الرسم قد تغير حيث تناظر مسافة σ على محور السينات مسافة قدرها واحد على محور z ، وعلى ذلك يمكن استخدام جداول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) لحساب الاحتمالات لأي متغير عشوائي طبيعي كما يتضح من الأمثلة التالية .

مثال (٦-١٩) في مدينة صغيرة وجد أن أعلى درجة حرارة مسجلة يوميا خلال فصل الربيع لها متوسط 20°c وانحراف معياري 5°c. بفرض أن المتغير العشوائي X (أعلى درجة حرارة يوميا) يخضع للتوزيع الطبيعي، أوجد النسبة المئوية للأيام التي فيها أعلى درجة حرارة :

(أ) بين 22°c و 26°c

(ب) على الأقل 28°c

الحل . (أ) إذا كان X يرمز لأعلى درجة حرارة مسجلة يوميا فان X يكون متغير عشوائي طبيعي متوسطه $\mu=20$ وانحرافه المعياري $\sigma=5$. المتغير الطبيعي القياسي المناظر هو :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-20}{5}.$$

عندما $x_1 = 22$ فإن :

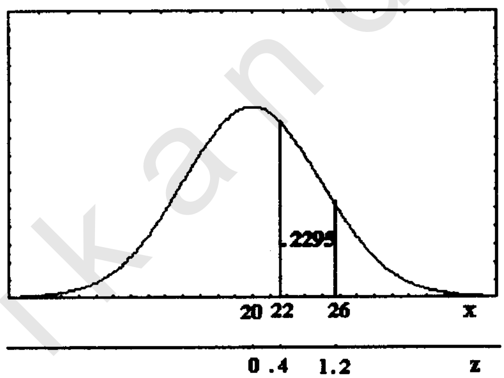
$$z_1 = \frac{22-20}{5} = 0.4.$$

وعندما $x_2 = 26$ فان :

$$z_2 = \frac{26-20}{5} = 1.2.$$

الاحتمال المطلوب هو $p(22<X<26)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شكل (٦-١١) .
أي أن :

$$P(22 < X < 26) = P(0.4 < Z < 1.2)$$
$$= 0.3849 - 0.1554 = 0.2295.$$



شكل (٦-١١)

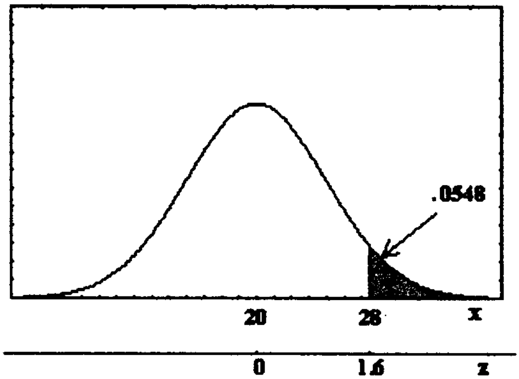
أي أن النسبة المئوية للأيام التي فيها أعلى درجة حرارة بين (22°c و 26°c) هي 22.95 % .

(ب) عندما $x_1 = 28$ فإن :

$$z_1 = \frac{28-20}{5} = 1.6.$$

الاحتمال المطلوب هو $P(X \geq 28)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شكل (٦-١٢) . أي أن

$$P(X > 28) = P(Z > 1.6)$$
$$= P(Z > 0) - P(0 < Z < 1.6)$$
$$= 0.5 - 0.4452 = 0.0548.$$



شكل (٦-١٢)

أى أن النسبة المئوية للأيام التي فيها أعلى درجة حرارة فوق 28°c هي 5.48 % .

مثال (٦-٢٠) إذا كانت مبيعات الغاز الطبيعي في الأسبوع في محطة لتعبئة الغاز يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 3000$ جالون وانحراف معياري $\sigma = 200$ جالون. أوجد الاحتمال أن المبيعات في الأسبوع ما بين 3200 و 3500 جالون .

الحل . إذا كان X متغير عشوائي يرمز لمبيعات الغاز الطبيعي في الأسبوع ، فان X يكون متغير عشوائي طبيعي متوسطه $\mu = 3000$ وانحرافه المعياري $\sigma = 200$.

عندما $x_1 = 3200$ فــإن :

$$z_1 = \frac{3200 - 3000}{200} = 1.0.$$

وعندما $x_2 = 3500$ فإن :

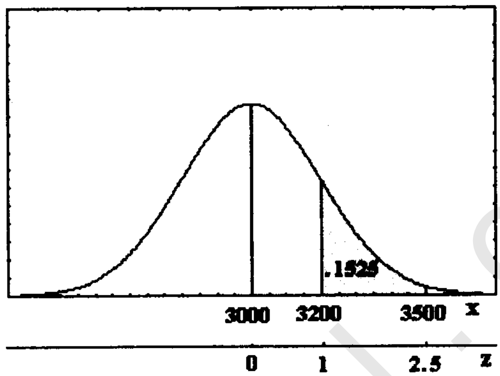
$$z_2 = \frac{3500 - 3000}{200} = 2.5.$$

الاحتمال المطلوب هو :

$$P(3200 < X < 3500)$$

وهو يساوي المساحة المظللة في شكل (٦-١٣) أى أن :

$$P(3200 < X < 3500) = P(1.0 < Z < 2.5)$$
$$= P(0 < Z < 2.5) - P(0 < Z < 1)$$
$$= 0.4938 - 0.3413 = 0.1525.$$



شكل (٦-١٣)

مثال (٦-٢١) إذا كانت كمية المطر الذي يسقط سنويا في منطقة معينة متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 2$ بوصة. أوجد المتوسط السنوي لسقوط المطر في عـــام محدد إذا كان احتمال سقوط أكثر من 30 بوصة من المطر في هذا العام يساوي 0.0548 .

الحل . بفرض أن X متغير عشوائي طبيعي له متوسط غير معروف وانحـــراف معيـــاري $\sigma = 2$، المتغير الطبيعي القياسي المناظر يكون :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

عندما $x_1 = 30$ فإن :

$$z_1 = \frac{30 - \mu}{2}.$$

ولكن احتمال أن X أكثر من 30 هو 0.0548، كما هو معطى، وعلى ذلك فان :

$$P(Z \geq \frac{30 - \mu}{2}) = 0.0548.$$

أي أن :

$$P(0 \leq Z \leq \frac{30 - \mu}{2}) = 0.4452.$$

ولكن من جدول التوزيع الطبيعي القياسي المعطى في ملحق (٣) فان :

$$P(0 \le Z \le 1.6) = 0.4452.$$

أي أن $\frac{30-\mu}{2} = 1.6$ ومنه $\mu = 26.8$ بوصة .

مثال (٦-٢٢) إذا كانت حموضة الدم الآدمي مقاس بدلالة الأس الأيدروجين متغير عشوائي طبيعي متوسطه 7.2 = μ . إذا كان احتمال أن يكون مستوى الأس الايدروجيني اكبر من 7.5 يساوي 0.0222 أوجد الانحراف المعياري للتوزيع .

الحل ، عندما $x_1 = 7.5$ فإن :

$$z_1 = \frac{7.5-7.2}{\sigma} = \frac{0.3}{\sigma}.$$

أي أن :

$$P(Z \ge \frac{0.3}{\sigma}) = 0.0222.$$

وبالتالي فان :

$$P(0 \le Z \le \frac{0.3}{\sigma}) = 0.5 - 0.0222 = 0.4778.$$

ولكن من الجدول الطبيعي القياسي في ملحق (٣) نجد أن :

$$P(0 \le Z \le 2.01) = 0.4778.$$

أي أن $\frac{0.3}{\sigma} = 2.01$ ومنه $\sigma = \mathbf{0.149}$.

<u>(٦-٦-٢) التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين</u>

يتم الحصول على الاحتمالات المرتبطة بتجارب ذي الحدين مباشرة من الصيغة **b(x;n,p)** أو من الجدول في ملحق (١) وذلك عندما تكون **n** صغيرة كما سبق ذكره في البند (٦-٢) . إذا كانت **n** غير موجودة في الجدول فإنه يمكن حساب احتمالات ذي الحدين بالطرق التقريبية . تناولنا في البند (٦-٤) كيفية استخدام توزيع بواسون لتقريب احتمالات ذي الحدين عندما تكون **n** كبيرة و **p** تقترب جدا من الصفر.

يعطي التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = np$ وتباين $\sigma^2 = npq$ تقريب ممتاز لتوزيع ذي الحدين عندما تكون **n** كبيرة و **p** تقترب من **0.5** ، في الحقيقة يمكن استخدام التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = np$ وتباين $\sigma^2 = npq$ كتقريب لتوزيع ذي الحدين حتى ولو كانت **n** ليست كبيرة جدا و **p** ليست قريبة من **0** أو **1**. وعلى أي حال، فان هذا التقريب يكون جيدا إذا

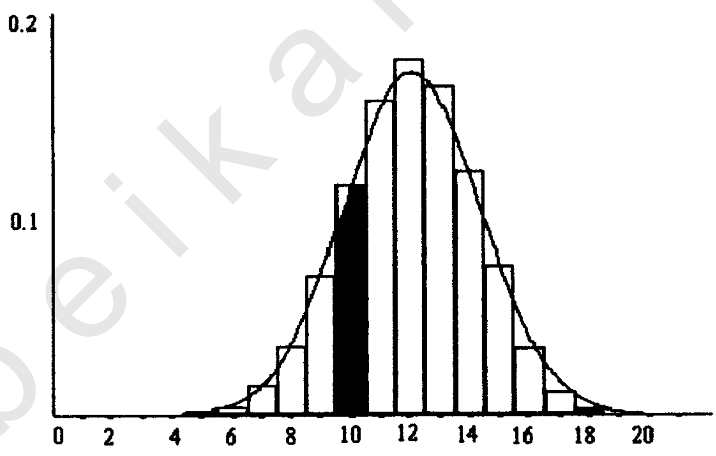
كانت كلا من np و nq أكبر من 5 . للتوضيح، بفرض أن X متغير عشوائي يتبع ذي الحديـــن حيث n=20 و p = 0.6. شكل (٦-١٤) يوضح المدرج الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي وأيضا المنحني الطبيعي بمتوسط وانحراف معيارى:

$$\sigma=\sqrt{(20)(0.6)(0.4)}=2.19 \quad , \mu=(20)(0.6)=12.$$

لمتغير عشوائي X يتبع توزيع ذي الحدين فإن P(X=x) يمثل مساحة المستطيل والذي تقع القيمة x في منتصف قاعدته وعلى ذلك يكون b (x ; n , p) مساوٍ تقريبا للمساحة تحت المنحنى الطبيعي الواقعة بين القيمتين $x-\frac{1}{2}$ و $x+\frac{1}{2}$. على سبيل المثال لحساب P(X=10) وباستخدام صيغة توزيع ذي الحدين فإن :

$$P(X=10)=\sum_{x=0}^{10} b(x;20,0.6)-\sum_{x=0}^{9} b(x;20,0.6)$$
$$=0.245-0.128=0.117.$$

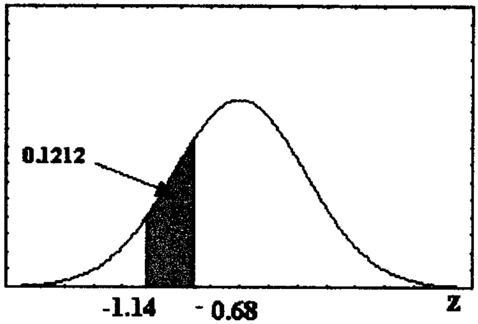
نفس الاحتمال السابق تقريبـــا يســـاوى المســـاحة المظللـــة تحـــت المنحـــنى الطبيعـــي بـــين $x_1=9.5$ و $x_2=10.5$ كما في شكل (٦-١٤).



شكل (٦-١٤)

أي أنه عندما $x_1=9.5$ فـــإن :

$$z_1=\frac{9.5-12}{2.19}=-1.14.$$



شكل (٦-١٥)

وعندما $x_2 = 10.5$ فإن :

$$z_2 = \frac{10.5-12}{2.19} = -.68.$$

إذا كان X متغير عشوائي يتبع ذي الحدين وZ متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي فإن :

$$P(X=10) = b(10;,20,0.6) \approx P(-1.14 \le Z \le -0.68)$$
$$= 0.3729 - 0.2517 \quad = 0.1212.$$

والتي تتفق مع القيمة المضبوطة التي حصلنا عليها باستخدام صيغة ذي الحدين (0.117) •

مثال (٦-٢٣) إذا ألقيت زهرتا نرد 120 مرة وإذا كان اهتمامنا بمجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للنردين • فما هو احتمال ظهور المجموع 7 على الأقل 15مرة •

الحل • بفرض أن المحاولات مستقلة وبما أن احتمال ظهور مجموع 7 في المحاولة الواحدة هو $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ • فإذا كان X متغير عشوائي يتبع ذي الحدين ويمثل عدد مرات ظهور المجموع 7 • فإن $x = 0,1,...,120$ وعلى ذلك فان الاحتمال المطلوب هو :

$$P(X \ge 15) = \sum_{x=15}^{120} b(x;120,\frac{1}{6}).$$

و لصعوبة حساب قيمة هذا الاحتمال فإننا نلجأ إلى التوزيع الطبيعي ،كتقريب لتوزيع ذي الحدين، والذي متوسطه وانحرافه المعياري على التوالي :

$$\mu = np = (120)(\frac{1}{6}) = 20\ ,$$

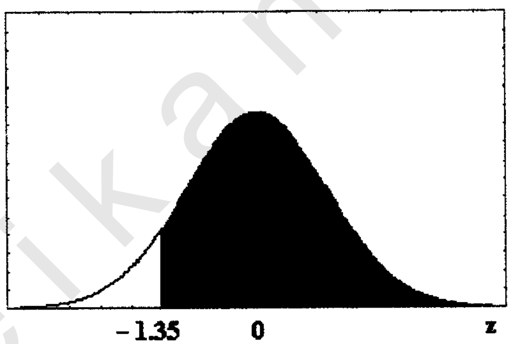
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(120)(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})} = \sqrt{\frac{50}{3}} = 4.08.$$

للحصول على الاحتمال المطلوب فإننا نحتاج إلى حساب المساحة على يمين القيمة $x_1 = 14.5$ ، عندما $x_1 = 14.5$ فإن:

$$z_1 = \frac{14.5 - 20}{4.08} = -1.35$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة في شكل (٦-١٦) ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن :

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= \sum_{x=15}^{120} b(x;120,\frac{1}{6}) \approx P(Z \geq -1.35) \\ &= 0.5 + P(-1.35 \leq Z \leq 0) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.35) \\ &= 0.5 + 0.4115 = 0.9115. \end{aligned}$$



شكل (٦-١٦)

مثال (٦-٢٤) إذا كانت نسبة المصابين بارتفاع ضغط الدم في مجتمع كبير 4%. فـإذا تم اختيار 500 شخصاً عشوائياً من هذا المجتمع وتم قياس ضغط دمهم، فما هو احتمال وجـود 15 شخصا على الأقل مصابين بارتفاع ضغط الدم.

الحل . إذا كان X هو عدد الأشخاص المصابين بارتفاع ضغط الدم فانه يكون عبارة عن متغـير عشوائي متقطع يتبع توزيع ذي الحدين حيث :

$$b(x;500,0.04)=\binom{500}{x}(0.04)^{x}\ (0.96)^{500-x} \qquad ,x=0,1,\ldots,500.$$

والاحتمــال المطلــوب هــو :

$$b(x\geq 15)=b(15;500,0.04)+b(16;500,0.04)+\ldots+b(500;500,0.04)$$

ومن الصعب حساب قيمة هذا الاحتمال وبالتالي فإننا نلجأ إلى التوزيع الطبيعي، كتقريب لتوزيع ذي الحدين، والذي متوسطه وتباينه على التوالي هما :

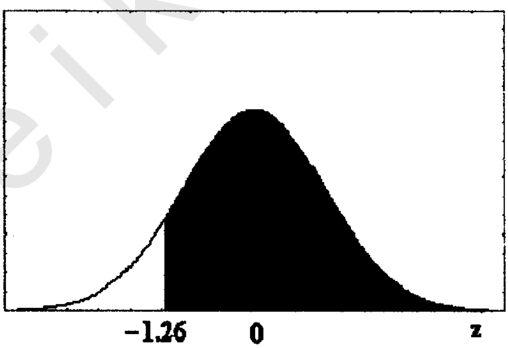
$$\mu = np=(500)(0.04)=20,$$

$$\sigma^2 =npq=(500)(0.04)(0.96)=19.2.$$

أي أن $\sigma=4.38$ ، للحصول على الاحتمال المطلوب فإننا نحتاج إلى حساب المساحة على يمين القيمة $x_1=14.5$ ، عندما $x_1=14.5$ فإن :

$$z_1=\frac{14.5-20}{4.38}=-1.26.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة في شكل (٦-١٧) ومن جدول التوزيع الطبيعـــي القياسي في ملحق (٣) فإن :



شكل (٦-١٧)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 15) &\approx P(Z \geq -1.26) \\
&= 0.5 + P(-1.26 \leq Z \leq 0) \\
&= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.26) \\
&= 0.5 + 0.3962 = 0.8962.
\end{aligned}
$$

مثال (٦-٢٥) إذا كان من المعروف أن 6% من الأفراد الذكور مصابون بعمى الألوان . فإذا تم اختيار عينة من 200 فرد من الذكور وتم اختبارهم لمعرفة إصابتهم بعمى الألوان من عدمه .

أوجد احتمال أن يكون عدد المصابين بعمى الألوان :

(أ) على الأقل 20 فردا (ب) على الأكثر 15 فردا (جـ) بالضبط 15 فردا

(د) $P(15 \leq X \leq 20)$ ٠

الحل . (أ) سوف نستخدم التوزيع الطبيعي، كتقريب لذي الحدين، بمتوسط

$$\mu = np = (200)(0.06) = 12$$

وتباين

$$\sigma^2 = npq = (200)(0.06)(0.94) = 11.28.$$

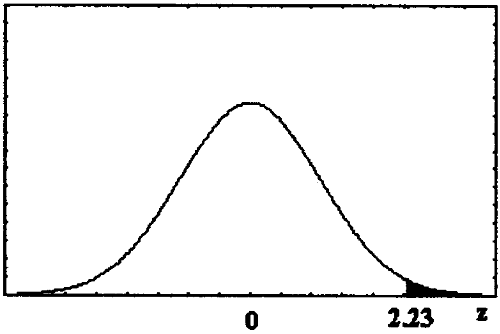
أي أن $\sigma = 3.36$. (ا) للحصول على الاحتمال $P(X \geq 20)$ فإننا نحتاج إلى حساب المساحة على يمين القيمة $x_1 = 19.5$ ٠ عندما $x_1 = 19.5$ فإن :

$$z_1 = \frac{19.5 - 12}{3.36} = 2.23.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة في شكل (٦-١٨) ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن :

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 20) &= \sum_{x=20}^{200} b(x;200,0.06) \\
&\approx P(Z \geq 2.23) \\
&= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.23) \\
&= 0.5 - 0.4871 = 0.0129.
\end{aligned}
$$

شكل (٦-١٨)

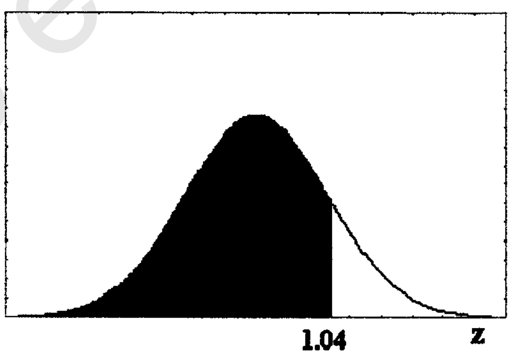


(ب) للحصول على الاحتمال $P(X \leq 15)$ فإننا نحتاج إلى حساب المساحة على يسار القيمة $x_1 = 15.5$ ، عندما $x_1 = 15.5$ فإن :

$$z_1 = \frac{15.5 - 12}{3.36} = 1.04.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة في شكل (٦-١٩) . ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن :

$$\begin{aligned} P(X \leq 15) &= \sum_{x=0}^{15} b(x;200,0.06) \\ &\approx P(Z \leq 1.04) \\ &= 0.5 + p(0 \leq Z \leq 1.04) \\ &= 0.5 + 0.3508 = 0.8508. \end{aligned}$$



شكل (٦-١٩)

ج) $P(X=15)=\sum_{x=0}^{15} b(x;200,0.06)-\sum_{x=0}^{14} b(x;200,0.06).$

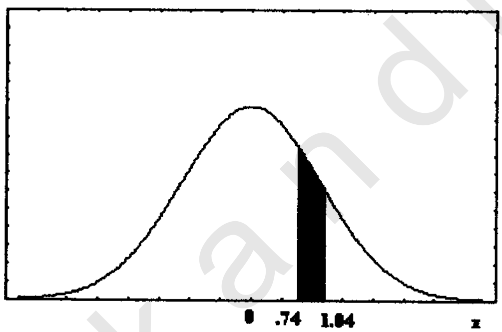
نفس الاحتمال السابق تقريبا يساوى المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $x_1=14.5$ و $x_2=15.5$ ، عندما $x_1=14.5$ فإن :

$$z_1=\frac{14.5-12}{3.36}=0.74.$$

وعندما $x_2=15.5$ فإن :

$$z_2=\frac{15.5-12}{3.36}=1.04.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة في شكل (٦-٢٠) ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن :



شكل (٦-٢٠)

$$\begin{aligned}P(X=15)&\approx P(0.74\le Z\le 1.04)\\&=P(0\le Z\le 1.04)-P(0\le Z\le 0.74)\\&=0.3508-0.2704=0.0804.\end{aligned}$$

د) $P(15\le X\le 20)=\sum_{x=0}^{20} b(x;200,0.06)-\sum_{x=0}^{14} b(x;200,0.06).$

نفس الاحتمال السابق تقريبا يساوى المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $x_1=14.5$ و $x_2=20.5$ ،

عندما $x_1=14.5$ فإن :

$$z_1=\frac{14.5-12}{3.36}=0.74.$$

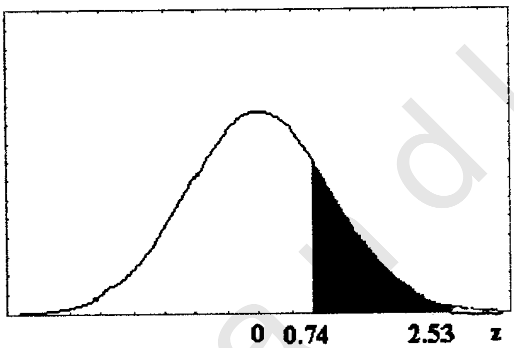
وعندما $x_2 = 20.5$ فإن :

$$z_2 = \frac{20.5 - 12}{3.36} = 2.53.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة في شكل (٦-٢١) ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن :

$$\begin{aligned} P(15 \le X \le 20) &\approx P(0.74 \le Z \le 2.53) \\ &= P(0 \le Z \le 2.53) - P(0 \le Z \le 0.74) \\ &= 0.4943 - 0.2704 = 0.2399. \end{aligned}$$

شكل (٦-٢١)



تمارين

-١- إذا ألقيت زهرة نرد متزنة مرة واحدة، وإذا كان X يمثل عدد النقط التي تظهر على الوجه العلوي للزهرة عند الرمى. المطلوب (ا) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

(ب) $P(X > 4)$, $P(X - 3 < 0)$ (جـ) التوقع والتباين للمتغير العشوائي X .

(د) التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

-٢- فصل دراسي يتكون من 70 تلميذا بحيث يمثل كل تلميذ عددا من واحد إلى 70 . بفرض أنه تقرر اختيار تلميذ عشوائيا، وإذا كان X يمثل العدد الذي يتم إختياره. أوجد الاحتمالات الآتية

(ا) $P(X \le 8)$ (ب) $P(5 \le X \le 30)$.

-٣- أوجد صيغة للتوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي X الذي يمثل رقم الكـــرة المختـــارة عشوائيا من وعاء يحتوى على 10 كرات مرقمة من واحد إلى 10، ما هو الاحتمـــال أن يكـــون الرقم المختار أقل من 5 ؟

-٤- أوجد التوزيع المنتظم للعينات من الحجم n=3 المراد اختيارها من مجتمع حجمه N=6 ،

-٥- أوجد التوزيع الاحتمالي للفئات الجزئية من الأشهر من الحجم n=3 ،

-٦- إذا كان X متغير عشوائي منفصل يتبع التوزيع المنتظم، أي أن

$$f(x;N) = \frac{1}{N}, x = 1,2,\ldots,N$$

أوجد E(X) وتباين X ،

-٧- إذا اختير رقما عشوائيا من بين الأعداد 0,1,...,9 (ا) أوجد التوزيع الاحتمالي للعـــدد الذي يظهر (ب) التمثيل البياني لهذا التوزيع،

-٨- لوحظ لفترة طويلة أن صياد يصيب الهدف باحتمال 0.9 ، فإذا أطلق الصياد 4 طلقات على هدف، أوجد احتمال (ا) إصابة الهدف 3 مرات؟ (ب) إصابة الهدف مرتين على الأكثر،

-٩- خلال فترة طويلة من الزمن وجد أن فاعلية دواء في شفاء الحالات التي يوصف لها هو 20% ، إذا وصف هذا الدواء لأربعة مرضى ، أوجد احتمال (أ) يكون له تأثير في الشفاء لثلاثة مرضى على الأقل،

-١٠- أثبتت إحصائيات إحدى شركات التأمين أن 0.002 من الحوادث المســـجلة في الشـــركة خطيرة ، احسب : (ا) احتمال عدم وجود حوادث خطيرة في 40 حادثة مســـجلة تم اختيارهـــا عشوائيا (ب) احتمال وقوع ثلاثة حوادث خطيرة في 20 حادثة مسجلة تم اختيارها عشوائيا،

-١١- احتمال أن تصيب أي طائرة أحد أهداف العدو هو 0.9، فإذا أغارت خمس طائرات علـــى الهدف أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصيب الهدف (ب) متوســـط التوزيـــع وكذلك الانحراف المعيارى،

-١٢- إذا كان 90% من الطلاب في جامعة ما ينجحون في مادة الإحصاء، فما احتمـــال فشـــل أثنين في فصل يتضمن ثلاثين طالبا ؟

-١٣- إذا كانت المحركات الأربعة لطائرة تعمل مستقلة بعضها عن بعض، فإن احتمال تعطـــل أي منها والطائرة في الجو هو 0.5 ، ما احتمال أن يكون الطيران ناجح إذا كانت عملية الطيران تحتاج لمحرك واحد على الأقل ؟

-١٤- إذا كان احتمال أن 4% من الوحدات في مصنع ما تالفة، ما هو احتمال إنه على الأكـــثر توجد وحدة تالفة في عينة عشوائية من الحجم n=30 ؟

-١٥- احتمال أن يكسب فريق ما في أي مباراة يلعبها 0.75 فإذا كان الفريق سوف يلعب 8 مباريات أوجد احتمال أن يكسب (أ) مباريتين بالضبط (ب) على الأقل مباراة واحدة (ج) أكثر من نصف المباريات.

-١٦- أسرة بها خمسة أطفال. أوجد احتمال أن يكون بينهم (أ) 3 أولاد (ب) عدد الأولاد أقل من عدد البنات وذلك تحت فرض أن احتمال أن يكون الطفل ولد هو 0.5 .

-١٧- احتمال أن لاعب كرة القاعدة يحصل على ضربة في أي وقت يلعب فيه هو 0.3 . فإذا كان سوف يلعب 100 مباراة في الشهر القادم أوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .

-١٨- إذا كانت فاعلية مبيد معلن عنه في قتل الحشرات في رشة واحدة هو 90% فإذا كان هناك 10,000 حشرة سوف تعامل برشة واحدة من هذا المبيد. أوجد التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لعدد الحشرات التي تقتل.

-١٩- قدرت شركة للطيران احتمال وصول طائرتها في ميعادها والتي تقوم من البلد A إلى البلد B هو 0.96 . فإذا قامت خمس طائرات لهذه الشركة من مطار البلد A متجه إلى البلد B أوجد (أ) التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في ميعادها (ب) احتمال وصول طائرتين في ميعادهم (جـ) التمثيل البياني لهذا التوزيع.

-٢٠- اشترى تاجر عشر ثلاجات. فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو 0.1 فما هو احتمال إن يكون من بينها (أ) ثلاجتين تالفتين (ب) ثلاجتين على الأقل تالفتين (جـ) أربعة على الأقل تالفة.

-٢١- تعمل 10 ماكينات في مصنع، فإذا كان احتمال أنه في نهاية اليوم سوف تعطل الماكينة هو 0.2 . وإذا كانت الماكينات تعمل بصورة مستقلة عن بعضها أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الماكينات التي تعمل حتى نهائة اليوم مع تمثيل التوزيع الاحتمالي بالمدرج التكراري.

-٢٢- بفرض أنه يوجد من بين كل 400 سيارة من إنتاج مصنع معين لإنتاج السيارات 20 سيارة غير سليمة، أي غير صالحة للاستعمال. سحبت عينة عشوائية مكونة من 3 سيارات من إنتاج ذلك المصنع، أوجد احتمال أن يكون من بينها سيارتين غير سليمة.

-٢٣- إذا كان احتمال حصول أبوين على طفل أشقر الشعر هو 0.25، فإذا كان في الأسرة 8 أطفال. ما احتمال أن يكون نصفهم ذو شعر أشقر.

-٢٤- يأخذ مراقب جودة إنتاج عينة عشوائية من 10 صمامات عشوائيا من شحنة كبيرة من الصمامات معروف عنها أنها تحتوى على 30% صماما معيبا. ما هو احتمال أن يكون عدد الصمامات المعيبة في العينة أكثر من أو يساوى 2 ؟

-٢٥- إذا كان احتمال إصابة هدف بقذيفة واحدة هو 0.2، ما هو احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل خلال 3 قذائف ؟

-٢٦- احتمال كشف جهاز رادار لطائرة معادية هو 0.99، فإذا كان لدينا 4 أجهزة تعمل مستقلة بعضها عن بعضها، المطلوب إيجاد (ا) ظهور طائرة معادية في سمائنا (ب) ظهور طائرة معادية على شاشات أربعة منها .

-٢٧- إذا كان 5% من نوع معين من صمامات التلفزيون يحترق قبل انتهاء مدة الكفالة . فإذا بيع ألف صمام فما هو متوسط وتباين X ، حيث X تمثل عدد الصمامات المحترقة قبل مدة كفالتها ؟

-٢٨- إذا كان احتمال تحمل نوع معين من المصابيح للضغط العالي هو 0.1 فإذا أخذنا عينة من 200 مصباح فما هو احتمال ألا يتحمل 20 منها للضغط العالي؟

-٢٩- في مدينة كبيرة كان عدم الوفاق بين الزوجين سببا لـ 60% من حالات الطلاق . أوجد احتمال أن أربعة من حالات الطلاق الستة القادمة في المدينة سيعزى إلى هذا السبب .

-٣٠- في بحث ميداني في بلد ما وجد أن 2% من الأشخاص يفضلون شراء تلفزيون بلون أبيض . ما هو احتمال أن أكثر من نصف التلفزيونات التي سوف تباع من بين 40 تلفزيون لونها أبيض ؟

-٣١- يحتوى امتحان على 18 سؤال من نوع صح وخطأ، كل سؤال له أربع أجوبة محتملة منهم فقط واحد هو الإجابة الصحيح . ما هو احتمال أن شخص يمكنه الإجابة على 5 إجابات صحيحة وذلك بطريقة التخمين ؟

-٣٢- احتمال أن يشفى مريض من عملية في القلب هو 0.9 ، ما هو احتمال أن يشفى 5 مرضى من بين 10 مرضى سوف يجرى لهم العملية ؟

-٣٣- يحتوى امتحان على 20 سؤال من نوع صح وخطأ، كل سؤال له أربع أجوبة محتملة منهم فقط واحد هو الإجابة الصحيحة . فإذا كان احتمال أن يحصل طالب على 100% في الاختبار هو $P(100\%) = (\frac{1}{4})^{20}$. المطلوب إيجاد احتمال حصوله على 80% إجابة صحيحة .

-٣٤- إذا كان 0.77 من المستهلكين يستخدمون مسحوق ما . ما هو الاحتمال في عينة من 10 مستهلكين (ا) بالضبط أربعة يستخدمون المسحوق (ب) على الأقل أربعة يستخدمون المسحوق (جـ) ليس أكثر من واحد يستخدم المسحوق (د) 8 أو أكثر يستخدمون المسحوق .

-٣٥- أثبتت الإحصائيات في إحدى المستشفيات أن 40% من المرضى الذين يتلقون العلاج بها يفشلون في دفع فاتورة الحساب . بفرض أن 4 مرضى دخلوا المستشفى لتلقى العلاج، أوجد

الاحتمالات التالية (ا) كل المرضى لن يدفعون الفاتورة (ب) واحد على الأقل سوف يدفع الفاتورة.

-٣٦- إذا كان 90% من المتقدمين لوظيفة دبلوماسي يفشلون في المقابلة الأولى، فإذا اختير 12 شخصا عشوائيا من المتقدمين، أوجد احتمال انه (ا) على الأقل 5 يفشلون (ب) من10 إلى 12 يفشلون.

-٣٧- إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الطلبة الذين يحصلون على وظائف بعد سنة واحدة من التخرج يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمتين p=0.98 , n=250 (ا) أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X (ب) أوجد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي للمتغير X .

-٣٨- أثبتت التجارب حدوث تلف في التمثيل الغذائي لطفل واحد من بين 100 يولدون. بفرض أنه تم ولادة أربعة أطفال في يوم معين، ما هو احتمال (ا) ليس اكثر من طفل واحد لديه تلف (ب) عدم حدوث تلف.

-٣٩- بفرض أن 20% من سائقي سيارات الأجرة الذين يصلون إلى موقف السيارات يعطون إشارات حمراء في كل الاتجاهات (يتبعون الأنظمة) فإذا اختير 20 سائقا عشوائيا من الذين تم وصولهم إلى موقف السيارات. أوجد احتمال (ا) على الأكثر6 يتبعوا النظام (ب) بالضبط 10يتبعون النظام (جـ) على الأقل 12 يتبعون النظام.

-٤٠- استخدم جدول ذي الحدين في جدول ذي الحدين في ملحق (١) في إيجاد الاحتمالات

$$P(x = 4), n = 15, p = 0.4$$
$$P(x \le 4), n = 20, p = 0.1$$
$$P(5 \le X \le 11), n = 20, p = 0.2$$
$$P(x = 6), n = 15, p = 0.5$$
$$P(x \ge 8), n = 15, p = 0.5$$

-٤١- في إحدى الدراسات لنزلاء مؤسسات الأحداث وجد أن 90% من النزلاء قد يعودون مرة ثانية إلى المؤسسة بعد انتهاء مدهم. فإذا أخذت عينة عشوائية مكونة 5 من نزلاء من إحدى المؤسسات ، أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد النزلاء الذين يعودون مرة أخرى إلى المؤسسة. (ب) عدد النزلاء المتوقع عودهم (ب) الانحراف المعياري لعدد النزلاء المتوقع عودهم مرة أخرى إلى المؤسسة.

-٤٢- إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد المرضى الذين يلغون حجزهم عند طبيب الأسنان، فإذا كان معالم توزيع ذي الحدين للمتغير X هو p=0.05 , n=15 ، أوجد احتمال (ا) ثلاثة أشخاص سوف يلغون الحجز (ب) على الأكثر أربعة سوف يلغون الحجز.

-٤٣- في تجربة زراعية كانت نسبة الإصابة بفطر ما 0.2 في نهاية التجربة. فإذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد النباتات المصابة بالفطر في عينة من 10 نباتات، أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد النباتات المصابة (ب) أوجد $P(X=0)$.

-٤٤- يولد30% من مواليد سلالة معينة من الأرانب بشعر طويل أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد الحيوانات التي تولد بشعر طويل في بطن من أربعة أرانب (ب) أوجد $P(X=1)$ (جـ) أوجد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي للمتغير X .

-٤٥- ينبت75% من شاتلات الأشجار المزروعة بشركة معينة لتشجير الطرق أوجد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي للمتغير X والذي يمثل عدد الأشجار التي تنبت من مجموعة مكونة من10 أشجار مزروعة.

-٤٦- أعطيت ستة فئران جرعة معينة من سم ولوحظ عدد الفئران التي تموت خلال 72ساعة. فإذا كان احتمال موت كل فأر هو 0.2 .أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الفئران التي تموت خلال 72 ساعة وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .

-٤٧- إذا كان نسبة الأميين في إحدى القرى هي 33%، فإذا أخذت عينة عشوائية مكونة من5 أشخاص من أفراد هذه القرية. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأميين في العينة وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .

-٤٨- درب حيوان على لمس واحدة من رافعتين إذا أمر بذلك. بفرض أن احتمال أن يلمس الرافعة الصحيحة إذا أمر بذلك هو 0.8 أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات لمس الرافعة الصحيحة في محاولات عددها 10 وأوجد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي الذي حصلت عليه.

-٤٩- وجد أن فصيلة دم 40% من سكان مدينة ما تكون من نوع معين. ما احتمال أن يكون ثلاثة فقط من مجموعة مكونة من ثمانية أشخاص تم اختيارهم عشوائيا من سكان هذه المدينة لهم فصيلة الدم هذه؟

-٥٠- بالرجوع إلى التاريخ العائلي لزوجين وجد أن احتمال أن يكون أيا من أطفالهم مصابا بعيب خلقي معين 0.05 فإذا كان للزوجين أربعة أطفال أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الأطفال المصابين بتخلف عقلي وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X.

-٥١- إذا كان احتمال ولادة طفل أعسر في بلد ما، هو 0.01 أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الأطفال الذين لديهم هذه الصفة وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X.

-٥٢- إذا كان احتمال التحاق إحدى الخريجين بالعمل فور تخرجه هو0.75 . فإذا اختيرت عينة عشوائية من 30 فرد من حديثي التخرج. أوجد (ا) احتمال عدم التحاق أي شخص بالعمل فور

تخرجه (ب) احتمال التحاق أثنين على الأقل بالعمل فور تخرجهم (جـ) العدد المتوقع للأشخاص الذين يلتحقون بالعمل فور تخرجهم.

-٥٣- في عملية تصنيع كرات التحميل وجد أن احتمال وجود كرة تالفة 0.1 ما هو احتمال الحصول على 10 كرات تحميل تالفة من عينة عشوائية بها 1000 وحدة؟

-٥٤- إذا كان طرد بريدي يمكن أن يفقد أو يتلف أو يصل إلى صاحبه. فإذا كان احتمال أن يتلف 0.2 واحتمال أن يفقد هو 0.4 واحتمال أن يصل إلى صاحبه هو 0.4 . فإذا أرسل 15 طردا إلى بلد ما هو احتمال أن يصل 13 منهم بأمان إلى أصحابهم ويفقد 1 ويتلف 1.

-٥٥- تبعا لنظرية الوراثة فإن نوع معين من الحيوانات تلد حيوانات لونها أحمر وأبيض و أسود بنسبة 4 : 4 : 8 أوجد احتمال أنه من بين 8 مواليد سوف يكون منهم 5 لونهم أحمر و 2 لونهم أسود وواحد لونه أبيض.

-٥٦- صندوق به 15 ثمرة فاكهة، منها 4 تالفة، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الثمار التالفة ثم مثل بيانيا الدالة الإحتمالية و n=3 .

-٥٧- يوجد في مكتبة 20 نسخة من كتاب في مقدمة الإحصاء، منهم 12 طبعة أولى و 8 طبعة ثانية. فإذا اختيرت عينة عشوائية من الحجم n=5 ، وإذا كانت X تمثل عدد الكتب المختارة من الطبعة الثانية، أوجد $P(X=2)$.

-٥٨- صندوق يحتوى على رقائق بالغة الصغر منها 10 جيدة و3 تالفة. فإذا تقرر اختيار عينة عشوائية من ثلاثة رقائق . وإذا كانت X تمثل عدد الوحدات التالفة في العينة المختارة، أوجد $P(X \leq 3)$.

-٥٩- قام باحث في علم الجيولوجيا بتجميع 10 وحدات من صخور البازلت و 10 وحدات من الجرانيت، فإذا كان للباحث معمل وطلب من مساعده أن يختار عينة عشوائية من 15 وحدة للتحليل أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد وحدات البازلت في العينة المختارة (ب) احتمال أن الوحدات المختارة من نفس النوع.

-٦٠- إذا كان عدد الجزيئات المشعة من مصدر إشعاعي يتبع توزيع بواسون وإذا كان $P(X=0)=0.3$ فما احتمال إشعاع جزيئين أو اكثر ؟

-٦١- وعاء به 10000 جزئ فإذا كان احتمال هروب جزئ من الوعاء هو 0.0004 فما احتمال هروب أكثر من 5 جزيئات.

-٦٢- تمر في المتوسط 20 سيارة في الدقيقة من أمام كشك رسوم المرور خلال ساعة الذروة. أوجد احتمال مرور 7 سيارات من أمام الكشك خلال دقيقة مختارة عشوائيا.

-٦٣- إذا كانت نسبة المعيب في مصنع مصابيح كهربائية هو 0.1 ، فإذا اخترنا عينة عشوائية من 200 مصباح، أوجد احتمال أن يوجد في هذه العينة مصباحاً واحداً على الأكثر معيب وذلك باستخدام توزيع بواسون كتقريب لذي الحدين.

-٦٤- إذا كان متوسط وقوع الزلازل في بلد ما هو3 في السنة ، أوجد احتمال أن يقع زلزالاً واحداً على الأقل في هذه السنة.

-٦٥- إذا كانت متوسط عدد الحوادث الشهرية في إحدى الطرق هو 0.2 . اختير شهرا عشوائيا، أوجد احتمال وقوع حادثتين على الأقل.

-٦٦- تقوم إحدى المصانع بإنتاج منتج معين معبا في أكياس عبوة الكيس الواحد كيلوجرام. فإذا كان احتمال وجود كيس واحد غير مطابق للموصفات هو 0.05 ، فإذا اختير عينة عشوائية من 20 كيس وبافتراض أن X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الأكياس الغير مطابقة في العينة. أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد الأكياس الغير مطابقة للمواصفات في العينة (ب) احتمال وجود كيسين على الأقل غير مطابقين للمواصفات (جـ) احسب العدد المتوقع للأكياس الغير مطابقة للمواصفات.

-٦٧- في المتوسط يتوقف 7 عملاء للتزود بالوقود عند طلمبة بنزين في الساعة. ما هو احتمال (ا) توقف 7 عملاء في الساعة (ب) أربعة عملاء أو أقل في ساعة ما.

-٦٨- تشير الدراسات على أن 0.002 من القوى العاملة القومية في بلد ما يصابون بمرض خطير خلال عام. فإذا اختير n=30 شخص عشوائيا. أوجد (ا) القيمة المتوقعة لعدد الذين يمرضون في العام (ب) احتمال أن عاملين يمرضون خلال عام .استخدم توزيع بواسون كتقريب ذي الحدين.

-٦٩- بفرض أن متغيرا عشوائيا يمثل عدد الجرائم التي تحدث في بلد ما في الفترة ما بين الساعة الواحدة صباحا حتى الساعة الثانية يتبع توزيع بواسون حيث $\mu = 0.2$ (ا) أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X (ب) أوجد $P(X = 0)$.

-٧٠- إذا كان عدد التذاكر التي تصرف في موقف للسيارات في الساعة يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\mu = 4$ (ا) ما هو الاحتمال أنه بالضبط تصرف 3 تذاكر خلال ساعة معينة (ب) ما هو الاحتمال أنه على الأقل تصرف 4 خلال ساعة معينة (جـ) ما هو عدد التذاكر المتوقع صرفها خلال 45 دقيقة.

-٧١- تصل طائرة شراعية إلى المطار بمتوسط $\mu = 8$ في الساعة، ما هو الاحتمال (ا) خمسة بالضبط سوف يصلون خلال ساعة (ب) على الأقل خمسة يصلون خلال ساعة (جـ) على الأقل 10 يصلون خلال ساعة (د) ما هي القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الطائرات التي تصل إلى المطار خلال 90 دقيقة(هـ) ما هو الاحتمال أنه على الأقل تصل طائرة خلال 2.5 ساعة ؟

-٧٢- في بحث وجد أن شخص واحد من 1000 شخص يحمل جين تالف يؤدى إلى الإصابة بسرطان القولون. اختيرت عينة عشوائية من 15 شخص أوجد (ا) التوزيع التقريبي لعدد الأشخاص الذين يحملون الجين التالف (ب) استخدم هذا التوزيع فى حساب الاحتمال التقريبي أن 7 يحملون الجين التالف .

-٧٣- قامت شركة لبيع السيارات بإرسال طلب لكل مشتر منها سيارة معينة وذلك لفحصها من العيوب. بفرض أن 0.001 يمثل احتمال وجود عيب في السيارة. إذا اختيرت عينة عشوائية 10000 أوجد (ا) القيمة المتوقعة لعدد السيارات في العينة التي بها هذا العيب (ب) ما هو الاحتمال التقريبي أنه على الأقل 10سيارات بها هذا العيب (جـ) ما هو الاحتمال التقريبي لعدم وجود سيارات في العينة بها عيوب.

-٧٤- يستقبل سنترال في المتوسط ثلاث مكالمات في الدقيقة وذلك من أماكن بعيدة والمطلوب (ا) احتمال عدم وصول أي مكالمات في دقيقة واحدة (ب) احتمال وصول مكالمتين في دقيقتين (جـ) احتمال وصول أربع مكالمات في ثلاث دقائق.

-٧٥- إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يصلون إلى نادى رياضي بمتوسط $\mu = 2$ في الدقيقة المطلوب (ا) احتمال وصول شخص واحد في دقيقة واحدة (ب) احتمال وصول 5 أشخاص في ثلاثة دقائق (جـ) احتمال عدم وصول أي شخص في دقيقة واحدة.

-٧٦- يستقبل سنترال في المتوسط ثلاثة مكالمات في الدقيقة وذلك من أماكن بعيدة والمطلوب (ا) احتمال عدم وصول أي مكالمات في دقيقة واحدة (ب) احتمال وصول مكالمتين في دقيقتين (جـ) احتمال وصول 4 مكالمات في ثلاث دقائق.

-٧٧- تقوم ماكينة بتصنيع الأقمشة، فإذا كان في المتوسط يوجد عيب لكل 10 ياردة من القماش أوجد (ا) احتمال عدم وجود عيوب في 2 ياردة من القماش (ب) احتمال وجود عيبين في ياردة من القماش.

-٧٨- إذا كان عدد المكالمات التي يتلقاها مركز للشرطة بين 8:30 و8:00 مساء فى يوم الجمعة يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\mu = 2$ أوجد (ا) احتمال عدم وصول مكالمتين خلال هذه الفترة (ب) احتمال وصول مكالمتين خلال هذه الفترة (جـ) احتمال وصول ثلاث مكالمات أو أقل خلال هذه الفترة.

-٧٩- قررت عائلة تنظيم الإنجاب إذا رزقها الله بخمسة ذكور. فإذا كان احتمال ولادة ذكر في هذه العائلة هو 0.4. أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الحمل (الوضع).

-٨٠- قررت أسرة أن تنظم النسل إذا رزقها الله بثلاثة أطفال من نفس الجنس. بفرض أن احتمال ولادة طفل ذكر تساوى احتمال ولادة طفل أنثى تساوى 0.5 . أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الحمل.

-٨١- يلعب فريق A مع الفريق B سلسلة من المباريات. فإذا كان احتمال أن A يكسب في المباراة الواحدة التي يلعبها 0.6 وإذا كانت المباريات مستقلة، أوجد احتمال أن الفريق A قد يكون كسب أربعة مباريات في المحاولة السادسة.

-٨٢- أوجد احتمال أن شخص يلقى عملة سوف يحصل على صورة في المحاولة السابعة.

-٨٣- احتمال أن طالب يجتاز امتحان للحصول على رخصة قيادة طائرة هو 0.7 أوجد احتمال أن الشخص ينجح في الامتحان (ا) في المحاولة الثالثة (ب) قبل المحاولة الخامسة.

-٨٤- إذا كانت الدرجات إلى حصل عليها 100 طالب تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 60 درجة وتباين 0.5. اختير طالبا بطريقة عشوائية (ا) ما هو احتمال أن تزيد درجته عن 72 ؟ (ب) ما هو عدد الطلاب الذين تقل درجاتهم عن 56 ؟

-٨٥- إذا حصل 10% من الطلاب على جوائز بسبب ارتفاع درجاتهم فما هي أدنى درجة يجب أن يحصل عليها الطالب حتى يحصل على جائزة ؟

-٨٦- إذا كان التوزيع التكراري لضغط الدم طبيعيا وكان متوسط الضغط الطبيعي هو 120 سم من الزئبق والانحراف المعياري هو 15 سم من الزئبق .

(أ) فما هو نسبة الأشخاص المحتمل أن يكون ضغطهم 150 فأكثر ؟

(ب) إذا علمت أن احتمال الحصول على شخص ضغط دمه أقل من قيمة معينة هي x_1 مثلا هو 0.8942 ، فما هي قيمة x_1؟

-٨٧- إذا كان الزمن اللازم لهضم وحدة واحدة من طعام معين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 25 دقيقة وانحراف معياري قدره 3 دقائق . ما هو احتمال أن تهضم وحدة طعام في أقل من 30 دقيقة ؟

-٨٨- أوزان الدجاج في مزرعة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 6 رطل وانحراف معياري 1.5 أوجد (أ) احتمال أن يكون وزن الدجاجة اختيرت عشوائيا اكبر من سبعة أرطال .

(ب) نسبة الدجاج الذي وزنه اقل من أربعة أرطال .

-٨٩- تنتج ماكينة للمشروبات الباردة في المتوسط7 أوقيات من العصير لكل كوب. بفرض أن كمية الشراب يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 0.5 أوقية . المطلوب (أ) نسبة الأكواب التي تحتوي على الأقل 7.8 أوقية . (ب) ما هو احتمال أن كوب يحتوي من بين6.7 إلى 7.9 أوقية .

-٩٠- يقطع شخص المسافة من منزله إلى عمله يوميا في زمن قدره 24 دقيقة في المتوسط بانحراف معياري 3.8 دقيقة . بفرض أن الزمن الذي يستغرقه يوميا يتبع التوزيع الطبيعي . أوجد احتمال أن الزمن الذي يستغرقه على الأقل نصف ساعة .

-٩١- إذا كانت أطوال 1000 طالبا تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 68.5 بوصة وانحراف معياري 2.7 بوصة. كم عدد الطلبة المتوقع أن تكون أطوالهم : (أ) اقل من 63 بوصة . (ب) بين 67.5 الى 71 بوصة . (جـ) تساوي 69 بوصة . (د) اكبر من 74 بوصة .

-٩٢- تدفع شركة أجور العاملين فيها بمتوسط 100 جنيه لكل ساعة بانحراف معياري 5 جنيه. إذا كانت الأجور تقريبا تتبع التوزيع الطبيعي. ما هى النسبة المئوية من للعاملين الذين أجورهم تتراوح بين 80 إلى 90 في الساعة ؟

-٩٣- إذا كان معدل الذكاء I.Q لمجموعة من الطلبة الراغبين في الالتحاق في جامعة ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu=115$ والانحراف معياري $\sigma=12$.أوجد احتمال أن يكون معدل الذكاء أكبر من 120.

-٩٤- إذا كان متوسط العمر لمولد كهربائي صغير هو 10 سنوات بانحراف معياري 2 سنة. أوجد احتمال أن يقل عمر المولد عن 8 سنوات .

-٩٥- إذا كانت درجة الحرارة في مدينة ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 20 درجة وانحراف معياري 3 درجات. أوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة في أحد الأيام اقل من 25 درجة .

-٩٦- إذا كان قطر السلك الكهربي من إنتاج شركة ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 8 ملليمتر وتباين 0.0004 ملليمتر. اشتري شخص سلك فما هو احتمال أن قطره لا يتعدي 8.0 ملليمتر .

-٩٧- إذا كان متوسط أطوال مجموعة من الجنود في معركة هو 70 بوصة. وإذا كان 10% من الجنود أطول من 72بوصة. بفرض أن أطوال الجنود في هذه المعركة يتبع التوزيع الطبيعي ما هو الانحراف المعياري ؟

-٩٨- إذا كان أطوال مجموعة من الجنود يتبع التوزيع الطبيعي. إذا كان % 13.75 منهم أطول من 72.2بوصة و % 8.08 أقصر من 67.2 بوصة. ما هو المتوسط والانحراف المعياري لأطوال الجنود ؟

-٩٩- إذا كان أوزان الذكور البالغين يتبع التوزيع الطبيعي وأن % 6.6 تحت 130 رطل وأن % 77.45 بين 130 إلى 180 رطل. أوجد معالم التوزيع .

-١٠٠- إذا كان دخول الأسر في مدينة ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu=15000\$$ وانحراف معياري $\sigma=3000\$$. ما هو احتمال أن يكون دخل أسرة اختيرت عشوائيا بين :

(أ) من 16000$ إلى 18000$ (ب) اقل من 12000$ (جـ) اعلي من 15000$.

-١٠١- تتبع درجات اختبارات الذكاء لمطوعي الجيش في سنة ما التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu=110$ وانحراف معياري $\sigma=10$. ويريد الجيش أن يعطي تدريبا متقدما لأعلى 10% من درجات اختبارات الذكاء. ما هي أقل درجة في اختبارات الذكاء التي تقبل لحضور التدريب المتقدم ؟

-١٠٢- إذا ألقيت زهرة نرد 400 مرة. استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين لإيجاد احتمال ظهور الرقم واحد (أ) 185 إلى210 مرة (ب) بالضبط 205 مرة.

(جـ) أقل من 176 مرة .

-١٠٣- في مدينة ما وجد أن 10% من المدخنين مصابون بالسرطان. أخذت عينة من هذه المدينة من 300 مدخن وفحصوا للتحقق من إصابتهم بالسرطان المطلوب:

(أ) احتمال أن تحتوى العينة على 25 شخص مصاب بالسرطان .

(ب) ستون شخصا على الأقل مصابا بالسرطان .

(باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين) .

-١٠٤- ألقيت قطعة نقود 20 مرة. احسب احتمال الحصول على 8 صور باستخدام:

(ا) توزيع ذي الحدين (ب) التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين .

-١٠٥- إذا كان 70 % من الطلاب الملتحقين بالكليات يحصلون على مؤهلاتهم. أوجد احتمال أنه من بين 20 طالبا مختارين عشوائيا من الملتحقين حديثا سوف يحصل على أكثر من 10 طلاب منهم على المؤهل (باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين) .

-١٠٦- بفرض أن 45% من المكالمات التي يستقبلها عامل تليفون في شركة ما من مسافات بعيدة. ما هو احتمال الحصول على 11 مكالمة من مسافة بعيدة من بين 20 مكالمة يستقبلهم ، استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين.

-١٠٧- تستهلك شركة ما كمية من الثلج يوميا في المتوسط 600 رطل بانحراف معياري 25 رطل. فإذا كانت الكمية المستهلكة يوميا تتبع التوزيع الطبيعي. أوجد (ا) احتمال أن تستهلك الشركة اكثر من 700 رطل يوميا (ب) احتمال أن تستهلك من 500 إلى 800 يوميا.

-١٠٨- إذا كانت $p=0.3$ استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين لتقدير احتمال الحصول على 140 وحدة تالفة من بين 500 وحدة تالفة منتجة من إحدى المصانع.

-١٠٩- إذا كان معروف أن نقطة الذوبان للذهب هي $1.06c^{\circ}$(في المتوسط) بانحراف معيلوي $0.3\ c^{\circ}$ أوجد احتمال $P(X>1.77)$.

-١١٠- إذا كان الطلب على اللحوم في مخزن لبيع اللحوم، خلال أسبوع ، تقريبا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 5000 رطل وانحراف معياري 300 رطل أوجدي $P(X>5300)$ في اسبوع.

-١١١- إذا كان احتمال أن تنجب سيدة مولود ذكر 0.5 ، فإذا كان هناك 100 سيدة في هـــذه القرية حوامل وبافتراض أن X ترمز لعدد المواليد الذكور أوجد (ا) التوزيـــع الاحتمـــالي للمتغـــير العشوائي X (ب) احتمال أن تنجب على الأقل 3 مواليد ذكور (جـــ) احتمال عدم إنجاب طفـــل ذكر (استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين) ،

-١١٢- صممت سيارة جديدة تحت فرض أن 70% من المبيعات سوف تكون للســيدات ، إذا اختيرت عينة عشوائية من 500 مشترى ، مـــا هـــو احتمـــال أنـــه علـــى الأقـــل 270 منـــهم سيدات ، (استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين) ،

-١١٣- إذا كان احتمال بقاء مريض لأكثر من ثمانية وأربعين ساعة فى قســـم العنايـــة المركـــزة بمستشفى هو 0.055 ، المطلوب إيجاد احتمال أن يمكث عشرة مرضى أكثر من ثمانية وأربعين ساعة من بين خمسين مريضا الحقوا بالقسم في يوم محدد (استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيـــع ذي الحدين) ،